Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

A questão dos fundamentos entre matemática e filosofia: visão geral introdutória[1]

Gabriele Lolli
Dipartimento di Matematica - Universitµa di Torino
gabriele@dm.unito.it

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão filosófica centrada no exame dos fundamentos entre matemática e filosofia, a fim de explicitar um panorama introdutório sobre as escolas filosóficas implicadas nas explicações concernentes às formas de produzir conhecimento matemático e de organizar suas formas de expressão no contexto da formação filosófica do professor de matemática. Trata-se de um ensaio teórico sobre o tema, que aborda inicialmente a filosofia e seus fundamentos, seguindo com os períodos que estruturaram as formas correspondentes ao rigor das representações do pensamento matemático desde os primórdios até o século XIX, a crise dos fundamentos, as escolas fundacionais (logicismo, formalismo e intuicionismo) e as tendências atuais.

Palavras-Chave: Filosofia. Matemática. Fundamentos. Pensamento matemático.

The question of the foundations between mathematics and philosophy: an introductory overview

Abstract

This article presents a philosophical discussion centered in the examination of the foundations between mathematics and philosophy, in order to explain an introductory overview of the philosophical schools involved in the explanations concerning the ways of producing mathematical knowledge and of organizing its forms of expression in the context of the philosophical formation of the mathematics teacher. This is a theoretical essay on the subject, which initially addresses philosophy and its foundations, following the periods that structured the forms corresponding to the rigor of representations of mathematical thought from the beginnings to the 19th century, the crisis of foundations, the foundational schools (logicism, formalism and intuitionism) and current trends.

Keywords: Philosophy. Mathematics. Fundamentals. Mathematical thinking.

La cuestión de los fundamentos entre las matemáticas y la filosofía: una visión general introductoria

Resumen

Este artículo presenta una discusión filosófica centrada en el examen de los fundamentos entre las matemáticas y la filosofía, para explicar un panorama introductorio de las escuelas filosóficas involucradas en las explicaciones sobre las formas de producir conocimiento matemático e de organizar sus formas de expresión en el contexto de la formación filosófica del profesor de matemáticas. Se trata de un ensayo teórico sobre el tema, que inicialmente aborda la filosofía y sus fundamentos, siguiendo los períodos que estructuraron las formas correspondientes al rigor de las representaciones del pensamiento matemático desde los inicios hasta el siglo XIX, la crisis de las fundaciones, las escuelas fundacionales (logicismo, formalismo e intuicionismo) y las tendencias actuales.

Palabras clave: Filosofía. Matemáticas. Fundamentos. Pensamiento matemático.

[1] Este artigo foi traduzido por Iran Abreu Mendes, com fins didáticos para uso na formação de professores de Matemática.

Filosofia e fundamentos

Ao apresentar questões relativas ao exame dos fundamentos, é necessário distinguir o ponto de vista dos filósofos e o ponto de vista dos matemáticos uma vez que as duas perspectivas nem sempre coincidem, até porque têm sua própria tradição na história da filosofia e da matemática.

Por sua natureza, a filosofia está interessada em dar uma justificação e explicação da matemática como uma manifestação da realidade, uma das muitas, cuja consideração se enquadra nas classificações elaboradas pela própria filosofia. A matemática é considerada, sobretudo, uma atividade cognitiva que não se enquadra, por exemplo, no campo da ética. A matemática é examinada tanto na ontologia quanto na teoria do conhecimento[2].

Na problemática ontológica, nos perguntaremos, por exemplo, quais são as entidades que a matemática investiga e de que natureza. Na teoria do conhecimento, pergunta-se, em vez disso, que tipo de certeza as verdades matemáticas têm (isto é, as afirmações que compõem as teorias matemáticas), e se são verdades, e que tipo de garantia elas têm.

Os dois tipos de questões, ontológicas e epistemológicas, estão ligados e influenciam mutuamente as respostas de várias maneiras. O complexo dessas reflexões é o que constitui a disciplina filosófica conhecida como filosofia da matemática[3].

Na história da filosofia em geral, a matemática foi assumida como modelo de conhecimento certo e garantido, e esse papel marcou sua importância filosófica. A certeza das verdades matemáticas era inatacável, e sua garantia absoluta. Portanto, pode-se dizer em primeiro lugar que havia verdades e certezas; primeiro as matemáticas, depois eventualmente outras, por exemplo as metafísicas (a serem obtidas possivelmente com o rigor do estilo matemático). A filosofia tinha apenas que enquadrar esse fato em uma teoria geral do ser ou das habilidades cognitivas humanas, que explicam como as verdades podem existir e como elas podem ser conhecidas (por exemplo, teorias associacionistas de ideias). Isso em geral, com uma soberana indiferença ao que aconteceu na história da matemática, assumida como imutável e, portanto, de fato em referência a uma matemática antiga, precisamente à de Euclides. Novidades na matemática, se reconhecidas, por exemplo, quando René Descartes introduziu a geometria analítica, foram declaradas de autoridade da mesma natureza, sem investigação

[2] Tradicionalmente, distinguiam-se as seções de Metafísica, Lógica, Ética, Estética; mais recentemente, a Epistemologia, ou Teoria do Conhecimento, também se tornou um ramo autônomo básico.

[3] Uma boa introdução de certo modo recente, dirigida principalmente a filósofos, é a de S. Shapiro, Thinking about mathematics, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000. Para uma exposição mais dirigida a matemáticos, ver G. Lolli, Philosophy of mathematics, Il Mulino , Bolonha, 2002.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

particular (apesar do fato de que grande parte da nova matemática não tinha uma abordagem axiomática euclidiana).

Só recentemente (a partir do século XIX), a filosofia também, ou melhor, se incluiu a tarefa de intervir na matemática, fornecendo-lhe as justificativas, ou mesmo as correções, necessárias para restabelecer a confiança no sentido e na validade da produção matemática (ou, ao contrário, sancionar sua negação). A viragem deu-se, sobretudo, como consequência e sob a influência, desta vez, do que se passava no campo matemático, que já não podia ser ignorado.

Ao longo da história, os matemáticos muitas vezes se depararam com momentos em que tiveram dúvidas e incertezas sobre os métodos que usaram ou as pesquisas que realizaram. Isso pode parecer incrível para quem não está familiarizado com a história da matemática, mas episódios desse tipo têm sido frequentes e importantes. São os chamados períodos de crise e (ou seguidos de) períodos de rigor. A matemática é um laboratório de pensamento - esta poderia ser a sua definição - e às vezes nesse laboratório os experimentos dão resultados insatisfatórios, inesperados ou incontroláveis. Porém, sempre requerem muita manutenção.

> [A crítica dos princípios] é uma parte essencial da elaboração de conceitos que sempre preparam ou acompanham o progresso da ciência e sua aplicação mais ampla,

confirmou Federigo Enriques[4], que, no entanto, estava interessado em diminuir a importância da crítica dos primórdios de seu tempo e, portanto, mostrou que essa crítica ocorre em todos os momentos do desenvolvimento da matemática. Por outro lado, há períodos de crise mais críticos do que outros.

A descoberta dos irracionais na Grécia, o uso dos infinitesimais no século XVII, os cálculos com séries infinitas no século XVIII, os métodos sintéticos da geometria projetiva no início do século XIX, o estudo dos conjuntos infinitos no final do século XIX são alguns exemplos de tais situações. De qualquer forma, os matemáticos se viram diante (ou incapazes de lidar) com novos problemas com ferramentas que se revelaram inadequadas ou não suficientemente precisas e determinadas por regras claras e, sobretudo, compartilhadas. Acontece, então, que os matemáticos brigam entre si, com disputas acirradas.

Todos esses períodos de crise foram geralmente superados com o nascimento de uma nova matemática, ou com o abandono de uma parte dela (às vezes temporária, talvez seguida depois de séculos por uma recuperação).

[4] Frederigo Enriques, O significado da crítica dos princípios no desenvolvimento da matemática, 1912, reimpresso em F. Enriques, Para a ciência. Bibliópolis, Nápoles, 2000, pp. 155-72.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ produziu o que se diz ser uma grave crise no pitagorismo. Do lado matemático, a opinião generalizada é que ela favoreceu um desenvolvimento preferencial da geometria e a restrição das relações racionais com a teoria das proporções. Mas na realidade, também semeou a semente de procedimentos de aproximação altamente frutíferos como os de Arquimedes, um método completo equivalente ao processo limite. O método foi julgado por seus contemporâneos e pelo menos publicamente por ele mesmo como uma técnica heurística ao invés de uma forma demonstrativa rigorosa (no que diz respeito aos cânones fornecidos pelo modelo geométrico), um caso instrutivo de contenção exercida por preconceitos conservadores[5].

Os infinitesimais evanescentes que estiveram na origem do cálculo infinitesimal não superaram as objeções daqueles que, como o bispo Berkeley, viram neles os fantasmas de quantidades que passaram. Contudo, o cálculo infinitesimal continuou condicionando em sua versão algébrica e em suas regras de cálculo, até que os infinitesimais foram eliminados da definição de limite de Cauchy e também como terminologia da definição de Weierstrass (para então ressuscitar nos anos sessenta do século XX com a análise não padronizada, produto da lógica matemática).

Os paradoxos da série infinita do século XVIII foram solicitados e resolvidos pelos teoremas da convergência, mas até o século XIX. Os métodos sintéticos da geometria projetiva, com seus pontos no infinito e cônicas degeneradas, após muitos contrastes, desencadearam uma geometria de coordenadas que representou um avanço substancial na geometria analítica e permitiu uma distinção-unificação das geometrias afins, projetivas e éticas.

No que diz respeito aos conjuntos infinitos, basta lembrar que no início da história podemos colocar simbolicamente a obra de Bernhard Bolzano de 1851 intitulada *Os paradoxos do infinito*, e que Cantor exclamou "Eu vejo, mas não acredito", diante de suas primeiras descobertas inesperadas. A desorientação é evidente. Ainda mais do que com a série, não se sabia quais leis lógicas (e não matemáticas[6]) eram admissíveis no novo domínio.

---

[5] Outras vezes, na história, preconceitos semelhantes atuaram na direção oposta, consolidando uma oposição não resolvida entre algoritmos e provas. Ver P. Zellini, Gnomon, Adelphi, Milão, 1999.

[6] A tentativa de estender as leis válidas para os finitos a conjuntos infinitos tem, entre outras coisas, permitido ou forçado isolar como autônoma também uma teoria de conjuntos finitos completamente abstratos, algo que não foi feito anteriormente.

O período do rigor do século XIX

No final do século XIX, somava-se aos problemas do infinito que está na origem da questão dos fundamentos na forma que dominou o panorama na primeira metade do século XX, com desdobramentos quase até os nossos tempos. É o que os próprios matemáticos chamaram de problema da realidade matemática, com uma terminologia que obviamente exigia a intervenção da filosofia.

Por muito tempo foi uma ideia universalmente popular, embora com nuances consideráveis, que a matemática estudasse características do mundo real. Lembre-se de Galileu, ao afirmar que a natureza é um livro, e que o livro está escrito em uma linguagem que é a matemática. A geometria estudava o espaço, os números mediam os fenômenos quantitativos do mundo.

A Matemática Superior é a arte de raciocinar sobre relações numéricas entre fenômenos naturais[7], é apenas uma das muitas citações possíveis.

Geometrias não-euclidianas e teorias algébricas com leis parcialmente diferentes das tradicionais numéricas, desenvolvidas no século XIX, eram teorias que não tinham confirmação imediata no mundo; eles eram, no entanto, ou pareciam ser consistentes, pelo menos em relação aos tradicionais. Os matemáticos só podiam concordar que o que eles estudavam e trabalhavam eram teorias axiomaticamente estabelecidas, ou seja, logicamente desenvolvidas - porque e assim continuaram a fazer no modelo de Euclides – mas que realidade eles descreveram, se eles descreveram uma, foi difícil dizer, literalmente, difícil encontrar as palavras para expressá-la. A descrição de modelos teóricos, por exemplo, como sistemas não especificados de coisas satisfazendo axiomas, exigia uma linguagem (“coisas", “entidades") que até então não era matemática, mas que estava se tornando matemática na teoria dos conjuntos, de modo que na explicação das teorias matemáticas não havia como fugir dessa autorreferência.

A outra pedra angular da matemática tradicional, ao lado da geometria, era o estudo da aritmética, mas também tinha seus problemas. Quando os infinitesimais foram definitivamente eliminados com o conceito de limite, foi necessário definir os números reais, gerenciar a continuidade e sem o suporte intuitivo da linha geométrica - com a intuição geométrica desqualificada pelos desenvolvimentos em andamento. Completava-se assim uma progressiva extensão dos naturais aos inteiros, aos racionais e aos reais, o que deslocou todo o peso dos sistemas numéricos e, portanto, da Análise sobre os números naturais (aritmetização da

[7] J. W. Mellow, 1902.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

Análise). Quais eram esses números, aos quais muitos se agarravam (Gauss entre eles)? Considere que até então mesmo o princípio de indução, utilizado esporadicamente, não tinha uma formulação clara e explícita. As alternativas disponíveis eram todas precárias ou não inteiramente satisfatórias: além de considerá-las um dom de Deus, ou uma intuição inata nossa, permanecia a definição axiomática de Peano (que reconduzia à abordagem axiomática toda a parte numérica da matemática) e a teoria dos conjuntos de Dedekind.

Por último, mas não menos importante, acrescentam-se as patologias da Análise, que impossibilitaram a identificação de funções com fórmulas, como se pensava possível na época, e com fenômenos naturais.

Cortou as raízes com o mundo; restava apenas reconhecer com admiração e espanto que

> [A matemática] contém em si a causa de seu ser e sua própria métodos de teste. Em absoluta independência, a matemática cria para si o objeto de que trata, suas grandezas e suas leis, as suas fórmulas e símbolos[8].

Mas, então, a matemática apareceu e teve que ser justificada apenas como uma produção mental, embora com uma mente concebida com diferentes graus de universalidade, da mente individual à razão objetiva.

Todas as respostas que serão dadas a esta crise buscarão um fundamento na mente, concebida mais ou menos objetivamente, e não no mundo, que impõe demasiadas restrições à liberdade (Cantor) de criar teorias matemáticas, que existia há tudo para ver.

Ao contrário do esquema historiográfico muitas vezes repetido, segundo o qual os períodos de crise seriam seguidos por períodos de rigor, períodos em que se estabelecem critérios rígidos de realização e aceitação da pesquisa matemática para resolver os problemas anteriores, no século XIX aparecem os dois momentos trocados; a necessidade de rigor se manifesta na necessidade de apresentar a matemática sem o apoio da realidade natural e da intuição física, e, portanto, também propondo definições autossuficientes para os conceitos fundamentais. Todavia, essa tendência traz à tona as dificuldades da razão, sua lógica e sua capacidade de definir conceitos matemáticos.

A crise dos fundamentos

Uma multiplicidade de problemas converge, portanto, no século XIX: a fundação do método axiomático, com duas dificuldades principais: como demonstrar a coerência das teorias e como apresentar seus modelos. As leis do infinito eram consideradas como uma questão

[8] E. Dillmann, 1899.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

urgente, uma vez que a teoria dos conjuntos se mostrava cada vez mais como a solução adequada ou conveniente para resolver muitas das dificuldades acima mencionadas. Entretanto, ela própria era atormentada por múltiplas incongruências e sobretudo por desacordos que subsistiam entre matemáticos, relativamente aos modos como desenvolvê-lo.

Por exemplo, pode-se supor o princípio da escolha ou não. Poderíamos aceitar as formas de definição e argumentação que trouxeram à existência infinitamente mais do que contável? Essas mesmas formas de raciocínio, essenciais em muita matemática, como as definições impredicativas, levam facilmente, em contextos estritamente análogos aos da prática cotidiana, a contradições.

Essa crise, portanto, por um lado foi semelhante às demais, na medida em que surgiu da dificuldade de novos desenvolvimentos matemáticos. Porém, por outro lado era diferente, implicando exatamente na justificação da natureza da matemática. O século XIX foi o século em que houve o maior progresso da matemática em toda a história; um progresso ou, em todo caso, uma mudança, não apenas quantitativa, mas na própria maneira de fazer matemática. Este século talvez represente um divisor de águas entre duas Eras históricas, apesar das continuidades óbvias, comparáveis talvez apenas ao século VI a.C., quando Tales de Mileto apresentou suas provas pela primeira vez.

Os problemas não diziam respeito apenas a conceitos ou métodos isolados, ou disciplinas particulares, mas à matemática como um todo em sua formulação. Não é de estranhar que esta, conhecida como a crise fundamental por excelência, não só por estar mais próxima de nós, tenha despertado também interesse filosófico. A crise da matemática em relação ao seu objeto de estudo, sua realidade, também foi uma crise para a filosofia da matemática. Tornou-se difícil continuar tomando-o como modelo quando a matemática parecia uma construção lógica suspensa no ar. Que tipo de certeza existe, e de que valor, sem um conteúdo? O conhecimento do nada é o que é proporcionado pela lógica analítica, útil, mas difícil de qualificar como conhecimento.

No mesmo período há também a circunstância de que, para a estimulação dos problemas discutidos, principalmente lógicos e linguísticos em maior medida do que no passado, foi desenvolvida uma nova ferramenta para lidar com os problemas colocados: uma ferramenta como essa da lógica simbólica.

Nem todos os protagonistas da crise usaram essa ferramenta, mas aqueles que o fizeram como contribuição mais recente e (em alguns casos) duradoura. Nunca a linguagem e os procedimentos da matemática foram submetidos a uma análise tão completa e original.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

Portanto, não é de surpreender que mesmo a saída desta crise seja em parte diferente de outros casos. Se tivemos a produção de novas matemáticas, mas sobretudo chegamos a algumas conclusões (parciais) sobre a natureza da matemática[9]; saímos da crise com ideias mais claras sobre o potencial e os limites das ferramentas de pensamento que usamos para fazer matemática.

As escolas fundacionais

Duas imagens opostas das obras de fundações realizadas entre o final do século XIX e os primeiros trinta anos do século XX se sucederam na opinião comum. Por um tempo pensou-se e disse-se que este era o momento mais alto da reflexão filosófica sobre a matemática, depois seguiu-se o julgamento severo segundo o qual os resultados das escolas fundacionais (logicismo, formalismo, intuicionismo) não tiveram sucesso.

Ambos os julgamentos são exagerados, mesmo que o primeiro seja compreensível exaltação no momento do desenrolar da história, pelos protagonistas, enquanto o subsequente julgamento radicalmente negativo é menos justificado, que se baseia tanto em um equívoco técnico quanto na incapacidade de historicizar o fenômeno (tudo é colocado no caldeirão da crise do neopositivismo).

Um dos motivos da primeira exaltação foi a novidade das análises realizadas, e justamente o fato de terem sido realizadas com o instrumento da lógica simbólica ou matemática.

Esta oportunidade pareceu permitir uma investigação mais coerente com a natureza do próprio objeto, e não é por acaso que muito trabalho, mesmo filosófico, tem sido realizado por novos personagens, como as figuras de filósofos lógicos, ou precisamente por matemáticos.

O uso da lógica matemática deu a ideia de que esta era a maneira correta de procurar fundamentos para a matemática, fundamentos que lhe fossem homogêneos e, portanto, verdadeiramente (como as colunas de concreto nas fundações que se estendem até as da estrutura exterior de uma casa).

Mas, ao mesmo tempo, o estudo dos problemas fundamentais da matemática com ferramentas matemáticas, também levou à ideia de que poderia ser possível chegar assim a

[9] Certamente, por exemplo, sobre o método axiomático: todo matemático que tem a probidade intelectual no coração agora tem a absoluta necessidade de apresentar seu raciocínio de uma forma axiomática. . . com palavras que se esvaziaram de todo o significado intuitivo” (Jean Dieudonné), grifo nosso.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

respostas definitivas e certas, definitivas como são os resultados da matemática, e certas como são as certezas da matemática - como ainda se acreditava ser.

Logicismo

A necessidade de uma definição dos números naturais, por um lado, e o problema de eliminar as formas de intuição tradicionalmente ligadas à geometria, quando ela se tornou algo puramente lógico, estão no centro do programa do logicismo.

O matemático Richard Dedekind e o lógico Gottlob Frege são os fundadores desta escola, que não apenas se preocupa (Dedekind) em dar uma definição de números naturais, mas também (Frege) afirma dar uma que reduz toda a matemática a ter um caráter analítico e, portanto, um caráter de necessidade que pode ser verificado pela razão.

A definição de números naturais cruza-se com os problemas da teoria dos conjuntos, que é uma teoria dos conjuntos, e ao mesmo tempo com a questão da natureza e alcance da lógica, porque a lógica deve ser tal que também lide com conjuntos, classes, conceitos de ordem superior. Não pode ser apenas um sistema de regras como o *modus ponens* ou os silogismos aristotélicos. Precisamos de uma lógica que tenha a capacidade de lidar com o mesmo antes de entidades definidas, e uma justificativa teórica convincente de tais possibilidades.

Ao estudar a questão, os lógicos encontraram problemas e relutaram bastante a respeito dos modos como se apresentariam aos matemáticos, em particular sobre a impossibilidade de estender certas leis do finito ao infinito, e da necessidade de certas formas inevitáveis de definições (imprevisíveis) que, no entanto, poderiam gerar antinomias.

Dessa história, que se configurou aproximadamente entre 1870 e 1930, surgiu a teoria axiomática dos conjuntos e da lógica.

A lógica que emergiu desses estudos e aplicações é algo que não pode ser rastreado, em termos de riqueza e profundidade, à lógica aristotélica e escolástica anterior; Foi uma grande conquista intelectual. Mesmo no campo do pensamento, as formas e os instrumentos têm uma data de nascimento, nem sempre ali estiveram disponíveis.

A teoria dos conjuntos continua até hoje, com pesquisas sobre os grandes cardeais, a ser um laboratório para experimentar a noção de definibilidade[10]. Por outro lado, o século XX foi o século da linguagem.

---

[10] A introdução e estudo dos grandes cardeais não pretende ser uma espécie de modelo cosmológico expansivo. Eles são hipotetizados para decidir questões de regularidade da hierarquia projetiva, o único campo em que os matemáticos percebem a relevância da definibilidade, e infinitos grandes interagem com propriedades de definibilidade. Este é um dos mistérios trazidos à luz pela pesquisa lógica.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

A Escola de Hilbert e Formalismo

Com a nova lógica à sua disposição, David Hilbert concebeu de forma totalmente original o projeto de usá-la para abordar a questão da coerência das teorias matemáticas (das fundamentais, antes de tudo aritméticas), ao invés de gerar ou expor as matemáticas em si.

O pressuposto do projeto era a formalização, ou seja, a representação das teorias em linguagens simbólicas adequadas, com sintaxe absolutamente rigorosa, de modo que as próprias teorias (teoremas e provas) fossem transformadas em configurações discretas de objetos (símbolos), com a consequente possibilidade de aplicação de métodos matemáticos combinatórios elementares ao estudo de questões lógicas relacionadas a eles.

Os lógicos da escola de Hilbert não eram considerados filósofos tal como são concebidos atualmente. Vejamos como explicam o que é matemática. Eles dizem: nas teorias matemáticas, se formalizadas, os métodos matemáticos podem ser aplicados para (tentar) responder às seguintes questões. Mas muitas vezes são mal compreendidos, porque a tentação de encontrar respostas definitivas, definitivas, está sempre presente, e é precisamente a fonte da filosofia.

Assim, muitos entenderam ou entenderam que Hilbert estava propondo a tese de que a natureza da matemática é formal e que a matemática é feita de maneira formal. Com efeito, há posições filosóficas formalistas que sustentam que a matemática é uma manipulação de signos, como um jogo com regras arbitrárias, e nada mais. O formalismo é frequentemente alvo de críticas ferozes, mas sua força reside na fraqueza (especular) do outro filósofo.

A escola de Hilbert esperava, acima de tudo, demonstrar a natureza não contraditória da teoria dos números reais, colocando assim a palavra ñ em dúvidas e discussões sobre a definição (de Cantor e Dedekind) acerca dos reais. Se permanecessem questões subjetivas sobre a natureza e o sentido da construção, ao menos se teria a certeza de não fazer algo descaradamente em vão.

A não-contradição não era, entretanto, a única questão lógica que poderia ser enfrentada via formalização; a decidibilidade foi outra, relevante, e muitos resultados foram obtidos sobre isso.

Do trabalho da escola de Hilbert surgiram os teoremas, negativos para os objetivos hilbertianos, de Gödel.

Em retrospectiva, pode-se argumentar que a impossibilidade do objetivo de Hilbert era previsível, devido a uma espécie de princípio de balanço de energia: queríamos demonstrar a natureza não contraditória da aritmética completa em uma teoria mais fraca. No entanto, a

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

esperança de Hilbert também parecia a priori bem fundamentada, pois uma vez formalizada a aritmética ela deveria perder todo o seu significado, daí sua força, e ser reduzida a um conjunto de estruturas simbólicas abstratas finitas. A impossibilidade do programa sugere que talvez, de maneira misteriosa, os símbolos nunca sejam completamente despojados de seu significado, ou nunca sejam completamente desprovidos dele, que o significado resida ou espreita nas regras da combinação sintática, e isso pode ser um ponto a favor do formalismo.

No entanto, os resultados limitantes não são a única coisa que se aprendeu com os estudos lógicos; são os mais citados (não necessariamente conhecidos); mas muito mais foi aprendido sobre a própria lógica, como dissemos, sobre semântica, sobre a completude de vários sistemas de regras, sobre a distinção entre lógica de primeira e segunda ordem, e sobre o que pode ser definido em um e não na outra, e quais possibilidades e garantias existem para o desenvolvimento do argumento em uma (recursivamente enumerável) ou na outra (não recursivamente enumerável).

A pesquisa continua, pois não está esgotada. Basta apontar como exemplo uma obra-prima do estudo fundacional que é a análise da aritmética predicativa realizada por Edward Nelson[11], que mostra o quanto maior controle, graças aos estudos sobre os fundamentos, temos agora sobre a construção de teorias sobre conceitos matemáticos básicos.

Do mesmo trabalho nasceu a teoria das funções computáveis e das calculadoras, com o que se seguiu. A metamatemática libertou-se da restrição de Hilbert de usar apenas ferramentas combinatórias e teve inúmeras aplicações algébricas importantes. Sem fundamento, sem resposta definitiva, mas um enorme enriquecimento de nossas habilidades de pensamento.

Talvez seja justamente porque as análises do logicismo e da escola de Hilbert foram pesquisas matemáticas, que produziram resultados matemáticos, que não puderam produzir um fundamento, muito menos o fundamento definitivo, absoluto (?) que alguém esperava e cuja impossibilidade ele agora os acusa.

Intuicionismo

O intuicionismo é uma escola que por certo período atraiu muita atenção, ainda que seja, ou por isso mesmo, reacionária; as dificuldades do tratamento clássico do infinito foram consideradas inevitáveis naquele cenário, e foi proposta uma drástica revisão e mutilação não só da matemática abstrata, mas da própria lógica, o que deveria ter evitado a ocorrência de

[11] E. Nelson, Predicative Arithmetic, Princeton Univ. Press, Mathematical Notes n. 32, Princeton, 1986.

anomalias, mas também de uma declaração de pouco significado ou conteúdo operacional. A matemática clássica era ilusória para Ludwig Brouwer, não tanto errada quanto sem sentido. Foi a linguagem que levou a declarações formalmente corretas, mas sem sentido. Brouwer queria tirar a matemática do domínio da linguagem e, portanto, restava apenas o refúgio no misticismo.

As filosofias que propõem uma revisão ou redimensionamento da matemática acumulada na história, como o nominalismo para dar outro exemplo, nunca são muito bem-sucedidas, exceto por alguns adeptos, muitas vezes fanáticos. Mas o intuicionismo não foi apenas um capricho dos pensadores místicos, que pensam na intuição original do número natural na percepção da passagem do tempo e na divisão da unidade em dois; quando foi revisto por seguidores moderados, e dispostos a usar linguagens simbólicas, produziu, ou melhor, fortaleceu e esclareceu a ideia de demonstração construtiva, e muito de seu ensino ainda é tecnicamente válido. De qualquer forma, Gödel mostrou que a aritmética clássica é interpretável na aritmética intuicionista e, portanto, relativamente não contraditória.

O Bourbakismo

Pode ser que a matemática não precise de fundamentos, mas, independentemente dos problemas mencionados, o grande crescimento das teorias abstratas do final do século XIX e início do século XX (espaços funcionais, variedades geométricas, topologia) precisava de uma organização, ou uma nova organização, que não poderia ser fornecida pela teoria dos conjuntos (outra das novas teorias abstratas[12]).

Isso forneceu uma linguagem confortável e poderosa, mas onde mostrou como toda noção matemática, toda estrutura, era definível em conjunto, realizou um trabalho que é positivamente chamado de reducionismo, e cuja legitimidade e significado são sujeitos a muitas disputas (em todas as áreas da ciência, não apenas da matemática); mas sobretudo não correspondia às necessidades dos matemáticos. Diante da definição de conjunto de uma de suas criaturas, o matemático não a reconhece mais, como quando as cores são definidas a partir de comprimentos de onda, e o pintor não encontra nelas seus materiais.

A organização e unificação de todo o novo material foi realizada por Bourbaki, em meados do século. A apresentação da matemática de Bourbaki em seus *Elementos* foi útil,

[12] Uma condição operativa rápida da teoria abstrata é que a teoria não fala de números ou funções numéricas ou de figuras.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

correta, profunda, mas foi uma organização de cima, um elo unificador entre conceitos mais gerais e sua (com)presença em domínios específicos.

Esses conceitos muito gerais (estruturas parentais topológicas, algébricas e de ordem) não são aqueles encontrados na construção a partir de baixo, no crescimento efetivo de teorias, nem em sua apresentação usual, por exemplo, para não matemáticos em vista de aplicações. O mesmo pode ser dito, porém, da fundamentação categórica[13].

Diante do perfeito edifício bourbakista, porém, a tentação de trabalhar sobre (ou dentro) essa imensa construção abstrata articulada e autossuficiente como se ela só existisse, e não o mundo real, natural e humano. O resultado é uma imagem um tanto irreal da matemática - perigosa na medida em que também influenciou o ensino escolar - como algo que vive em um hiperurânio platônico.

Da piada de Bourbaki de que os matemáticos são platônicos nos dias de semana e formalistas aos domingos, o pior dos dois mundos foi tirado na construção da imagem da nova matemática: rigidez expositiva e metafísica realista.

Não é por acaso que a partir desse período se difundiu cada vez mais a tendência entre os matemáticos de se declararem platônicos, convencidos da existência objetiva de entidades de natureza diferente da natural. O problema da realidade matemática no platonismo é resolvido com um decreto.

No entanto, o mundo platônico não é o humano. Neste último, a história que se passou sob a ação de homens concretos, entretanto, trouxe novas descobertas e novas atividades, entre as quais um papel de destaque foi e é, o desempenhado pelo computador. Pesquisas permitidas ou induzidas por computadores reviveram uma matemática feita de explorações, testes, conjecturas e - como alguns gostam de apontar - até experimentos. Eles também relataram o cálculo em álgebra, do qual ele havia desaparecido, embora essa afirmação possa parecer incompreensível para um aluno.

No mesmo período, sob a influência de eventos sociais, também nasceram ou se consolidaram novos tipos de interesses e pesquisas que envolviam a matemática, ou novas matemáticas, como a pesquisa operacional, como a estatística, e com sua contribuição (assim como com aquela da ciência da computação) o impulso para a matemática combinatória do

[13] Unificar conceitos emergentes em diferentes setores em um conceito geral µ é parte integrante e importante do crescimento das teorias matemáticas, mas o conceito geral µ é um ponto de chegada, não pode ser um ponto de partida.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

finito foi fortalecido. As novas tendências da filosofia da matemática são colocadas neste contexto.

Os matemáticos se retiram para seu trabalho, que está cheio de problemas interessantes - e eles não têm seu próprio projeto fundacional. Os filósofos, ou pelo menos os conceitos e terminologias filosóficas, voltam a desempenhar um papel de liderança; porém, são conceitos novos, aplicados à matemática, em relação à análise filosófica tradicional que, na problemática ontológica e epistemológica, já disse praticamente tudo o que poderia ser dito[14].

Tendências atuais

Do ponto de vista filosófico tradicional, a ontologia colocava um problema de existência, com entidades matemáticas assumidas como representantes típicos de entidades abstratas; as respostas realistas ou nominalistas da tradição escolástica podem efetivamente ser despejadas no contexto da matemática abstrata; mas o interesse desses rótulos é inteiramente extrínseco; são também declarações de fé, além das posições nominalistas que imporiam uma revisão da matemática, segundo critérios, porém, descendentes de cima, não nascidos da pesquisa e da inclusão da disciplina na vida associada.

Em vez disso, as novas tendências se pretendem ver a matemática como um fato humano. Da mente, ou do hiperurânio, voltamos a colocar a matemática no mundo, não mais o natural, mas o humano, como veremos a seguir.

- *Os Sistemas culturais*

Entre os primeiros a dar essa indicação para um estudo do fenômeno "matemática" foi Raymond Wilder[15]. Depois de ter definido os sistemas culturais[16], e de ter reconhecido a matemática como um exemplo particular destes, Wilder introduziu alguns conceitos adequados ao seu estudo, como os de tensão, consolidação, pressão ambiental; formulou, portanto, algumas leis da evolução, relativas à aceitação de um novo conceito, seu enraizamento, sua difusão ou seu isolamento, o papel dos problemas e soluções, a ocorrência de descontinuidades, o fenômeno das antecipações e descobertas múltiplas, e muitos outros, tentando cobrir todos os aspectos de fenômenos importantes na história da matemática.

---

[14] Isso não significa que não haja contribuições originais, por exemplo, sobre logicismo - ver Shapiro, cit. - mas são variações do tema.
[15] R. L. Wilder, Mathematics as a Cultural System, Pergamon Press, Oxford, 1981.
[16] Uma cultura é um conjunto de hábitos, rituais, crenças, ferramentas, costumes (valores éticos), linguagem, etc., denominados elementos culturais, possuídos em comum por um grupo de pessoas que estão ligadas por algum fator associativo, a tribos, proximidade geográfica, ocupação.

Mesmo a sociologia da ciência, na versão agressiva recente, tem se interessado pela matemática, mas apenas na tentativa (não convincente) de fornecer uma justificativa convincente para que ela seja um fenômeno completamente social; assim, os sociólogos pensam em eliminar, com a matemática, o contraexemplo mais óbvio à sua tese de que tudo é social e que não há domínio autônomo de abstrações de validade universal[17].

- *O novo empirismo*

Mesmo sem passar explicitamente para uma sociologia dos sistemas culturais, a matemática é considerada por muitos como uma atividade contínua com outras, não radicalmente separada; essa tendência é particularmente evidente no novo empirismo. A filosofia empirista tradicional da matemática visava dar uma explicação e fundamentação do número e dos outros conceitos matemáticos elementares a partir de experiências sensíveis. O novo empirismo não tem essa preocupação genética; ele argumenta, em vez disso, que os procedimentos da matemática, os procedimentos de descoberta e confirmação, não são diferentes daqueles das outras ciências naturais.

Podemos citar nomes de filósofos muito populares, inclusive por suas intervenções em outros campos, como Hilary Putnam:

> por métodos quase-empíricos "eu quero dizer métodos que são análogos aos métodos das ciências físicas, exceto que sentenças singulares que são generalizadas por indução", usadas para testar teorias "e similares, são elas mesmas o produto de cálculos em vez de serem observacionais". relata "no sentido usual[18].

O primeiro a usar o termo "quase-empírico" foi Imre Lakatos[19], tirando-o de Euler via George Polya. Lakatos aplicou um modelo emprestado de Popper à "dialética" da matemática, mas teve o mérito de chamar a atenção para a história. Hao Wang também introduziu estímulos interessantes, sob a influência de Wittgenstein. Reuben Hersh, juntamente com Philip Davis[20], tem estado entre os que mais contribuíram para compreender esta visão.

---

[17] Ver D. Bloor, Knowledge and Social Imagery, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976-1991; trad. it. La dimensione sociale della conoscenza, Raffaello Cortina, Milano, 1994, e a discussão em G. Lolli, Beffe, scienziati e stregoni, Il Mulino, Bologna, 1998.

[18] H. Putnam, What is Mathematical Truth, in Philosophical Papers, 2 voll., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975; trad. it. Che cosa è la verità matematica, in H. Putnam, Matematica, materia e metodo, Adelphi, Milano, 1993, pp. 80-98.

[19] Lakatos, Proofs and Refutations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976; trad. it. Dimostrazioni e confutazioni, Feltrinelli, Milano, 1979. Per una discussione, sia di Lakatos sia in generale delle nuove tendenze, si veda Lolli, Filosofia della matematica, cit.

[20] Ver P. J. Davis e R. Hersh, The Mathematical Experience, Birkäauser, Basel, 1981 e R. Hersh, What is Mathematics, Really, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997; trad. it. Cos'è davvero la matematica, Baldini&Castoldi,

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

Mas a ideia da presença de experimentos em matemática foi especialmente relançada na filosofia da matemática pelo uso de computadores para demonstrações automáticas, um fato paradoxal, considerando que essas demonstrações são a exaltação da lógica formal incorporada nas máquinas.

Após a prova do Teorema das Quatro Cores, desencadeou-se uma discussão puramente filosófica sobre o argumento *a priori*, que, embora não conclusivo, deu mais fôlego às posições empiristas:

> De acordo com [nossa] avaliação, o uso de calculadoras em matemática, como no caso do 4CT, introduz experimentos empíricos em matemática. Devemos admitir que a prova atual não é uma prova tradicional, não é uma dedução a priori de uma sentença de algumas premissas. Apresenta-se como uma prova em que existe uma lacuna, que é preenchida com os resultados de uma experiência bem pensada. Esse fato atribui ao 4CT o *status* de primeira proposição matemática conhecida a posteriori (não que seja falsa ou duvidosa, mas conhecida de uma maneira particular) e coloca novamente o problema da distinção entre matemática e ciências naturais[21].

A principal característica das novas abordagens é ver a matemática como um fato histórico e estudar seus mecanismos de formação em andamento. Em geral, exemplos e histórias são muito mais fascinantes do que a apresentação da matemática estabelecida.

Infelizmente, é a prova que muitas vezes desaparece desses relatos, substituída pelo que se chama de prova informal, que se opõe não tanto à formal quanto à própria lógica. Não só a manifestação desaparece, como é até mesmo combatida ideologicamente, devido à sua identificação indevida com o formalismo.

De acordo com Putnam, por exemplo, se a Hipótese de Riemann fosse verificada em um grande número de casos por computador - que na verdade já é µe, quão grande deve ser "enorme"? - Então teríamos o direito de dizer que a hipótese foi verificada e que pode ser aceita sem reservas.

Um boato do acampamento contradiz isso:

> A partir de hoje, a conjectura [de Goldbach] foi verificada para todos números pares $m \leq 10^{13}$ por H. J. J. de Riele e J.-M. Deshouillers. Há também uma prova de J.- R. Chen (simplificado de P. M. Ross) que qualquer número par suficientemente grande pode ser escrito como a soma p + q, onde p µe primo e q µe quase primo, no sentido de q ou µe primo ou µe o produto de dois

Milano, 2001. Per una scelta degli scritti piµu significativi della tendenza, si veda l'antologia di T. Tymoczko (curatore), New Directions in the Philosophy of Mathematics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

[21] T. Tymoczko, The Four-Color Problem and Its Philosophical Signi¯cance, in \The Journal of Philosophy", 76, 1979, pp. 57-83. Si veda anche G. Lolli, La Macchina e le dimostrazioni, Il Mulino, Bologna, 1986.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

> primos. Com tudo essa evidência positiva, no entanto, nenhum matemático dirá que o conjecturas devem, portanto, ser verdadeiras para todos os m[22].

É parte da composição genética da matemática que

> Uma característica exclusiva da matemática é que enquanto parecer possível provar (ou refutar) uma conjectura, os matemáticos a considerarão um problema em aberto, mesmo quando, segundo os critérios das ciências naturais, a evidência não dedutiva em favor da resultado (ou sua negação) µe esmagadora[23].

Tendências históricas e empiristas se encaminham para esquecer, ou não considerar, o fato de que a dinâmica da construção de soluções e teorias sempre ocorre em um nível lógico e se articula na construção de provas.

A semiótica

A semiótica também tem algo a dizer sobre a matemática, que é uma atividade eminentemente simbólica, ou melhor, seria de esperar que ela tivesse muito a dizer, muito mais do que acontece. Não é apenas o formalismo que sustenta que a matemática faz parte das atividades simbólicas humanas. Ao contrário, o próprio formalismo poderia perder parte de sua aparência fantasmagórica ou gratuita (só se pode brincar com os signos) se fosse integrado a uma análise mais ampla com estudos culturais e sociais relativos à produção de signos.

Existem algumas tentativas de análise semiótica da matemática[24], que, no entanto, são invalidadas pela tendência dos autores em assumir a posição ideológica de que "tudo é signo", facilmente revertida em "o signo é tudo", mas no sentido que o signo contém tudo; também perturba a vontade excessiva de controvérsia justamente contra a imagem simulada da matemática, modelada na vulgarização da nova matemática de origem bourbakista, imagem que os linguistas tomam como palha fácil, como se para se impor tivessem de se propor como uma alternativa radical e global a uma degeneração causada pelas outras concepções.

Perspectivas

[22] J. Rotman, Journey into Mathematics, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1998, p. 4.
[23] M. D. Resnik, Mathematics as a Science of Patterns, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997, p. 138.
[24] B. Rotman, Mathematics as Sign, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. Ver G. Lakoff e R. E. Nùñez, The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics, in L. D. English (curatore), Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997, pp. 21-89, e una discussione in G. Lolli, \La metafora in matematica", in La parola al testo, a cura di G. L. Beccaria e Carla Marello, Dell'Orso, Alessandria, 2002, pp. 221-32.

A matemática hoje não apresenta problemas conceituais dramáticos; voltamos a uma visão mais pacífica da convivência e colaboração entre diferentes vertentes e pesquisas. A matemática abstrata continua a crescer e se mostrar útil (veja a prova recente do teorema de Fermat). Ele também começou a se alimentar da relação frutífera com a física (veja os *insights* de Edward Witten sobre as invariantes de variedades de quatro dimensões originadas da consideração da teoria quântica de campos).

Ao mesmo tempo, a matemática da matemática finita, discreta ou combinatória, voltou a mostrar sua riqueza e beleza, mesmo em nível educacional.

O computador, mesmo com suas consequências revolucionárias, tem exaltado aspectos já presentes, de um lado o cálculo e a experimentação, de outro o uso da formalização para a automatização de partes do raciocínio.

Se neste contexto não é possível indicar problemas fundacionais prementes, isso é apenas um sinal da vitalidade atual da matemática e de sua boa saúde. Isso não significa que não existam questões interessantes para investigar, e manter sob controle, e não apenas para aumentar nossa compreensão da matemática como um fenômeno da civilização humana. O trabalho originado por Hilbert, sobretudo, nos ensinou que a consideração metamatemática dos procedimentos de demonstração e construção de teorias também tem um impacto positivo na própria matemática. O estudo das fundações tornou-se laicizado.

Referências

BLOOR, D. Knowledge and Social Imagery, The University of Chicago Press, Chicago, 1976-1991

DAVIS, P. J.; HERSH, R. The Mathematical Experience, BirkÄauser, Basel, 1981.

ENRIQUES, F. Il significato della critica del principii nello sviluppo delle matematiche, 1912, ristampato in F. Enriques, Per la scienza, Bibliopolis, Napoli, 2000, pp. 155-72.

HERSH, R. What is Mathematics, Really, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.

LAKATOS, I. Proofs and Refutations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976.

LAKOFF, G.; NÙÑEZ, R. E. The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics, in L. D. English (curatore), Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997, pp. 21-89

LOLLI, G. La metafora in matematica, in La parola al testo, a cura di G. L. Beccaria e Carla Marello, Dell'Orso, Alessandria, 2002, pp. 221-32

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 01-19, Maio-Ago., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p01-19.id432

LOLLI, G. Beffe, scienziati e stregoni, Il Mulino, Bologna, 1998

LOLLI, G. La Macchina e le dimostrazioni, Il Mulino, Bologna, 1986

LOLLI, G. Philosophy of mathematics, Il Mulino, Bolonha, 2002

NELSON, E. Predicative Arithmetic, Princeton Univ. Press, Mathematical Notes n. 32, Princeton, 1986.

PUTNAM,H. What is Mathematical Truth, in Philosophical Papers, 2 voll., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975

RESNIK, M. D. Mathematics as a Science of Patterns, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997, p. 138.

ROTMAN, B. Mathematics as Sign, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

ROTMAN, J. Journey into Mathematics, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1998, p. 4.

SHAPIRO, S. Thinking about mathematics, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000

TYMOCZKO, T. (Ed.). New Directions in the Philosophy of Mathematics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

TYMOCZKO, T. The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance, in The Journal of Philosophy", 76, 1979, pp. 57-83

WILDER, R. L. Mathematics as a Cultural System, Pergamon Press, Oxford, 1981

ZELLINI, P. Gnomon, Adelphi, Milano, 1999.