Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Algumas notas sobre Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática

Antonio Vicente Marafioti Garnica[1]
Universidade Estadual Paulista – UNESP

RESUMO
A partir da perspectiva de que o campo da Educação Matemática tem se ampliado consideravelmente, de modo a incorporar novos objetos, metodologias e abordagens, este artigo questiona o papel que as Filosofias "clássicas" da Matemática têm desempenhado no desenho desse campo, principalmente no que diz respeito à constituição de uma Filosofia da Educação Matemática cujo papel deve ser promover a incorporação de práticas, procedimentos e valores que respondam mais efetivamente às demandas do tempo presente e às necessidades da prática pedagógica cotidiana.
Palavras-chave: Prática Científica de Matemática. Prática Pedagógica. Filosofia. Provas Rigorosas.

Some remarks on Philosophy of Mathematics and Philosophy of Mathematics Education

ABSTRACT
From the perspective that the field of Mathematics Education must be open to incorporate new objects, methodologies and approaches, this article questions the role that "classical" philosophies of Mathematics have played in the design of this field, especially in what concerns to the constitution of a Philosophy of Mathematics Education whose role is to support an alternative approach that considers, as one of the most important objectives of the Math Education field, the incorporation of practices, procedures and values that respond more effectively to the demands of the present time and to the needs of daily pedagogical practices.
Keywords: Scientific Practice of Mathematics. Pedagogical Practice. Philosophy. Rigorous Proof.

Algunas notas sobre Filosofía de las Matemáticas y Filosofía de la Educación Matemática

RESUMEN
Desde la perspectiva de que el campo de la Educación Matemática debe estar abierto a la incorporación de nuevos objetos, metodologías y enfoques, este artículo cuestiona el papel que han jugado las filosofías "clásicas" de las Matemáticas en el diseño de este campo, especialmente en lo que se refiere a la constitución de una Filosofía de la Educación Matemática cuyo papel es sustentar un enfoque alternativo que considere, como uno de los objetivos más importantes del campo de la Educación Matemática, la incorporación de prácticas, procedimientos y valores que respondan con mayor eficacia a las exigencias de la época actual y a las necesidades de la práctica pedagógica cotidiana.
Palabras clave: Práctica Científica de las Matemáticas. Práctica Pedagógica. Filosofía. Demostraciones formales.

[1] Doutor em Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro. Professor livre-docente aposentado do Departamento de Matemática da UNESP, Campus de Bauru, SP, Brasil, e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP, Campus de Rio Claro, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Nações Unidas, 11-35/1101, Bauru-SP, CEP 17010-130. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0750-8483. E-mail: vicente.garnica@unesp.br

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Ainda que a ideia de "clássico"[2] seja de difícil configuração, são algumas obras clássicas que vão nortear as considerações que faço neste artigo, engendrado a partir de uma revisitação que fiz a essas obras e a alguns textos meus, mais antigos (e nada clássicos), radicados no campo da Filosofia da Educação Matemática. Uma das que revisitei foi o *Provas e Refutações*, de Imre Lakatos. Para minha formação, ela foi fundamental não apenas por tratar, de forma direta, simples, clara e contundente de um tema central aos meus estudos de doutorado – as demonstrações formais e o papel dessas demonstrações na formação de professores de Matemática em cursos de Licenciatura –, mas também por sua importância na configuração de uma Filosofia da Educação Matemática, além, é claro, de ser, como já afirmei, um clássico que, como clássico, eu penso, é leitura obrigatória, essencial à formação de todos os que frequentam os campos da Filosofia, da Matemática e da Educação Matemática.

A discussão sobre as demonstrações formais – também chamadas "provas rigorosas" – é, hoje, mais usual, e existem vários trabalhos de pesquisa sobre esse tema. Mas ao final da década de 1980, início da década de 1990, eram ainda pouco usuais, mesmo no cenário internacional, esses estudos, o que ajudou a dar à minha tese de doutorado certa proeminência, vindo ela a servir de referência, com outros textos estrangeiros, aos pesquisadores que, naquele momento, continuariam a se dedicar ao tema. Foi possível a mim, à época, realizar uma varredura bibliográfica bastante ampla e completa aos artigos e livros publicados sobre esse assunto no campo da Educação Matemática e também em campos próximos, como a Filosofia e a Matemática. Junto a isso, deve-se considerar que à década de 1991 os estudos em Filosofia da Educação Matemática ainda eram recentes, e o próprio domínio de uma tal Filosofia estava se constituindo, sem que tivéssemos, ainda, obras de referência. Entre os autores mais mobilizados para abordar as provas rigorosas no terreno da Educação Matemática estavam Nicolas Balacheff e Gila Hanna, que continuam – salvo engano meu – a ser atuais naquelas suas disposições e são, ainda hoje, fontes recorrentes para os estudos sobre esse tema. De Balacheff, especificamente, foi extremamente significativo para mim a reconfiguração da terminologia usada no tratamento das provas e demonstrações[3] – longe de ser uma estratégia meramente de linguagem, a reconfiguração tratava, de modo inaugural, de assentar ideias sobre o recurso formal das demonstrações em campos diferentes que não apenas aquele da Matemática profissional, já usual e bastante conhecido, por exemplo, pelas práticas hegemônicas no campo da Matemática e por trabalhos consagrados como os do Grupo Bourbaki, fundadas no projeto euclideano –, enquanto que dos estudos de Hanna vinha a diferenciação (que depois foi bastante mais trabalhada e ampliada por ela, já que num primeiro momento essa diferenciação, embora poderosa, era ainda muito lacunar e pouco fundamentada) sobre as provas que provam e as provas que explicam que, por óbvio, apoiavam e dialogavam

[2] "Clássico" é um exemplo do que chamamos de "palavras plásticas", dada a flexibilidade e a maleabilidade do seu uso e o modo (estranho) como parecem servir para uma série de circunstâncias... Ítalo Calvino (um clássico!), que tem um livro sobre clássicos que é também um clássico, enfrenta a dificuldade de definir a palavra. Ele parte de uma caracterização muito bem humorada (um livro é clássico quando dele não dizemos "estou lendo", mas "estou relendo") para, depois de feitas mais treze tentativas de apreender algum significado, constatar algo tão óbvio quanto importante: a única razão para ler os clássicos é que ler os clássicos é melhor do que não lê-los...

[3] A diferenciação de Balacheff entre explicação, prova e demonstração é bastante conhecida e intensamente mobilizada ainda hoje nos trabalhos em Educação Matemática.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

claramente com as disposições de Balacheff. Dos estudos de Hanna que, nesse ponto, ecoavam Davis e Tymoczko, vinha, ainda, a afirmação – que julgo fundamental – sobre serem "privadas" as Filosofias da Matemática como o Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo, posto que elas serviam para caracterizar – e ao mesmo tempo tinham como pano-de-fundo – uma Matemática ideal, defendendo a necessidade de uma teoria "pública", que tratasse da Matemática como atividade social e, portanto, potencialmente aberta a formas de intervenção, a práticas, a estratégias de elaboração e validação outras que não apenas aquelas do fazer-saber matemático profissional. As atuais considerações sobre a natureza da Matemática Escolar –uma Matemática "distinta", nascida e alimentada no chão da escola e dos fazeres cotidianos –, que questionam a noção – ainda muito ativa, infelizmente – de que essa Matemática escolar é uma mera transposição, pelas vias da didática, da Matemática profissional (essa tomada como ciência de referência) mostram, já tendo se passado mais de 30 anos, quão potencialmente poderosas eram aquelas proposições de Hanna.

Apoiado nas contribuições desses e de outros tantos autores desenvolvi meu trabalho de doutorado, defendido em 1995, tentando compreender o papel das provas rigorosas na formação de professores de Matemática em cursos de Licenciatura (GARNICA, 1995). A questão central fazia sentido: sendo as demonstrações formais a estratégia fundamental para a produção de conhecimento matemático, e considerando que os professores de Matemática, durante suas graduações, forçosamente passam por disciplinas em que essas demonstrações ocupam papel central como estratégia de ensino, havia (e ainda há), tradicionalmente, uma imbricação entre *produção de conhecimento matemático* (que apenas sob alguns pontos de vista e determinadas restrições são objeto dos professores que atuariam majoritariamente nos ensinos fundamental e médio) e *produção de estratégias de ensino* (essa, sim, função precípua dos futuros professores). A julgar pelas disposições de Bourbaki, essa imbricação é ainda mais fundamental já que dizer "Matemática" implica dizer "Demonstração/Prova"[4]. Aparentemente, considera-se que o conhecimento sobre a produção de matemática, como feita pelos matemáticos profissionais (em que pese uma certa gradação, já que na prática profissional da Matemática são tratados conteúdos e teorias que não frequentam os bancos dos cursos de Licenciatura), é não apenas necessário, mas suficiente para o desenvolvimento de estratégias de ensino. Isso, que poderíamos caracterizar como um *deslizamento da prática científica sobre a prática pedagógica*[5], me parecia, deveria ocupar uma posição central nos estudos sobre a formação de professores, e as provas rigorosas desempenhavam (e ainda desempenham) papel fundamental para entender esse deslizamento.

A insistência quanto à existência de uma Ciência de referência ("A" Matemática) que, transposta didaticamente para a escola torna-se uma Matemática escolar, contrariando a ideia de que a Matemática escolar é algo próprio da escola, criada nas tramas das ações pedagógicas e nas circunstâncias *impostas por e definidas no universo escolar*, está indelevelmente imbricada a esse deslizamento de práticas: mantem-se e se reproduz a ideia da Matemática escolar como uma transposição didática de uma ciência de referência exatamente porque a

[4] "Depuis les Grecs, qui dit matématique dit démonstration; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstration au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs." (Bourbaki, *Eléments de Mathématique*)

[5] Para considerações mais aprofundadas sobre esse deslizamento, indica-se o mestrado de Maria Regina Gomes da Silva (SILVA, 1993) – que eu reputo ser um trabalho inaugural sobre esse tema.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

prática científica desliza contínua e cotidianamente para a prática pedagógica, e esse deslizamento não é estancado porque não se acredita numa Matemática própria à escola. Assim, nosso papel de educadores matemáticos, em boa parte, tem sido promover formas mais adequadas, mais significativas, mais compreensivas, mais sensíveis, mais humanas, mais delicadas, mais comprometidas, mais... de continuar promovendo esse deslizamento e mantendo a Matemática "de referência" em seu papel sagrado e em seu posto consagrado e inquestionável. Uma manifestação clara disso se dá nos Departamentos de Matemática quando, por exemplo, numa situação de alteração curricular, disciplinas ditas "pedagógicas" podem ser incluídas, excluídas e/ou ter suas cargas horárias modificadas mesmo que de forma radical, sem muita discussão ou entraves, enquanto as ditas disciplinas "específicas" são, sempre, inalteráveis e vistas como "fundamentais", cujas alteração, adequação ou atualização são "impossíveis". Sem esse rompimento em relação à concepção de uma transposição didática e, em decorrência (dada a imbricação entre ambos), sem a interrupção (ou, ao menos, uma problematização mais efetiva) daquele deslizamento, a formação de professores e os conteúdos, as abordagens e os valores que se disseminam na escola continuarão alimentando e sendo alimentadas por esse ciclo vicioso que torna a própria Educação Matemática refém daquela Matemática dos matemáticos profissionais que não vêem outra possibilidade de conceber e agir senão a partir de suas próprias certezas, sem qualquer diálogo com o outro e com o diferente. Nesse mecanismo vicioso e viciante, as demonstrações rigorosas ocupam papel central, e a continuidade desse sistema é, de um modo ou outro, defendida por todos, matemáticos e educadores matemáticos e, de um ponto de vista teórico, assegurada até mesmo pela Filosofia da Educação Matemática. Talvez – e essa é uma afirmação mais provocativa que fundamentada – tenhamos que lutar também, como se tem feito em outras frentes, contra essa colonização *intracorporis*, mais silenciosa, menos nítida, que frequente e "naturalmente" temos promovido sem nos darmos conta disso.

A Prática Científica, a Prática Pedagógica e as Provas Rigorosas

Considerando, ao mesmo tempo, esse deslizamento e o fato de que a produção de conhecimento científico de Matemática (restringindo essa expressão, aqui, para a prática profissional da Matemática, como realizada por matemáticos) se dá em condições radicalmente distintas daquela produção de matemática que ocorre tanto nas escolas de ensino fundamental e médio quanto no cotidiano, em situações extraescolares, é importante não só estudar as demonstrações, mas também compreender e caracterizar o que diferencia a prática científica de Matemática da prática pedagógica de Matemática.

De um modo geral, entende-se que os matemáticos profissionais produzem matemática em "estado nascente", por assim dizer, enquanto os professores de matemática operam a partir de uma matemática já consolidada, mais "básica" (mas nem por isso "mais simples", a julgar pelas circunstâncias e pela comunidade à qual ela se dirige) e que, embora haja, sempre, um fator de criação no aprendizado de Matemática, em qualquer nível (tanto estudantes do ensino fundamental e médio como matemáticos profissionais em seus grupos de pesquisa são aprendizes e produtores de conhecimento), a Matemática "da escola" é mais frequentemente caracterizada pela reprodução de conceitos matemáticos já consagrados e, nesse sentido,

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

“elementares”[6]. No mais, a comunidade de matemáticos profissionais é caracterizada pela homogeneidade em vários aspectos (os participantes desse grupo têm formações equivalentes ou próximas; dispõem de uma linguagem depurada e amplamente conhecida e dominada por todos os interlocutores; formam seus grupos a partir de exigências e critérios pré-definidos e acordados pela própria comunidade de que participam e na qual os membros são próximos em seus *backgrounds*, incluindo os do campo social, cultural e econômico; os coletivos de produção de pesquisa são reduzidos e funcionam segundo normas que mais frequentemente são determinadas pelo próprio coletivo ou no coletivo; o acesso a materiais de apoio, espaço físico e obras de referência não são, via-de-regra, problemáticos etc), ao passo em que toda essa homogeneidade se esboroa quando se trata da comunidade escolar, em que os critérios de acolhimento são variados e variantes; as formações (de professores, gestores e estudantes) são as mais diversas possíveis; o domínio da linguagem (tanto no que diz respeito à língua materna quanto à linguagem matemática) varia enormemente de um indivíduo a outro; as condições sociais, econômicas e culturais dos estudantes são plurais, variando incrivelmente de escola para escola e entre estudantes de uma mesma escola; os coletivos escolares são muito distintos em relação não só à heterogeneidade mas também em relação às condições físicas, à quantidade de pessoas e prédios e à administração dos sistemas escolares (variam impressionantemente de escala as escolas, as salas de aula, a quantidade de alunos por sala e por professor, bem como a quantidade, a natureza e a formação prévia do corpo docente administrativo etc) e às normas de funcionamento (há escolas privadas e públicas, e mesmo em escolas de um mesmo grupo há diferenças flagrantes na condução das atividades escolares cotidianas, bem como na legislação que normatiza o oferecimento de vagas, os sistemas de avaliação e promoção etc).

Assim, parece claro que há uma diferença fundamental entre os atores, contextos e modos em que ocorrem a prática científica da Matemática e a prática pedagógica da Matemática. No entanto, os professores continuam a ser formados a partir de cursos e disciplinas que operam tendo como modelo a prática científica, e as demonstrações formais parecem ser um dos vetores, por excelência, para a manutenção e para a promoção dessa distorção. Em síntese, operamos como se todos os estudantes, sejam os do ensino médio, sejam os das Licenciaturas ou os dos Bacharelados, estivessem sendo formados para o exercício da Matemática profissional. São inúmeros e bem conhecidos os estudos que apontam as distorções quanto à natureza da formação do professor, marcando a perigosa confusão e a forçada aproximação que se efetiva, nos cotidianos dos Departamentos de Matemática, entre Bacharelado e Licenciatura mesmo quando a instituição não oferece cursos de Bacharelado, o que torna bastante claro que o Bacharelado não é apenas *uma modalidade* de curso para formar indivíduos com um perfil profissional específico, nem mesmo uma formação equivocadamente vista como “a desejável” para o futuro professor de Matemática, mas *o único modo de formar*

[6] Elementar é um adjetivo usual em Matemática. Nos tempos revolucionários, ficou marcada, na produção dos livros didáticos franceses, uma nova apreensão ao adjetivo *elementar*. Antes desse período, a expressão *Elementos de…* indicava, mais frequentemente, obras cujo modelo era os *Elementos* de Euclides, ou seja, obras nas quais da apresentação e discussão de uma série de resultados essenciais a uma certa área decorriam outros resultados, também centrais a essa área. O conjunto dessas proposições essenciais com suas decorrências, ao qual algumas vezes vinculavam-se exemplos, constituía o corpo de uma determinada disciplina, seus “elementos” (no sentido euclidiano). Ao final do século XVIII, *Elementos de…* passaram a indicar livros elementares, no sentido mais usual do termo: obras voltadas ao ensino, com os conteúdos básicos de um determinado campo (Aritmética, Álgebra, Geometria etc.). É nesse sentido mais usual que usamos, aqui, o adjetivo “elementar”, sem, entretanto, confundi-lo com “ingênuo”, “simplório”, “natural”, “fácil” ou “desimportante”.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

qualquer agente cujo exercício profissional esteja, de um modo ou outro, relacionado à Matemática. Muitas das críticas feitas aos cursos de Pedagogia, que formam professores que também ensinam Matemática, estão enraizadas nessa mesma cantilena: falta-lhes Matemática.

Nos ambientes escolares, as demonstrações deveriam servir – e nisso se assemelham à produção científica – para convencer e justificar, mas há que se defender a necessidade de pensar, aceitar e implementar parâmetros, estratégias e procedimentos que variam enormemente de um campo a outro. Essa constatação já estava presente nos estudos de Balacheff e Hanna, por exemplo, quando esses autores – principalmente em Hanna, com sua diferenciação entre "provas que provam" e "provas que explicam" – expunham a diferença de natureza das provas/demonstrações a depender da comunidade em que ela é mobilizada e de quais objetivos são visados com essa mobilização.

Pouca coisa, entretanto, parece ter se alterado no panorama desde aqueles meus primeiros estudos sobre o papel da demonstração na formação de professores. É importante ressaltar que mesmo as iniciativas que defendem a necessidade de atualizar – principalmente via informática – os modelos de provas, usualmente esbarram na concepção de que as ferramentas computacionais devem servir para desenvolver, ainda que de outro modo – desde que seja um modo aceitável, legítimo, rigoroso – aquela mesma formalização que caracteriza as provas rigorosas das práticas científicas do matemático profissional.

Na prática pedagógica, o estudante precisa ser convencido da validade de um determinado resultado ou procedimento, podendo valer-se de estratégias não-formais (do ponto de vista matemático já que do ponto de vista da Matemática escolar essa diferenciação entre formal e não-formal, como posta classicamente, não significa muita coisa) como recortes, experimentações concretas ou essencialmente indutivas, esboços gráficos (ainda que ingênuos), tentativas e erros que, certamente, estão fora do domínio de ação do matemático profissional em sua prática científica. Não se trata nem mesmo de afirmar que há uma diferença na concepção de rigor se comparadas a prática científica da Matemática (vista como fundamentalmente rigorosa) e as práticas pedagógicas relacionadas à Matemática (tidas como pouco ou nada rigorosas), mas de reconhecer que intuição e rigor são também conceitos a serem problematizados.

Em texto de 1993, Irineu Bicudo partia de um estudo etimológico para afirmar que, na Matemática, bem como na linguagem comum, o rigor tem dupla função – sintática e semântica. Em qualquer linguagem (e eu acentuaria: em qualquer campo de práticas), "ser rigoroso" significa proceder de acordo com as regras de uma gramática que, no caso da Matemática, é a Lógica. Não houve, ainda segundo Bicudo, ao longo dos tempos, uma alteração no conceito de rigor: em Matemática, ser rigoroso continua sendo seguir inflexivelmente os cânones da Lógica, ainda que historicamente tenha se alterado esse sistema gramatical da Matemática. Por decorrência, as práticas pedagógicas, calcadas em outra gramática e postas em ação, na comunicação, a partir da linguagem usual – que por sua vez tem sua própria gramática – são rigorosas, ainda que, nesse caso, impere de forma muito mais decisiva a intuição e a negociação de significados.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática

Esse estado de coisas no cenário dos estudos relacionados à "prova rigorosa" e ao ensino de Matemática – à formação do professor de Matemática, mais especificamente – envolve as filosofias clássicas da Matemática e certamente ecoará nas tentativas iniciais de se caracterizar uma Filosofia própria da Educação Matemática mais alinhada às necessidades de um campo que, nas décadas de 1980 e 1990, era visto como interdisciplinar, tendo como foco os momentos, os espaços, os fazeres e a história de uma Matemática Escolar. Melhor colocando, parece ser mais sensato pensar a Educação Matemática como um campo de estudos e práticas que tem como foco algo chamado Matemática que se manifesta em situações/momentos de ensino e aprendizagem[7]. A alteração na concepção da natureza da Educação Matemática também será um ingrediente importante no cenário deste meu artigo.

Muito já se discutiu sobre a Educação Matemática ser um campo de estudos cujo objeto é multi/interdisciplinar[8] – sendo essa uma acepção que vai além daquela mais antiga, em que se caracterizava a Educação Matemática como campo multi/interdisciplinar. Ser seu objeto inter/multidisciplinar implica que o próprio objeto exige que, para seu tratamento, diversas óticas interajam. Assim, nessa perspectiva, ao contrário da anterior, não cabe ao pesquisador optar por implementar ou não a inter/multidisciplinaridade, não cabe a ele optar por ser ou não integrador de várias perspectivas: é nosso próprio objeto de pesquisa que exige isso, e essa exigência torna os pesquisadores em Educação Matemática buscadores de fundamentações outras, necessariamente sistematizadores e integradores que frequentam os mais distintos campos do conhecimento para nutrir-se de práticas e teorias, algumas das quais, inclusive, nos são inéditas, distantes ou mesmo estranhas, dada nossa formação inicial específica. O mesmo se aplica às práticas didáticas e pedagógicas relacionadas à Matemática, e não apenas ao campo de pesquisa da Educação Matemática: é preciso estabelecer, sempre, diálogos múltiplos pois o próprio objeto dessas práticas assim exige. Não se pode reduzir os fazeres relativos ao ensino de Matemática à problematização quanto aos objetos da Matemática escolar, desconsiderando o cenário turbulento, amplo, caótico e diversificado em que esse objeto é tratado: as instâncias "escolares", considerando como "escolares" quaisquer ambientes, formais ou não, em que se ensina e/ou se aprende Matemática e em que se formam e atuam agentes que têm por função promover essa cultura "escolar" específica. Considerar o cenário mais amplo em que estão imersos os que aprendem e ensinam Matemática implica trazer, para o campo da Educação Matemática, objetos outros, que devem ser tematizados e problematizados como objetos próprios da Educação Matemática, posto que o "ambiente escolar" não se reduz aos locais e

[7] Pode-se dizer que a Educação Matemática é um campo de ação e de pesquisa que tem como objeto o ensino e a aprendizagem de Matemática, envolvendo, assim, tanto um componente teórico quanto um acervo de práticas. Ainda que mais usualmente se tenha como referência o ambiente escolar formal (a sala de aula, a instituição escolar, as disciplinas, programas etc), a Educação Matemática deve ser concebida em sentido mais amplo, incorporando também ambientes (os informais) em que ocorrem situações de ensino e aprendizagem de Matemática, bem como ambientes em que ocorrem práticas culturais que podem ser chamadas de Matemática ou que podem ser aproveitadas para o ensino e a aprendizagem de Matemática (a Etnomatemática, por exemplo, é uma área da Educação Matemática que tem como foco essas práticas culturais). Mais que isso, atualmente se considera importante ampliar o escopo desse campo para inscrever, nos domínios dessa Educação Matemática, também outros ambientes, situações, problematizações etc relacionados àqueles que ensinam e/ou aprendem Matemática, com o que se ampliaria o acervo de objetos, metodologias e abordagens que caracterizam essa região de pesquisa e de ação. Também as práticas relacionadas ao ensino de Matemática, mesmo aquelas desempenhadas por profissionais que não têm, em princípio, vínculo com a pesquisa acadêmica usual e/ou formação matemática específica, estão inscritas nesse domínio conhecido por Educação Matemática.

[8] Cf. Baldino (1991)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

momentos em que se discute Matemática, e a vida dos agentes que praticam Educação Matemática também não se restringe a esses espaços "escolares". Há sempre uma *hubris*, um excesso, que leva o ambiente escolar para o mundo e que, em composição, traz o mundo para o universo "escolar". Professores, professoras e estudantes participam de uma sociedade que exige, cada vez mais, compromissos de natureza política: é preciso, por exemplo, compreender e posicionar-se frente às dinâmicas das políticas públicas (ou, como ocorre atualmente no Brasil, face à ausência de políticas públicas) relativas à saúde, ao bem-estar social, à família, ao meio ambiente, à diversidade, à economia, à educação, à violência urbana etc. É urgente tematizar as noções de gênero, as sexualidades, a equidade, a inclusão. Esses temas não serão abordados de modo significativo se apenas uma ou outra linha de pesquisa em Educação Matemática se ativer a eles, e serão ainda menos relevantes se essas linhas específicas se comprometerem com eles de acordo com alguma conveniência local, específica, circunstancial ou pontual. Esses temas não serão abordados convenientemente, de modo significativo, se nas escolas eles se tornarem objeto de discussão apenas em momentos específicos, localizados, festivos, especiais. É preciso que se inicie um movimento que vise a expandir as fronteiras sobre que o entendemos como sendo os objetos da Educação Matemática, ainda que esse movimento nos aproxime de temas e abordagens que não são, em princípio, reconhecidos como próprios à Educação Matemática, mas atinentes a outras áreas do conhecimento. É preciso permitir que questões e objetos outros frequentem nosso campo de pesquisa e nossas práticas docentes e que isso seja visto como uma atitude legítima na área e pela área da Educação Matemática, pois mais importante do que caracterizar uma área a partir de seus objetos é cuidar de formar agentes que possam atuar de modo responsável, pela pesquisa e/ou pelo ensino, no mundo em que vivemos.

Assim, esse movimento de reconfiguração do próprio campo da Educação Matemática refletirá, necessariamente, nas fundamentações mobilizadas para tratarmos dele. Do mesmo modo como os estudos sobre a prova rigorosa impactam (e são impactados) pelos estudos filosóficos e pela, digamos, criação de uma Filosofia da Educação Matemática, também vão impactar essa Filosofia específica a natureza da área e a necessidade de estender e flexibilizar nossas compreensões acerca de nossos objetos de pesquisa, dos nossos fazeres profissionais como professores de Matemática ou pesquisadores voltados a compreender os momentos, os cenários, os contextos em que se dão o ensino e aprendizagem de Matemática. Cabe, então, ainda que de modo bastante breve, retomar os primeiros estudos sobre a constituição de uma Filosofia da Educação Matemática, pois o restante deste meu texto será dedicado a uma crítica sobre algumas dessas filosofias.

O primeiro estudo de que temos notícia sobre esse tema é a tese de doutorado de Eric Blaire, defendida na Universidade de Londres, em 1981. A esse estudo seguiu-se o bastante conhecido livro de Paul Ernest – *The Philosophy of Mathematics Education* –, de 1991. No Brasil, essa preocupação quanto a uma filosofia da Educação Matemática, ressoando estudos específicos desenvolvidos por alguns pesquisadores, brasileiros e estrangeiros, toma corpo com a publicação do livro *Filosofia da Educação Matemática*, de 2001. Essa é, certamente, uma listagem lacunar[9], servindo apenas para dar um panorama geral de que os estudos que

[9] Muitos se ressentirão da ausência, nesse levantamento, de estudos como os de Freudenthal; dos trabalhos sobre o Modelo dos Campos Semânticos, de Romulo Lins; do livro *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, de Ole Skovsmose,

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

inicialmente configurariam o acervo que temos, hoje, de pesquisas e obras sobre Filosofia da Educação Matemática, começam a tomar corpo no entorno da década de 1990.

O trabalho de Paul Ernest é, ainda hoje, uma referência recorrente, e nele veremos uma face daquela aproximação entre prática científica e prática pedagógica da qual tratamos anteriormente. Construtivismo Social é o nome que Ernest dá à uma Filosofia da Matemática radicada, principalmente, em Lakatos e em Wittgenstein, que servirá de fermento para uma Filosofia da Educação Matemática. Para atender minhas intenções e apresentar com mais acuidade – nos limites desse texto – a proposta da Ernest, daremos atenção a Lakatos – que está no entrecruzamento de vários temas já trazidos à cena aqui, como a Filosofia da Matemática, a Filosofia da Educação Matemática, o Formalismo e as Provas Rigorosas –, deixando Wittgenstein para um outro momento.

Lakatos e o Construtivismo Social em Educação Matemática

A Filosofia da Matemática que chamamos de Quase-Empiricismo é um projeto que parte das teses críticas de Lakatos, mas que ele próprio não sistematizou como base filosófica. Davis e Hersh expõem claramente isso ao afirmar que, no *Provas e Refutações* – sem dúvida o texto mais conhecido de Lakatos – ouvimos as personagens criadas pelo autor mas não propriamente o autor. Segundo eles, Lakatos nos mostra a Matemática como ele a vê, mas não torna explícitas as consequências plenas do que nos está mostrando. Em vez disso, afirma sua importância somente em sentido crítico, especialmente em um ataque total e feroz ao formalismo (DAVIS e HERSH, 1985). Às críticas de Lakatos juntam-se as apreensões de Polya e Popper para que se estabeleça a chamada abordagem falibilista. De Popper, Lakatos vai incorporar dois conceitos principais: aquele que fala de uma “tecnologia de ação gradual”, e o de uma “lógica das situações”[10]. De Polya, Lakatos abraça a heurística como “arte da procura”. Das teses críticas de Lakatos, apoiadas em Polya e Popper, portanto, surge o que hoje chamamos de “a filosofia falibilista do quase-empiricismo”, tida como uma Filosofia da Matemática.

Já na introdução do *Provas e Refutações* Lakatos ataca o formalismo, caracterizando-o como a “escola de filosofia matemática que tende a identificar a matemática com sua abstração axiomática formal e a filosofia da Matemática como metamatemática” (LAKATOS, 1978, p. 13-14). Sob a égide desse estado de coisas, orbita-se, segundo Lakatos, entre o racionalismo mecânico e o irracionalismo da suposição, donde resulta enfraquecida a tese da existência de uma matemática viva que trafega em espaço e tempo contextualizados historicamente.

A forma como Lakatos defende seus pontos de vista é extremamente criativa: ele constrói como que um estudo de caso de natureza historiográfica sobre a conjectura Descartes-Euler, encenando, no cenário fictício de uma sala de aula, a discussão em que professor e alunos assumem as posições historicamente defendidas por matemáticos ao longo do tempo até que se

---

entre outros tantos textos e autores. Não é minha intenção tornar essa listagem extensa, muito menos completa, mas apenas apontar alguns exemplos, talvez mais abrangentes, de modo a marcar um momento no campo da Educação Matemática.

[10] Esses conceitos são expostos no *A Miséria do Historicismo*, de Popper, publicado em 1957. A tradução dessas expressões aparece de forma um pouco distinta no *Provas e Refutações* (edição brasileira): “tecnologia de ação gradual” aparece como “tecnologia por partes”, enquanto “lógica das situações” é traduzida como “lógica do descobrimento” ou “lógica situacional”. Uma caracterização muito rápida (e, por decorrência, muito superficial) da obra de Popper é aquela segundo a qual é a possibilidade de falsificar uma hipótese científica que permite a correção e o desenvolvimento das teorias científicas e, em última análise, o progresso da ciência. Nenhuma teoria pode ser fundamentada de forma conclusiva. O próprio título da mais conhecida obra de Lakatos é uma homenagem ao *Conjecturas e Refutações*, livro de Popper publicado em 1963.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

estabelecesse, de forma mais estável, uma definição de poliedro e, consequentemente, a equação V–A+F=2 e sua prova nos moldes como hoje a vemos, em linhas gerais, nos materiais didáticos. Nas discussões entre professor e alunos vão surgindo posições conflitantes (muitas vezes defendidas por um mesmo aluno) e vão sendo engendrados modos de transcender conflitos num movimento de correções de fluxo que estabelece definições e formalizações que, embora sejam mais estáveis, foram obtidas como resultado de um longo e tortuoso processo de formulações e reformulações historicamente elaboradas e abandonadas. Mostra-se, assim, em resumo, que essas idas e vindas (em que se encadeiam proposições/conjecturas, experimentação, provas, exemplos, contraexemplos, refutações, do que resultam novas proposições/conjecturas, com novas experimentações, novas provas, exemplos e contra-exemplos etc) metaforizam como se dá a construção do conhecimento matemático.

Dentre os méritos de nossa comunidade científica não está, certamente, o cuidado com a tradução de seus clássicos, e o *Prova e Refutações* é um exemplo emblemático disso: a primeira versão inglesa da obra, na forma de livro, foi publicada pela Cambridge University Press em 1976 – dois anos após o falecimento de Lakatos – e a edição brasileira, hoje esgotadíssima, traduzida por Nathanael Caixeiro, surgiu, publicada pela Zahar Editores, já em 1978. Trata-se, entretanto, de uma edição ruim, menos pela tradução do que pelos inconvenientes de diagramação e revisão, com recurso gráficos muito singelos e que, até hoje, não foi nem republicada nem retraduzida. A tese de doutorado de Lakatos – o *Provas e Refutações*, mais propriamente – compõe a primeira parte do livro. A ela foram anexados pelos organizadores (J. Worral e E. Zahar) mais um texto e dois apêndices nos quais Lakatos trabalhava quando de sua morte prematura aos 51 anos.

As disposições do *Provas e Refutações*, bem como o que hoje chamamos mais genericamente de Falibilismo ou Quase-Empiricismo lakatosiano, exercem um enorme fascínio nos educadores matemáticos, principalmente por conjugar uma crítica ao formalismo a uma versão operacional muito bem executada e bem-sucedida da heurística de Polya, ele também um autor bastante referenciado, ainda hoje, nos estudos em Educação Matemática, mais especificamente no campo da Resolução de Problemas. Ainda que Lakatos tenha ocupado cargo de alto escalão no Ministério da Educação da Hungria, ele não trata de ensino de Matemática ou de Educação científica nesse seu texto mais conhecido. Quaisquer ilações nesse sentido são temerárias. Entretanto, como eu mesmo fiz em um artigo publicado em 1996, talvez seja possível listar algumas contribuições dessa obra para os estudos em Educação Matemática. Conhecer o *Provas e Refutações* pode motivar e fundamentar a aplicação da heurística de Polya para a sala de aula de Matemática, bem como pode servir de exemplo das potencialidades do uso da história como auxiliar didático-pedagógico. Além disso, o texto é um potente recurso para, ao menos, problematizar posições formalistas ao mesmo tempo em que traz elementos para se esboçar uma classificação do que seria uma matemática formal e uma matemática não-formal, ao optar pela segunda em situações de ensino. O texto ainda nos ajuda a criar uma contra-argumentação às posições que defendem o dogmatismo, o absolutismo, a certeza, a infalibilidade e a inquestionabilidade da Matemática.

Paul Ernest, entretanto, foi além. Seus estudos para criar as bases de uma Filosofia para a Educação Matemática o levam a ter Lakatos e Wittgenstein como centrais ao que ele chama de Construtivismo Social. Conjugar o Quasi-Empiricismo lakatosiano ao Convencionalismo de

Wittgenstein pode resultar em mistura um tanto indigesta para alguns. Davis e Tymoczko, autores aos quais já nos referimos, afirmam que as filosofias tradicionais do Logicismo, do Formalismo e do Intuicionismo são "teorias privadas" da Matemática (Ernest as classifica como Absolutistas) por descrever uma Matemática ideal (posto fiar-se na ideia de uma verdade absoluta). Sendo, porém, uma atividade social, a Matemática necessitaria de uma "teoria pública" ou, segundo Ernest, de uma teoria fundante embebida num Falibilismo que se aproveita das considerações linguísticas de Wittgenstein: o Construtivismo Social. O processo de Ernest é direto: analisando cada uma das filosofias da Matemática clássicas, ele pretende encontrar aquela que poderia servir à criação de uma Filosofia da Educação Matemática, que daria conta de alguns problemas tidos como essenciais para nortear a definição/delimitação de um campo específico de conhecimento. As filosofias absolutistas – aquelas de caráter privado, segundo a caracterização de Davis e Tymoczko – não passam no teste. Resta, então, amalgamar Falibilismo e Convencionalismo de modo a criar o Construtivismo Social como sendo a Filosofia da Matemática que servirá para apoiar a criação de sua Filosofia da Educação Matemática que traria respostas a questões como "O que é Matemática?", "Quais são seus objetos?", "Quais considerações filosóficas, ainda que implicitamente, fundam seu ensino e aprendizagem?", "Quais são as epistemologias e as teorias de aprendizagem assumidas?", "Quais os objetivos da Educação Matemática?", "São eles válidos?", "Para quem?", "Baseados em quais valores?", "Que meios são adotados para chegar a esses objetivos?", "São consistentes os fins e os meios?". Em outras palavras, ao empreender essa tarefa de propor uma Filosofia da Educação Matemática, Ernest busca inspiração, para compreender a Matemática da qual a Educação Matemática trata, nas Filosofias da Matemática. Certamente as Filosofias da Matemática podem nos falar sobre a Matemática, mas, do meu ponto de vista, é um equívoco acreditar que só as Filosofias "clássicas" da Matemática (o formalismo, o intuicionismo, o construtivismo, o logicismo, mesmo o falibilismo e o Convencionalismo) podem nos falar sobre a Matemática. Essas filosofias podem ainda menos falar sobre a Matemática da Educação Matemática. Mesmo o Quasi-Empiricismo lakatosiano, um dos fermentadores da Filosofia da Educação Matemática de Ernest, embora seja uma Filosofia falibilista da Matemática, está longe de desempenhar o papel de uma "teoria pública", como bem nos mostra Virgínia Cardoso. Embora Lakatos consiga, pautado no Falsificacionismo popperiano, denunciar a verdade absoluta como uma quimera, essa teoria continua sendo internalista e inadequada para servir como "base epistemológica em estudos na Educação Matemática que consideram (a) uma tendência humanizadora no ensino, (b) a relação entre Matemática e outros campos do saber e (c) a Matemática como produto cultural humano. Há que se repensar, portanto, o tributo que uma Filosofia da Educação Matemática, nesses termos propostos por Ernest, presta à Filosofia da Matemática (CARDOSO, 1998).

Em resumo...

Considerando a Educação Matemática como uma região interdisciplinar, cujo objeto é também, por sua vez, interdisciplinar, e cujas práticas são fronteiriças a diversas áreas, sendo impossível mesmo determinar como e em que medida cada uma dessas diferentes componentes influencia a Educação Matemática, e estando também em movimento um processo de desestabilização e corrosão de fronteiras, visando a criar poros que as dissolvam de modo a

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 20-32, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p20-32.id434

agregar à Educação Matemática novos objetos, métodos e abordagens teóricas, parece sensato perguntar: quais as vantagens de submeter-se a tributo tão caro exigido pelas filosofias clássicas da Matemática para constituir uma Filosofia da Educação Matemática que "nos explique"? A mim não parece ser nem possível, nem necessário ou adequado estabelecer tal Filosofia da Educação Matemática "de fora para dentro". Não é esse, penso eu, o caminho para resolver o deslizamento da prática científica sobre a prática pedagógica do qual tratei anteriormente. Cabe, então, propor uma Filosofia da Educação Matemática elaborada em um movimento indutivo-descritivo (GARNICA, 1999), originado nas práticas de ação tanto de professores quanto de pesquisadores do ensino de Matemática que, ao fim e ao cabo, objetivam produzir, cotidianamente – e efetivamente o fazem – Educação Matemática. Mas isso que poderíamos chamar de uma Filosofia Indutiva da Prática como uma Filosofia da Educação Matemática só tem já esboçadas algumas considerações iniciais, muito pouco sistematizadas, do que resulta que muitos outros textos devem ser pensados e escritos para melhor, ou minimamente, caracterizá-la.

Por fim, é importante reconhecer que, sendo papel da escola não meramente respeitar a diversidade, mas promovê-la, é urgente ampliar o papel da Educação Matemática no sentido de promover essa diversidade não apenas no que diz respeito ao entorno da escola, mas também internamente, no que diz respeito aos seus objetos, do que resultaria abraçarmos concepções distintas sobre o que a Matemática é e de como se cria e se sustenta uma Matemática escolar. Disso podem surgir novas Filosofias da Educação Matemática e pode mesmo surgir uma Educação Matemática que não seja refém de uma suposta Matemática que, como um farol a nos servir de referência, guia, mas compromete e limita, nossas práticas e perspectivas.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, 18, p.147-176, 1987.

BALDINO, R.R., A interdisciplinaridade na Educação Matemática. **Didática**, v. 26/27, pp. 109-121, 1991.

BICUDO, I. Análise não-standard. **BOLEMA**, 8, p. 60-67, 1992.

BOURBAKI, N. **Theorie des ensembles** (Livro I). Paris: Hennann & Cie, 1954.

CALVINO, I. **Por que ler os clássicos**. São Paulo: Cia das Letras, 1993.

CARDOSO, V.C. **As teses falibilista e racionalista de Lakatos e a Educação matemática**. 1998. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Rio Claro, 1998.

DAVIS, P. J. Fidelity in mathematical discourse: one plus one is really two? **The American Mathematical Monthly**, 79(3), p. 252-263, 1972.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics Education**. Nova Iorque: Falmer Press, 1991.

GARNICA, A.V.M. **É necessário ser preciso? É preciso ser exato? Um estudo sobre argumentação Matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação**. CURY, H.N. (org.). *Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada*. Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

GARNICA, V. M. (1999). **Filosofia da educação matemática: Algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa**. In M. A. BICUDO, M.A.V. (Org.) Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

GARNICA, A.V.M. Lakatos e a filosofia do Provas e Refutações: contribuições para a Educação Matemática. **Educação e Sociedade**, ano XVII, n. 56, pp. 431-451, 1996a.

GARNICA, A.V.M. Da literatura sobre a Prova Rigorosa em Educação Matemática: um levantamento. **Quadrante**, Vol. 5, n. 1, 1996b.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática**. 1995. Tese (Doutorado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Rio Claro, 1995.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, 21(1), p. 6-13, 1990.

HANNA, G. More than formal proof. **For the Learning of Mathematics**, 9(1), p. 20-23, 1989.

HANNA, G. **Rigorous proof in Mathematics Education**. Toronto: OISE Press, 1983.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

POPPER, K. **Conjecturas e Refutações**. Brasilia: UnB, 1972

POPPER, K. **A miséria do Historicismo**. São Paulo: Cultrix, 1993

SILVA, M. R. G. **Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática**. 1993. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Rio Claro, 1993.