Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Russell e Frege sobre a Lógica das Funções[1]

Bernard Linsky
University of Alberta
Edmonton, Canada[2]

RESUMO

Neste artigo eu comparo a teoria das funções Matemáticas de Russell, às "funções descritivas" do *Principia Mathematica* ∗30, com a conhecida explicação de Frege das funções como entidades "insaturadas". Russell analisa termos funcionais com funções proposicionais e a teoria de descrições definidas. Este é o principal papel técnico da teoria das descrições em Filosofia Matemática. No *The Principles of Mathematics* e alguns escritos inéditos anteriores a 1905, Russell ofereceu críticas explícitas ao relato de funções de Frege. Consequentemente, a teoria das descrições em "On Denoting" pode ser vista como uma parte crucial da maior redução logicista da Matemática de Russell, bem como uma excursão à teoria da referência.

Palavras-Chave: Russell. Frege. Lógica. Funções. Filosofia Matemática.

Russell and Frege on the Logic of Functions

ABSTRACT

In this article I compare Russell's theory of mathematical functions, the "descriptive functions" from *Principia Mathematica* ∗30, with Frege's well known account of functions as "unsaturated" entities. Russell analyses functional terms with propositional functions and the theory of definite descriptions. This is the primary technical role of the theory of descriptions in *PM*. In *The Principles of Mathematics* and some unpublished writings from before 1905, Russell offered explicit criticisms of Frege's account of functions. Consequently, the theory of descriptions in "On Denoting" can be seen as a crucial part of Russell's larger logicist reduction of mathematics, as well as an excursion into the theory of reference.

Keywords: Russell. Frege. Logic. Functions. Mathematical Philosophy

Russell y Frege sobre la lógica de funciones

RESUMEN

En este artículo comparo la teoría de las funciones Matemáticas de Russell, las "funciones descriptivas" de Principia Mathematica ∗30, con la conocida explicación de Frege de las funciones como entidades "no saturadas". Russell analiza términos funcionales con funciones proposicionales y la teoría de las descripciones definidas. Este es el papel técnico principal de la teoría de las descripciones en PM. En *The Principles of Mathematics* y algunos escritos inéditos anteriores a 1905, Russell ofreció críticas explícitas a la descripción de funciones de Frege. En consecuencia, la teoría de las descripciones en "Sobre la denotación" puede verse como una parte crucial de la mayor reducción logicista de las Matemáticas de Russell, así como una incursión en la teoría de la referencia.

Palabras clave: Russell. Frege. Lógica. Funciones. Filosofía Matemática.

[1] Este artigo foi traduzido por Iran Abreu Mendes, com fins didáticos para uso na formação de professores de Matemática.

[2] Agradecimentos a Allen Hazen, James Levine, Paul Oppenheimer e Ed Zalta pelas discussões do artigo, e aos participantes da conferência de Riga, em particular meus co-simpósios James Levine e Mike Beaney. Um ensaio complementar, "From Descriptive Functions to Sets of Ordered Pairs", foi apresentado no 31st International Wittgenstein Symposium em agosto de 2008, e no volume Reduction and Elimination in Philosophy and the Sciences, Alexander Hieke e Hannes Leitgeb eds., Ontos Verlag, 2009.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

Introdução

A teoria de descrições definidas de Russell, com suas noções de escopo e definição contextual, justificadamente ainda é uma teoria líder na filosofia da linguagem, mais de cem anos desde que foi publicada pela primeira vez em "On Denoting"[3] (Sobre Denotação) em 1905. Esta teoria foi certamente um paradigma inicial da filosofia analítica, e então, juntamente com a teoria do sentido e da referência de Frege, tornou-se uma das duas teorias clássicas de referência[4]. Atualmente o "On Denoting" vem sendo estudado a partir de um ponto de vista histórico como decorrente dos escrúpulos de Russell a respeito de sua própria teoria anterior de denotar conceitos. Como a teoria do sentido de Frege, no entanto, o papel da teoria das descrições no projeto logicista mais amplo não é bem compreendido. A teoria do sentido de Frege precede seu trabalho fundamental, o *Grundgesetze der Arithmetik*[5], em apenas alguns anos. Ao que parece, a teoria do sentido de Frege é justificadamente fundamental no desenvolvimento posterior da filosofia da linguagem, mas não é tão fundamental para o trabalho de sua própria vida: o projeto de reduzir a Matemática à lógica.

A teoria das descrições de Russell pode parecer similarmente uma digressão na filosofia da linguagem, por um filósofo cujo principal projeto era escrever um longo livro provando os princípios da Matemática a partir de definições, usando lógica simbólica. Neste artigo, meu objetivo é explicar uma das maneiras pelas quais as descrições definidas entram no projeto de escrita dos *The Principles of Mathematics*, a saber, em ∗30, referente às "Funções Descritivas". As funções descritivas são simplesmente funções Matemáticas comuns, como a função seno ou adição. O número ∗30 é a origem da noção agora familiar na lógica elementar de eliminar funções em favor de relações, e assim faz parte de nossa concepção de lógica elementar como um fim da lógica das relações, com a adição de termos complexos, incluindo símbolos de função, como um desenvolvimento extra e opcional. Desejo argumentar, no entanto, que essa maneira familiar de reduzir a lógica das funções apenas à lógica das relações, foi de fato um passo no projeto logicista de Russell, que ele tomou em oposição consciente ao uso de funções Matemáticas de Frege como uma noção primitiva, em sua lógica. Como tal, as "funções descritivas" foram importantes para a redução da Matemática à lógica por Russell.

As descrições definidas têm um papel importante na teoria de proposições de Russell, que foram elaboradas no *The Principles of Mathematics*, de 1903, em que Russell usa a teoria de denotar conceitos, que ele só substituiu em 1905, pela teoria de "On Denoting". As proposições em Princípios, são compostas de "termos" que incluem indivíduos e conceitos denotativos. Os constituintes predicativos das proposições, os termos introduzidos pelos predicados, quando tomados em extensão, desempenham o papel de classes. Esses conceitos, obviamente, são essenciais para a explicação lógica dos números naturais e de todas as outras entidades com as quais a Matemática lida. Os sujeitos das proposições são indivíduos, quando

[3] NT: Em 1905 Russell publicava um pequeno artigo chamado "On Denoting", no qual apresentou sua famosa teoria das descrições. Esta teoria tornou-se um verdadeiro paradigma da discussão na filosofia contemporânea. Consiste em um método de análise de descrições definidas (expressões do tipo "o tal-e-tal") e indefinidas (expressões do tipo "um tal-e-tal"). Mais detalhes ver **Sagid Salles Ferreira**: *Introdução à teoria das descrições de Russell*, in: Filosofia da linguagem, publicado em 18 de maio de 2010. https://criticanarede.com/descricoes.html.

[4] Ramsey (1931, 263 n) primeiro o chamou de "paradigma da Filosofia".

[5] NT: Leis Básicas da Aritmética.

DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

de fato são indivíduos sobre os quais fazemos julgamentos, embora, de maneiras mais gerais, denotam conceitos, que nos permitem julgar sobre termos que não conhecemos, como classes infinitas e, mais familiarizados de “On Denoting”, inexistentes, como o “quadrado redondo” ou o atual “Rei da França”[6]. Um relato adequado de descrições definidas, como um tipo especial de conceito denotativo, é, então, apropriado no pensamento preliminar e fundacional de Russell sobre a lógica à qual a Matemática deve ser reduzida. Embora apropriado em um relato de noções fundamentais de lógica, no entanto, um relato de descrições definidas não foi central para o desenvolvimento técnico de *The Principles of Mathematics*, que passou a se basear no conceito de função proposicional, e não nas proposições que são o centro das atenções em *The Principles of Mathematics*.

A teoria de descrições definidas de Russell também é importante para o projeto do *The Principles* como um modelo da técnica de definição contextual que é usada lá em ∗20 - “Classes”, para reduzir classes a funções proposicionais. A teoria das descrições em ∗12 é baseada em um par de definições contextuais, que permitem a eliminação de expressões para descrições definidas dos contextos em que ocorrem. A definição primária é:

$$*14{\cdot}01.\ [(\imath x)\phi x]\,.\,\psi(\imath x)\phi x\,.=:(\exists b):\phi x\,.\equiv_x.\,x=b:\psi b\ \ \mathrm{Df}$$

Isso pode ser parafraseado dizendo que ⌜o ϕ é ψ⌝ significa o mesmo como existe um *b* tal que qualquer *x* é ϕ se e somente se esse *x* é idêntico a *b*, e que *b* é ψ. Eis o contexto a partir do qual o descrição $(\imath x)\phi x$ deve ser eliminado. Que este é o “âmbito” do descrição é indicada pela ocorrência prefixada da descrição entre colchetes: $[(\imath x)\phi x]$. Esta definição permite a substituição das fórmulas nas quais aparecem descrições definidas é a posição do sujeito. Uma definição contextual adicional é fornecida para a ocorrência de descrições como, E! $(\imath x)\phi x$, que expressa a afirmação de que uma descrição é “própria”, ou seja, que existe exatamente um ϕ.

A segunda maneira pela qual a teoria das descrições definidas entra na redução logicista da Matemática em Principia Mathematica, é um modelo para a definição contextual semelhante de expressões de classe. Assim como as definições de ∗14 permitem a eliminação de descrições definidas de diferentes contextos, a teoria de classes em ∗20 é baseada em uma série de definições contextuais. Ocorrências de expressões de classe $\ulcorner\hat{z}(\psi z)\urcorner$, lidas como “a classe de *z* que são ψ”, podem ser eliminadas dos contextos *f* através da definição primária:

$$*20{\cdot}01\quad f\{\hat{z}(\psi z)\}.=:(\exists\phi):\phi!x\,.\equiv_x.\,\psi x:f\{\phi!\hat{z}\}\quad \mathrm{Df}$$

Dizer que a classe $\hat{z}(\psi z)$ é *f* é dizer que existe alguma função (predicativa) que é coextensiva com ψ que é *f*. Há nenhuma menção explícita de escopo, mas em todos os aspectos esta definição copia de perto a de descrições definidas[7] A definição de expressões de classe é

[6] NT: Essas são algumas expressões tomadas por Russel para discutir problema sobre o significado de expressões para uma análise proposicional relacionada a sua teoria das descrições.

[7] Leon Chwistek prestou atenção ao papel do escopo na teoria das não classes e o discutiu em seu artigo “The Theory of Constructive Types”, ver meu (Linsky 2009).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

completada por uma série de outras definições, incluindo aquelas que usam variáveis que abrangem classes, as "letras gregas" como as, que são usadas como variáveis vinculadas (aparentes) e livres (reais) para classes. Juntas, as definições de $*20$ proporcionam uma redução da teoria das classes à teoria das funções proposicionais. Uma consequência imediata dessa definição é que uma solução para o paradoxo de Russell é fornecida pelas restrições da teoria dos tipos. A "classe de todas as classes que não são membros de si mesmas", mediante análise, exige que uma função se aplique a outra função do mesmo tipo, o que é proibido pela teoria dos tipos. (Veja meu Linsky 2002.) Embora essa teoria das classes "sem classes" consiga resolver os paradoxos através da eliminação da conversa sobre classes em favor da conversa sobre funções proposicionais, é precisamente neste ponto que nos separamos do agora padrão, alternativo, projeto de fundar a Matemática na teoria axiomática dos conjuntos. Em vez de confiar na noção de função proposicional para explicar as classes, os filósofos que defendem a teoria axiomática dos conjuntos preferem a teoria dos conjuntos de primeira ordem, conforme formulada em uma das teorias axiomáticas padrão, como a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha, ZFC. As funções proposicionais, acredita-se, são obscuras e nem mesmo apresentadas como funções Matemáticas familiares de argumentos a proposições.

A próxima seção do Principia Mathematica, $*21$ "Teoria Geral da Relações" apresenta a extensão da teoria das "não classes" para a noção correspondente de relações binárias, a teoria das "relações em extensão". Por analogia com a forma como a teoria sem classes de $*20$ define uma expressão de classe $\hat{z}(\psi z)$ usando uma definição contextual, em $*21$ temos definições contextuais para eliminar expressões da forma $\hat{x}\hat{y}\,\psi(x,y)$, que representa a "relação em extensão" que se mantém entre x e y quando (x, y) obtém:

$$*21{\cdot}01.\ f\{\hat{x}\hat{y}\,\psi(x,y)\}\,.=\\ :(\exists\phi):\phi\,!(x,y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi(x,y):f\{\phi\,!(\hat{u},\hat{v})\}\quad \mathrm{Df}$$

A relação de x para ψ tem a propriedade f apenas no caso de alguma função predicativa ϕ, que é coextensiva com ψ tem a propriedade f. A partir de $*21$ em "Letras maiúsculas latinas", ou seja, 'R', 'S', 'T', etc., são reservados para essas relações em extensão. São variáveis, substituídas por expressões como $\hat{x}\hat{y}\,\psi\,!(x,y)$, "apenas", Whitehead e Russell dizem, ". . . como usamos letras gregas para expressões variáveis da forma $\hat{z}(\phi\,!z)$." (PM 201) Esses novos símbolos para relações em extensão são escritos entre variáveis, como em xRy ou uSv. Uma função proposicional precederia as variáveis, como em $\phi(x, y)$. (Não está claro como esta notação para relações em extensão seria estendida para relações de três ou quatro lugares. De fato, em geral abaixo, como quando se fala sobre a análise de relações em termos de conjuntos de pares ordenados, a discussão será sempre restrita a Deve-se notar, como Quine observou, que as funções proposicionais intensionais representadas por ϕ, e ψ, etc., abandonam aqui o desenvolvimento de Principia Mathematica, e que a partir deste ponto só encontramos relações em extensão , simbolizado por 'R', 'S', 'T', etc. (Quine 1963, 251).

Descrições definidas, embora, é claro, muito importantes para o desenvolvimento posterior da filosofia da linguagem, não aparecem explicitamente nas últimas seções do PM,

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

onde de fato o trabalho de reduzir a Matemática à lógica é realmente realizado. Na verdade, é depois de $*30\cdot01$ que os operadores de descrição, os conhecidos "iotas girados", desaparecem, tendo, eu diria, desempenhado sua função técnica mais importante. Estamos agora prontos para a terceira via pela qual a teoria das descrições definidas entra no projeto logicista dos Principia Mathematica, como chave para a definição das "Funções Descritivas", tema deste artigo. Isso toma a forma de mais uma definição, neste caso da expressão $R'y$, a ser lida como "o R de y":

$$*30\cdot01.\ R'y = (\imath x)\, xRy \quad \mathrm{Df}$$

A expressão $R'\,y$ é definida pela descrição definida, $(\imath x)\, xRy$. Se xRy significa "x é pai de y", então $R'\,y$ é "o x tal que x é pai de y", ou "o pai de y". Como Whitehead e Russell apontam, esta definição não é uma definição contextual, que mostra como a expressão $R'\,y$ deve ser eliminada de um contexto, como $\psi(R'\,y)$, mas simplesmente como uma instrução explícita sobre a substituição dos símbolos R', onde quer que ocorram. A noção de "função descritiva" fornece uma análise das ubíquas "funções Matemáticas" da aritmética e da análise que são reduzidas em números posteriores dos Principia Mathematica. Whitehead e Russell dizem:

> As funções consideradas até agora, com exceção de algumas funções particulares como ∩ , foram proposicionais, ou seja, tiveram proposições para seus valores. Mas as funções ordinárias da Matemática, como x^2, sen x, $log\ x$, não são proposicionais. Funções desse tipo sempre significam "o termo que tem tal e tal relação com x." Por essa razão, podem ser chamadas de funções descritivas, porque descrevem um determinado termo por meio de sua relação com seu argumento. Assim, "$sen\pi/2$" descreve o número 1; no entanto, as proposições nas quais o $sen\pi/2$ ocorre não são as mesmas que seriam se 1 fosse substituído por $sen\pi/2$. Isso aparece, por exemplo. da proposição "$sen\pi/2$= 1", que transmite informações valiosas, enquanto "1 = 1" é trivial. As funções descritivas, como as descrições em geral, não têm significado por si mesmas, mas apenas como constituintes de proposições (PM, 231)

As funções descritivas fornecem a análise de funções Matemáticas do Principia Mathematica, uma análise Logicista em termos das noções lógicas de relação em extensão e descrições definidas. Foi dito que Frege "matematizou" a lógica em preparação para sua análise da aritmética[8]. Essa matematização envolveu não apenas a invenção da lógica simbólica, mas também a confiança na noção Matemática de função como uma noção primitiva em sua lógica. Conceitos são funções de objetos para valores de verdade. A noção de Frege da extensão de um conceito é seu curso de valores, que é uma noção que se aplica a todas as funções. A noção de curso de valores está centralmente implicada no paradoxo de Russell, e assim é vista, como a teoria de Whitehead e Russell, como uma das tentativas malsucedidas dos logicistas de evitar postular conjuntos como entidades Matemáticas primitivas. A explicação das funções descritivas em $*30$, portanto, traz claramente, alguns podem pensar, as objeções primárias à versão do logicismo de Whitehead e Russell. Baseia-se em noções muito melhor compreendidas dentro da teoria Matemática dos conjuntos, pensa-se. Uma função, nesse sentido, é simplesmente um conjunto de pares ordenados, sendo os próprios pares ordenados conjuntos de um certo tipo, e uma função proposicional seria uma função de argumentos para proposições.

[8] As de Burton Dreben, segundo Peter Hylton (1993, n. 28).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

Como as proposições não são necessárias para a lógica extensional, de primeira ordem, na qual a teoria axiomática dos conjuntos é formulada, $*30$ resume assim o caminho errado tomado pela versão do logicismo de Whitehead e Russell.

No entanto, gostaria de sugerir que um exame do desenvolvimento da ideia de função na lógica de Frege e Russell até o início do século XX defenderá a noção de função descritiva como uma maneira bem-sucedida de reduzir a noção Matemática de funcionam apenas para noções lógicas. Com exceção de algumas observações, das notas de Russell sobre as obras de Frege, e seu artigo não publicado “On Meaning and Denotation” de 1903, esta revisão se baseia em material em Principles of Mathematics e seu Apêndice A, “On the Doctrines of Frege”, mas apresentado com uma ênfase diferente do habitual. Em particular, a ênfase estará nas funções Matemáticas habituais, como a função seno, ou adição, e sua redução na teoria axiomática dos conjuntos para conjuntos de pares ordenados, e menos com os tipos mais idiossincráticos de funções, como conceitos e funções proposicionais.

Frege em Funções

Embora seja correto dizer que Frege se baseia na noção de função Matemática como primitiva, isso não quer dizer que ele não forneceu uma análise lógica famosa e inovadora de expressões de função e variáveis. O artigo de Frege de 1891 “Função e conceito” e mais explicitamente seu artigo de 1904 “O que é uma função?” falar sobre a noção Matemática de função, da qual os conceitos são um caso especial. Frege explica a natureza das variáveis como sendo entidades linguísticas às quais podem ser atribuídos valores diferentes e não como sinais de “quantidades variáveis” como muitos as descreveram confusamente. A noção adicional de Frege de conceitos como “entidades insaturadas” que são completadas por objetos e produzem valores de verdade é bem conhecida. Uma função em geral, e funções Matemáticas entre elas, também se referirão a entidades insaturadas que produzem objetos como valores. Uma expressão de função, então, como $sen\ x$, x^2 e $log\ x$ terá como seu Bedeutung, ou referência a uma entidade insaturada que, quando aplicada a um número como argumento, produz um número como valor. O status lógico das expressões para funções é que elas são nomes “incompletos” para números. Assim como Frege teve problemas em até mesmo nomear conceitos como “o conceito cavalo”, similarmente há uma dificuldade em nomear funções[9]. sua natureza insaturada. A expressão ‘$sen\ (x)$ ’ realmente expressa um determinado número, o valor da função, para cada atribuição de um número à variável x. Fica claro a partir da discussão do problema de nomear conceitos que Frege teria rejeitado a notação lambda de Church como uma forma de nomear funções, por exemplo, com ‘$\lambda x\ sen\ x$’ como nomeando a função seno.

As opiniões de Russell sobre esse problema do “cavalo do conceito” estão no Apêndice aos Princípios da Matemática. Em §481 Russell concorda com Frege que é apenas “. . . alguns termos só podem ocorrer como sujeitos. . . ", em oposição à visão de Kerry de que "Begriffe também pode ocorrer como sujeitos . . . ", mas continua a discordar da alegação adicional de que eles são sujeitos que estão "na mesma relação" com seus predicados.

> Mas ele [Frege] passa a fazer um segundo ponto que aparece enganado. Podemos, diz ele, ter um conceito superior (como Sócrates cai sob o homem, ele quer dizer, não

[9] Frege introduz este problema em “Function and Concept”, (Frege 1891, 196).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

> como o grego cai sob o homem): mas em tais casos, não é o conceito em si, mas seu nome, que está em questão (BuG. p. 195). "O conceito de cavalo", diz ele, não é um conceito, mas uma coisa; o uso peculiar é indicado por aspas (ib. p.196). Mas algumas páginas depois ele faz declarações que parecem envolver uma visão diferente. Um conceito, diz ele, é essencialmente predicativo mesmo quando algo é afirmado dele: uma afirmação que pode ser feita de um conceito não encaixar um objeto. Quando se diz que uma coisa se enquadra em um conceito, e quando se diz que um conceito se enquadra em um conceito superior, as duas relações envolvidas, embora semelhantes, não são as mesmas (ib. p.201). É-me difícil conciliar estas observações com os da p.195; mas voltarei a este ponto em breve (PoM, 507).

Na próxima página, Russell discute o que é essencialmente a diferença no tipo lógico entre objetos e conceitos:

> Outro ponto de diferença de Frege, no qual, no entanto, ele aparece à direita, reside no fato de que não coloco nenhuma restrição à variação da variável, enquanto Frege, de acordo com a natureza da função, confina a variável às coisas. , funções de primeira ordem de uma variável, funções de primeira ordem com duas variáveis, funções de segunda ordem com uma variável e assim por diante. Há, portanto, para ele um número infinito de diferentes tipos de variabilidade. Isso decorre do fato de ele considerar distinto o conceito que ocorre como tal e o conceito que ocorre como termo, que eu (§49) identifiquei. Para mim, as funções, que não podem ser valores de variáveis em funções do primeiro ordem, são não entidades e abstrações falsas. (PoM, 508-9)

A observação de Russell de que Frege está "certo" nesta questão tem a ver com a divisão das funções proposicionais em tipos. Russell diz que "A contradição discutida no Capítulo X parece mostrar que algum mistério espreita na variação das funções proposicionais; mas para o presente a teoria de Frege de diferentes tipos de variáveis deve, penso eu, ser aceita." (PoM, 510).

Russell retorna ao "problema do cavalo do conceito" em §483, argumentando que Frege está simplesmente errado, e que os conceitos podem ser sujeitos de proposições. Ele diz:

> Frege, pode-se observar, não parece ter desembaraçado claramente os elementos lógicos e linguísticos da nomeação: o primeiros dependem da denotação, e têm, penso eu, uma alcance mais restrito do que Frege permite. (PoM, 510)

Isso está muito longe da visão contemporânea de que as funções são simplesmente conjuntos de pares ordenados. Em sua Introdução à Lógica Matemática, Alonzo Church consegue transformar a visão de Frege na visão atual padrão sobre a sintaxe lógica de expressões e termos de função. Church evita a fala de Frege de expressões de função tendo como referência (Bedeutung) alguma entidade insaturada (e não nomeável), que, quando saturada por um argumento, dá um valor. Em vez disso, encontramos:

> Se supusermos a linguagem fixa, toda forma singular (função expressão) tem a ela correspondente uma função f (que chamaremos a função associada do formulário) pela regra que o valor de f para um argumento x é o mesmo que o valor do formulário para o valor x da variável livre do Formato . . . (Igreja 1956, 19)

Esta conta evita as expressões "denotado" ou "designado", em vez de usar o neutro "correspondente a" e "associado a". Church deseja explicar a semântica das expressões de

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

função sem entrar em conflito com o problema do “cavalo do conceito” de Frege, dizendo que as expressões funcionais nomeiam funções. Mas este é o relato de Frege sobre a semântica. Church, e aqueles depois dele por algum tempo, tomaram a diferença de tipo entre funções e objetos, como uma diferença de tipo lógico. Foi apenas no final da década de 1930 que, seguindo Quine, tornou-se padrão ver a lógica como lógica de primeira ordem, e as relações e funções, por meio de sua redução a conjuntos de pares ordenados, como apenas objetos[10].
Se olharmos atentamente para a Lei Básica V do Grundgesetze, a lei que leva ao paradoxo, veremos que na verdade trata-se de funções em geral:

$$\vdash (\grave{\epsilon} f(\epsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

A expressão$\acute{\epsilon} f(\epsilon)$ tem como Bedeutung ou referente, o Werthverlauf, ou “curso de valores” da função f . A Lei Básica V diz assim que o curso dos valores de f é o mesmo que o curso dos valores da função g apenas no caso de os valores de f e g serem os mesmos para cada argumento a. No caso em que f é uma função de objetos para valores de verdade, e portanto um conceito, o curso de valores é naturalmente visto como a extensão do conceito, como uma classe. Mas para qualquer outro tipo de função, o curso de valores é um objeto, como o gráfico da função, o conjunto de pares de argumentos e valores. Para o caso especial dos conceitos, a Lei Básica V diz que as extensões são as mesmas quando os conceitos são coextensivos. É natural, então, que Russell tenha visto funções (Matemáticas) como figurando proeminentemente na explicação de termos de Frege e, portanto, em sua lógica.

Expressões de função para Frege também terão um sentido, embora ele não discute isso com muitos detalhes. Esse sentido fornecerá uma conexão entre o argumento de uma função e seu valor, presumivelmente, da mesma forma que o sentido de um nome fornece uma “rota para a referência” do nome. Enquanto as funções Matemáticas simplesmente mapeiam números em números, ainda há alguma noção da conexão entre os dois, incorporada no sentido da expressão da função. Russell, na margem de Grundgesetze §2 escreve “Qual é o Sinn de $\xi^2 = 4$? Essa é a pergunta mais intrigante[11].”

É possível que a noção do sentido de uma equação possa estar em o cerne do uso de Frege da distinção Sinn/Bedeutung na lógica. Por se uma expressão de termo funcional como '2' simplesmente tem como seu Bedeutung o valor de uma função para um argumento, então para o argumento 2 a expressão 'ξ^2' é simplesmente outro nome para 2 e, além disso, não há vestígios do argumento (ou função) no valor, 4, então a equação '2^2 = 4' é uma identidade trivial. '2^2 = 4' então não é diferente de '4 = 4.' Se expressões como '2^2 = 4' devem ser derivadas apenas de princípios lógicos, e isso é para revelar algo sobre o status das verdades aritméticas, então ser mais para as derivações do que uma série de identidades próprias (ou nomes para o Verdadeiro, que é, afinal, a Bedeutung de cada verdade lógica). Assim, pode-se ver a atenção às sentenças de identidade no início de “Ueber Sinn und Bedeutung” como não apenas uma amostra de um problema escolhido quase ao acaso, a atenção está na substituição de nomes pela

[10] Ver (Mancosu 2005, 335-9).
[11] Ver (Linsky 2004, 14).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

mesma referência nas sentenças 'a = . . . ’, mas realmente como dirigido às identidades, tão importante para a teoria das funções Matemáticas, e assim para uma defesa do interesse epistemológico na Matemática, se é de fato dedicado a sentenças e outras expressões com a Bedeutung que Frege diz que elas têm. Estranhamente, então, a pergunta aparentemente ingênua de Russell, “Qual é o Sinn de $\xi^2 = 4$?”, chega ao ponto exato da teoria do sentido, para justificar a explicação das expressões de função, na qual Frege se baseou.

De qualquer forma, então, seja como for que Frege fornece uma análise lógica das funções, incluindo tanto sua noção de entidades insaturadas quanto a noção de sentido, essa explicação é uma ajuda para entender as funções com as quais os matemáticos já estavam familiarizados.

As críticas de Russell a Frege

Há pouco suporte textual direto para minha tese de que a insatisfação de Russell com a noção de função de Frege se deveu ao fato de ela ser insuficientemente logicista. Nos primeiros escritos de Russell há pouca atenção a uma demarcação entre lógica e Matemática, ou atenção se uma noção é lógica ou não[12]. automaticamente uma conta logicista. Existem objeções à teoria das funções de Frege, no entanto, expressas no Apêndice A aos Princípios da Matemática, e elas podem ser lidas sob essa luz. Assim temos:

> noção de uma função, que à primeira vista pode parecer mais simples. Se $f(x)$ não é uma função proposicional, seu valor para um dado valor de x ($f(x)$ sendo assumido como um valor) é o termo y que satisfaz a função proposicional $y = f(x)$, ou seja, satisfaz, para o valor dado de x, alguma proposição relacional; esta proposição relacional está envolvida na definição de $f(x)$, e alguma dessas funções proposicionais é requerida na definição de qualquer função que não seja proposicional. (PoM, 508)

Russell aqui afirma que a noção de denotação e, portanto, de função descritiva, é pressuposta na noção Matemática de uma função na expressão do valor de uma função. Críticas específicas da conta de funções seguem na próxima página:

> A definição geral de Frege de uma função, que também pretende abranger também funções que não são proposicionais, pode se mostrar inadequada ao considerar o que pode ser chamado de função idêntica, ou seja, x como uma função de x. Se seguirmos o conselho de Frege e removermos x na esperança de deixar a função, descobriremos que nada resta; contudo, nada não é o significado da função idêntica. (PoM, 509)

A objeção é que a metáfora de Frege para a incompletude, a lacuna em uma expressão denotativa, não pode explicar a função identidade, que recebe x como argumento e retorna x como valor. Uma equação, ‘$f(x) = x$’ pode expressar tal função, mas uma expressão que denota diretamente o valor, com o argumento excluído. Mas, argumenta Russell, as equações

---

[12] Assim, sua primeira reação ao ver a análise de Frege do ancestral em termos puramente lógicos foi simplesmente chamá-la de “. . . engenhoso: é melhor que a indução de Peano.” (Linsky 2004-5, 137). Assim, o que vemos como uma explicação logicista da indução à herança de propriedades hereditárias foi descrito por Russell como meramente melhor do que assumir um axioma de indução. Ainda assim, Russell adotou a análise de Frege imediatamente, e mais tarde a descreveu como um passo essencial no programa logicista.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

pressupõem um conceito denotativo, "o" valor de uma função. Russell continua suas críticas mais adiante nessa página:

> Frege deseja que os lugares vazios onde o argumento deve ser inserido sejam indicados de alguma forma; assim ele diz que em $2x^3 + x$ a função é $2(\,)^3 + (\,)$ Mas aqui sua exigência de que os dois lugares vazios sejam preenchidos pela mesma letra não pode ser indicada; não há como distinguir o que queremos dizer da função envolvida em $2x^3 + y$. (PoM, 509)

A fala de Frege de expressões para funções como incompletas, sugeridas por um buraco ou ponto vazio, não explica o papel das variáveis em expressões de função. Mais tarde, com o cálculo lambda de Church, ficou claro que as variáveis em expressões funcionais devem ser vistas como variáveis vinculadas. $\lambda x\ 2x^3 + x$ é claramente distinguido de $\lambda x \lambda y\ 2x^3 + y$. Há mais na análise lógica de expressões de função do que a insaturação de funções[13].

> O fato parece ser que queremos a noção de qualquer termo de uma determinada classe, e que é isso que nossos lugares vazios realmente representam. A relação, como entidade única, é a relação (6) . . . acima [a relação do membro da classe . . . ao valor que a variável tem nesse membro]; podemos então considerar qualquer relatum dessa relação, ou a afirmação de todos ou alguns dos relata, e qualquer relação pode ser expressa em termos do referente correspondente, como "Sócrates é um homem" é expresso em termos de Sócrates. Mas o aparato formal usual do cálculo das relações não pode ser empregado, porque pressupõe funções proposicionais. Podemos dizer que uma função proposicional é uma relação muitos-um que tem todos os termos para a classe de seus referentes e tem seus relata contidos entre proposições: ou, se preferirmos, podemos chamar a classe de relata de tal relação de função proposicional. Mas o ar de definição formal sobre esses enunciados é falacioso, pois as funções proposicionais são pressupostas na definição da classe de referentes e relata de uma relação. (PoM, 509)

Russell aqui se opõe a dizer que as funções proposicionais são funções de indivíduos para proposições, alegando que essa é uma explicação circular, "uma vez que as funções proposicionais são pressupostas na definição da classe de referentes e relata de uma relação". Mas ele também sugere que a explicação de variáveis em expressões de funções também envolve denotação. Os "lugares vazios" em uma expressão de função realmente representam "qualquer termo" de uma determinada classe. "Qualquer" é uma das classes de expressões denotativas analisadas em "On Denoting", com as próprias variáveis permanecendo entre as últimas, não analisadas, expressões denotativas quando as descrições definidas e indefinidas foram eliminadas. Russell aqui argumenta que o papel das variáveis em expressões de função é entendido se elas forem analisadas usando funções proposicionais.

Como Frege sustenta que as expressões de função são simplesmente expressões denotativas incompletas, também podemos olhar para as objeções de Russell à teoria das descrições de Frege e outras "expressões denotativas" em "On Denoting" e em outros lugares para ver suas outras objeções. Além dos problemas do argumento da "Elegia de Gray", que

---

[13] Philip Ebert salientou que em Grundgesetze, Frege usa as letras gregas e apenas para esse fim. De fato, Russell copia essa notação em sua pergunta "Qual é o Sinn de 2 = 4?". Claramente, Russell está criticando o uso de parênteses em torno de um espaço em branco em "Function and Concept", e afirmando que a noção de insaturação por si só não dará conta de todas as propriedades das funções de vários argumentos.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

parecem ter algo a ver com o problema de se referir a funções, o principal problema com a visão de Frege são as dificuldades com descrições impróprias. De fato, como argumentei com F.J. Pelletier (Pelletier & Linsky 2005), não está claro qual das quatro teorias diferentes de descrições impróprias é a visão oficial de Frege. Assim, eu concluiria que, apesar das realizações dos artigos de Frege em explicar o status lógico das expressões de função, foi a insatisfação de Russell com essa mesma análise, centrada no problema das descrições impróprias, que incorpora suas objeções à prioridade, ou status primitivo, de funções Matemáticas.

Em vez de simplesmente dar conta de funções parciais, de modo que 'dividir por 0' seja tratado como se referindo ao atual rei da França, na verdade a noção de função descritiva desempenha um papel mais importante no logicismo de Russell, na medida em que permite a redução de uma noção Matemática, ainda primitiva na obra de Frege, a noções lógicas. Embora talvez enigmáticas aos nossos olhos, quando comparadas com funções Matemáticas, as funções proposicionais de Russell eram centrais para sua lógica e, assim, argumentarei, centrais para seu logicismo.

A visão de Russell sobre a relação entre funções Matemáticas e funções proposicionais, ou relações, não são primariamente dirigidas por uma reação a Frege. Eles parecem ter sido motivados independentemente e desenvolvidos antes do encontro mais cuidadoso de Russell com Frege no verão de 1902. Considere o seguinte de “On Meaning and Denotation”, de 1903:

> Se tomarmos a denotação como fundamental, a maneira natural de afirmar uma relação muitos-um não será xRy, mas $y = \phi x$. Esta, é claro, é a maneira Matemática usual; e há muito a ser dito sobre isso. Todas as funções comuns, como x^2, $sen\, x$, $log\, x$, etc., parecem ocorrer mais naturalmente nesta forma do que como $\imath\breve{R}|x$. Novamente, em linguagem comum, “y é o pai de x” claramente afirma uma identidade, não uma relação: é “y = o pai de x”. (CP4, 340)
>
> Mas se considerarmos as funções proposicionais como fundamentais – como sempre fiz, primeiro conscientemente e depois inconscientemente – devemos proceder através das relações para chegar às funções ordinárias. Pois então começamos com funções comuns como “x é um homem”; estas são originalmente as únicas funções de uma variável. Para obter funções de outro tipo, temos que passar por xRy; mas então, com , temos todos os problemas de denotação. E, como vimos, uma forma de denotar mais difícil do que está envolvida no uso de variáveis para começar. Assim, a denotação parece impossível de escapar (CP4, 340).

Então, Russell vê funções proposicionais, ou melhor, relações, como mais fundamentais do que funções Matemáticas. De fato, ele adotou essa posição com tanta certeza que se tornou “inconsciente” em algum momento. No entanto, Russell vê a mudança para as relações como problemática, exigindo uma explicação adequada da denotação. Assim, embora Russell possa ter achado as funções proposicionais mais básicas do que as funções Matemáticas, até resolver o problema da denotação (em “On Denoting” em 1905), ele não estava justificado em pensar que havia explicado o menos óbvio em termos das mais básicas, em vez disso, a redução das funções Matemáticas levou diretamente ao seu grande problema que o preocupava naqueles dias, o problema da denotação.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 41, p. 63-75, Maio-Ago., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n41.p63-75.id436

Com uma teoria própria de denotar, em particular, a teoria das descrições de $*12$ de Principia Mathematica, Whitehead e Russell estão então prontos para completar a análise logicista das funções Matemáticas como “funções descritivas” em $*30$.

Referências

Church, Alonzo. 1956. **Introduction to Mathematical Logic**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Frege, Gottlob. 1891. ‘Funktion und Begriff’, translated as ‘Function and Concept’. In **Collected Papers** [1984], 137–156.

Frege, Gottlob. 1893. **Grundgesetze der Arithmetik**. Jena: Hermann Pohle. Reprinted Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1998.

Frege, Gottlob. 1904. ‘Was ist eine Funktion?’, translated as ‘What is a Function?’ In **Collected Papers** [1984], 285–292.

Frege, Gottlob. 1984. **Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy**, ed. Brian McGuiness. Oxford: Basil Blackwell.

Hylton, Peter. 1993. ‘Functions and Propositional Functions in *Principia Mathematica*’. In A. D. Irvine & G. A.Wedeking (eds.) **Russell and Analytic Philosophy**, 342–360. Toronto: University of Toronto Press.

Linsky, Bernard. 2002. ‘The Resolution of Russell’s Paradox in Principia Mathematica’. In James E. Tomberlin (ed.) Language and Mind, No. 16 in **Philosophical Perspectives**, 395–417. Boston and Oxford: Blackwell.

Linsky, Bernard. 2004. ‘Russell’s Marginalia in his Copies of Frege’s Works’. **Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies** n.s. 24: 5–36.

Linsky, Bernard. 2004-5. ‘Russell’s Notes on Frege for Appendix A of The Principles of Mathematics. **Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies** n.s. 24(2), Winter 2004-05: 133–72.

Linsky, Bernard. 2009. ‘Leon Chwistek’s Theory of Constructive Types’. In Wioletta Miskiewicz Sandra Lapointe, Mathieu Marion & Jan Wolenski (eds.) **The Golden Age of Polish Philosophy**: Kaziemierz Twardowski’s Philosophical Legacy, Springer Verlag.

Mancosu, Paolo. 2005. ‘Harvard 1940-1941: Tarski, Carnap and Quine on a Finitistic Language of Mathematics for Science’. **History and Philosophy of Logic** 26: 327–357.

Pelletier, F.J. & Linsky, B. 2005. ‘What is Frege’s Theory of Descriptions?’ In G. Imaguire & B. Linsky (eds.) **On Denoting: 1905-2005**, 195–250. Munich: Philosophia Verlag.
Quine, Willard van Orman. 1963. **Set Theory and Its Logic**. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Ramsey, Frank Plumpton. 1931. **The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays**, ed. R.B. Braithwaite. London: Routledge, Kegan and Paul.

Russell, Bertrand. 1905. **On Denoting**. *Mind* 14 (Oct. 1905): 479–93. Reprinted in [CP4], 415-427.
Russell, Bertrand. CP4. Foundations of Logic 1903-1905, **The Collected Papers of Bertrand Russell**, vol. 4, ed. Alasdair Urquhart. London and New York: Routledge, 1994.

Russell, Bertrand. PoM. **Principles of Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

Whitehead, A.N. & Russell, B.A. PM. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 3 vols, 1910-13, 2nd ed, 1925-27.