Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Mediación del GeoGebra en la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones

Verónica Neira Fernández[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

Tito Nelson Peñaloza Vara[2]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

El presente artículo se basa en la investigación de Bejarano V. y Neira F. (2020), el cual se basa en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los estudiantes, cuando resuelven una tarea propuesta sobre el límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico. Analizaremos una de las actividades en la cual la mediación del GeoGebra permite la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones. Los participantes son estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima-Perú. Ampliaremos el análisis de la actividad presentada en el artículo de la investigadora para evidenciar que, el estudiante Julio articula estas aprehensiones mediante la mediación del GeoGebra.
Palabras clave: Límite de funciones, aprehensiones, GeoGebra, registro gráfico.

Mediation of GeoGebra in the articulation of apprehensions in the study of function limits

ABSTRACT

This article is based on the research of Bejarano V. & Neira, F. (2020), which is based on aspects of the Theory of Semiotic Representation Registers to analyze the articulation of perceptual, discursive and operative apprehensions developed by students when they solve a proposed task on the limit at a point of a real function of real variable, in the graphical register. We will analyze one of the activities in which the mediation of GeoGebra allows the articulation of apprehensions in the study of the limit of functions. The participants are students (17 to 21 years old) of Occupational Safety and Health Engineering at a public university in Lima-Peru. We will expand the analysis of the activity presented in the researcher's article to show that the student Julio articulates these apprehensions through the mediation of GeoGebra.
Keywords: Limit of functions, apprehensions, GeoGebra, graphic register.

[1] Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional Enrique Guzmán del Valle (UNE). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA). Lima, Perú. Endereço para correspondência: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2540-3530. E-mail: vneira@pucp.pe.

[2] Magíster en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA). Lima, Perú. Endereço para correspondência: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-9682 . E-mail: npenalozav@pucp.pe.

Mediação do GeoGebra na articulação de apreensões no estudo dos limites de função

RESUMO

Este artigo é baseado na pesquisa de Bejarano V. e Neira, F. (2020), que se baseia em aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para analisar a articulação das apreensões perceptivas, discursivas e operacionais que os estudantes desenvolvem quando resolvem uma tarefa proposta sobre o limite em um ponto de uma função real de variável real, no registro gráfico. Vamos analisar uma das atividades nas quais a mediação do GeoGebra permite a articulação de apreensões no estudo do limite de funções. Os participantes são estudantes (17 a 21 anos) de Engenharia de Segurança e Saúde Ocupacional em uma universidade pública de Lima-Peru. Vamos ampliar a análise da atividade apresentada no artigo do pesquisador para mostrar que o estudante Julio articula estas apreensões através da mediação do GeoGebra.

Palavras-chave: Limite de funções, apreensões, GeoGebra, registro gráfico.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, existen investigaciones sobre límite de funciones, las cuales muestran la dificultad que presentan los estudiantes para entender la noción del límite de una función, las carencias en la coordinación de registros y la importancia de usar un software (GeoGebra) para realizar transformaciones en representaciones gráficas.

Tomás (2014), en su investigación tiene como objetivo analizar cómo las diferentes formas de representación semiótica de este objeto matemático, influyen en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación; el autor concluye que, usar diferentes sistemas de representación en la enseñanza de la noción del límite puede ayudar a los estudiantes a consolidar este concepto.

Con respecto al objeto matemático tenemos a Londoño, Narro y Vera (2014) quienes concluyen que los estudiantes tienen un mejor desempeño al usar el registro algebraico. Según las autoras, esto conlleva a que el concepto de límite de funciones no sea identificado en otros registros de representación. Por otra parte, Caglayan (2015) realiza una investigación con un enfoque basado en pruebas visuales para ayudar a comprender el concepto de límite de una función en un entorno de representaciones dinámicas; el autor concluye que GeoGebra es una herramienta que facilita que los estudiantes entiendan, exploren y obtengan experiencias en la observación de los límites y sus propiedades.

En base a estas investigaciones, Bejarano (2018) y Bejarano y Neira (2020) manifiestan que existe una preocupación, por parte de los investigadores, en estudiar la concepción que tienen los estudiantes con respecto a la noción del límite de una función en los distintos registros de representación semiótica, y resalta la importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza del límite de funciones. Su foco fue analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria para movilizar la noción del límite de una función real de variable real, que realizan los estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima. Toma como base algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y, un estudio de caso basado en Martinez (2006) como metodología de una investigación cualitativa. Para el presente artículo, consideraremos el análisis de la producción del estudiante Julio, cuya información fue triangulada con fichas de recojo de información, archivos de GeoGebra y grabación de la pantalla del computador con el uso del programa Camtasia Studio 8.

Con respecto al uso del GeoGebra, tenemos a Peñaloza y Salazar (2018) en su investigación sobre las aprehensiones y modificaciones, en el registro gráfico dinámico (RGD), que se desarrollan en un ambiente de representaciones dinámicas como el GeoGebra, el cual. se basa en aspectos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas. Se configura el RGD con representaciones del paraboloide elíptico y se analizan las aprehensiones y modificaciones. Los autores concluyen que la Vista Gráfica del GeoGebra, permite realizar tratamientos, modificaciones y desarrollo de aprehensiones en los sujetos, así como establecer conjeturas y construcción de significados los cuales creemos que serían mejor asimilados en un medio de representaciones dinámicas.

También Muela Pillajo (2020), en su investigación se centró en analizar de qué manera se puede usar el software GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite para estudiantes de Bachillerato General Unificado. Se basó en la teoría APOE de Dubinsky en lo que se refiere a la descomposición genética del concepto de límite de una función. Se aplicó un instrumento compuesto por cinco tareas didácticas que cuenta con preguntas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma Geogebra.org. Uno de los principales hallazgos encontrados en esta investigación es la facilidad de comprensión que supone para los estudiantes el sistema de representación gráfica en comparación con los otros sistemas de representación. La autora concluye que el GeoGebra presenta unas características y recursos que resultan de gran utilidad pues presenta un enfoque dinámico, activo y participativo para la concepción dinámica del concepto de límite.

Todas estas investigaciones evidencian que hay una preocupación por mejorar el aprendizaje de los límites de funciones y de apoyarse en un software matemático que permita dotar de dinamismo a las representaciones del objeto estudiado, ya que hay una predominante postura en tratar la parte algebraica cuando se enseña este tema y, según los autores, el GeoGebra tiene las herramientas y los medios necesarios para apoyar al docente en su labor educativa conectando las representaciones algebraicas con las gráficas.

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Sea *f* una función definida en cada número *x* de algún intervalo abierto que contiene a "*a*", excepto posiblemente en el número *"a"* mismo. El límite de *f*(*x*) conforme *x* se aproxima a *a* es *L*, lo que se escribe como: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Límites laterales

Definición: Sea *f* una función definida en cada número x_0 de un intervalo abierto *⟨a,c⟩*. Entonces: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, se usa para denotar que *L* es el límite derecho de *f* en x_0.

Definición: Sea *f* una función definida en cada número x_0 de un intervalo abierto *⟨a,c⟩*. Entonces: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, se usa para denotar que *L* es el límite izquierdo de *f* en x_0.

Teorema: El $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a *L* si y sólo si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existen y son iguales.

Límites infinitos

Definición: Sea *f* una función definida en cada número *x* de algún intervalo abierto *I* que contiene a a, los valores de *f(x)* crece sin límite conforme *x* tiende a a, es decir *f(x)* puede hacerse tan grande como se desee para todos los valores suficientemente cercanos a a, pero sin considerar el valor a. Entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Definición: Sea *f* una función definida en cada número *x* de algún intervalo abierto *I* que contiene a a, los valores de *f(x)* decrecen sin límite conforme *x* tiende a a, es decir *f(x)* puede hacerse tan pequeño como se desee para todos los valores suficientemente cercanos a a, pero sin considerar el valor a. Entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Nota: El $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se puede leer como el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a a es más infinito, pero este límite no existe y que el símbolo +∞ solo indica el comportamiento de los valores de la función *f(x)* conforme *x* se aproxima cada vez más a a. Del mismo modo sucede con: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Definición de asíntota vertical

La recta *x*=*a* es una asíntota vertical de la gráfica de la función *f* si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$i.\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$ii.\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Continuidad de una función en un número

Una función *f* es continua en un número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$i.\ f(a) \text{ existe}$$

$$ii.\ \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe}$$

$$iii.\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función *f* es discontinua en a.

ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En la presente investigación, tomamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (2004) en la cual el autor manifiesta que:

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lengua natural, fórmula algebraica, gráfico, figura

geométrica.) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (p.14).

Según Duval (2012), los objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción, y por ello es necesario representarlos. De acuerdo con el autor, para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe cumplir tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: Formación, tratamiento y conversión.

La formación implica la selección de un conjunto de caracteres perceptibles y que son identificables como representación de lo que se quiere representar, dichos caracteres pueden ser signos diversos tales como puntos, paréntesis, números, relaciones de equivalencia, signos de agrupación, etc. El tratamiento ocurre cuando se realiza una transformación de la representación permaneciendo ésta en el mismo registro de representación, y llevándose a cabo por medio de las leyes propias de la representación; por ejemplo, una reconfiguración figural es un tipo de tratamiento para las figuras geométricas, y se realiza para resolver un problema que requiera información adicional obtenida por medio de dichas transformaciones. La conversión sucede cuando una transformación realizada a una representación de un registro, produce una nueva representación en un registro distinto a la inicial, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial, pudiendo realizarse esta transformación en un solo sentido o en ambos sentidos.

Según Duval (2004), existen cuatro tipos de registros que permiten estas actividades cognitivas, las cuales se resumen en el Cuadro 1:

Cuadro 1 – Clasificación de los registros de representación discursiva y no discursiva

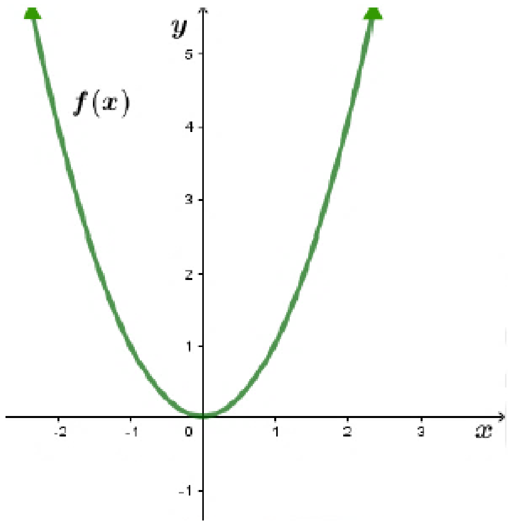
Registros de representación discursiva	**Registros de representación no discursiva**
Lengua Natural: ● Asociaciones Verbales (conceptos) ● Forma racional: - Argumentación a partir de observaciones, creencias. - Deducciones válidas a partir de uso de definiciones o teoremas.	Figuras geométricas planas o en perspectiva: ● Aprehensión operatoria y no sólo perspectiva. ● Construcción con instrumentos.
Sistemas de escritura: ● Numéricos (binarios, decimal, fraccionaria…). ● Algebraicos; simbólicas (lenguas formales). ● Cálculo.	Gráficos cartesianos: ● Cambios de sistemas de coordenadas. ● Interpolación, extrapolación.

Fuente: Bejarano (2018, p. 27)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

Para el presente estudio, consideramos los siguientes registros de representación semiótica: registro en lengua natural, registro algebraico y registro gráfico. Según Bejarano (2018) los tipos de representaciones del límite de funciones en los registros de representación semiótica señalados se muestran en el Cuadro 2

Cuadro 2 – Registros de representación semiótica para límites de funciones

Registros de Representación para límite en un punto de una función real de variable real	
Registro de lengua natural	El límite de la función cuadrática cuando la variable independiente se aproxima a dos es cuatro
Registro algebraico	$\lim_{n \to 2} x^2 = 4$
Registro gráfico	 El límite de la función f cuando x se aproxima a 2, es 4

Fuente: Bejarano (2018, p. 28)

Según Duval (1994), una aprehensión es la acción de aprehender; es decir, comprender un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un determinado registro. Además, manifiesta que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural en Geometría, según su rol: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria, aprehensión discursiva y aprehensión secuencial. El autor manifiesta que la aprehensión perceptiva es la primera que aparece en el proceso cognitivo del estudiante y permite identificar o reconocer inmediatamente una forma u objeto matemático en el plano o en el espacio mediante la visión y de manera inconsciente. En el caso de las representaciones geométricas, también se presentan otras figuras geométricas y elementos secundarios que permiten definir o delimitar la representación mayor, las cuales según el autor se denominan unidades figurales o variables visuales.

Ingar (2014) ejemplifica la aprehensión perceptiva dada por Duval en el aprendizaje de la geometría plana elemental, y lo adapta para la aprehensión perceptiva en el registro gráfico de funciones, para el estudio de visualización de los valores máximo y mínimo locales de

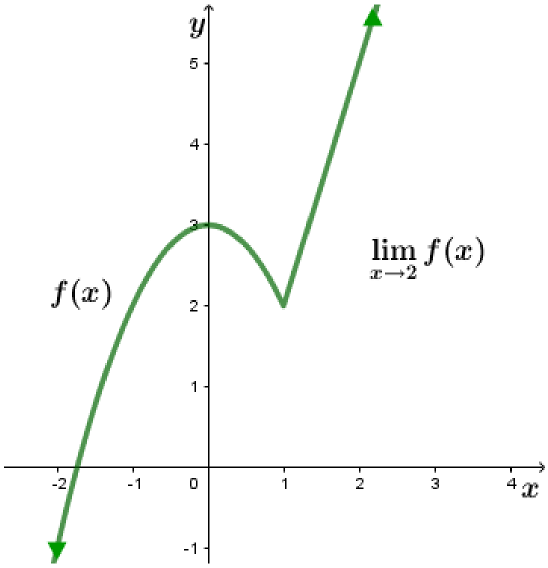
REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

funciones en dos variables reales. Peñaloza (2016) también aplica la definición dada por Duval para el desarrollo de la aprehensión perceptiva en la representación gráfica del paraboloide (circular y/o elíptico) en su respectivo estudio.

Bejarano (2018) adapta la aprehensión perceptiva a una función real de variable real y menciona que, si un estudiante reconoce que una representación gráfica dada en una tarea sobre funciones corresponde a la representación de una función real de variable real, entonces podemos afirmar que el estudiante desarrolló una aprehensión perceptiva y para ello debe identificar que hay una variable independiente y otra dependiente, así como reconocer los valores que asumen cada una de estas variables (lectura de los ejes coordenados), tal como se aprecia en el Cuadro 3.

Cuadro 3 – Aprehensión perceptiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión perceptiva de $f(x) = 5$



- $f(x)$ es una función real de variable real.
- $f(x)$ es una función por tramos.
- $f(x)$ es una función continua.
- $f(2) = 5$

Fuente: Bejarano (2018, p. 29)

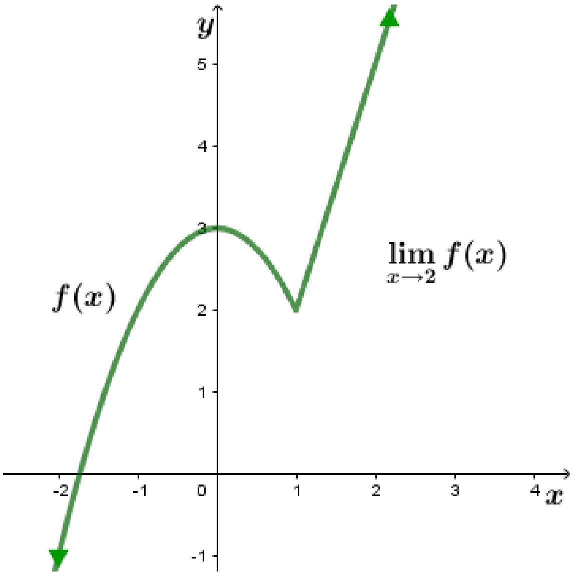
De acuerdo con Duval (1994), la aprehensión discursiva en una representación figural es la acción mediante la cual el sujeto relaciona la representación del objeto matemático con propiedades matemáticas que no están dadas de forma explícita en la figura tales como teoremas, axiomas y propiedades, las cuales se evidencian mediante trazos, construcciones auxiliares, cálculos y/o procedimientos heurísticos que faciliten el desarrollo del discurso encaminado a realizar demostraciones o pruebas de la propiedad matemática.

Según Bejarano (2018), si el estudiante logra identificar propiedades relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real, que no están explicitas en la representación gráfica de la función, por ejemplo, el dominio de la función, el tipo de discontinuidad, entre otros, de tal manera que le permita calcular y analizar el límite en un punto de esta función real de variable real, se puede afirmar que el estudiante desarrolla una aprehensión discursiva como se aprecia en el Cuadro 4:

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

Cuadro 4 – Aprehensión discursiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión discursiva de $f(x) = 5$



- $Domf(x) = R$
- $f(x) = 5$
- $f(x) = 5$
- $f(x)$ existe y es 5 porque tiene los límites laterales iguales (teorema de la existencia de límite).

Fuente: Bejarano (2018, p. 30)

Según Duval (1994, p. 126), “Una figura proporciona una ayuda heurística. En tanto, una de sus modificaciones posibles muestra la idea de una solución”. El autor menciona que una aprehensión operatoria se da cuando se modifica la figura variando su dimensión. Esta consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial y esta queda transformada en otra llamada imagen.

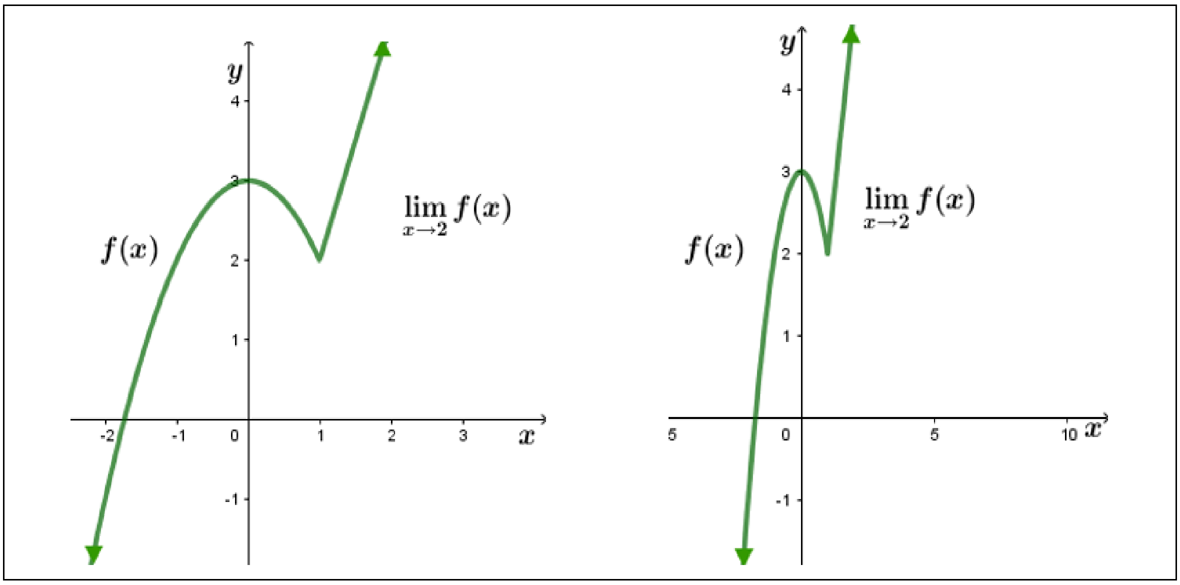
Por otro lado, para una representación en el registro gráfico mediante un ambiente de representaciones dinámicas tal como el GeoGebra 3D, Peñaloza (2016) menciona lo siguiente:

> El sujeto realiza una modificación óptica al utilizar las herramientas Alejar y Aproximar en GeoGebra 3D, con el propósito de que los elementos y características de la representación gráfica del paraboloide puedan ser reconocidos y estudiados con mayor detenimiento mediante acercamientos o alejamientos. (p. 32)

Bejarano (2018), considera que la modificación en el registro gráfico será la modificación óptica al realizar una variación de la dimensión de los ejes coordenados X e Y, el cual permitirá al estudiante analizar y estudiar conceptos relacionados al límite en un punto de una función real de variable real, donde usando las herramientas alejar, aproximar o desplazamiento de GeoGebra se cambia la dimensión de los ejes, tal como se aprecia en la Figura 1, que usando la herramienta desplazamiento vertical la dimensión del eje X cambia de uno a cinco. Con este tipo de modificación, el sujeto puede considerar valores cercanos al punto de análisis de límite, y construir significados.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

Figura 1 – Modificación óptica de una función por variación de la escala de los ejes coordenados



Fuente: Bejarano (2018, p. 31)

Según Peñaloza (2016), un sujeto realiza una modificación posicional en una representación gráfica realizada en GeoGebra 3D, cuando se realizan traslaciones y rotaciones de la vista gráfica donde está representado el objeto, manteniéndose la forma y cambiando únicamente la posición de la representación del objeto respecto del observador (sujeto). Las herramientas de GeoGebra que permiten esta modificación son Rota la Vista Gráfica 3D y Desplaza Vista Gráfica, y son útiles para reconocer partes de la representación no accesibles a primera vista.

Según Duval (1994), el desarrollo de las aprehensiones se realiza de manera natural y espontánea, y puede desarrollarse más de una a la vez. En el estudio de la geometría, el autor sostiene que, para reconocer una representación figural como tal, el sujeto debe desarrollar la aprehensión perceptiva y al menos otro tipo de aprehensión, en ese sentido, Bejarano (2018; 2020) en la fase experimental de su estudio presenta actividades en relación al límite de funciones en un punto que permitan a los estudiantes desarrollar más de una aprehensión.

Así mismo, las representaciones de los objetos en un ambiente de representaciones dinámicas, tal como el GeoGebra, pueden estar sujetos a modificaciones de manera directa e indirecta. Al respecto, Peñaloza y Salazar (2018) sostienen lo siguiente:

> Dependiendo del tipo de manipulación en la representación gráfica, la cual puede ser de manera directa o indirecta, hemos considerado dos tipos de tratamiento Gráfico-Dinámico: *tratamiento con deslizador* el cual se realiza de forma indirecta por medio de la modificación de los valores de elementos que definen la representación tales como coordenadas, coeficientes en representaciones algebraicas, incremento de desplazamientos y/o giros, entre otros, los cuales dependen de deslizadores; y *tratamiento sin deslizador* el cual se realiza directamente en las representaciones gráficas en puntos de la representación por medio del mouse. (pp. 67-68)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

En la actividad a ser analizada en el presente estudio, el tratamiento será sin deslizador, es decir, de manera directa y con ayuda del mouse, se modificarán las escalas de los ejes para realizar acercamientos / alejamientos de la representación en la vista gráfica del GeoGebra.

METODOLOGÍA

Bejarano (2018) aplica en su investigación, aspectos de la metodología de un estudio de caso, en la que el caso es, la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico. Para ello identifica las aprehensiones que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción de límite de una función real de variable real en un punto, en la representación gráfica, usando GeoGebra y a lápiz con papel.

La parte experimental se llevó a cabo con tres estudiantes de Ingeniería de una universidad pública de Lima del curso de Cálculo 1. Para el análisis de la producción de los estudiantes, se usó una ficha de actividad, ficha de observación, ficha de recojo de información, archivos de GeoGebra y grabación de la pantalla con Camtasia 8. Según la investigadora, este material permitió la triangulación de datos, contrastar y comparar la información obtenida por los diferentes medios de indagación. Finalmente, con la información obtenida, la autora realizó un análisis de la articulación de las aprehensiones.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este artículo presentaremos el análisis de la producción del estudiante Julio a la pregunta 2c) de la actividad 2 de la fase experimental del estudio de Bejarano (2018). En la Figura 2 mostramos el texto de la pregunta 2 incluida en la ficha de actividades, y en la Figura 3 la representación gráfica de la función $f(x)$ en la vista gráfica provista en el archivo *P2.ggb* de GeoGebra.

Figura 2 – Pregunta 2 de la actividad

2. Abra el ***archivo P2***, a continuación responda los siguientes ítems:

a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$? Justifique.

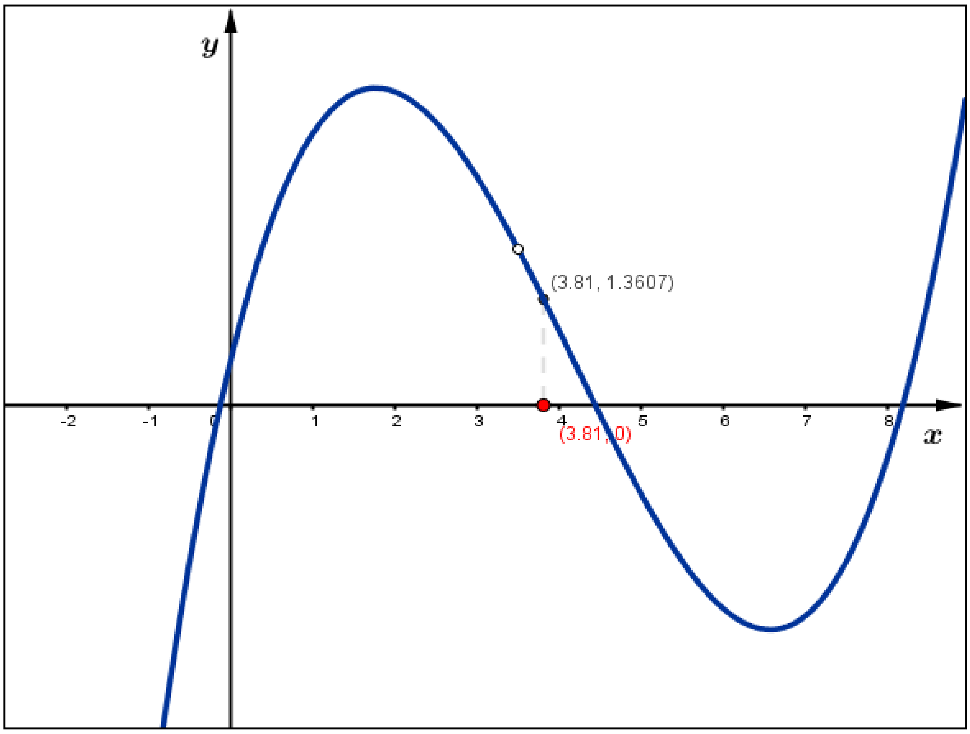
b) Usando las herramientas del Geogebra, explique por qué el $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$ **NO** es igual a 2

c) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$? Explique

Fuente: Bejarano (2018, p. 87)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

Figura 3 – Archivo de GeoGebra de la pregunta 2 de la actividad



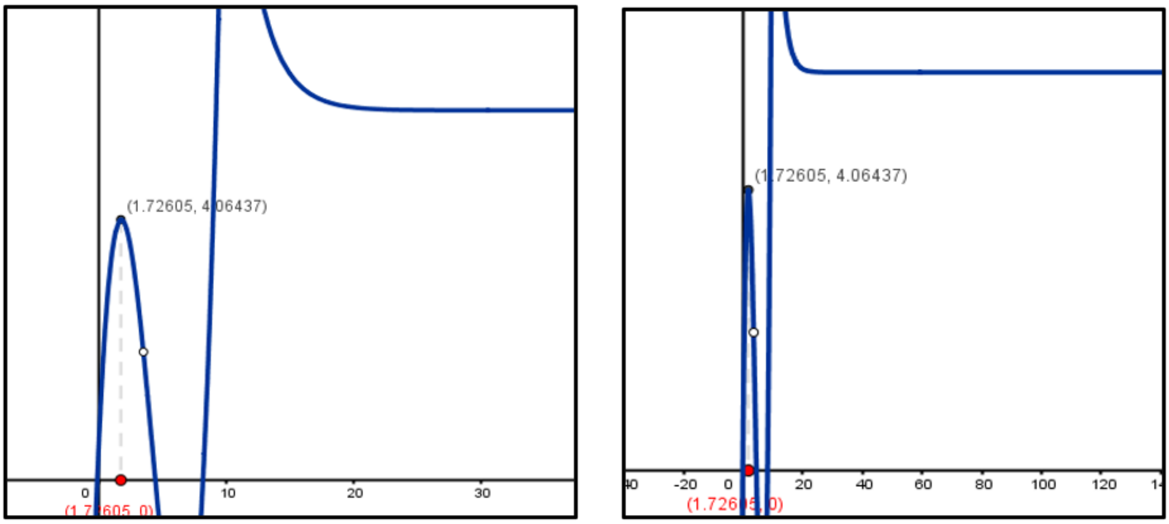
Fuente: Bejarano (2018, p. 61)

Según Bejarano (2018) el objetivo de esta pregunta es que el estudiante realice tratamientos en el registro gráfico que, le permitan movilizar conceptos relacionados al límite de una función real de variable real. En el desarrollo de esta pregunta, se espera identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico usando GeoGebra. En un inicio según la autora, el estudiante no desarrolla la aprehensión perceptiva para identificar el $\lim_{x\to 2017} f(x)$, puesto que el valor $x = 2017$ no es visible en la vista gráfica de GeoGebra presentada inicialmente al abrir el archivo respectivo.

Esta necesidad hará que el estudiante modifique la escala en el plano cartesiano usando las herramientas alejar y/o desplazamiento, ello implicaría que el estudiante realizaría modificaciones ópticas y/o posicionales, y esto de acuerdo con Duval mostraría el desarrollo de una aprehensión operatoria, porque se modifica la dimensión de los ejes coordenados, pero se mantiene la forma y orientación de la representación gráfica de la función por tramos, tal como se muestra en la Figura 4. En este sentido, es necesario desarrollar la aprehensión operatoria de forma previa a la aprehensión perceptiva para estudiar la gráfica en valores más cercanos a $x = 2017$.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

Figura 4 – Modificación óptica de la función $f(x)$

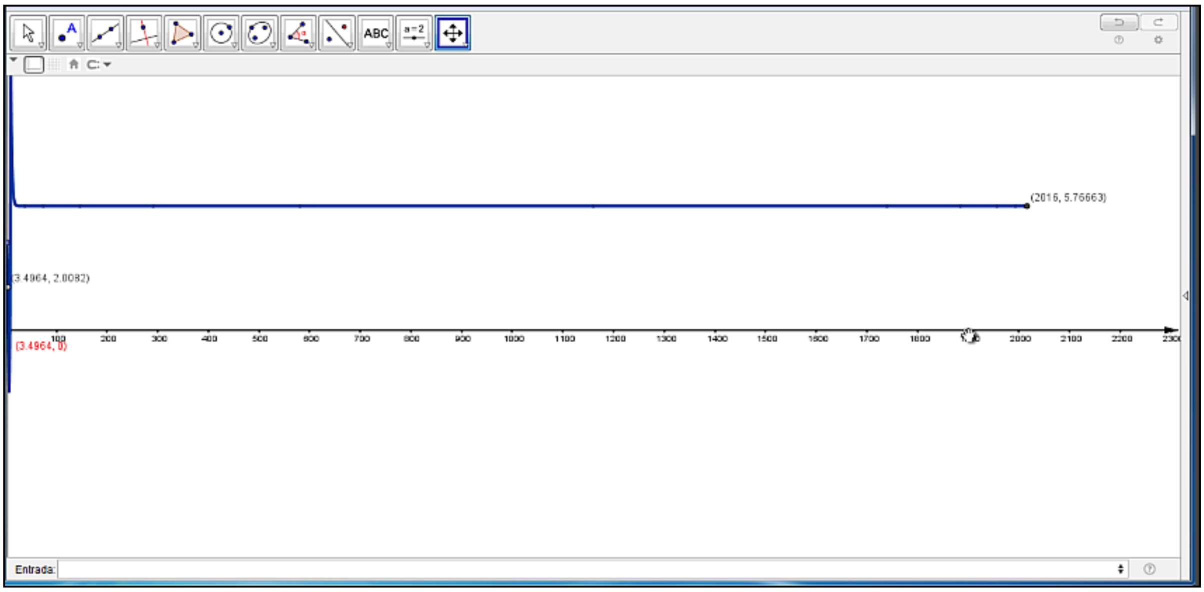


Fuente: Bejarano (2018, p. 69)

En un determinado momento, luego de realizado las modificaciones posicionales de tipo traslación hasta lograr observar el número 2016, según Bejarano (2018) el estudiante, mediante el desarrollo de su aprehensión perceptiva, podrá apreciar que la función solo está definida hasta $x = 2016$, y por tanto $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$ no existe, pues $2017 \notin Domf$, esto evidencia el desarrollo de su aprehensión discursiva**,** pues reconoce el dominio de la función $f(x)$.

El estudiante Julio realizó cambios de dimensión en la escala del archivo de GeoGebra, usando la herramienta *desplazamiento*, tal como se aprecia en la captura del computador que se realizó con Camtasia Studio 8, en la Figura 5, lo cual corresponde a una modificación posicional de tipo traslación.

Figura 5 – Modificación óptica de la función $f(x)$

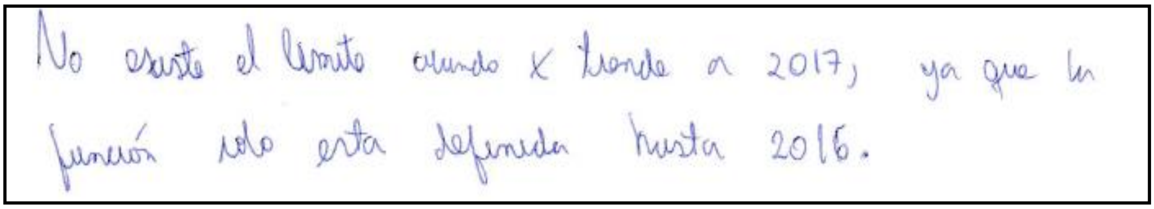


Fuente: Bejarano (2018, p. 70)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 43, p. 01-15, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447

Una vez realizada dicha modificación, el estudiante Julio respondió usando un registro de lengua natural que, tal como muestra la Figura 6, $\nexists \lim_{x \to 2016} f(x)$ pues la función solo está definida hasta el valor 2016, tal como se aprecia en la Figura 6.

Figura 6 – Respuesta del estudiante Julio para 2 c)


No existe el limite cuando x tiende a 2017, ya que la función solo esta definida hasta 2016.

Fuente: Bejarano (2018, p. 70)

Según Bejarano (2018), el estudiante desarrolló una aprehensión perceptiva para observar que la función solo está definida hasta el valor de $x = 2016$; posteriormente identificó implícitamente que $2017 \notin Domf$ lo cual mostró su aprehensión discursiva, pues reconoció el dominio de la función $f(x)$, en este caso el mayor valor del dominio. Luego sustentó que $\nexists \lim_{x \to 2017} f(x)$, esto evidenciaría una aprehensión discursiva, pues el estudiante estaría usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto, dado que como la función solo está definida hasta $x = 2016$, no existen los límites laterales para el valor de $x = 2017$. Con ello Bejarano (2018) concluye que el estudiante Julio articuló las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva para concluir que $\nexists \lim_{x \to 2017} f(x)$ lo cual se evidencia en el registro de lengua natural y no en el gráfico, ya que el medio de representaciones en este caso el GeoGebra, permite formular conjeturas mas no discursos ni demostraciones.

CONCLUSIONES

En el desarrollo de la actividad, el estudiante Julio logró articular las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria, que le permitieron concluir en la pregunta 2c) que $f(x)$ no existe. Esto se pudo evidenciar mediante la triangulación de los datos; con el Camtasia Studio 8, donde se observó que el estudiante realizó tratamientos y modificaciones en el registro gráfico, para cambiar las escalas en el archivo mostrado en GeoGebra, lo cual evidenció una aprehensión operatoria, que se produjo luego de que el estudiante realizará una aprehensión perceptiva; finalmente el estudiante articula lo anterior con la aprehensión discursiva para fundamentar, usando un registro de lengua natural, que el límite de la función f no existe cuando x tiende a 2017. Por otro lado, el uso de GeoGebra permitió a Julio y los demás estudiantes participantes de esta investigación una manera intuitiva de trabajar la noción de límite en un punto de una función real de variable real.

Es importante señalar el papel del medio de representaciones, en este caso el GeoGebra, en la actividad de Bejarano (2018) para el desarrollo de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva en un problema y en base a una necesidad: una representación parcial de la función cuyo límite no podía ser determinado a primera observación, ya que permitió al estudiante Julio establecer conjeturas las cuales probó posteriormente, señalando valores cercanos al dominio de la función, en este caso el máximo valor $x = 2016$ y movilizando sus conocimientos previos para argumentar que el $\lim_{x \to 2017} f(x)$ no existe ya que no existe el límite lateral izquierdo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, RIITMA por apoyo al desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

BEJARANO, V. L. **Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Posgrado. 2018. Disponible en: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12075. Acceso en: 20 set. 2022.

BEJARANO, V. L.; NEIRA, F. V. **Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería**. (p. 500-508) Lima. 2020. Disponible en: http: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568 . Acceso en: 20 set. 2022.

CAGLAYAN, G. **Math majors' visual proofs in a dynamic environment: The case of limit of a function and the ϵ–δ approach**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(6), 797-823. 2015. Doi: https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465. Acceso en: 20 set. 2022.

DUVAL, R. **Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique**. Repères-IREM, (17), pp. 121-138. 1994. Disponible en: http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf. Acceso en: 20 set. 2022.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**. Traducción de Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995). 2004.

DUVAL, R. **Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat, 7(2), 266-297. 2012. Doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266. Acceso en: 20 set. 2022.

INGAR, K.V. **A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais** (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil. 2014. Disponible en: https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/11013/1/Katia%20Vigo%20Ingar.pdf. Acceso en: 20 set. 2022.

LONDOÑO, N.; NARRO, P.; VERA, A. **Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación**. El Cálculo y su enseñanza. 5, p 91-106. 2013.

MARTÍNEZ, C. P. **El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica**. En Pensamiento & Gestión 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. 2006. Disponible em: http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf. Acceso en: 20 set. 2022.

MUELA PILLAJO, J. (2020). **El uso de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de Límite: una propuesta didáctica para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU)**. Trabajo de titulación previo a la obtención del Título de Licenciado en Ciencias de la Educación. Mención Matemática y Física. Carrera de Matemática y Física. Quito: UCE. 169 p. Disponible en http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/22373. Acceso en: 20 set. 2022.

PEÑALOZA, V. T. **Proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura mediado por el GeoGebra**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Posgrado. 2016. Disponible en: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7204. Acceso en: 20 set. 2022.

PEÑALOZA, V. T., SALAZAR, J.V.F. **Aprehensiones y modificaciones en el registro Gráfico-Dinámico del paraboloide elíptico.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.20, n.1, pp. 061-083. 2018. Doi: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p61-83. Acceso en: 20 set. 2022.

TOMÁS, J. B. P. **Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto** (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante). 2014. Disponible en: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf. Acceso en: 20 set. 2022.

Submetido em: 19 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

FERNÁNDEZ, Verónica Neira, VARA, Tito Nelson Peñaloza. Mediación del GeoGebra en la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 01-15, Set.-Dez., 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447