Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

La derivada como velocidad instantánea desde el Espacio de Trabajo Matemático

María Verónica Ángel Cerda[1]
Universidad San Sebastián

Romina Menares Espinoza[2]
Universidad de Valparaíso

RESUMEN

En la presente investigación, enmarcada en un estudio de clases de japonés (Isoda et al., 2007), se ha diseñado una clase centrada en el objeto derivada. La clase elaborada tiene como objetivo comprender la derivada como velocidad instantánea a través de una aplicación a la física. Esta clase se implementó en un curso universitario de primer año (18-20 años). Los análisis se realizan desde la perspectiva del acercamiento de los estudiantes a los Espacios de Trabajo Matemático Personal (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016), que muestra una preponderancia en el trabajo semiótico instrumental. En cuanto a los errores podemos mencionar que los estudiantes confunden la noción de velocidad media con la de velocidad instantánea, lo que da cuenta de una debilidad como conceptos del área de la física que dominan los estudiantes.
Palavras clave: Derivada, velocidad instantánea, Espacio de trabajo matemático, estudio en sala de aula japonés.

The derivative as instantaneous velocity from the mathematical workspace

ABSTRACT

In the present research, framed in a Japanese classroom study (Isoda et al., 2007), a class focused on the derivative object has been designed. The class elaborated aims at understanding the derivative as instantaneous velocity through an application to physics. The class was implemented in a first-year university course (18-20 years old). The analyses are carried out framed in the students' personal Mathematical Workspaces (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016), where a preponderance in the instrumental semiotic work is evidenced. As for the errors, we can mention that students confuse the notion of average speed with that of instantaneous speed, which shows a weakness in terms of the concepts in the area of physics, which the students dominate.
Keywords: Derivative, instant velocity, Mathematical Working Spaces, Japanese-class study.

A derivada como velocidade instantânea do espaço de trabalho matemático

RESUMO

Na presente investigação, enquadrada num estudo em sala de aula japonês (Isoda et al., 2007), foi concebida uma lição centrada no objecto derivado. A lição visa compreender a derivada como velocidade instantânea através de uma aplicação à física. A turma foi implementada num curso universitário do primeiro ano (18-20 anos de idade). As análises são realizadas a partir da abordagem dos espaços pessoais de trabalho matemático dos estudantes (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016), onde é evidente uma preponderância do trabalho semiótico instrumental. Quanto aos erros, podemos mencionar que os estudantes confundem a noção de velocidade média com a de velocidade instantânea, o que mostra uma fraqueza em termos dos conceitos na área da física que os estudantes dominam.
Palavras-chave: Derivado, velocidade instantânea, Espaço de trabalho matemático, estudo em sala de aula

[1] Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Magíster en Matemática de la Universidad de Chile (Uch). Académica de la Universidad San Sebastián, Santiago, R.M., Chile. Av. Bellavista, 7, Recoleta, Santiago, R.M. Chile, CEP:8420524. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5711-4322. E-mail: maria.angel@uss.cl.
[2] Doctora en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Académica del Instituto de Matemática de la Universidad de Valparaíso, Valparaíso, V Región, Chile. Av. Gran Bretaña 1111, Playa Ancha, Valparaíso, Chile. CEP: 243-000. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6071-3825. E-mail: romina.menares@uv.cl.

japonês.

INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada está situado principalmente en los programas de estudio de asignaturas de primer o segundo año para carreras vinculadas a las ciencias exactas o las ingenierías –entre otras– a nivel universitario en Chile. En el currículum escolar vigente, la derivada se ubica en los dos últimos años de secundaria, en asignaturas electivas (MINEDUC, 2020). Una de las problemáticas evidenciadas dice relación con la manera mecánica y estandarizada con la que se abordan las derivadas en los distintos niveles de enseñanza (ver por ejemplo Zandieth, 2000 y González et al., 2013). En relación con esto, Artigue (1995) señala que, si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas, los estudiantes tendrán dificultades para lograr una comprensión de los diversos conceptos y metodologías que conforman el centro del objeto matemático.

El problema que abordamos en esta investigación es que los estudiantes muestran dificultades para comprender la derivada como razón de cambio instantánea. En este aspecto, Zandieth (2000) subraya la importancia de la relación entre razón de cambio y cuociente incremental en la comprensión de la derivada, así como la influencia de los contextos en la construcción del significado.

En su trabajo, Orton (1983) –una de las primeras investigaciones sobre los errores y dificultades que tienen los estudiantes con respecto a la derivada (como se indica en Sánchez-Matamoros et al., 2008)– observó que la comprensión de la razón de cambio dependía del tipo de función utilizada. La mayoría de los alumnos contestó de manera correcta al preguntarles por la razón de cambio con funciones lineales, pero no sucedía lo mismo si la función no era lineal, lo que podía tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función. Esta investigación destaca la importancia de la relación entre la razón de cambio y el cuociente incremental en la comprensión de la derivada.

Por su parte, la investigación de Vega et al. (2014), enmarcada en la teoría APOS (Dubinsky, 1991), propone una serie de actividades, donde una de ellas tiene relación con resolver un problema sobre razón de cambio para el desarrollo del aprendizaje de la derivada. Los autores concluyen que “los estudiantes lograron consolidar aprendizajes de nivel superior y fueron capaces de relacionar conceptos e integrar el concepto de derivada con otros esquemas” (p.423).

El objetivo de este artículo es categorizar el trabajo matemático personal de estudiantes de primer año de una universidad chilena, de las carreras de Agronomía, Contador Auditor, Bachillerato, Ingeniería Comercial y Biotecnología, quienes cursaban una asignatura común. El estudio se enmarca en una clase basada en el *Estudio de Clase japonés* (Isoda, Arcavi y Mena, 2007), la que está centrada en una *tarea* (Chevallard, 1999) que el estudiante debe desarrollar con el fin de que reconozca a la derivada como una razón de cambio instantánea. La clase implementada para este estudio corresponde a la tercera versión del diseño original, la cual es obtenida a partir de mejoras aplicadas con base en las observaciones de las experiencias de las primeras dos clases. El análisis de resultados de la clase se realiza bajo el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011, Kuzniak et al., 2016) (ETM) con el cual se

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

estudia el espacio de trabajo personal del estudiante, para reconocer mediante la activación de planos y génesis, el logro parcial o total del objetivo de la clase.

ASPECTOS TEÓRICOS

El objetivo del diseño e implementación de la clase propuesta es estudiar y favorecer la construcción del conocimiento por parte del estudiante, invitarlo a reflexionar en torno a una tarea matemática asociada a la derivada como una razón de cambio instantánea a partir de una aplicación a la física, y al mismo tiempo, identificar de qué manera el estudiante utiliza sus conocimientos previos para adquirir un nuevo saber.

El Espacio de Trabajo Matemático, ETM, desarrollado por Kuzniak (2011), es un constructo en el cual, los aspectos epistemológicos y cognitivos son fundamentales para la construcción de un objeto matemático y se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (Flores y Montoya, 2016).

Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático es un ambiente organizado para permitir el trabajo de personas que resuelven problemas matemáticos (matemático, profesor, estudiante) mediante la articulación de dos planos; el plano epistemológico y el plano cognitivo (Kuzniak, 2011).

El plano epistemológico está constituido por tres componentes o polos: el *Referencial Teórico*, que lo conforman principalmente las propiedades, los teoremas, las definiciones; el *Representamen*, constituido por signos o símbolos; y los *Artefactos*, que corresponde a los elementos materiales clásicos o no clásicos, y simbólicos. El plano cognitivo está también conformado por tres componentes: los procesos de *Visualización*, *Construcción* y *Prueba*. Los tres procesos se activan mediante el uso y la actividad cognitiva asociado al elemento del plano epistemológico. La articulación entre estos dos planos se realiza mediante un conjunto de génesis, que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011): semiótica (que relaciona al *Representamen* con la *Visualización*), instrumental (que relaciona a los *Artefactos* con la *Construcción*) y discursiva (que relaciona al *Referencial Teórico* con la *Prueba*).

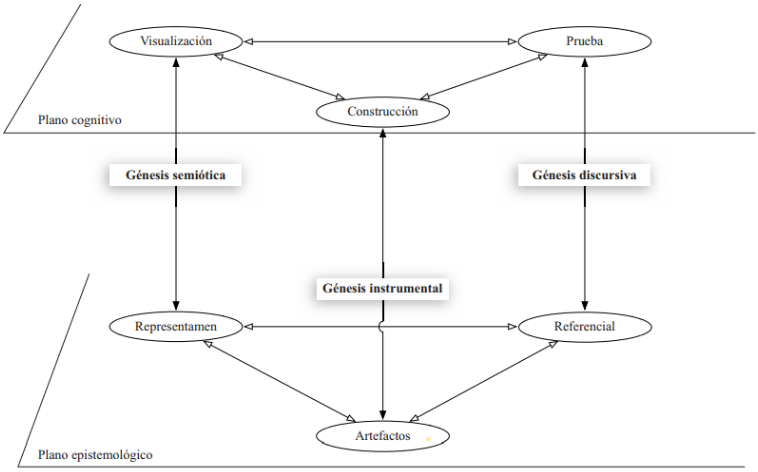
Las génesis en los ETM

Como se ha señalado, para articular de manera operatoria los niveles epistemológicos y cognitivos con el fin de hacer posible el trabajo matemático esperado, se consideran tres génesis fundamentales, como se indica en Richard y Kuzniak (2014):

> Una génesis instrumental, que hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático;
> Una génesis semiótica basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporcionan un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios; esta génesis semiótica asegura, el establecimiento de la relación entre sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos vehiculados;
> Una génesis discursiva de la prueba que utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumentada. (p.5)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

Figura 1 – El espacio de trabajo matemático y su génesis



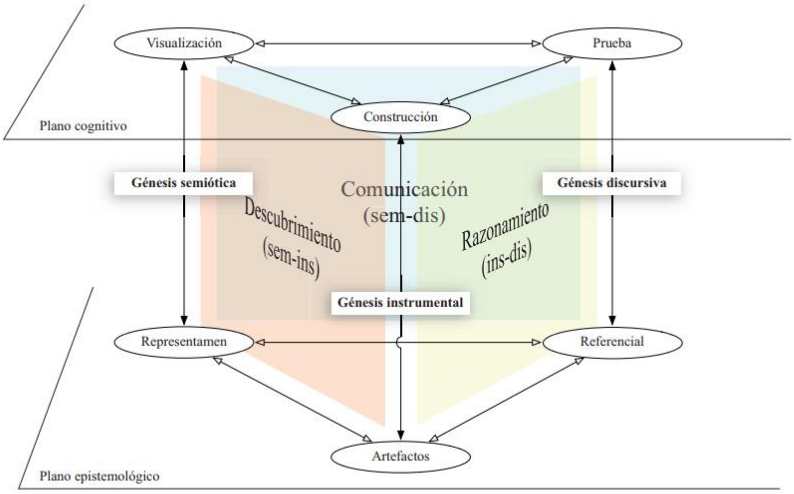
Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p.5)

Planos verticales en los ETM

Como se indica en Flores y Montoya (2016), las articulaciones, a partir de las génesis, no deben ser entendidas como la unión individual entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación activa, conjuntamente por dos o incluso tres génesis, que generan los llamados planos verticales (Richard y Kuzniak, 2014). Los autores identificaron tres planos verticales, en los que se generan distintas interacciones en relación con el objeto matemático. Estos planos son llamados: [Sem-Ins] que es generado cuando se activan las génesis semiótica e instrumental. En este plano se privilegia la identificación y la exploración de los objetos; el plano [Ins-Dis] que es generado por la activación de las génesis instrumental y discursiva, en él se identifican razonamientos que provienen de la exploración del objeto; y finalmente el plano [Sem-Dis], que es generado por la presencia de las génesis semiótica y discursiva, en el cual se identifican los razonamientos argumentativos.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

Figura 2 – Planos verticales en el ETM



Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p.7)

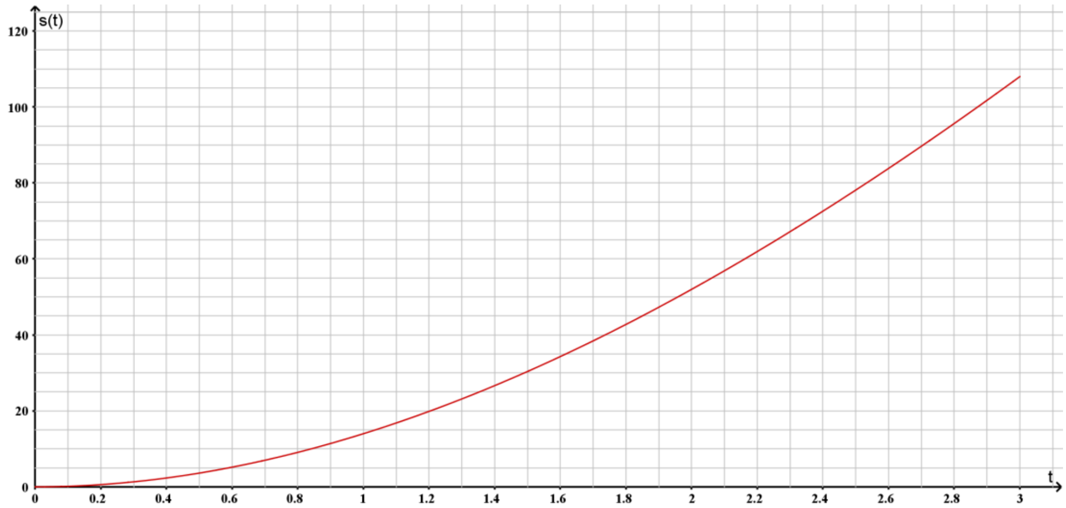
ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación es de tipo cualitativa, descriptiva (Hernández et al., 2016), enmarcada dentro del paradigma interpretativo. Se caracteriza el ETM del estudiante a partir de una clase implementada, enmarcada en un Estudio de Clase japonés (Isoda et al., 2007). El análisis se realiza bajo la perspectiva de los planos verticales, propuestos por Richard y Kuzniak (2014).

El diseño metodológico consta de cuatro etapas y su implementación se detalla a continuación:

1. Análisis preliminares. Se realiza un estudio epistemológico de la derivada y se analizan textos de estudio universitarios. Se buscan antecedentes que dan cuenta de la problemática planteada.
2. Análisis a priori. Se realizó un análisis a priori basado en la tarea de la clase, incluyendo conocimientos previos del estudiante, posibles estrategias, respuesta experta, posibles errores y dificultades, tiempos necesarios para cada parte de la propuesta y recursos a utilizar por los estudiantes.
3. Implementación. La clase se diseñó con base en una *tarea* (Chevallard, 1999), la cual se aplicó a un curso de primer año de universidad (18 a 20 años, aproximadamente). El grupo estuvo formado por 16 estudiantes, de los cuales 10 pertenecen a la carrera de Agronomía, 1 a la carrera de Contador Auditor, 1 estudiante de Bachillerato, 2 estudiantes de Ingeniería Comercial y 2 estudiantes de Biotecnología, quienes cursaban una asignatura común. La clase se desarrolló en un tiempo de 80 minutos y estuvo a cargo de una de las investigadoras. El instrumento de recogida de datos es una hoja con la *tarea* que se propone en la clase, la que se detalla a continuación:
   En la *tarea* se muestra la función $s(t) = 15t^3 - t^2$ para $0 \leq t \leq 3$ y su gráfico, el cual indica la posición de un camión en ese intervalo de tiempo.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448



En el ítem a) de la tarea se pide a los estudiantes que verifiquen velocidades promedio dados en la siguiente tabla:

$[t_i, t_f]$ $(horas)$	$v = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$ $\left(\frac{km}{hora}\right)$
[1 ,2]	38
[1,5 ; 2]	43,25
[1,85 ; 2]	46,6275

Luego, se les pregunta:

¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo [1 , 2]?, ¿el camión tiene la misma velocidad en cada instante de tiempo comprendido en el intervalo [1,2]?.

En el ítem b) se indica que el chofer del camión mira el velocímetro justo a la segunda hora de haber iniciado su viaje, ¿qué vio el chofer? Explica con tus palabras.

4. Análisis a Posteriori. En esta etapa se consideraron las estrategias utilizadas por los estudiantes, errores evidenciados y para finalizar se contrasta el análisis a priori con las evidencias obtenidas a partir de la clase implementada.

Las categorías de análisis elaboraron con base en las posibles estrategias de los estudiantes y han sido levantadas según el marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011, Kuzniak et al., 2016) declarado y según los planos verticales (Richard y Kuzniak, 2014). Cada categoría se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 1 – Categorías de Análisis

Categorías		**Descripción**
Semiótica-Instrumental	SI1.	Utiliza la gráfica de la función y la fórmula de velocidad promedio para verificar los valores dados en la tabla.
	SI2.	Utiliza la gráfica, traza la tangente a la curva y determina su pendiente.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

	SI3.	Utiliza la función posición y calculadora para verificar la velocidad promedio.
	SI4.	Utiliza los valores dados en la tabla para determinar la velocidad promedio
Semiótico-Discursivo	SD1.	Explica a partir de la tabla de valores dada que el camión no tiene la misma velocidad en cada instante.
	SD2.	Explica a partir del gráfico que el camión no tiene la misma velocidad en cada instante.
Instrumental-Discursivo	ID1.	Explica mediante la fórmula de velocidad promedio que el camión no tiene la misma velocidad en cada instante.
	ID2.	Explica mediante la elaboración de una tabla de valores cuál es la velocidad del camión justo en la segunda hora.
	ID3.	Explica a través del cálculo de un límite cuál es la velocidad justo en la segunda hora.

Fuente: elaboración propia

Los posibles errores y dificultades se organizaron en la tabla que se muestra a continuación (Tabla 2). Con ellos, fue posible establecer un plan de clase, presentado en los anexos (Anexo 1)

Tabla 2 – Dificultades, errores y devoluciones en los análisis a priori de clase a implementar

Dificultad	**Error**	**Devolución**
Dificultad para comprender cómo evaluar en la fórmula de velocidad promedio.	Evalúa incorrectamente en la fórmula de velocidad promedio, dado que no comprende cómo evaluar en ella.	¿Cuál es la función presente en la fórmula?
Dificultad para comprender la diferencia entre velocidad instantánea y velocidad promedio.	Indica que la velocidad en un instante determinado $t = a$ corresponde a la velocidad promedio en el intervalo $[0\ ,a]$	¿Cómo se determina la velocidad promedio del camión para las primeras a horas de viaje?
Dificultad para reconocer que la velocidad instantánea corresponde a un límite de velocidades promedio.	Indica un valor errado para la velocidad en un instante determinado.	¿Cómo son los intervalos que se consideran en la tabla valores? ¿por qué se han considerado esos intervalos?
Dificultad para comprender qué significa determinar la velocidad en un instante cualquiera $\boldsymbol{t = a}$.	Asigna un valor fijo para a y calcula la velocidad instantánea para dicho valor.	¿Qué representa $t = a$?
Dificultad para calcular el límite planteado para determinar la velocidad instantánea en $\boldsymbol{t = a}$.	Comete errores de tipo algebraico al calcular el límite para determinar la velocidad instantánea en $t = a$.	¿Cuál fue el método utilizado para calcular el límite? ¿está correcta la factorización o simplificación (por ejemplo)?

Fuente: elaboración propia

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para analizar las producciones, usamos como nomenclatura Ei, que corresponde a las respuestas del estudiante i, con i desde el 1 al 16. El análisis evidenció que, en la primera parte

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

del ítem a) de la tarea, once estudiantes verifican que los valores proporcionados en la tabla son correctos. Estos estudiantes lo hacen de manera algebraica utilizando la función posición y la fórmula de velocidad promedio. Solamente dos estudiantes utilizan el gráfico para verificar los valores de la tabla, sin embargo, no logran obtener los datos proporcionados. Se observó que doce estudiantes responden correctamente la pregunta *¿cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo* $[1\,,2]$*?*, de los cuales, solamente uno realiza nuevamente los cálculos y no responde a partir de la tabla. Se clasificaron las respuestas de los estudiantes según las categorías dadas en la Tabla 1, como se muestra en la Tabla 3:

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

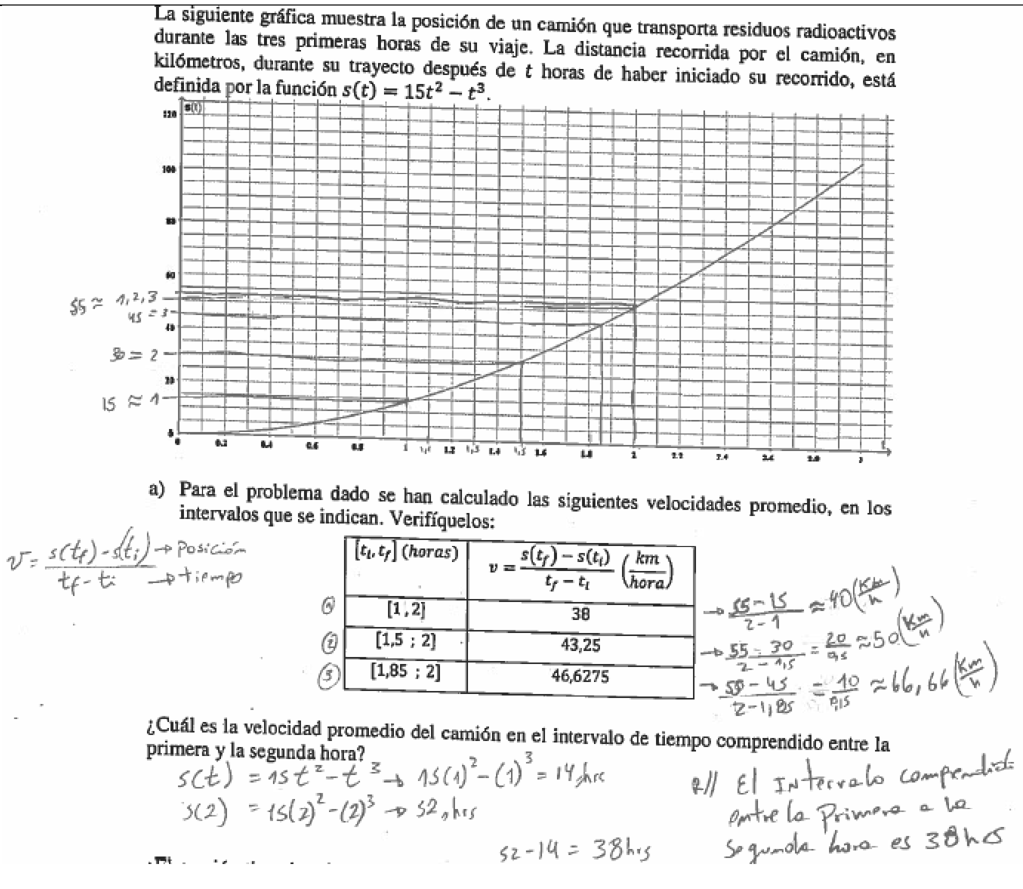
Tabla 3 – Clasificación estudiantes primera parte ítem a)

Categorías	**Estudiantes**
SI1	E6 – E7
SI2	Desierta
SI3	E1 – E4 – E5 – E7 - E8 – E9 – E10 – E11 – E12 – E13 – E14 – E15
SI4	E2 – E4 – E8 – E9 – E10 – E11 – E12 – E13 – E14 – E15 – E16

Fuente: elaboración propia

El estudiante E7 en la tabla anterior se encuentra en dos categorías, dado que, para verificar los valores proporcionados en la tabla utiliza el gráfico, es decir, se encuentran en SI1 y para responder la pregunta *¿cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo comprendido entre la primera y la segunda hora?*, utilizan valores obtenidos, con la calculadora, a partir de la función dada algebraicamente para determinar las velocidades promedio. Como se muestra en la siguiente Figura 3.

Figura 3 - Producción estudiante E7


La siguiente gráfica muestra la posición de un camión que transporta residuos radioactivos durante las tres primeras horas de su viaje. La distancia recorrida por el camión, en kilómetros, durante su trayecto después de t horas de haber iniciado su recorrido, está definida por la función $s(t) = 15t^2 - t^3$.

a) Para el problema dado se han calculado las siguientes velocidades promedio, en los intervalos que se indican. Verifíquelos:

$v = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$ → Posición → tiempo

$[t_i, t_f]$ (*horas*)	$v = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i} \left(\frac{km}{hora}\right)$
[1 , 2]	38
[1,5 ; 2]	43,25
[1,85 ; 2]	46,6275

→ $\frac{55-15}{2-1} \approx 40 \left(\frac{Km}{h}\right)$

→ $\frac{55-30}{2-1{,}5} = \frac{20}{0{,}5} \approx 50 \left(\frac{Km}{h}\right)$

→ $\frac{58-45}{2-1{,}85} = \frac{10}{0{,}15} \approx 66{,}66 \left(\frac{Km}{h}\right)$

¿Cuál es la velocidad promedio del camión en el intervalo de tiempo comprendido entre la primera y la segunda hora?

$s(t) = 15t^2 - t^3 \to 15(1)^2 - (1)^3 = 14$ hrs

$s(2) = 15(2)^2 - (2)^3 \to 52$ hrs

$52 - 14 = 38$ hrs

R// El Intervalo comprendido entre la Primera a la Segunda hora es 38 hrs

R// El intervalo comprendido entre la primera a la segunda hora es 38 hrs.

Fuente: Producción E7

Por otra parte, según lo evidenciado para la segunda pregunta del ítem a), podemos indicar que nueve estudiantes responden correctamente a la pregunta *¿el camión tiene la misma*

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

velocidad en cada instante de tiempo comprendido en el intervalo [1,2]*?*. Según las distintas estrategias utilizadas por los estudiantes, sus respuestas se han clasificado en la Tabla 4. Por ejemplo, E13 ha sido clasificado en la categoría SD1 dado que indica a partir de la tabla de valores (Figura 4).

Figura 4 – Respuesta del estudiante E13


No, luego de media hora aumentó su velocidad y despues de 15 min volvió a aumentarla.

Fuente: Producción E13

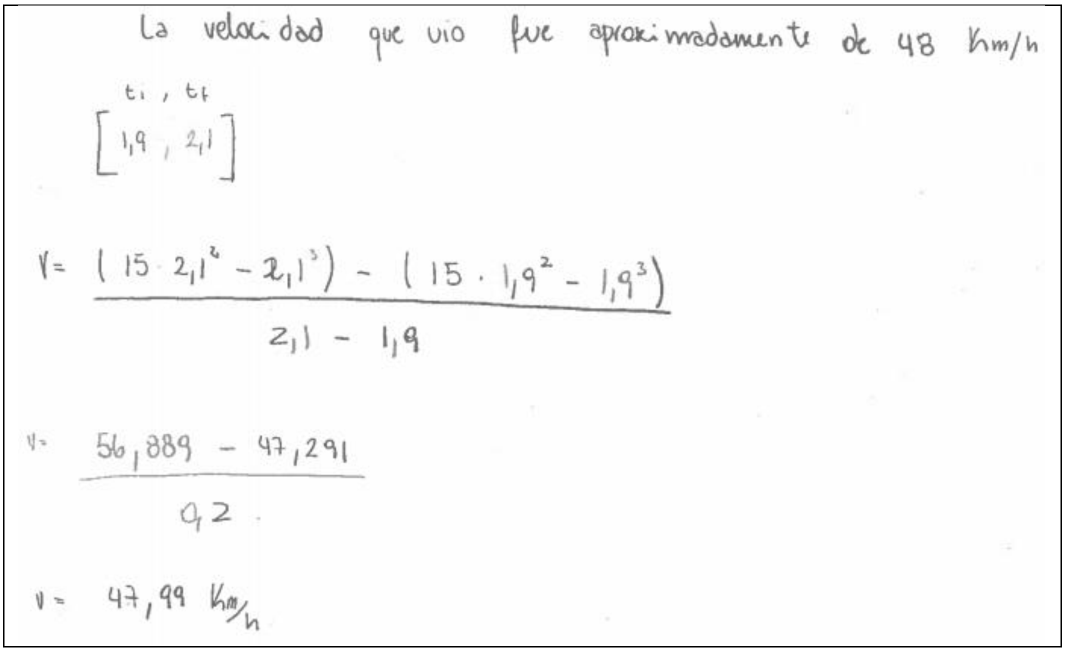
Tabla 4 – Clasificación segunda parte ítem a)

Categorías	Estudiantes
SD1	E15 – E13 – E12
SD2	E8 – E9 – E4
ID1	E7 – E6 – E2

Fuente: Elaboración propia

Para el ítem b) se tiene que 3 estudiantes responden correctamente a esta pregunta y se ubican en la misma categoría de análisis para la estrategia utilizada (ID2). La siguiente imagen muestra la respuesta dada por E12 (Figura 5), quien se ubica en la categoría ID2 como se indica en la Tabla 4.

Figura 5 – Producción de estudiante E12 para el ítem b)


La velocidad que vio fue aproximadamente de 48 km/h

t_i , t_f

$[1,9 \,;\, 2,1]$

$$V = \frac{(15 \cdot 2,1^2 - 2,1^3) - (15 \cdot 1,9^2 - 1,9^3)}{2,1 - 1,9}$$

$$v = \frac{56,889 - 47,291}{0,2}$$

$v = 47,99$ km/h

Fuente: Producción E12

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

Tabla 5 – Clasificación para ítem b)

Categorías	Estudiantes
ID2	E8 – E9 – E12
ID3	Desierta
No sabe/no responde	E1

Fuente: Elaboración propia

También, notamos que la mayor parte de los estudiantes que responde de manera incorrecta este ítem, confunde velocidad promedio en intervalo $[0\ ,2]$ con velocidad instantánea en $t = 2$.

PRINCIPALES RESULTADOS

A partir del análisis realizado notamos que la tarea permite activar los distintos planos verticales (Richard y Kuzniak, 2014) en el ETM personal del estudiante, dado que encontramos estudiantes en todas las categorías definidas, a excepción de ID3. También observamos que los estudiantes que respondieron correctamente el ítem b) transitan por los tres planos verticales. Junto con lo anterior, se evidencia que los estudiantes han privilegiado el plano semiótico instrumental para la resolución de la tarea, lo que significa que se privilegian los métodos algebraicos, relegando el discurso. Además, nos llama la atención que ningún estudiante haya dibujado la recta tangente y calculado su pendiente, pues a nivel escolar y universitario, una de las definiciones de derivadas que se privilegian es justamente la que dice relación con la pendiente de la recta tangente en un punto (Vivier, 2010)

La principal dificultad evidenciada en los estudiantes fue diferenciar entre velocidad promedio y velocidad instantánea. Aquellos estudiantes que lograron diferenciar entre velocidad promedio y velocidad instantánea y además entendieron la idea de "proximidad" que se planteó en la tabla del ítem a), se acercaron a lograr el objetivo de la clase. Por lo tanto, se propone como proyección de este trabajo, plantear una actividad de laboratorio, en conjunto con la asignatura de física, con el objetivo de que los estudiantes asimilen estas nociones para que finalmente los relaciones con el concepto de derivada.

Finalmente, el marco teórico nos da cuenta de que se debe fortalecer la génesis discusiva y por lo tanto los planos que la involucran con el fin de construir un espacio de trabajo matemático completo (Kuzniak y Nechache, 2015).

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue categorizar las respuestas de estudiantes frente a una tarea compuesta por dos ítems, donde se enfrentaban a determinar la derivada de una función en un punto, entendida como la velocidad instantánea, según el contexto del problema.

Las categorías se conformaron gracias a un análisis a priori de la tarea, y pudieron contrastarse con las respuestas de los estudiantes que participaron en el estudio. Así, se pudo constatar que las respuestas privilegian el trabajo instrumental, con uso de algoritmos adquiridos en la formación de los estudiantes. En las respuesta, se evidencia el escaso trabajo

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448

articulado de las tres génesis, sobre todo la génesis discursiva, que se identificó relegada. Sin embargo, la riqueza de la tarea se pudo observar cuando los estudiantes que responden correctamente, efectivamente coordinan las tres génesis del ETM.

Las dificultades para diferenciar la velocidad promedio de la velocidad instantánea nos hace concluir que hay dificultades para comprender la derivada como una razón de cambio, y su coordinación con su definición por límites. En este sentido, coincidimos con Zandieth (2000) sobre la importancia de que los estudiantes comprendan a la derivada como el cambio en un instante, y tomen conciencia sobre el contexto en que los problemas se presentan.

Dado que la categoría ID3 estuvo desierta en esta investigación y que en ID2 encontramos tres estudiantes, planteamos como proyección fortalecer el plano Instrumental Discursivo en una nueva implementación. Estas categorías pretenden generar el vínculo entre la definición de derivada en un punto y el concepto de velocidad instantánea. De este modo y dada la existencia de tránsito por los otros dos planos (Semiótico-Instrumental y Semiótico-Discursivo), la *tarea* planteada tiene potencial para ser una *tarea completa* (Kuzniak y Nechache, 2015), y de este modo favorecer la comprensión de la derivada como velocidad instantánea.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza* (pp. 97-140). Bogotá, Colombia: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique dudidactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. *Advanced Mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 95-123.

Flores, M. & Montoya, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática*, (28), 85-117.

González, J., Ruiz, O. Loera, E. Barrón, J. y Salazar, M. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Cultura Científica y Tecnológica, Edición Especial*, *51* (1).

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2016). *Metodología de la investigación*. México D.F: Mcgraw-hill interamericana.

Isoda, A., Arcavi, A. & Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. In *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., Nechache A. (2015). Using the geometric working spaces in order to plan the teaching of geometry. *Proceeding of Congress Cerme 10*. Rescatado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Cerme.pdf

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

MINEDUC (2020). *Bases Curriculares 3º y 4º medio*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf
Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics 14* (3), 235-250.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3) (número especial). https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 11*(2), 267-296.

Vega, M., Carrillo, J., Soto-Andrade, J. (2014). Análisis según el modelo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada, *Boletim de Educaçao Matemática (en línea), 28*(48), 403–429.

Vivier, L. (2010). La noción de tangente en la educación media superior. Recuperado en: http://funes.uniandes.edu.co/14940/

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (volume 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.

***Submetido em*: 23 de Setembro de 2022.**

***Aprovado em*: 01 de Novembro de 2022.**

***Publicado em*: 08 de Dezembro de 2022.**

Como citar o artigo:
María Verónica Ángel Cerda, VARA, Tito Nelson Peñaloza. La derivada como velocidad instantánea desde el Espacio de Trabajo Matemático. Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., 2021. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448