Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Uso de GeoGebra y el Razonamiento Inductivo en un acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo

Daysi Julissa García-Cuéllar[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

Mihály André Martínez-Miraval[2]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

El estudio tuvo como objetivo analizar cómo estudiantes universitarios generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra. Se considera la noción de esquema desde la perspectiva del enfoque instrumental, y cómo se movilizan estos esquemas en cada uno de los procesos que comprenden el razonamiento inductivo. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron fórmulas de geometría, para determinar el área de un conjunto de regiones limitadas por funciones polinómicas y, a partir de un proceso inductivo, obtuvieron antiderivadas de estas funciones y describieron un procedimiento semejante al que se utiliza con el TFC para resolver integrales definidas. Se concluye que el uso de GeoGebra asociado con un proceso inductivo posibilita la observación de regularidades y la formulación de generalizaciones relacionadas con el TFC.
Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo; Integral definida; Razonamiento inductivo; Áreas; GeoGebra.

Uso do GeoGebra e do Raciocínio Inductivo em uma Abordagem ao Teorema Fundamental do Cálculo

RESUMO

O objetivo do estudo foi analisar como estudantes universitários geram noções sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFT) usando o raciocínio indutivo através do uso do GeoGebra. A noção de esquema é considerada da perspectiva da abordagem instrumental, e como esses esquemas são mobilizados em cada um dos processos que compõem o raciocínio indutivo. Os resultados mostram que os estudantes utilizaram fórmulas geométricas para determinar a área de um conjunto de regiões delimitadas por funções polinomiais e, a partir de um processo indutivo, obtiveram antiderivadas dessas funções e descreveram um procedimento similar ao utilizado com o TFC para resolver integrais definidas. Conclui-se que o uso do GeoGebra associado a um processo indutivo permite a observação de regularidades e a formulação de generalizações relacionadas ao TFC.
Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo; Integral Definida; Raciocínio Indutivo; Áreas; GeoGebra.

[1] Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Docente en la Maestría en Enseñanza de las Matemática en la Pontificia Universidad Católica del Perú, miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y coordinadora de formación de profesores de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA-Perú), Lima, Lima, Perú. Dirección de correspondencia: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0243-6353. E-mail: garcia.daysi@pucp.pe

[2] Estudiante de doctorado en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México (CICATA – IPN). Docente tiempo completo del departamento de ciencias, sección Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), miembro de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA-Perú), Lima, Lima, Perú. Dirección de correspondencia: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7734-1223. E-mail: martinez.ma@pucp.edu.pe

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

Using GeoGebra and Inductive Reasoning in an Approach to the Fundamental Theorem of Calculus

ABSTRACT
The study aimed to analyze how university students generate notions about the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) by using inductive reasoning using GeoGebra. The notion of schema is considered from the perspective of the instrumental approach, and how these schemas are mobilized in each of the processes that comprise inductive reasoning. The results show that students used geometry formulas to determine the area of a set of regions limited by polynomial functions and, from an inductive process, obtained antiderivatives of these functions and described a procedure like that used with FTC to solve definite integrals. It is concluded that the use of GeoGebra associated with an inductive process makes possible the observation of regularities and the formulation of generalizations related to FTC.
Keywords: Fundamental Theorem of Calculus; Definite Integral; Inductive Reasoning; Areas; GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

Un gran número de investigaciones relacionadas con el concepto de integral definida se enfocan en el cálculo de áreas o de antiderivadas como cantidades fijas, lo que puede no favorecer el desarrollo de nociones como variación, covariación o acumulación, que parecen ser cruciales para conceptualizar la integral definida (THOMPSON; DREYFUS, 2016).
Comprender un concepto, como la integral definida, a través de la resolución de problemas, implica pensar en el problema en términos de preguntas del tipo: cómo se relaciona la integral definida con el concepto de área bajo la curva, cómo se define la integral definida en términos de sumas de Riemann, o cómo se representa geométricamente el proceso de acumulación de áreas, de modo que se examinan diversas estrategias de resolución; esto promueve la construcción de conocimiento matemático y la búsqueda o construcción de significados de los conceptos involucrados en el enunciado de los problemas (SANTOS-TRIGO; AGUILAR, 2018). Como la integral definida se puede abordar a partir de situaciones de cambio, se sugiere incorporar en la resolución de problemas el uso de herramientas computacionales, porque juegan un papel importante en el desarrollo y comprensión de ideas matemáticas (CAMACHO-MACHÍN *et al*., 2010)

La literatura centrada en el estudio de la integral definida, hace notar la importancia de generar nociones sobre este concepto a partir de procesos de aproximación del área de una región mediante sumas de Riemann, ya sea al comparar las diferentes maneras de utilizar la posición de los rectángulos como extremos derechos, izquierdos y puntos medios (CAGLAYAN, 2016), o analizar las aprehensiones en el registro gráfico que los estudiantes desarrollan (MARTÍNEZ-MIRAVAL; GARCÍA-CUÉLLAR, 2020) o identificar las acciones mentales que se ponen en juego en la resolución asociadas con el razonamiento covariacional de los estudiantes (MARTÍNEZ-MIRAVAL; GARCÍA-RODRÍGUEZ, 2022); o mediante procesos de acumulación de áreas para construir la función integral (ARANDA; CALLEJOS, 2017). En todos ellos, el factor común es el uso de GeoGebra a partir del diseño de applets que involucran deslizadores asociados a diversas herramientas del programa.

Existen propuestas que se orientan a abordar el concepto de integral definida mediante el desarrollo de un razonamiento geométrico, al relacionar la velocidad constante de un móvil en distintos tramos de tiempo e interpretar la distancia que recorre como una suma de áreas de rectángulos, o trabajar con una curva continua que modela una tasa de cambio del consumo de la electricidad respecto del tiempo, donde el área representa el consumo de electricidad, fomentando con ello el desarrollo de razonamientos geométrico, numérico y analítico (NITTI; ÁLVAREZ, 2014). Del mismo modo, se estudia cómo los estudiantes desarrollan un aprendizaje procedimental, donde prevalece un razonamiento algebraico al presentar tareas relacionadas con técnicas de integración (SERHAN, 2015), e investigaciones donde que involucran fenómenos dinámicos para construir el concepto de integral definida como el límite de una suma, en donde se investiga acerca del razonamiento covariacional de los estudiantes (MARTÍNEZ-MIRAVAL; GARCÍA-RODRÍGUEZ, 2022).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) señalan que el uso de tecnologías digitales amplía la manera de representar, explorar y resolver los problemas o los objetos matemáticos y desarrolla en los estudiantes estrategias heurísticas como la cuantificación de cantidades, la generación de lugares geométricos, la visualización de cambios simultáneos, el arrastre y el uso de deslizadores. En cuanto al uso de applets como estrategia de enseñanza, permite diseñar entornos accesibles para que los estudiantes trabajen los conceptos bajo distintas representaciones, cambiando la visión algorítmica y analítica por otra que permite al estudiante realizar construcciones a partir de situaciones de cambio, de modo que conecte sus conocimientos previos con los nuevos adquiridos (ARANDA; CALLEJOS, 2017). Asociar un applet con instrucciones y con preguntas acerca de los cambios que el estudiante observa, resulta importante porque las ideas intuitivas que va desarrollando, le permiten dar sentido a los procesos matemáticos involucrados al trabajar la integral definida relacionado con la noción de área (MARTÍNEZ-MIRAVAL; GARCÍA-RODRÍGUEZ, 2022). Por lo que, el uso de tecnologías digitales provee al profesor de herramientas originales que ayudan a la enseñanza de temas de cálculo integral (CAGLAYAN, 2016).

Observamos que se ponen en juego distintos tipos de pensamiento al trabajar con la integral definida, según la propuesta planteada a los estudiantes. El razonamiento inductivo se considera como un recurso eficaz para construir conocimiento, y su fortaleza se debe, básicamente, al proceso de generalización que se realiza, que implica un proceso de abstracción, el cual está involucrado en la identificación de patrones que constituyen el núcleo para generar el nuevo conocimiento (CASTRO *et al.*, 2010). Resolver una tarea que promueva el razonamiento inductivo de los estudiantes, implica que pasen por tres procesos: “observación de regularidades, establecimiento de un patrón y formulación de una generalización” (SOSA *et al.*, 2019, p. 563).

Con el propósito de incentivar en los estudiantes a que realicen generalizaciones para dar sentido a ciertas nociones relacionadas con el estudio de la integral definida, nociones que son trabajadas en su mayoría como fórmulas, y no a partir de un proceso de construcción por parte de los estudiantes, se presenta este estudio que tuvo como objetivo analizar cómo estudiantes universitarios generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra.

REFERENTES TEÓRICOS

La manipulación de los deslizadores para relacionar los extremos del intervalo en el cual se acumula el área de una región con los límites de integración, y el reconocimiento de regularidades en los cambios que esto genera, pueden ser analizados desde el enfoque

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

instrumental desarrollado por Rabardel (1995) asociado con los tres procesos de razonamiento inductivo señalados por Sosa *et al.* (2019), basados en el trabajo de Polya (1967).

Enfoque Instrumental

La aproximación instrumental se centra en la dimensión tecnológica de la matemática educativa, la cual articula aspectos importantes de su integración en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Uno de los aspectos importantes que propone está aproximación es la diferencia que existe entre lo que es un artefacto y un instrumento. De acuerdo con Rabardel (2011), la transformación progresiva del artefacto en instrumento es denominada como Génesis instrumental y surge cuando un individuo interactúa con un artefacto generando esquemas de utilización de este, es decir, que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto. Asimismo, señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne esquemas de utilización correspondientes.

En la presente investigación se considera como artefacto a la integral de una función f(x) definida en un intervalo [a; b]. Se espera que luego de la resolución de las tareas y de la generación de esquemas de utilización, los estudiantes transformen este artefacto integral definida en un instrumento que permita determinar el área de una región.

La Génesis Instrumental consta de dos dimensiones denominadas Instrumentalización e instrumentación, estas dependen de su orientación. La instrumentalización está orientada hacia la parte artefactual del instrumento en donde el sujeto se enriquece de las propiedades del artefacto, mientras que la instrumentación está orientada hacia el sujeto, específicamente en la construcción de esquemas de utilización por parte del sujeto cuando ejecuta ciertos tipos de tareas cuando utiliza el artefacto.

Rabardel (2011), a partir de esta noción de esquema de Vergnaud (1996), define los esquemas de utilización como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetir la misma acción o aplicarlas en nuevos contextos.

Rabardel (2011) indica que los esquemas de utilización se denominan así porque están relacionados con la utilización de un artefacto, el cual se da en dos niveles distintos y se asocian a dos tipos de esquemas distintos: las actividades relativas a las tareas “segundas”, asociado con lo que se denominan esquemas de uso, son tareas relacionadas con identificación y manejo de las propiedades y características del artefacto, en la presente actividad se espera que los estudiantes generen esquemas de uso asociados a conceptos como áreas de figuras geométricas, relación área – integral definida, antiderivadas, entre otros; y las actividades relativas a las tareas “primeras” o “principales”, asociado con lo que se denominan esquemas de acción instrumentada, son tareas relacionadas con el objeto de la actividad, donde el artefacto cumple el rol de medio para la resolución de la tarea, como dar sentido al TFC que les permita a los estudiantes resolver una integral definida.

Razonamiento Inductivo

Sosa *et al.* (2019), basados en el trabajo de Polya (1967), describen tres procesos que permiten comprender el razonamiento inductivo de un sujeto involucrado en la resolución de una tarea cuyo fin en generalizar un conjunto de casos particulares y obtener reglas generales

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

de ellos: 1) observación de una regularidad, es una acción mental relacionada con la observación de las características de cómo se dan los cambios en objetos que pueden estar representados numérica, figural o gráficamente, en la que se comparan elementos particulares para identificar similitudes o diferencias, esto es regularidades, a partir de las cuales se podrán establecer reglas generales; (2) establecimiento de un patrón, que implica reconocer lo que se repite en un conjunto de casos particulares, de modo que se realicen conjeturas las cuales pueden ser hechas de forma verbal, numérica u otra representación según el objeto de estudio. Este reconocimiento de la existencia de un patrón ayuda a organizar la información y cohesionarse con el fin de realizar una generalización de la situación planteada; y (3) formulación de una generalización, que se entiende como la transición del reconocimiento del patrón a una expresión utilizada como una regla general, la cual se genera a partir de una abstracción del conjunto de casos particulares.

METODOLOGIA

La metodología del presente estudio es de corte cualitativo y presenta un enfoque descriptivo e interpretativo. Bogdan y Biklen (2007) señalan que en este tipo de metodologías los resultados son altamente descriptivos, aunque los investigadores prestan mayor atención a los procesos de resolución; por otro lado, los investigadores que desarrollan metodologías cualitativas, al realizar el análisis de la información, por lo general, obtienen conclusiones basadas en la intuición, y los significados que los estudiantes generan sobre el objeto de estudio resulta esencial en este tipo de metodologías.

Sujetos de investigación

La investigación se desarrolló con un grupo de cinco estudiantes entre los 17 y 19 años que estuvieron matriculados en el curso Cálculo integral en el tercer semestre universitario. En este estudio se reporta las respuestas y procedimientos, dados de forma física y verbal, de una de las estudiantes a quien llamaremos Érika, quien desarrolló toda la actividad y aceptó hacerle una entrevista semiestructurada.

Las estudiantes tenían conocimientos sobre funciones, límites y derivadas, que fueron temas vistos en cursos de primer y segundo ciclo universitarios. Con relación a los conceptos relacionados con la integral definida, Érika tenía conocimiento de la noción de antiderivada y de la definición de integral de una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a; b]$ como el límite de una suma de Riemann asociado al cálculo de áreas: $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i)$, donde dichos conceptos fueron enseñados con énfasis en el uso de técnicas.

El TFC en los libros de texto

En los libros de texto básico que forman parte de diversas universidades, se presenta el TFC de forma similar. Haeussler et al. (2008) lo presenta de la siguiente manera: “Si f es continua en el intervalo $[a; b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a; b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$” (p. 653). Zill y Wright (2011) y Stewart (2010) indican que el TFC presenta dos partes: la primera relaciona la integración con la derivación (no trabajada en esta investigación), y la segunda, denominada forma antiderivada, se describe de forma similar a lo propuesto por Haeussler *et al.* (2008).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

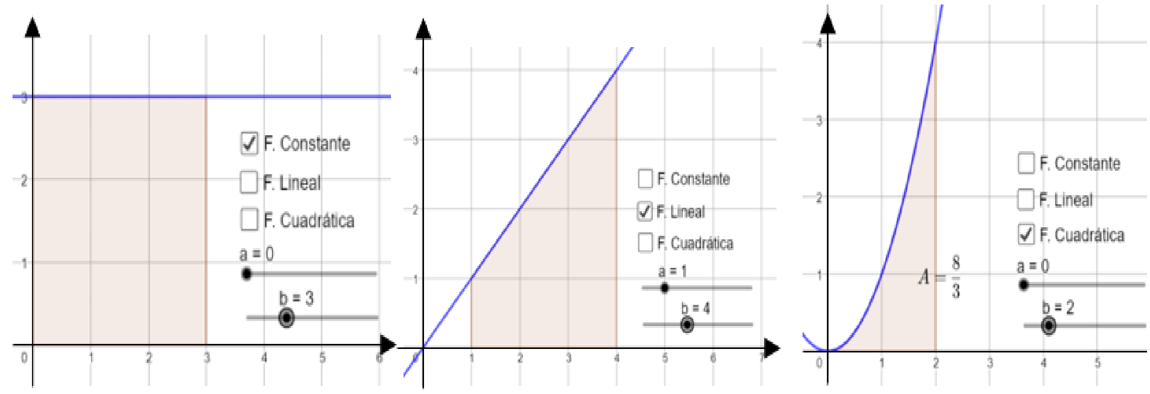
Descripción de la actividad y de los applets en GeoGebra

La actividad se desarrolló en una sola sesión de dos horas, y estuvo compuesta de tres tareas y se utilizaron dos applets. En la primera tarea, las estudiantes debían generalizar en términos de x el área que se acumulaba bajo la gráfica de tres funciones diferentes (una a la vez): constante, lineal y cuadrática, y el eje X, primero en el intervalo $[0; x]$ y luego en el intervalo $[1; x]$, para ello trabajaron casos particulares donde $x = \{1; 2; 3; 4\}$ y tuvieron que determinar el área de regiones mediante fórmulas de geometría para las dos primera funciones, y en el caso de la función cuadrática, el área era una información brindada por el applet.

La segunda tarea era deducir el valor de la integral definida utilizando las mismas funciones de la tarea 1, pero con límites de integración de $x = a$ hasta $x = b$, y luego describir un procedimiento que les permitiera determinar la integral definida de cualquier función en un intervalo dado. En la tercera tarea, las estudiantes utilizaron un segundo applet para determinar regiones sombreadas limitadas por la gráfica de una función y el eje X, con el objetivo de relacionar dicha región con el planteamiento de una integral definida para saber si esta calculaba su área o no.

El applet diseñado para que los estudiantes desarrollen la primera tarea, presenta tres casillas de control: constante, lineal y cuadrática, al activarlos se representan gráficamente las funciones $f(x) = 3$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ respectivamente, y también presenta dos deslizadores a y b que permiten construir y manipular los extremos de un intervalo en el que se define una región sombreada (figura 1).

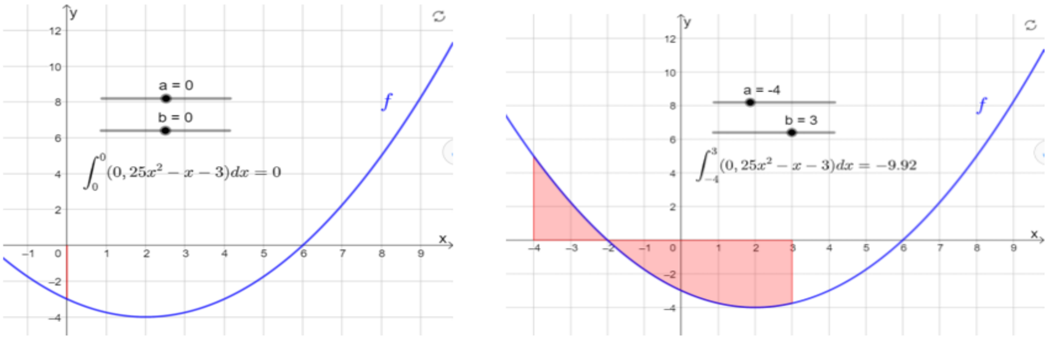
Figura 1 – Casillas de control y deslizadores del applet de la tarea 1



Fuente: Elaboración de los autores

El applet diseñado para que los estudiantes desarrollen la cuarta tarea, presenta la gráfica de la función $f(x) = 0.25x^2 - x - 3$, y dos deslizadores a y b con los que se manipula en intervalo en el que está limitada una región sombreada, así como los límites de integración de la integral definida planteada (figura 2).

Figura 2 – Gráfica y deslizadores del applet de la tarea 3



Fuente: Elaboración de los autores

A continuación, se presenta cada una de las tareas y el análisis respectivo.

ANÁLISIS

La primera tarea de la actividad consistía en que los estudiantes, luego de leer el código QR con sus celulares, activan cada una de las tres casillas de control de GeoGebra y siguieran las instrucciones para completar las tablas mostradas en la actividad (figura 3).

Figura 3 – Instrucciones y vista gráfica de GeoGebra en la tarea 1

Lea el código QR mostrado en la figura. Marque las casillas y manipule los deslizadores según se indique en cada ítem.

TAREA 1

- Marque las casillas y complete las tablas que muestran a continuación.

Casilla: F. Constante
Deslizador: $a = 0$; $b = k$

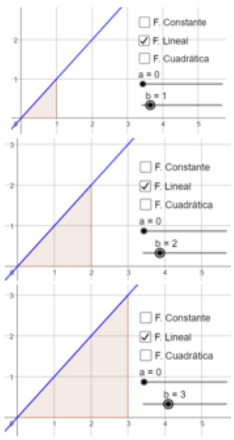
k	$A = \int_0^k 3\,dx$
1	
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Lineal
Deslizador: $a = 0$; $b = k$

k	$A = \int_0^k x\,dx$
1	
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Cuadrática
Deslizador: $a = 0$; $b = k$

k	$A = \int_0^k x^2\,dx$
1	
2	
3	
4	
x	



Lea el código QR mostrado en la figura. Marque las casillas y manipule los deslizadores según se indique en cada ítem.

- Marque las casillas y complete las tablas que muestran a continuación.

Casilla: F. Constante
Deslizador: $a = 1$; $b = k$

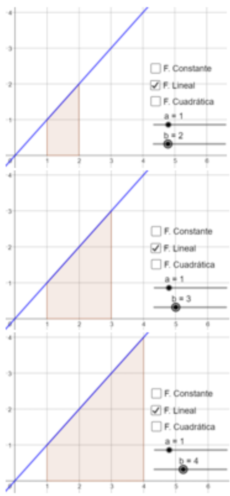
k	$A = \int_1^k 3\,dx$
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Lineal
Deslizador: $a = 1$; $b = k$

k	$A = \int_1^k x\,dx$
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Cuadrática
Deslizador: $a = 1$; $b = k$

k	$A = \int_1^k x^2\,dx$
2	
3	
4	
x	



Fuente: Elaboración de los autores

La estudiante Érika, luego de leer el código QR y obtener en su celular el ambiente de GeoGebra, marcó de forma ordenada cada una de las casillas y manipuló el deslizador *b*, configurado para que tenga incrementos de una unidad, con el fin de observar los cambios que se generaban en la vista gráfica del programa. Para las instrucciones en donde se fija el valor $a = 0$ y se consideran los valores de $b = \{1; 2; 3; 4\}$, cuando está activa la casilla F. Constante, se observa la función $f(x) = 3$, y al variar los valores del deslizador *b* se dibujan rectángulos de altura igual a 3 u, y de bases diferentes; si está activa la casilla F. Lineal, se observa la función $f(x) = x$, y al variar los valores del deslizador *b* se dibujan triángulos rectángulos e isósceles de catetos igual a *b* u, y cuando está activa la casilla F. Cuadrática, se observa la función $f(x) = x^2$, y al variar los valores del deslizador *b* se pinta una región de borde superior no lineal y aparece el área de dicha región. Un extracto de la entrevista semiestructurada expone lo que percibió la estudiante Érika a partir de los cambios y regiones observadas.

> **Investigador:** *¿Qué observas luego de marcar cada casilla y manipular el deslizador b?*
> **Érika:** *En el primer caso veo rectángulos y cambia su ancho, en el segundo veo triángulos rectángulos y sus catetos cambian, pero son iguales, y en el tercero parece un triángulo, pero curvo, y cambia su área. Solo en este me dan el valor del área.*
> **Investigador:** *¿Y sabes cómo determinar el área de región en los dos primeros?*
> **Érika:** *Sí, creo que el área del rectángulo es base por altura, y de un triángulo es entre 2.*

Estas operaciones fueron utilizadas también cuando la instrucción era fijar el valor $a = 1$ y considerar los valores de $b = \{2; 3; 4\}$

Manipular el deslizador *b* y observar cambios unitarios en la base de los rectángulos y triángulos, ampliando las figuras geométricas, sin alterar sus formas, y ver los valores de área en la región no lineal, todos expresados en fracciones con denominador 3, es una fase del razonamiento inductivo que puede ser considerada como de *observación de una regularidad*.

Érika completó con valores numéricos cada una de las seis tablas, para ello movilizó su *esquema de uso área de figuras geométricas*, al reconocer las figuras geométricas sombreadas y determinar el valor de sus áreas mediante fórmulas de geometría. Al colocar el valor de las áreas en la segunda columna de cada tabla, que corresponde al valor de la integral definida, Érika movilizó su *esquema de uso área - integral definida*, al reconocer que la integral definida permite determinar el área de una región cuando la función que limita la región es positiva y continua en el intervalo de análisis.

En algunas de estas tablas claramente se ve el *establecimiento de un patrón*, porque los valores de la primera columna (límite superior de la integral definida) aparecían en el cálculo del área de la segunda columna (valor de la integral definida); en otros casos, se colocaba directamente los valores de las áreas de las regiones dibujadas, lo que no significa que la estudiante, mentalmente, no se haya dado cuenta del patrón, por ejemplo, para los valores de $b = \{1; 2; 3; 4\}$, GeoGebra presentaba como áreas: 1/3, 8/3, 27/3, 64/3 respectivamente, esto es, el numerador de las áreas era *b* al cubo. Por último, Érika *formuló una generalización* como una expresión en términos de *x* que vendría a ser un valor genérico del límite superior *b* de la integral definida (figura 4).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

Figura 4 – Respuestas de Érika a la primera parte de la tarea 1

k	$A = \int_0^k 3\,dx$
1	3X = 31=3
2	32=6
3	3.3=9
4	3.4=12
x	3.X

k	$A = \int_0^k x\,dx$
1	1/2
2	2
3	9/2
4	8
x	X²/2

k	$A = \int_0^k x^2\,dx$
1	1/3
2	8/3
3	27/3
4	64/3
x	X³/3

Fuente: Elaboración de los autores

Un extracto de la entrevista permitió conocer cómo interpretó Érica las expresiones obtenidas en términos de *x*.

> **Investigador**: *¿Cómo interpretas las expresiones que has determinado?*
> **Érika**: *Creo que son las antiderivadas de 3, x y* x^2*, pero sin la constante.*

Esta respuesta nos hace pensar que Érika generó su *esquema de uso área – antiderivada*, al construir una expresión (expresión generalizada) que permite determinar el área acumulación bajo la gráfica de una función positiva y continua desde $x = 0$ hasta un cualquier valor positivo.

Para la segunda parte de la tarea 1, donde se fija el valor $a = 1$ y se consideran los valores de $b = \{2; 3; 4\}$, se observa que la estudiante determina el área de toda la región hasta el valor de *b* con el que se trabaja, y se resta el área de la región limitada por la función y el eje X en el intervalo [0; 1], movilizando con ello los esquemas descritos anteriormente. Érika, nuevamente *estableció un patrón* y *formuló una generalización* en términos de *x* que vendría a ser un valor genérico del límite superior *b* de la integral definida y un valor fijo de límite inferior que vale 1 (figura 5).

Figura 5 – Respuestas de Érika a la segunda parte de la tarea 1

k	$A = \int_1^k 3\,dx$
2	3
3	6
4	9
x	3X − 3 3(X−1)

k	$A = \int_1^k x\,dx$
2	$\frac{2.2}{2} - \frac{1.1}{2} = 1,5$
3	$\frac{3.3}{2} - \frac{1}{2} = 4$
4	$\frac{4.4}{2} - \frac{1}{2} = 7,5$
x	$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2-1}{2}$

k	$A = \int_1^k x^2\,dx$
2	7/3
3	$\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}$
4	$\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}$
x	$\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3-1}{3}$

Fuente: Elaboración de los autores

Un extracto de la entrevista permitió conocer cómo interpretó Érica las expresiones obtenidas en términos de *x*.

> **Investigador:** *¿Cómo interpretas las expresiones que has determinado?*
> **Érika:** Primero calculas las antiderivadas de 3, *x* y x^2, y reemplazas el de arriba y luego le restas el de abajo.

Esta respuesta nos permite afirmar que Érika generó su *esquema de uso variación de antiderivada*, al describir cómo determinaría el valor de una integral definida involucrando el concepto de antiderivada.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

La segunda tarea se planteó con la intención, primero de confirmar el proceso que iban a seguir los estudiantes en la tarea 1, lo de determinar el valor de una integral definida, para ello, se consideró de forma genérica las mismas funciones de la tarea 1, pero ahora definidas en un intervalo [*a*; *b*]; y segundo, para que los estudiantes describan de forma general un procedimiento de cálculo de integrales definidas (figura 6).

Figura 6 – *Respuestas de Érika a la tarea 2*

TAREA 2

Determine las siguientes integrales definidas en términos de a y b:

$A = \int_a^b 3\,dx =$	$A = \int_a^b x\,dx =$	$A = \int_a^b x^2\,dx =$

Luego, describa con sus palabras cómo determinaría la integral definida para cualquier función $f(x)$ definida en un intervalo $[a; b]$.

Érika desarrolló de forma correcta esta tarea, lo hizo de la manera en la que lo explicó en la entrevista semiestructurada, asimismo, presentó una descripción general del proceso de cálculo de una integral definida.

Figura 7 – Respuestas de Érika a la tarea

$A = \int_a^b 3\,dx = 3(b-a)$	$A = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$	$A = \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

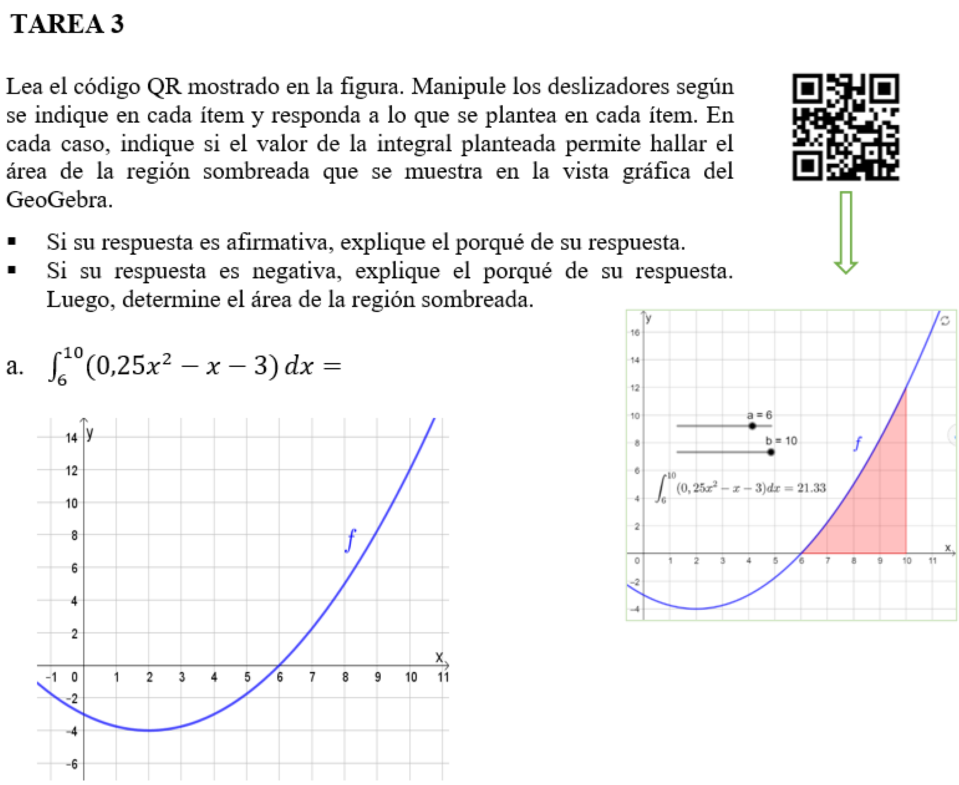
1: Se halla la antiderivada de la funcion
2: Se coloca en terminos de los extremos a y b

Podemos afirmar que la estudiante generó su *esquema de acción instrumentada TFC*, con el cual pueden determinar el valor de una integral definida, para cualquier función continua definida en un intervalo cerrado, a partir del cálculo de una antiderivada de la función, la evaluación en ella de los límites de integración y posterior diferencia.

En la tercera tarea de la actividad, los estudiantes luego de leer el código QR con sus celulares, manipulaban los deslizadores para identificar una región sombreada en la vista gráfica de GeoGebra de modo que pudieran validar si la integral definida planteada permitía o no calcular el área de dicha región (figura 8). En esta investigación solo se presenta la respuesta de la estudiante Érika al ítem (a), que está relacionado con lo hecho en las tareas 1 y 2.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

Figura 8 – *Instrucciones y vista gráfica de GeoGebra en la tarea 3*



TAREA 3

Lea el código QR mostrado en la figura. Manipule los deslizadores según se indique en cada ítem y responda a lo que se plantea en cada ítem. En cada caso, indique si el valor de la integral planteada permite hallar el área de la región sombreada que se muestra en la vista gráfica del GeoGebra.

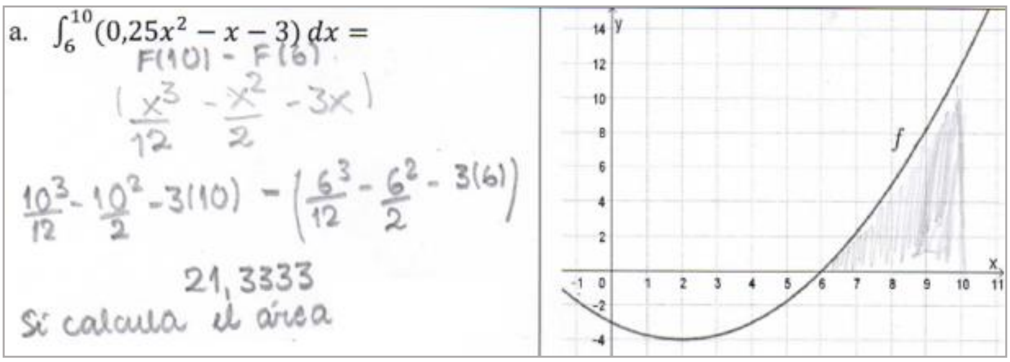
- Si su respuesta es afirmativa, explique el porqué de su respuesta.
- Si su respuesta es negativa, explique el porqué de su respuesta. Luego, determine el área de la región sombreada.

a. $\int_6^{10}(0{,}25x^2 - x - 3)\,dx =$

Fuente: Elaboración de los autores

La estudiante Érika, luego de leer el código QR y obtener en su celular el ambiente de GeoGebra, manipuló los deslizadores y asignó los valores $a = 6$ y $b = 10$. Con ello obtuvo una región sombreada limitada por la gráfica de una función f y el eje X en el intervalo [6; 10], y el valor 21,33 de la integral $\int_6^{10}(0{,}25x^2 - x - 3)\,dx$. Para verificar la validez del resultado, Érika movilizó su esquema de acción instrumentada regla de Barrow y determinó la antiderivada $F(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} - 3x$, de la función $f(x) = 0{,}25x^2 - x - 3$, evaluó en ella los valores $x = 10$ y $x = 6$, y los restó, con lo cual corroboró el resultado mostrado en la vista gráfica de GeoGebra (figura 9).

Figura 9 – *Respuestas de Érika a la tarea 3*



a. $\int_6^{10}(0{,}25x^2 - x - 3)\,dx =$

$F(10) - F(6)$

$\left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} - 3x\right)$

$\frac{10^3}{12} - \frac{10^2}{2} - 3(10) - \left(\frac{6^3}{12} - \frac{6^2}{2} - 3(6)\right)$

21,3333

Si calcula el área

Érika había aprendido a determinar el valor de una integral definida a partir del límite de una suma de Riemann; luego de la experiencia, Érika generó y movilizó distintos esquemas de utilización con los que transformó la integral definida en un instrumento para el cálculo de áreas a partir de la noción de antiderivada. Por lo tanto, Érika logró la génesis instrumental del concepto de integral definida.

DISCUSIÓN

La presente investigación tuvo por objetivo analizar cómo estudiantes universitarios generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra

La integral definida como el límite de una suma de Riemann, asociada con el cálculo del área de una región limitada por la gráfica de una función en un intervalo dado, era un artefacto para Érika, dado que en una clase previa solo fue presentada como una definición formal del concepto de integral definida, y no se utilizó luego para el cálculo de áreas. El proceso inductivo permitió a Érika, dar sentido al concepto de antiderivada, vista como una función que permite determinar el área de una región que se acumula a medida que varía el extremo derecho de un intervalo, así como también crear conocimiento sobre la regla de Barrow que emplea antiderivadas para el cálculo de integrales definidas. Coincidimos con Castro et al. (2010) acerca de que el razonamiento inductivo tiene su fortaleza en el proceso de generalización, a partir del cual se genera nuevo conocimiento.

En la tarea 1 se desarrollaron las fases del razonamiento inductivo, y se pudieron identificar cómo los estudiantes generaron y movilizaron distintos esquemas de uso del artefacto integral definida. En la fase denominada *establecimiento de un patrón*, se identificó el *esquema de uso área de figuras geométricas* y el *esquema de uso área – integral definida,* y en la fase denominada *formulación de una generalización* se identificó el *esquema de uso área – antiderivada y* el *esquema de uso variación de antiderivada*. Estos esquemas permitieron en la tarea 2, describir un proceso para resolver integrales definidas mediante el uso de antiderivadas, y generaron con ello el *esquema de acción instrumentada regla de Barrow*, asociado con la técnica para resolver integrales definidas que lleva su nombre. Este esquema de acción instrumentada fue puesto en práctica en un ejercicio de la tarea 3, razón por la cual decimos que Érika logró la génesis instrumental de la noción de integral definida. Más que una técnica para resolver una integral, el proceso inductivo permitió responder a una pregunta: ¿cómo se relaciona la integral definida y la noción de antiderivada, a partir de la acumulación de áreas?, que de acuerdo con Santos-Trigo y Aguilar (2018), responder a estas preguntas promueve la construcción de significados sobre los conceptos involucrados.

La herramienta casilla de control de GeoGebra permitió trabajar de forma ordenada con diferentes funciones polinomiales, y la herramienta deslizador de GeoGebra, tuvo un rol fundamental, porque permitió dinamizar los cambios en las regiones sombreadas, lo que al parecer influyó en la *observación de las regularidades*, así como también en un proceso acumulativo de áreas con el fin de que, al realizar una generalización, la expresión que se obtenga se relaciones con una antiderivada. Estamos de acuerdo con Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) cuando mencionan que el uso de tecnologías digitales desarrolla en los estudiantes estrategias relacionadas con la visualización de cambios simultáneos, el arrastre y la manipulación de deslizadores; así como con Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022) cuando señalan que el uso de applets asociado con preguntas particulares, puede posibilitar que los estudiantes den sentido a los procesos que realizan al realizar construcciones o generalizaciones a partir de situaciones de cambio.

CONCLUSIONES

El concepto de integral definida, por lo general, se trabaja a partir de un proceso de aproximación mediante sumas de Riemann, el cual, al ser abordado con tecnologías digitales, posibilita que el estudiante observe y coordine los cambios simultáneos que se dan entre diversas cantidades, buscando que se genere un aprendizaje más completo. Como el TFC se relaciona con conceptos como el de antiderivada, y este a su vez se puede obtener mediante procesos de acumulación de áreas al movilizar el extremo derecho del intervalo que define la región, sería recomendable el diseño de actividades que involucren situaciones de cambio, que puedan ser trabajadas con tecnologías digitales.

El uso de regiones geométricas posibilita que el estudiante utilice sus conocimientos previos sobre fórmulas de geometría, y al trabajar en casos particulares bajo un proceso inductivo, resulta favorable para formular generalizaciones. Sin embargo, cuando la función es más compleja, o si se requiere la comprensión de que los cambios en el área que se acumula y los cambios en el extremo derecho del intervalo son simultáneos y consideran a todos los valores reales en el intervalo trabajado, el razonamiento inductivo podría limitar esa comprensión. Por lo que sería recomendable, trabajar el TFC desde una perspectiva del razonamiento covariacional, a fin de lograr un aprendizaje más conectado a procesos que involucran fenómenos dinámicos.

Las tecnologías digitales pueden ser utilizadas para comprobar resultados, ya sea realizar gráficas de funciones, operaciones matemáticas, entre otras acciones. Sin embargo, el potencial de los sistemas de geometría dinámica, como es el caso de GeoGebra, es que permiten conectar diferentes herramientas a deslizadores con el fin de observar cambios dinámicos y simultáneos, permitir a los estudiantes movilizar nociones matemáticas relacionadas con la integral definida, asociadas a los esquemas de utilización generados, tanto en procesos de aproximación al área de una región, como en procesos de acumulación de áreas.

REFERENCIAS

ARANDA, C.; CALLEJO, M. Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: Dos estudios de casos. **Bolema**, 31(58), 777-798, 2017. Acceso en: 18 ago. 2022. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Qualitative Research for Education. An Introduction to Theory and Methods**. 5. ed. Pearson, 2007.

CASTRO, E.; CAÑADAS, M.; MOLINA, M. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. **Revista UNO**, 54, 55-67, 2010. Acceso en: 03 jun. 2022. Disponible en: http://hdl.handle.net/10481/26079

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449

CAGLAYAN, G. Teaching ideas and activities for classroom: integrating technology into the pedagogy of integral calculus and the approximation of definite integrals. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 47(8), 1261-1279, 2016. Acceso en: 18 jul. 2022. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1176261

HAEUSSLER, E.; PAUL, R.; WOOD, R. **Matemáticas para administración y economía**. México, D. F.: Prentice Hall, 2008.

MARTÍNEZ-MIRAVAL, M.; GARCÍA-CUÉLLAR, D. Estudio de las Aprehensiones en el Registro Gráfico y Génesis Instrumental de la Integral Definida. **Formación Universitaria**, 13(5), 177-190, 2020. Acceso en: 10 jun. 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

MARTÍNEZ-MIRAVAL, M.; GARCÍA-RODRÍGUEZ, M. Razonamiento Covariacional de Estudiantes Universitarios en un Acercamiento al Concepto de Integral Definida mediante Sumas de Riemann. **Formación Universitaria**, 15(4), 105-118, 2022. Acceso en: 08 set. 2022. DOI: http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

NITTI, L.; ÁLVAREZ, M. Integral definida y función integral. Exploración, formalismo e intuición en los futuros profesores de matemática. **Yupana**, 7(13), 69-83, 2014. Acceso en: 05 jul. 2022. DOI: https://doi.org/10.14409/yu.v1i7.4263

PÓLYA, G. **Le découverte des mathématiques.** Paris: DUNOD, 1967.

RABARDEL, P. **Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.** (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. Framing the use of technology in problem solving approaches. **The Mathematics Enthusiast**, 10(1-2), 279-302, 2013. Acceso en: 09 jun. 2022. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268

SANTOS-TRIGO, M.; AGUILAR, D. **Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital.** En A. Ávila (ed.), Rutas de la Educación Matemática (pp. 148-167). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C., SOMIDEM, 2018.

SERHAN, D. Students' understanding of the definite integral concept. International Journal of **Research in Education and Science**, 1(1), 84-88, 2015. Acceso en: 12 jul. 2022. Disponible em: https://www.ijres.net/index.php/ijres/article/view/20

STEWART, J. **Cálculo de una variable: Conceptos y contextos**, Cuarta edición. México, D. F.: Cengage Learning, 2010.

SOSA, L.; APARICIO, E.; CABAÑAS, G. Characterization of inductive reasoning in middle schoolmathematics teachers in a generalization task. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, 14(3), 563–581, 2019. Acceso en: 08 jun. 2022. DOI: https://doi.org/10.29333/iejme/5769

VERGNAUD, G. **A teoria dos campos conceptuais.** En Jean Brun (org), Didáctica das matemáticas. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996.

ZILL, D.; WRIGHT, W. **Cálculo. Trascendentes Tempranas**. México, D. F.: McGraw-Hill, 2011.

***Submetido em*: 19 de setembro de 2022.**

***Aprovado em*: 01 de novembro de 2022.**

***Publicado em*: 08 de dezembro de 2022.**

Como citar o artigo:
GARCÍA-CUÉLLAR, D. J.; MARTÍNEZ-MIRAVAL, M. D. Uso de GeoGebra y el Razonamiento Inductivo en un Acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., 2022. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449