

Orquestación Instrumental: Análisis Marginal de Funciones Económicas en Educación Virtual con el uso de GeoGebra

Jesús Victoria Flores Salazar¹

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

Pedro Tasayco Casas²

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

En este artículo se presenta y analiza, con base en la Aproximación y Orquestación Instrumental, una propuesta didáctica cuyo objetivo es organizar entornos tecnológicos para la enseñanza de la matemática de estudiantes de economía con la finalidad de favorecer la interpretación del análisis marginal en funciones económicas en modalidad de educación virtual. Para ello, se emplea el software de videoconferencias del Zoom mientras que la gestión del aprendizaje se realiza con la medición del GeoGebra. La investigación pretende identificar tipos de esquemas de utilización que movilizan los estudiantes, esto a partir de la observación de sus técnicas instrumentadas, cuando desarrollan las actividades de la propuesta didáctica.

Palabras clave: Análisis Marginal; Genesis instrumental; Orquestación Instrumental; Educación virtual; Derivada.

Instrumental Orchestration: Marginal Analysis of Economic Functions in Virtual Education using GeoGebra

ABSTRACT

This article presents and analyses, based on Instrumental Approximation and Orchestration, a didactic proposal that aims to organize technological environments for the teaching of mathematics to economics students in order to improve the interpretation of marginal analysis in economic functions in a virtual education modality. For this purpose, Zoom videoconferencing software is used, while learning management is carried out with the support of GeoGebra. The research pretends to identify the types of usage schemes that students mobilize, based on the observation of their instrumental techniques, when they develop the activities of the didactic proposal.

Keywords: Analysis marginal; Instrumental Genesis; Instrumental Orchestration; virtual education; derivative.

¹ Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil (PUC-SP). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Directora del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y coordinadora de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0036-140X> . E-mail: jvflores@pucp.pe

² Magister en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9228-2644> . E-mail: pedro.tasayco@pucp.edu.pe

Orquestração Instrumental: Análise Marginal de Funções Econômicas no Ensino Virtual usando GeoGebra

RESUMO

Este artigo apresenta e analisa, com base na Aproximação Instrumental e Orquestração, uma proposta didática cujo objetivo é organizar ambientes tecnológicos para o ensino de matemática para estudantes de economia com o objetivo de favorecer a interpretação da análise marginal em funções econômicas em uma modalidade de educação virtual. Para este fim, é utilizado o software de videoconferência Zoom, enquanto a gestão da aprendizagem é realizada com a medição do GeoGebra. A pesquisa visa identificar os tipos de esquemas de utilização mobilizados pelos estudantes, com base na observação de suas técnicas instrumentais, quando realizam as atividades da proposta didática.

Palavras-chave: Análise Marginal; Gênese Instrumental; Orquestração Instrumental; Educação Virtual; Derivada.

INTRODUCCIÓN

A inicios del año 2020, la población mundial se vio en la obligación a permanecer en cuarentena debido al COVID-19, en ese momento no sabíamos que tan grave sería esta pandemia y que implicaciones tendría en la población y especialmente en la educación. A raíz de estos sucesos, las instituciones educativas del mundo optaron por migrar a una educación virtual. Usamos el término *educación virtual* en el sentido de Lara (2002), quien afirma que la educación virtual es la modalidad educativa que eleva la calidad de la enseñanza, que respeta su flexibilidad o disponibilidad (en cualquier momento, tiempo o espacio) y que integra los tres modos: asincrónico, sincrónico y autoformación.

Por otro lado, cabe resaltar que los sistemas educativos no estaban preparados para este cambio tan abrupto, tanto desde el punto de vista tecnológico como metodológico. Era necesario poner a la tecnología digital al servicio de la educación, pero ello trajo consigo algunas dificultades como, por ejemplo, encontrar el canal o medio tecnológico más apropiado para realizar el proceso de enseñanza- aprendizaje y por otro lado que los estudiantes se adapten a esta nueva modalidad de enseñanza. El presente artículo pretende aportar a la comunidad educativa una investigación relacionada al análisis marginal de funciones económicas en un entorno de educación virtual mediante la orquestación de distintos artefactos tecnológicos dirigido a estudiantes de economía. En tal sentido, se presenta una secuencia, con base en la Aproximación y Orquestación Instrumental para la educación virtual. Específicamente se presenta una configuración didáctica adaptada (Şay y Akkoç, 2016) al análisis marginal de funciones económicas, pues lo que se pretende es propiciar en los estudiantes de economía técnicas instrumentadas y por ende, inferir los posibles esquemas de utilización que serían movilizados por los mismos. Además, se asume que previamente el docente ha trabajado el tema de la derivada, eso significa que poseen esquemas de uso de la derivada, monotonidad, valores extremos de una función, es decir nociones básicas del Cálculo Diferencial.

En cuanto al Cálculo Diferencial se sabe que es un instrumento poderoso para describir el cambio, medirlos y predecirlos. En tal sentido, la derivada es una pieza importante cuando se necesita cuantificar o medir algún fenómeno y los cambios que ello implican. Sin embargo, la educación universitaria prioriza la enseñanza de la derivada en forma algorítmica, mediante construcciones y demostraciones rigurosas (Artigue, 1995). Es decir, los estudiantes cumplen

con el propósito de calcular límite, derivar, encontrar los puntos donde una función alcanza su máximo o mínimo valor, pero difícilmente logran transferir aquellos conocimientos a otras áreas, por ejemplo, la Economía específicamente al análisis de funciones económicas mediante el análisis marginal. Sobre este aspecto Dolores (2007) afirma “difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentran en esencia de este concepto” (p.1). La precaria comprensión del concepto de derivada implica grandes pérdidas de habilidades a nivel profesional, más aún en estudiantes de economía que requieren de la noción de marginalidad para la toma de decisiones en su ámbito laboral.

Con relación a los trabajos en economía, Stanley Jevon, Carl Menger y León Walras formalizaron los conceptos tradicionales de la economía, mediante la introducción de los conceptos de utilidad marginal y maximización. Por eso, son considerados los precursores del marginalismo en la economía pues fueron los primeros en proponer la ley de la utilidad decreciente e incorporarlo al principio de equilibrio general de la economía. Por ello, usamos el término análisis marginal cuando hacemos uso de la derivada o diferencial para predecir el cambio de valor de una función en un contexto económico (ingreso, costo, utilidad, producción, etc.) como consecuencia de aumentar una unidad de la variable independiente (Lial y Hungerford, 2000). Además, las funciones marginales de las funciones económicas más trascendentes (ingreso, costo, utilidad o producción) son fundamentales para el análisis de un determinado contexto económico aportando información valiosa a la toma de decisiones. El economista y escritor Gregory Mankiw en su libro “Principios de Economía” afirma que el análisis marginal es uno de los diez principios de la economía más importantes además regula la manera de cómo las personas racionales toman decisiones en función de la noción de marginalidad.

Por otro lado, investigaciones de Mercapide, Feudel, Albán y Ruíz brindarán una perspectiva de la forma en la que es tratado el análisis marginal en funciones económicas. Mercapide (2018) comprende la problemática del proceso de aprendizaje y enseñanza de funciones y derivadas. El autor plantea una propuesta didáctica en busca de aportar una herramienta que permita la enseñanza y aprendizaje más eficaz de conceptos de cálculo, la cual se realizó en dos etapas. En la primera, se aplicó un cuestionario para graduar el nivel de los problemas planteados, establecer una mejor redacción, mejorar la rúbrica, etc. Y en la segunda etapa, implementa las mejoras de la etapa anterior y busca comprobar los conocimientos de los estudiantes en funciones y derivadas. El autor resalta la importancia del *software* GeoGebra pues permite mostrar al mismo tiempo representaciones algebraica, gráfica y tabular. También, Feudel (2016) se centra en tres preguntas ¿Qué conocimientos acerca de la derivada necesitan obtener los estudiantes de economía? ¿Qué conocimiento deberían tener los estudiantes de economía antes de ingresar a la universidad? ¿Qué conocimientos tienen los estudiantes de economía sobre la derivada después de llevar los cursos de matemática? El autor señala que, los estudiantes de economía después de haber llevado los cursos de matemática deben comprender la derivada en sus representaciones gráfica como pendiente de la recta tangente, verbal como la razón de cambio instantánea y física como la velocidad. Esta investigación concluyó que para los estudiantes es más importante la parte operativa de las derivadas relacionadas a la regla de derivación que la parte conceptual.

Además, que los estudiantes no consideran importante la derivada en contextos económicos. Otra investigación importante es la de Albán (2017) tiene por finalidad favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de resolución de problemas de optimización en estudiantes de primer semestre de economía. Para ello, planteó una secuencia sobre la derivada aplicada a la economía. Además, se realizaron encuestas a estudiantes y entrevistas a docentes de la facultad de economía para establecer criterios importantes en el tema de estudio. El autor resalta la importancia de la enseñanza basada en problemas (EBP) y concluye que la EBP satisface el proceso de enseñanza aprendizaje funcionando como mediador pedagógico. También, Ruíz (2016) en su investigación se centró en la enseñanza y aprendizaje de funciones y derivadas en estudiantes del primer año de bachillerato. Organizó cuatro secciones en la secuencia didáctica, justamente la cuarta sección tuvo la finalidad de trabajar la comprensión de funciones y derivadas mediante funciones económicas como el costo, ingreso y utilidad. El autor indica que tanto la propuesta como los textos deben estar centrados en la interiorización, asociación y aplicación de los conceptos aprendidos. Además, señala que los estudiantes deben ser capaces de relacionar situaciones cotidianas con los conceptos matemáticos y económicos aprendidos.

Las investigaciones de Mercapide (2018), Feudel (2016) y Albán (2017) apuntan a que existe una concepción de la derivada en los estudiantes enfocada en un aprendizaje mecánico. Asimismo, los investigadores mencionados señalan la eficiencia del *software* GeoGebra en la enseñanza de las derivadas por sus características dinámicas y gráficas las cuales promueven el pensamiento reflexivo. Mientras que Ruiz (2016) indica que la enseñanza de la derivada en estudiantes de economía debe apuntar al razonamiento e interiorización del concepto de derivada.

En base a que el profesor es pieza fundamental del proceso de enseñanza aprendizaje pues es quien, con su experiencia y conocimiento de las matemáticas, implementa las propuestas didácticas en el aula para alcanzar los objetivos didácticos, planteamos un cuestionamiento que norteará este artículo, cómo *el profesor organiza y planifica una secuencia didáctica en la que se utilice como medio la tecnología digital para la interpretación del análisis marginal de funciones económicas*. Para dar respuesta a esta cuestión se utiliza como fundamento teórico la Aproximación y Orquestación Instrumental.

APROXIMACIÓN Y ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL

En la actualidad existen teorías propias del área científica de Didáctica de la Matemática que permiten analizar el uso o mediación de la tecnología digital, la que presentamos en este artículo es la Aproximación y Orquestación Instrumental. Para poder entender adecuadamente la noción de Aproximación Instrumental, tal como fue definida (Rabardel y Verillon, 1985), es necesario tener claro las nociones claves como son esquemas de utilización, artefacto e instrumento, proceso de Genesis Instrumental y Orquestación Instrumental (Trouche, 2005).

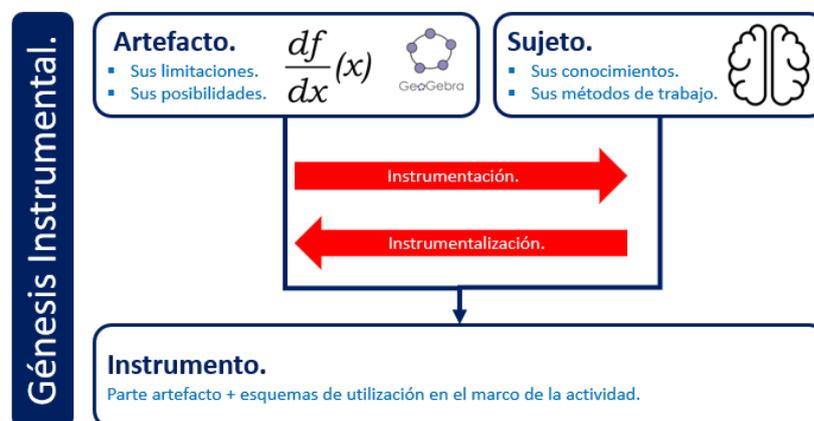
Con relación a artefacto Béguin y Rabardel (2000) afirman que “el artefacto puede ser material o simbólico, producido por el sujeto o por otros, con uno o más esquemas asociados, resultantes de la propia construcción del sujeto, autónomo o de una apropiación de esquemas sociales ya formados fuera de él” (p. 8). Una característica fundamental de un artefacto es su intencionalidad, pues esta define su existencia. Para el presente artículo, la derivada funge de artefacto, dado que, a partir de ella y a través de una Orquestación Instrumental promoveremos

el análisis marginal de funciones económicas en estudiantes de economía. Otra noción fundamental es la noción de esquema, fundamentado en la noción de esquema de (Vergnaud, 1990). En ese sentido, Rabardel (2011) señala que es “la organización invariante de la conducta del sujeto para una clase de situaciones, tanto en términos de acción y actividad simbólica” (p. 164). Cuando los esquemas se relacionan a la utilización de un artefacto serán denominados esquemas de utilización, las cuales refieren a dos dimensiones de la actividad. Además, los esquemas de utilización se clasifican en tres tipos: Esquemas de Uso (EU), Esquemas de acción instrumentada (EAI), Esquemas de Actividad Colectiva Instrumentada. (EACI).

Los *Esquemas de Uso* relativos a las tareas segundas pueden situarse en el nivel de esquemas elementales y lo que los caracteriza es su orientación, hacia las tareas segundas que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto. Además, los *Esquemas de Acción Instrumentada*, consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Lo que los caracteriza es que son relativos a las “tareas primeras”, estos afloran como consecuencia de la asimilación y reestructuración de los esquemas de uso y de otros esquemas en oportuna correspondencia. También dado que los procesos de enseñanza y de aprendizaje se suelen dar en entornos de actividades colectivas donde un mismo artefacto puede ser usado por un mismo grupo de sujetos, en simultaneo, donde se están generando y usando esquemas específicos, todo ello son condiciones favorables para que emerjan los *Esquemas de Actividad Colectiva Instrumentada*.

En cuanto al instrumento Rabardel (2011) lo define como un artefacto en acción. El instrumento tiene componente artefactual (material o simbólica) asignada por el sujeto o sujetos, pero también componente de esquema de utilización, cualidad adquirida como consecuencia de la construcción propia del sujeto, este proceso es llamado *Genesis instrumental*, el cual se construye a partir de un proceso doble de instrumentación e instrumentalización. Por otro lado, Trouche (2004), reconoce que en el proceso de Génesis Instrumental existen dos dimensiones, la *instrumentalización* que está orientada al artefacto cuando se transforma el artefacto o potencia con fines específicos y la *instrumentación* cuando va dirigida al sujeto guiando el desarrollo y la apropiación de los esquemas de acción instrumentada obteniendo una eficaz repuesta en la tarea. (ver figura 1).

Figura 1: Componentes de la génesis instrumental en la investigación



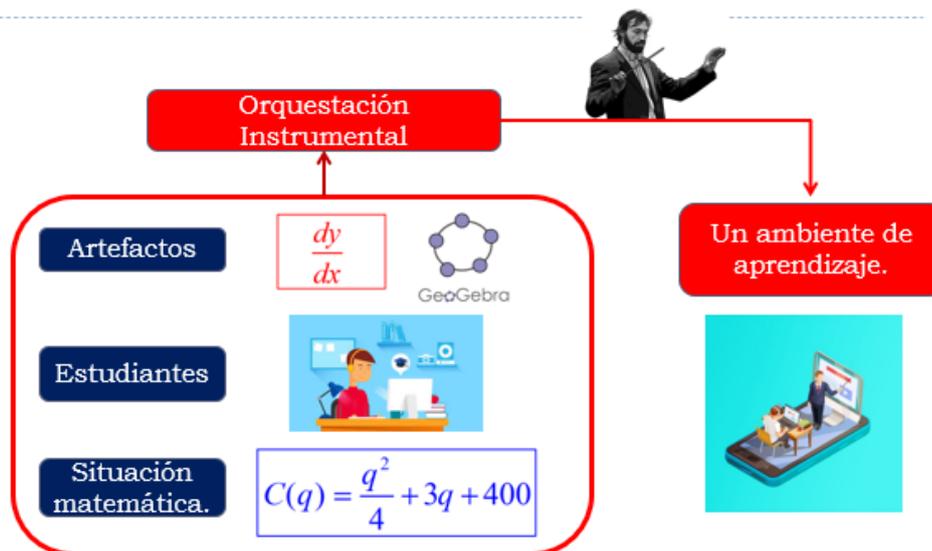
Fuente: Tasayco (2021, p. 26)

Como nos encontramos en tiempos donde la tecnología digital es parte de nuestra vida cotidiana, por ende, era inevitable su incursión en la educación. Sin embargo, la pandemia de COVID-19 aceleró ese proceso de incorporación, pero ha sido una transición muy abrupta. Desde inicios de siglo investigadores, como Lagrange, Artigue y Trouche ya vislumbraban la inserción de la tecnología digital en la enseñanza de la matemática. Prioritariamente las investigaciones se han centrado en la *Genesis instrumental* por parte del estudiante, pero el engranaje principal que hace posible este proceso es el profesor, pues es el responsable de planificar, estructurar y ejecutar el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Por eso, Drijvers et al (2010) indica que para lograr la Génesis Instrumental esperada es necesario ser orientada por el profesor a través de una *Orquestación Instrumental* en una determinada situación matemática. Pierce y Ball (citado en Drijvers et al. 2010) señalan que “el proceso de un maestro que desarrolla una Orquestación Instrumental se guía por su conocimiento, experiencia y puntos de vista sobre la Educación Matemática y el papel que cumple la tecnología” (p. 216). La presente investigación tiene como objetivo lograr la construcción de un instrumento, el análisis marginal. En tal sentido, dado que los esquemas no son observables pero las técnicas si los son e incluso pueden ser enseñadas, Lagrange (1999), señala que las técnicas cambian cuando se incluyen dispositivos tecnológicos, dichos cambios no deben ser considerados triviales.

Además, la *Orquestación Instrumental* (Trouche, 2005), plantea la gestión, por parte del docente, de los artefactos y los sujetos en un determinado entorno de enseñanza-aprendizaje. Metafóricamente, el docente interpreta al director de orquesta y es quien diseña la partitura (secuencia didáctica) con el objetivo de fijar las armonías (tareas, directivas del docente, etc.) para obtener el sonido y ritmo esperado (génesis instrumental), también es responsable del monitoreo de las situaciones matemáticas tal como lo haría el director de orquesta con sus músicos. La *Orquestación Instrumental* al ser arreglo sistémico e intensional tiene un foco y orden definido y es elaborado para responder a una necesidad identificada con antelación. La figura 2 representa los elementos de la orquestación instrumental de la presente investigación.

Figura 2: Elementos de la Orquestación Instrumental de la investigación



Fuente: Tasayco (2021, p. 29)

La figura 2, muestra la organización el escenario donde se integran y articulan los elementos de una *Orquestación Instrumental* propuesta por esta investigación en educación virtual. Donde los sujetos son estudiantes de economía, con artefactos materiales (papel y lápiz) y simbólicos (derivada) en un contexto de la enseñanza del análisis marginal de funciones económicas donde la gestión del aprendizaje se realiza mediante el software de videoconferencias del Zoom y con el apoyo del GeoGebra. En la presente investigación usaremos el término educación virtual cómo la modalidad educativa que eleva la calidad de la enseñanza, que respeta su flexibilidad o disponibilidad (en cualquier momento, tiempo o espacio) (Lara, 2002). Alcanza su apogeo con la tecnología digital e integra los tres métodos: asincrónico, sincrónico y autoformación. Por otro lado, se diferencian tres fases en una Orquestación Instrumental (Trouche, 2004; Drijvers, Kieran y Marriotti, 2010) la *Configuración Didáctica*, el *Modo de Ejecución* y el *Desempeño Didáctico*.

La *Configuración Didáctica* es la organización del entorno del proceso de enseñanza-aprendizaje y de los artefactos que participaran en la actividad intensional (Trouche, 2004). Implica la selección de los artefactos que participaran, así como la organización de estos para cumplir los objetivos planteados. En ese sentido, Drijvers (2012) afirma que “una configuración didáctica es una disposición de artefactos en el entorno, o, en otras palabras, una configuración del escenario de enseñanza y los artefactos involucrados en él” (p. 266). La configuración didáctica de la presente investigación tiene como característica original que el proceso de enseñanza-aprendizaje será a través del software de video conferencia del Zoom (educación virtual). Los artefactos son la derivada y el software libre del GeoGebra mientras que la gestión del aprendizaje se hará posible por medio del applet del GeoGebra. Este applet permitirá a los estudiantes de economía ver las características dinámicas que tienen las funciones económicas en especial el cambio en el margen (análisis marginal) para lo cual harán uso del deslizador del GeoGebra.

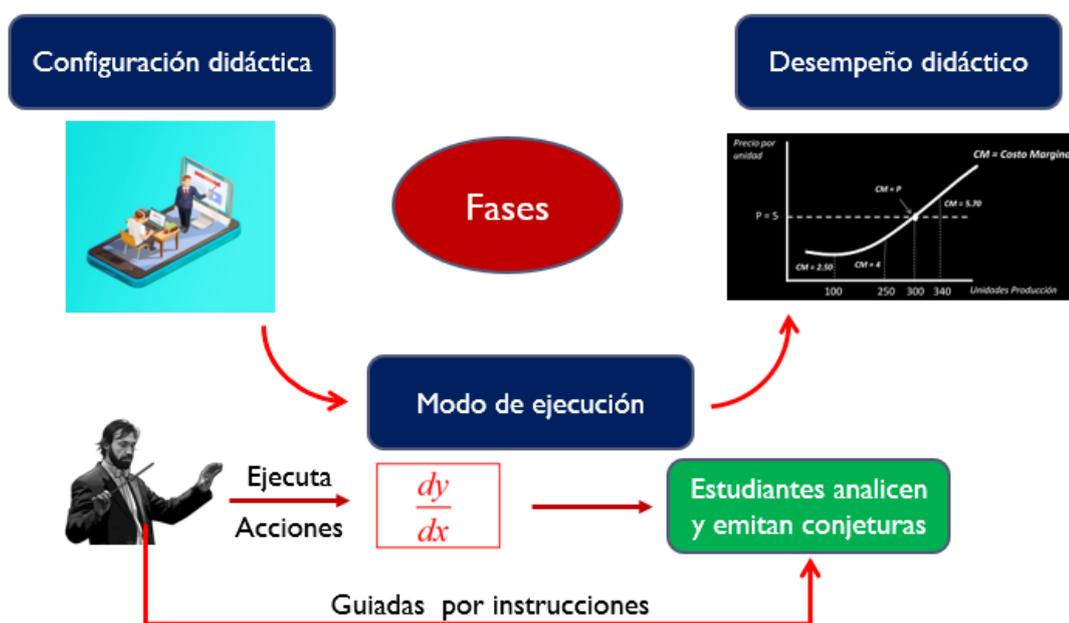
El *Modo de Ejecución* es la manera como el docente lleva a cabo las acciones que permitan orientar la actividad intensional. Contempla decisiones como la elaboración del material, forma de poner en marcha las actividades intensionales, y una de las importantes es usar la Configuración Didáctica para lograr el objetivo esperado, por consiguiente, tiene que tomar “decisiones sobre el modo de ejecución puede ser vistas como parte del diseño de una trayectoria hipotética del aprendizaje” (Drijvers et al., 2010, p.215). En el mismo sentido, Drijvers (citado en Say y Akkoc, 2016) afirma que “se define como las decisiones del profesor sobre la forma cómo o de qué manera configura una tarea al proporcionar ciertos roles para que los artefactos logren sus intenciones didácticas” (p.3).

En la presente investigación, el Modo de Ejecución está dado en un entorno de educación virtual con el apoyo del GeoGebra y el docente comandará el proceso a través de una video conferencia del Zoom con sus estudiantes (sujetos). Para ello, cuenta con una actividad exploratoria y dos actividades con Orquestación Instrumental. La actividad exploratoria está diseñada para identificar, individualmente, que conocimientos previos tienen los sujetos sobre el artefacto derivada. La actividad con *Orquestación Instrumental I* se caracteriza por que el proceso de enseñanza y de aprendizaje se hace a través del estudiante Sherpa (alumno guía). La actividad con *Orquestación Instrumental II* por su parte es desarrollada en parejas previamente seleccionadas por el docente. El rol del docente cambia en función del tipo de orquestación, en

ciertas oportunidades funge de experto mientras que en otros momentos cumple el rol de “coach” con el objetivo que el estudiante alcance a construir la noción de marginalidad a través de las actividades orquestadas.

Además, el *Desempeño Didáctico* (Drijvers et al.,2010) es uno de los elementos claves para una integración exitosa de artefactos en un entorno de aprendizaje es la asistencia institucional y social de este proceso de acción individual e indican que este concepto es comparable con la interpretación musical, donde se pone en manifiesto la coordinación entre los músicos (sujetos) y el director de orquesta (Docente). La figura 3 sintetiza las fases de la Orquestación Instrumental en el presente trabajo.

Figura 3 – Fases de una orquestación instrumental en la investigación



Fuente: Tasayco (2021, p. 32)

La investigación está organizada mediante una *configuración didáctica* a través de una educación virtual con *modo de ejecución* realizada mediante la plataforma de videoconferencias del Zoom desde donde el docente orientará el proceso de enseñanza y de aprendizaje con la asistencia del GeoGebra y una actividad propuesta, siendo monitoreada y guiada por el *desempeño didáctico* con el propósito de lograr la Génesis Instrumental individual y colectiva de estudiantes de economía. En la actualidad existen diferentes herramientas tecnológicas que hacen posible que existan diferentes *tipos de orquestación*. La investigación de Tabach (2013, como se citó en Şay y Akkoç, 2016) distingue diez tipos de orquestación, nosotros adaptamos dos de ellas a nuestra propuesta en educación virtual.

La primera propuesta didáctica con orquestación la denominaremos *Sherpa en el Trabajo*, se caracteriza por que el proceso de enseñanza se da en torno a estudiante Sherpa, quien funge de mediador y guía. Es el encargado de dirigir y realizar la tarea asignada mediante el uso del applet en GeoGebra con el apoyo del docente, todos los participantes se encontrarán interconectados mediante una videoconferencia del Zoom y estarán viendo la solución del estudiante sherpa. Este tipo de orquestación estimula el manejo colectivo del artefacto y de los esquemas de utilización. Desde el punto de vista investigativo, el estudiante sherpa está

compartiendo sus técnicas instrumentadas y por ende sus esquemas de acción instrumentadas las cuales son observadas por sus compañeros, los cuales pueden compararlas con las propias.

La segunda propuesta didáctica con orquestación instrumental la denominaremos **Trabajar y Saltar** se caracteriza por cuanto el proceso de enseñanza-aprendizaje se dará en parejas previamente seleccionadas en base a la actividad exploratoria mediante la opción de grupos pequeños del Zoom. El docente interactúa con cada grupo con el objetivo de monitorear el avance de la tarea asignada o brindar orientación a los integrantes. Cabe señalar que para esta investigación usaremos el término “saltar” a la acción de interactuar con los diferentes grupos por parte del docente. Este tipo de orquestación favorece, a que estando en grupos pequeños, puedan compartir sus esquemas de utilización y manejo del artefacto. También tienen un fuerte alcance colectivo, puesto que, cuando los grupos socializan sus soluciones estarán revelando sus técnicas instrumentadas a todos los estudiantes. Para el presente artículo, solo se explicará la primera propuesta didáctica con orquestación.

SHERPA EN EL TRABAJO

A continuación, se presenta la pregunta 1 de la actividad, así como las posibles técnicas instrumentadas y esquemas de utilización de las cinco preguntas.

Figura 4: Enunciado - pregunta 1.

01. Con la ayuda del GeoGebra grafique la función producción $Q(L, K) = L^{0.6}K^{0.4}$ en unidades, donde L representa la fuerza laboral medida en horas trabajador y K representa el capital medido en miles de soles además calcule $Q(20, 50)$, $Q(100, 2\sqrt{5})$ e interprete dichos resultados.

Fuente: Tasayco (2021, p. 66)

Los esquemas de acción instrumentada están vinculados con los esquemas mentales del sujeto y por ende no son visibles, pero se pueden inferir a partir de las técnicas instrumentadas que el sujeto usa al momento de realizar la tarea. Es decir, son la parte perceptible de un esquema de acción instrumentada, y están formado por un conjunto de evidencias (elementos matemáticos). En tal sentido, la tabla 1 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de resolver la pregunta 1 de la actividad con orquestación.

Tabla 1 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 1

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
<ul style="list-style-type: none"> Configurar vista 3D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. Digitar la regla de correspondencia de la función producción $Q(L, K) = L^{0.6}K^{0.4}$ en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas. ($x = L, y = K, z = Q$) 	<p>Esquemas de uso</p> <ul style="list-style-type: none"> Definición de funciones de varias variables y valor puntual de una función.
	<p>Esquemas de acción instrumentada</p> <ul style="list-style-type: none"> El valor de la función de varias variables en un punto dado en un contexto

- Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producción. $(Q(20,50) = 28.85$ y $Q(20,50) = 28.85)$ económico en concordancia con las unidades dadas.

Figura 5: Enunciado - pregunta 2.

02. Si fijamos el valor de uno de los insumos, el capital en 50 mil soles, el gráfico la función Producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función $Q(L)$.

Fuente: Tasayco (2021, p. 68)

Uno de los puntos importantes que permitieron el avance de la teoría económica es la incorporación de modelos matemáticos que represente el comportamiento económico de los mercados y usar sus características matemáticas como base para tomar decisiones que permitan el uso eficiente de los factores productivos. En tal sentido, el estudiante al resolver la pregunta tiene que tomar algunas decisiones, a partir de este modelo matemático, como por ejemplo considerar gráfica la función producción en base a valores discretos o continuos. Otro aspecto para considerar sería el conjunto de valores de entrada de la función producción ($L \geq 0$) para que esta tenga sentido desde el punto de vista económico (dominio). En consecuencia, la tabla 2 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de desarrollar la pregunta 2 de la actividad con orquestación.

Tabla 2 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 2

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
<ul style="list-style-type: none"> • Configurar vista 2D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. • Digitar la regla de correspondencia de la función producción a corto plazo $Q(L)$ en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas. $(x = L, y = Q)$ • Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producción a corto plazo. $(Q(0) = 0, Q(1) = 4.78, Q(4) = 7.25$ y $Q(8) = 10.99)$ • Trazar la curva de la función producción a partir de los puntos calculados basados en 	<p>Esquemas de uso</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definición de funciones de una variable y su valor puntual. • Definición de continuidad y monotonicidad de funciones de una variable. <hr/> <p>Esquemas de acción instrumentada</p> <ul style="list-style-type: none"> • El valor de la función producción como la cantidad producida por cada trabajador que participa en el proceso productivo. • A medida que se incluyen más trabajadores al proceso productivo, la cantidad total producida aumenta según

las características de funciones como la continuidad y crecimiento.

la monotonía de la función y por la representación gráfica.

Figura 6: Enunciado - pregunta 3.

03. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$, por ejemplo, el capital ($K = 50$) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función $PMe(L)$. ¶

Fuente: Tasayco (2021, p. 70)

Siguiendo con la lógica de tomar decisiones en base al modelo matemático, se hace importante el análisis de la productividad (producto medio) y el estudiante luego de realizar la gráfica de PMe^L puede plantearse algunas preguntas como por ejemplo ¿Cuál es más conveniente en un proceso productivo alcanzar el máximo de la función producción o alcanzar la máxima producción media? ¿la elección tomada usa los factores productivos de manera eficiente? Todas estas dudas podrían ser aplacadas en base a las gráficas de las funciones antes mencionadas y con el entendimiento del cambio de la función en el contexto económico. La tabla 3 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de realizar la pregunta 3 de la actividad con orquestación.

Tabla 3 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 3

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
<ul style="list-style-type: none"> • Configurar vista 2D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. • Digitar la regla de correspondencia de la función producto medio a corto plazo $PMe(L)$ en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas ($x = L$, $y = PMe$) • Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producto medio a corto plazo. ($PMe(1) = 4.78$, $PMe(2) = 3.63$, $PMe(4) = 2.75$ y $PMe(8) = 2.08$) • Trazar la curva de la función producto medio a partir de los puntos calculados basados en las características de funciones como continuidad, crecimiento y forma hiperbólica. 	<p>Esquemas de uso</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonía y características gráficas de funciones de una variable <hr/> <p>Esquemas de acción instrumentada</p> <ul style="list-style-type: none"> • El valor de la función producto medio a corto plazo como la cantidad promedio producida por cada trabajador que participa en el proceso productivo. • A medida que se incluyen más trabajadores al proceso productivo, la cantidad producida por cada trabajador disminuye según la monotonía de la función y por la representación gráfica

Figura 7: Enunciado de la pregunta 4.

04. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción $Q(L, K) = L^{0.6}K^{0.4}$, por ejemplo, el capital ($K = 50$) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función $PMg(L)$.

Fuente: Tasayco (2021, p. 71)

El objetivo del presente artículo es lograr en los estudiantes de economía el desarrollo del análisis en el margen, en tal sentido esta pregunta tiene como fin apropiar a los estudiantes de las características básicas de la función marginal, así como su relación con la función producción. Del entendimiento de esta relación se pueden llegar a conclusiones muy importantes como dónde encontrar el valor máximo de la función producto marginal e inferir la ley de rendimientos decrecientes. Esta ley propone que a partir de cierto nivel de empleo se obtienen valores de producción sucesivamente menores al agregar más trabajadores al proceso productivo. La tabla 4 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de realizar la pregunta 4 de la actividad con orquestación.

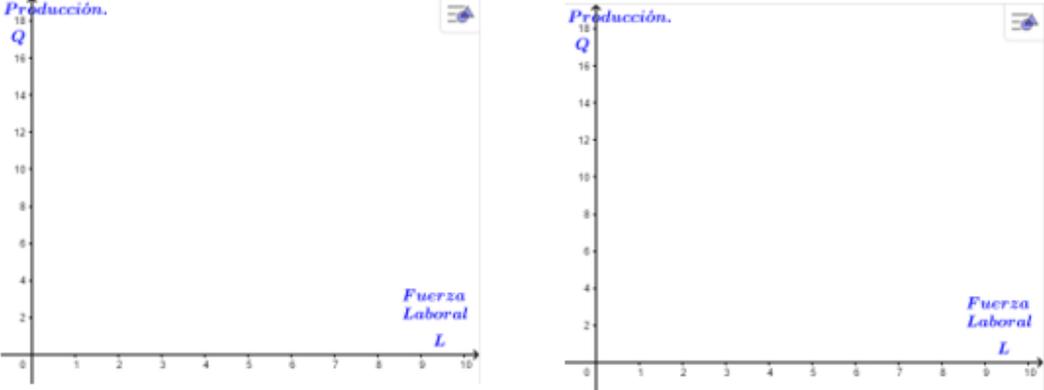
Tabla 4 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 4

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
<ul style="list-style-type: none"> • Configurar vista 2D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. • Determinar la regla de correspondencia de la función producto marginal a corto plazo ($PMg^L = Q'(L_0)$) • Digitar la regla de correspondencia de la función producto marginal a corto plazo PMg^L en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas. ($x = L, y = PMg^L$) • Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producto medio a corto plazo. ($PMg^L(1) = 2.87, PMg^L(2) = 2.17, PMg^L(4) = 1.65$ y $PMg^L(8) = 1.25$) • Trazar la curva de la función producto marginal a partir de los puntos calculados basados en las características de funciones como continuidad, crecimiento y forma convexa. 	<p>Esquemas de uso</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonicidad y características gráficas de funciones de una variable. • Reglas de derivación. <hr/> <p>Esquemas de acción instrumentada</p> <ul style="list-style-type: none"> • El valor de la función producto marginal a corto plazo como la cantidad adicional producida cuando se incrementa un trabajador en el proceso productivo. • La monotonía de la función producto marginal a corto plazo, justificándola en base a la variación de la función por unidad adicional. • La función producto marginal a corto plazo mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función producción.

Figura 8: Pregunta 5.

05. Grafique, haciendo uso del GeoGebra, lo siguiente:

Función producción $Q(L) = 50^{0.4} L^{0.6}$ Función producción marginal (PMgL) y medio (PMeL).



Responda.

a) ¿Por qué la función producto medio es decreciente?

b) ¿Por qué la función producto marginal es decreciente?

Fuente: Tasayco (2021, p. 73)

La intención de esta pregunta es poder contrastar las diferentes funciones economías ($Q(L)$, PMe^L , PMg^L) analizadas en esta actividad con orquestación a través de la visualización de sus gráficas. En base a ellos establecer relaciones matemáticas como monotonidad, valores extremos y óptimos. En consecuencia, el estudiante debería diferenciar tres zonas del proceso productivo.

La primera zona abarca hasta alcanzar el “óptimo técnico” (PMe^L es máxima) donde el incremento la fuerza laboral logrará el aumento de la productividad media. La segunda corresponde desde el “óptimo técnico” hasta el “máximo técnico” ($Q(L)$ es máxima) donde se planteará el dilema de cuantos trabajadores contratar y por último la tercera zona que va desde el “máximo técnico” en adelante, en esta zona no sería conveniente agregar más trabajadores puesto que haría que la producción decreciera. La comprensión de cómo se relacionan estas funciones económicas en estas diferentes zonas ayudaría a los estudiantes de economía en el proceso de toma de decisiones en su vida laboral. La tabla 5 y 6 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de resolver la pregunta 5a y 5b respectivamente.

Tabla 6 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 5a

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
<ul style="list-style-type: none"> • Técnica instrumentada 1. A partir de la regla de la función $PMe^L = \frac{Q(L)}{L} = \frac{50^{0.4}L^{0.6}}{L} = \frac{50^{0.4}}{L^{0.4}}$ Dado que el numerador es una constata y el denominador la variable (L) que crece, se infiere que el cociente (producto medio) decrece • Técnica instrumentada 2. A partir de la gráfica de la función producción y basados en su forma cóncava creciente, podemos argumentar que a medida que se incorpora más trabajadores la variación de la producción no están significativa en comparación a la cantidad total de trabajadores lo cual conlleva a que el promedio disminuya (PMe^L decreciente). 	<p>Esquemas de uso</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonía y características gráficas de funciones de una variable. <hr/> <p>Esquemas de acción instrumentada</p> <ul style="list-style-type: none"> • El valor de la función producto medio a corto plazo como la cantidad promedio producida por cada trabajador en el proceso productivo. • La monotonía de la función producto medio a corto plazo, justificándola en base a la variación promedio de la función por unidad adicional. (valores discretos)

Tabla 6 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 5b

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
<ul style="list-style-type: none"> • Técnica instrumentada 1. A partir de la regla de la correspondencia de la función producción y usando las reglas de derivación. $PMg^L = \frac{dQ(L)}{d(L)} = \frac{d(50^{0.4}L^{0.6})}{d(L)} = \frac{50^{0.4} \cdot 0.6}{L^{0.4}}$ Dado que el numerador es una constata y el denominador la variable (L) que crece, se infiere que el cociente (producto marginal) decrece • Técnica instrumentada 2. A partir de la gráfica de la función producción y basados en su forma cóncava creciente, podemos argumentar que a medida que se incorpora 	<p>Esquemas de uso</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonía y características gráficas de funciones de una variable. • Reglas de derivación. <hr/> <p>Esquemas de acción instrumentada</p> <ul style="list-style-type: none"> • El valor de la función producto marginal a corto plazo como la cantidad adicional producida cuando se incrementa un trabajador en el proceso productivo. • La monotonía de la función producto marginal a corto plazo, justificándola en

más trabajadores al proceso las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función producción disminuye (PMg^L decreciente).

base a la variación de la función por unidad adicional. (valores discretos)

- La función producto marginal a corto plazo mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función producción. (valores continuos)
-

ALGUNAS CONSIDERACIONES

Para llevar a cabo lo planteado en la presente investigación el docente debe tener conocimientos sobre las diferentes herramientas tecnológicas existentes actualmente y elegir aquella que mejor le sea útil para su propuesta didáctica. En tal sentido, hay que tener presente las potencialidades y restricciones que tienen los artefactos cuando pretendemos incluirlo en nuestras propuestas didácticas.

La intención de la propuesta didáctica es aportar una manera diferente de abordar la noción de marginalidad siendo este concepto económico muy trascendente para los estudiante y egresados de la carrea de Economía. En tal sentido, incluir el software libre GeoGebra ayudaría a la visualización de las características dinámicas de las funciones económica y propiciar en el estudiante alcance la génesis instrumental mediante estas orquestaciones propuesta en la investigación.

En cuanto a la orquestación basada en el estudiante sherpa, se recomienda elegirlo con anticipación en función de la actividad exploratoria por cuanto debe tener ciertas características que ayudarían al propósito de la actividad. El estudiante sherpa debe tener habilidad comunicativa, ordenado al mostrar sus resultados y empático. Si bien es cierto que el proceso de enseñanza gira en torno a él, los procesos de instrumentación también se pueden dar a través de la participación de los otros estudiantes al aportar ideas para solucionar alguna de las tareas. Permite que todos los estudiantes tengan la oportunidad de reaccionar, interactuar y por ende realizar aportes, si bien es cierto que el docente es quien gestiona la orquestación, pero la actividad se gira en torno del estudiante sherpa.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., & GÓMEZ, P. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. **Ingeniería didáctica en educación matemática**, v. 1, p. 97-140, 1995. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf> . Consultado en: 01 jun. 2021.

BÉGUIN, P., Y RABARDEL, P. Concevoir pour les activités instrumentées. **Revue d'intelligence artificielle**, v. 10, n. 10, p. 1-10, 2001. Disponible en :

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.472.2482&rep=rep1&type=pdf> .
Consultado en : 5 sept. 2020.

DRIJVERS, P., DOORMAN, M., BOON, P., REED, H. Y GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool : instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, v. 75, p. 213–234, 2010. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>. Consultado en: 20 jun. 2021.

DRIJVERS, P. (2012). **Teachers Transforming Resources into Orkestrations**. In G. Gueudet, B. Pepin, y L. Trouche (Eds.), From text to “lived” resources; mathematics curriculum materials and teacher development (pp. 265–281). New York, NY: Springer.

FEUDEL, F. Relevant knowledge concerning the derivative concept for students of economics-A normative point of view and students' perspectives. **Hall**, 2016. Disponible en: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337944>. Consultado en: 15 nov. 2021.

LARA, L. Análisis de los recursos interactivos en las aulas. **Segundo congreso virtual: Integración sin barreras en el siglo XXI**. Argentina, 2002. Disponible en: http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_43/nr_479/a_6424/6424.pdf. Consultado en: 12 ene. 2021.

LAGRANGE, J. B. Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: A two-year classroom experiment with the TI-92. **International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education**, vol. 6, n. 2, p.143-65, 1999.

LIAL, M., Y HUNGERFORD, T. **Matemáticas para administración y economía**. México, D. F: Pearson Educación, 2000.

MERCAPIDE ARGÜELLO, G. **Dificultades de aprendizaje del cálculo y enseñanza de la economía. Los conceptos de función y derivada**. 2018, Tesis (Maestría). Universidad de Cantabria, España. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10902/13733>. Consultado en: 25 oct. 2020.

RABARDEL, P. **Los hombres y la tecnología. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad de Industrial de Santander, 2011.

RUIZ, P. **Los conceptos matemáticos de función y de derivada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía**. 2016, Tesis (Maestría). Universidad de Cantabria, España. Disponible en: <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/8902>. Consultado en: 05 set. 2020.

SAY, R. & AKKOC, H. Beyond Orchestration: Norm Perspective in Technology Integration, In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.) **Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, 2015. Disponible en: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289469>. Consultado en: 09 oct. 2020.

TABACH, M. Developing a general framework for instrumental orchestration. **Proceedings of the 8th Congress of European Research of Mathematics Education**, Antalya, Turkey. 2013. Disponible en: http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG15/WG15_Tabach.pdf . Consultado en: 21 oct. 2020.

TROUCHE, L. Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestration. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, vol. 9, n. 3, p. 281-307, 2004. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>. Consultado en: 10 jul. 2020.

TROUCHE, L. Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. **Didactique des mathématiques**, v. 25, p. 91-138, 2005. Disponible en: <https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathematiques-necessite-des-orchestrations/>. Consultado en: 02 oct. 2020.

VERILLON, P., & RABARDEL, P. Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. **European Journal of Psychology of Education**, vol. 10, n. 1, p. 77-101, 1995. Disponible en : <https://www.jstor.org/stable/i23419823>. Consultado en: 30 oct. 2020.

VERGNAUD, G. Théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, vol. 10, n. 23, p. 133-170-213, 1990. Disponible en : https://gerardvergnaud.files.wordpress.com/2021/09/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf . Consultado en: 10 set. 2020.

Submetido em: 23 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

SALAZAR, J.V.F.; TASAYCO, P. Orquestación Instrumental del Análisis Marginal de Funciones Económicas en un entorno de Educación Virtual. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, v. 17, n. 42, p. 44-60, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p44-60.id450>