

Evidencia de conocimiento docente especializado en espacios de trabajo matemático que usan recursos tecnológicos

José Vilella¹

Centro de Estudios en Didácticas Específicas. Laboratorio de Investigación en Ciencias Humanas. CONICET-UNSAM

Rosa Ana Ferragina²

Centro de Estudios en Didácticas Específicas. Laboratorio de Investigación en Ciencias Humanas. CONICET-UNSAM

RESUMEN

En este artículo compartimos el análisis de la planificación de una clase de geometría – concebida como un espacio de trabajo matemático- gestionada por una docente que enseña geometría con recursos tecnológicos. Se propone un marco teórico que toma en consideración la idea de Espacio de Trabajo Matemático, el modelo MTSK sobre el conocimiento especializado del profesor y las cualidades de un trabajo de tipo colaborativo. Se reflexiona junto con la docente que da clases a estudiantes de 14 a 16 años, acerca de cuáles son las condiciones de la gestión de la enseñanza, que producen aprendizaje geométrico, cuando se usan recursos tecnológicos en las clases de matemática.

Palabras clave: Conocimiento especializado; Espacio de Trabajo Geométrico; Recursos tecnológicos; Trabajo colaborativo; Enseñanza de la Geometría.

Evidence of specialized teaching knowledge in mathematic workspaces that use technological resources

ABSTRACT

In this article we share the analysis of the planning of a geometry class – conceived as a mathematic workspace – managed by a teacher who teaches geometry with technological resources. A theoretical framework is proposed that takes into consideration the idea of Mathematic Workspace, the MTSK model on the specialized knowledge of the teacher and the qualities of a collaborative work. It is reflected together with the teacher who teaches students from 14 to 16 years old, about what are the conditions of teaching management, which produce geometric learning, when technological resources are used in mathematics classes.

Keywords: Specialized knowledge; Mathematic Workspace; Technological resources; Collaborative work; Teaching Geometry.

Evidências de conhecimento especializado em espaços de trabalho matemático que utilizam recursos tecnológicos

RESUMO

Neste artigo compartilhamos a análise do planejamento de uma aula de geometria – concebida como espaço de trabalho matemático – gerenciada por um professor que ensina geometria com recursos tecnológicos. Propõe-se um arcabouço teórico que leve em consideração a ideia de Espaço de Trabalho Matemático, o modelo MTSK sobre o conhecimento especializado do professor e as qualidades de um trabalho colaborativo. Reflete-se junto com o professor que ensina alunos de 14 a 16 anos, sobre quais são as condições da gestão do ensino, que produzem

¹ Doctor en Didáctica de la Matemática (UHU). Docente e investigador (CEDE-LICH-UNSAM-CONICET), San Martín, Buenos Aires, Argentina. Martín de Yrigoyen 3100. (1650) San Martín. Buenos Aires. Argentina.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2834-2809>. E-mail: jose.vilella@unsam.edu.ar

² Magister en Didáctica de la Matemática (UNSAM). Docente e investigador (CEDE-LICH-UNSAM-CONICET), San Martín, Buenos Aires, Argentina. Martín de Yrigoyen 3100. (1650) San Martín. Buenos Aires. Argentina.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6684-305X>. E-mail: rosana.ferragina@gmail.com

aprendizagem geométrica, quando os recursos tecnológicos são utilizados nas aulas de matemática.

Palavras-chave: Conhecimento especializado; Espaço de trabalho geométrico; Recursos tecnológicos; Trabalho colaborativo; Ensinando Geometria.

INTRODUCCIÓN

La relación entre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, puede investigarse a partir de problemas profesionales de quienes se ocupan de la comunicación del saber geométrico en las aulas. En el análisis de estos problemas, la clase se considera como un objeto de estudio en el que se estudia la interacción y la interdependencia que se da entre docentes, estudiantes y los contenidos a enseñar (STYLIANIDES, A. y STYLIANIDES, G.;2013).

Este artículo se centra en un aspecto de la relación descripta: el que toma en cuenta los momentos de la clase de geometría en la que quien enseña, asume profesionalmente la decisión de usar recursos tecnológicos, como artefactos, para gestionar las secuencias de enseñanza que diseña para sus clases. (HOYLES, 2004). Esta decisión profesional, se enmarca en la clase caracterizada como un espacio de trabajo matemático (KUSNIAK, 2011) en el que quien enseña muestra evidencias de conocimiento especializado para esa tarea (CARRILLO, et al 2018). El estudio que se describe, analiza la actuación docente, en el marco de la gestión de un trabajo colaborativo (BEDNARZ, 2004) entre investigadores y docentes.

MARCO TEÓRICO

Los registros de la práctica de la enseñanza, ayudan a ejemplificar, a partir de diferentes representaciones acerca del enseñar matemática, diferentes ideas teóricas (VILLELLA y STEIMAN; 2021). La práctica de la enseñanza es incierta, impredecible (COLS, 2000) e imposible de analizar sin incluir su dimensión moral. Al considerar a la enseñanza de la matemática como una práctica social, se hace foco en las transformaciones en su entorno físico, social e individual que produce. En este sentido, se puede afirmar que construye saberes matemáticos, formas de actuar y de pensar que la diferencian de otro campo de prácticas; utiliza recursos creados para estos ambientes donde se desarrolla, así como otros que sufren transformaciones en su uso. A través de las prácticas, las personas que participan de la enseñanza de la matemática, se convierten en docentes y estudiantes de una institución escolar y de un espacio curricular determinado (VILLELLA, et al; 2021)

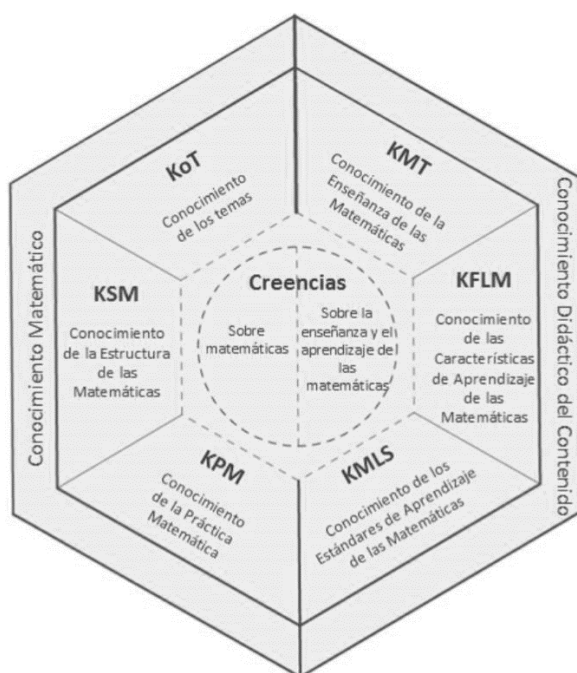
Las y los docentes que enseñan matemática, se asumen profesionales de la enseñanza cuando, entre otras cualidades, consideran que el proceso de resolución de problemas a los que enfrentan a sus estudiantes, produce como resultado la construcción de conocimiento matemático localmente adaptado. El conocimiento especializado de quien enseña, se erige como un modo de comprensión de los contenidos matemáticos prescriptos curricularmente, ligado a la comprensión de cómo se los aprende y, por ende, cómo se los puede enseñar (VILLELLA, et al, 2018). Así, este conocimiento adquiere un carácter especializado (en el sentido atribuido en el modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas-Mathematical Teacher Specialized Knowledge-MTSK-*) que contempla:

- el conocimiento de los temas, de la estructura de la matemática y del hacer matemática (conocimientos sobre y de la matemática) y,

- conocimientos de la enseñanza de la matemática, de las características del aprendizaje de la matemática y del curriculum de matemática (conocimientos pedagógicos y didácticos) (fig.1).

Además, se entrecruzan con las creencias y concepciones acerca de la matemática y su enseñanza (CARRILLO et al, 2018). La especialización se refiere a la ayuda en el diseño de situaciones de enseñanza – toma en cuenta las relaciones entre los propios contenidos, y relaciones con otros contenidos de otras materias- y análisis de resultados de aprendizaje.

Figura 1 – Modelo MTSK



Fuente: Carrillo et al (2018,p.240)

En concordancia con Shulman (1986) y los aportes de Carrillo et al (2018), se define el conocimiento pedagógico del contenido (Pedagogical Content Knowledge- PCK-) como la fusión del contenido matemático a enseñar y su didáctica, en orden a hacerlo asequible a las y los estudiantes con los cuales será trabajado. En este artículo, se caracteriza ese conocimiento especializado de la geometría compuesto por dos dominios diferenciados: el del conocimiento matemático (Mathematical Knowledge -MK-) y el PCK que incluyen varios subdominios, imbuidos por las creencias y concepciones que las y los docentes poseen acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (fig.1). Se complementa, a partir de los estudios de Mishra y Koehler (2006), con la comprensión de las y los docentes sobre la interacción entre contenido geométrico, didáctica de la geometría y uso de recursos tecnológicos. De esta forma, ese conocimiento queda conformado por el:

- Conocimiento del contenido (Content Knowledge -CK-): qué sabe quién enseña acerca del contenido geométrico que hace circular en su aula.

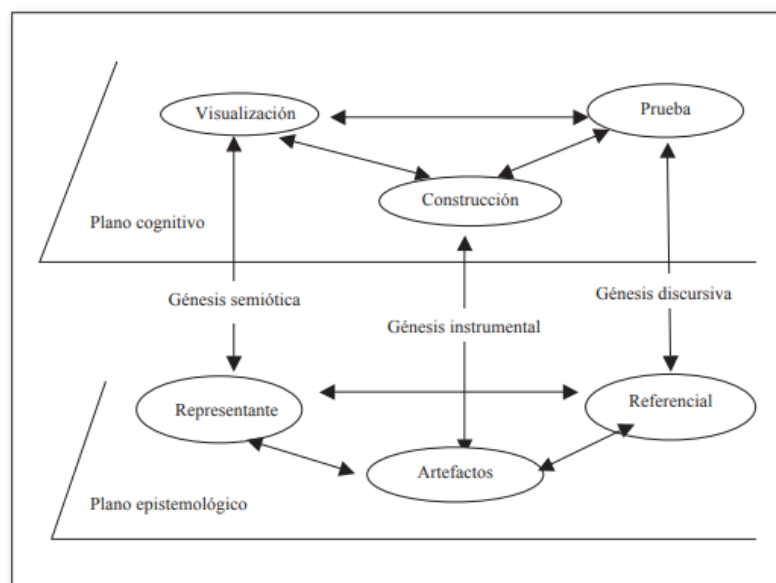
- Conocimiento pedagógico (Pedagogical Knowledge -PK-): qué conocimiento tienen las y los docentes sobre prácticas de enseñanza, estrategias y métodos para promover el aprendizaje de las y los estudiantes.
- Conocimiento de la tecnología (Technological Knowledge -TK-): qué conocimiento de las y los docentes sobre las tecnologías pueden integrarse en la planificación y gestión de sus clases en orden a lograr aprendizaje en las y los estudiantes.

La interacción de estos tipos de conocimiento, genera la necesidad de analizar también:

- Conocimiento tecnológico del contenido (Technological Content Knowledge-TCK-): conocimiento sobre cómo puede ser representado el contenido geométrico a estudiar a través de las tecnologías: capacidad de utilizar la tecnología disponible para contenidos de la materia.
- Conocimiento pedagógico del contenido (PCK): cómo los temas se organizan en problemas en orden a representar y adaptarse a los diversos intereses y habilidades de las y los estudiantes.
- Conocimiento tecnológico pedagógico (TPK): conocimiento sobre cómo usar las tecnologías en las prácticas de enseñanza, estrategias y métodos para promover el aprendizaje del contenido geométrico a estudiar por parte de las y los estudiantes.
- El conocimiento tecnológico del contenido pedagógico (TPACK): relaciona tecnología, didáctica y contenido geométrico que permite a las y los docentes desarrollar estrategias de enseñanza, apropiadas y específicas al contexto en el que trabajan.

La reflexión sobre la enseñanza, supone analizar la actuación estudiantil fomentada por la gestión docente en el aula de matemática, el papel de los recursos en la transformación de los espacios de trabajo creados ad-hoc, el estudio del sentido del conocimiento mediado por los diferentes recursos seleccionados, los aspectos sociales e institucionales que tensionan ese espacio de trabajo matemático (KUSNIAK, 2011). Estos espacios son ambientes organizados, que permiten resolver tareas matemáticas y están formados por dos planos: el cognitivo y el epistemológico. En el plano cognitivo se incluyen los procesos de visualización, construcción y prueba, necesarios para la resolución de los problemas que se pueden presentar desde cualquiera de los capítulos que conforman la matemática escolar. En el campo epistemológico, se ubica al representante (íconos, figuras, símbolos que aluden a los objetos matemáticos), artefactos (recursos con potencial de ser usados por cada estudiante como un instrumento para el aprendizaje) y referencial (temas matemáticos a los que se hace alusión en cada actividad) (fig.2).

Figura 2- Espacio de Trabajo Matemático



Fuente: Kusniak (2011, p.18)

Las componentes de los planos se articulan mediante tres génesis: semiótica (asociada a las representaciones de los objetos matemáticos), instrumental (permite que los artefactos que pueblan el aula se transformen en instrumentos; una entidad mixta que comprende el artefacto y componentes cognitivos relacionados con los esquemas de uso) y discursiva (da sentido a las definiciones, propiedades, funciones...en el entramado del razonamiento matemático que responde al dominio puesto en juego – geométrico, algebraico, analítico...). Así, el aula es un espacio de trabajo matemático (ETM), que en este artículo será geométrico, por el dominio conceptual al que hace referencia. La construcción de esta aula se configura, en lo que se da en llamar paradigmas geométricos. Estos paradigmas toman en cuenta tres ejes: el filosófico (creencias), el cognitivo (modos de pensamiento que puede ser intuitivo, deductivo o experimental) y el epistemológico (geometría como conocimiento). En el aula, estos paradigmas modelizan espacios geométricos diferentes:

- ✓ *Geometría natural*: aula en la que los objetos están definidos por el modelo geométrico, en correspondencia con la realidad espacial y local de las y los estudiantes. Los medios de prueba son de tipo material y se utilizan artefactos para la representación del objeto en un universo concreto.
- ✓ *Geometría axiomática natural*: aula en la que la geometría es concebida como un esquema de la realidad. La validación se apoya sobre un sistema axiomático. Los problemas que se estudian, no usan todos los axiomas para validar sus soluciones.
- ✓ *Geometría axiomática formalista*: aula en la que los objetos geométricos provienen del formalismo del modelo geométrico elegido. La validación se realiza exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo

geométrico subyacente (es el que se da en el espacio de trabajo en el que se estudian, junto con la geometría euclidiana, las no -euclidianas.)

Cuando las o los docentes proponen un problema, las y los estudiantes generan proyectos de solución. Este diálogo entre lo epistemológico y lo cognitivo, hace que el aula sea un espacio de trabajo geométrico dinámico (fig. 2). De acuerdo con el tipo de proyecto diseñado por los grupos de estudiantes, las aulas constituyen distintos espacios geométricos:

- ✓ *El espacio de referencia*: es el espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios geométricos. Quienes resuelven los problemas, usan propiedades y proposiciones propias de la geometría.
- ✓ *El espacio idóneo*: es el espacio definido en términos didácticos. El protagonismo de este espacio recae en la acción docente.
- ✓ *El espacio personal*: es el espacio definido por las y los estudiantes, de acuerdo con sus conocimientos y capacidades cognitivas, al reflexionar acerca de los conocimientos aprendidos y los que pusieron en práctica para resolver los problemas. Es un espacio en el que la figura docente también cobra importancia, como estructuradora de la reflexión estudiantil.

Pensar el aula de la manera descrita, dota a quien enseña de herramientas profesionales para reflexionar sobre: las concepciones epistemológicas que cada docente tiene sobre la matemática y cómo ésta influye en el diseño, gestión y evaluación del proceso de enseñanza; la elección y organización de las secuencias de actividades propuestas a las y los estudiantes; el análisis didáctico del conjunto de tareas desarrollado por el grupo de estudiantes como forma de solución a esas secuencias y las justificaciones que realizan sobre las mismas.

Este tipo de estudio puede adoptar la forma de trabajo colaborativo. Con este formato, se intenta producir conocimiento relevante sobre la práctica profesional y encontrar canales de diálogo entre el llamado mundo de la investigación y el mundo de la práctica. De esta manera, se da curso a un proceso de producción de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, que se realiza en forma conjunta entre grupos de investigación y docentes que interactúan para contribuir desde sus especificidades a la construcción de saberes. Estos saberes surgen de la reflexión sobre la práctica de enseñar geometría y vuelven a ella para dotar de sentido a las decisiones que las y los docentes toman a diario en el proceso de enseñanza. La implementación de esta metodología colaborativa, supone intervenciones en la geometría que se enseña que no sólo son fértiles en términos de aprendizaje estudiantil, sino también para la reflexión docente acerca de cómo se enseñan. La construcción del conocimiento didáctico, se nutre del ejercicio del juicio crítico frente a la de toma de decisiones en la práctica, dependiendo de las condiciones imperantes y las apuestas en el contexto de la acción específica con la asistencia de una o un investigador en el área. Esta construcción de conocimiento relacionado con una determinada práctica profesional, se funda en la comprensión docente de las situaciones de enseñanza dentro de las cuales se desarrolla profesionalmente y en donde se asume como una o un profesional que puede reflexionar sobre las mismas. En esta perspectiva, el grupo investigador dialoga con el grupo docente desde el interior del contexto en que éste opera, para entender cómo fundamentan e implementan sus decisiones. (BEDNARZ, 2004)

METODOLOGÍA

En este artículo mostramos cómo reflexionamos junto con una docente que enseña en la escuela secundaria³ de la provincia de Buenos Aires, Argentina, con la intención de responder si las decisiones que toma, mejoran el aprendizaje geométrico en contextos escolares reales. Además, qué recursos tecnológicos para la enseñanza, pueden usarse para lograr la mejora que se busca; cómo gestionar esos recursos en el aula; cómo fundamentar esas decisiones.

Nuestro primer acercamiento fue a través de un encuentro realizado en plataforma Zoom. La primera de las actividades de esa reunión, fue informarle a la docente qué es lo que nos motivaba como grupo investigador (GI), qué nos proponemos con esta investigación. Le contamos y fundamentamos nuestro accionar y le preguntamos qué es lo que ella esperaba de estos encuentros (BEDNARZ, 2004). Planteamos que esta investigación intenta probar formas de estudiar el conocimiento especializado que se evidencia en el aula donde se enseña geometría con recursos tecnológicos. (FERRAGINA; 2012) La docente, a la que llamaremos Soledad (S), planteó que quería tener acceso a otras formas de gestionar los recursos en el aula y, a partir de ello, evaluar si la calidad del aprendizaje mejoraba o no.

Luego de este intercambio de motivaciones, pedimos a Soledad que respondiera la siguiente pregunta con tres palabras: ¿qué se genera en tu aula cuando se usa tecnologías (TIC) para resolver las actividades? Las palabras que usó fueron: **asombro** relacionado con la potencialidad de los recursos tecnológicos; **pelea** como analogía referida al clima en la que la discusión, la argumentación y las necesidades de convencer al otro se hacen, algunas veces, en climas vehementes; **investigación** como forma de encarar el diseño y ejecución de proyectos de solución a los problemas planteados.

Propusimos a Soledad, trabajar en sesiones de 45 minutos de duración, con el fin de diseñar juntos las actividades a desarrollar en su aula de geometría en la que se usarían recursos tecnológicos. De las sesiones se extrajeron algunos registros de los diálogos que muestran algunos aspectos de las fases de una investigación de diseño (KELLY et al., 2008; SHAVELSON et al., 2003) que se cumplieron, se trabajó con un software elegido por la docente para ensayar diferentes soluciones a un mismo problema, se extrajeron conclusiones de esos procesos.

³ La escuela que tiene como estudiantes, jóvenes de 12 a 17 años.

RESULTADOS

Presentamos los resultados de la investigación a través de la descripción de las sesiones de trabajo en las que, a través de sus siglas o de aclaraciones con sus nombres, marcamos la evidencia del conocimiento especializado de la docente en el tipo de espacio de trabajo diseñado, de acuerdo con un paradigma geométrico priorizado.

Soledad trajo a la *primera de las sesiones*, la actividad de la fig. 3 que seleccionó de un repertorio de situaciones que tiene en su haber.

Leímos conjuntamente la actividad y mantuvimos un diálogo del que compartimos un extracto:

Soledad (S): - Traje esta actividad porque me encanta

Grupo Investigador (GI): - ¿qué quiere decir que te encanta?

S: - Me permite hacer muchas cosas en el aula

GI: - ¿Por ejemplo?

S: - Para poder asignar un cartel a una figura, los chicos tienen que ver (resalta su pronunciación) y apelar a su memoria para recordar propiedades. Es un desafío.

GI: - Claro, y como hay carteles que sirven para más de una figura se va a producir debate. ¿Cómo te lo imaginás?

S: - ¿El debate? (hace una pausa) Va a ser divertido porque conociendo el grupo, van a querer convencer al otro que tienen la verdad y están en lo cierto

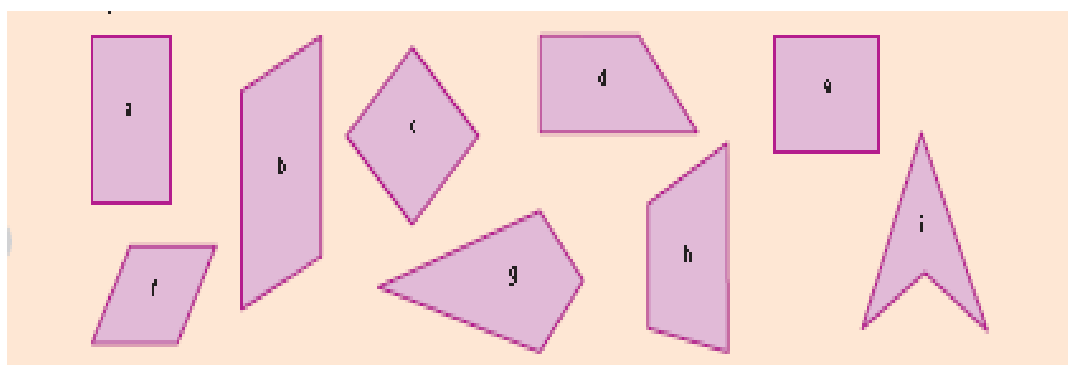
GI: - ¿Vos serías moderadora del debate?

S: - ¡Claro! (muy enfática) Yo quiero que ellos hablen, armen ideas, las justifiquen, debatan entre ellos si son ciertas o no, se convenzan y quieran convencer. De esa forma actuaría (resalta el verbo) el proceso de demostración que quiero que sigan

GI: - ¿Los carteles te van a dar esas posibilidades? Te proponemos analizar cada uno de ellos para anticipar lo que los chicos puedan decir ¿te parece?

Figura 3- Actividad seleccionada por la docente para el trabajo en el aula

Seleccionen entre los carteles que siguen a las figuras, cuál corresponde a cada una de ellas.



Carteles:

1. Las diagonales se cortan entre sí
2. Las diagonales son congruentes
3. Solo dos de sus lados son paralelos
4. Los lados opuestos son congruentes y paralelos. Los ángulos opuestos son congruentes
5. Tiene dos pares de lados iguales y adyacentes
6. Todos los lados son congruentes. Los lados opuestos son paralelos. Todos los ángulos son rectos.
7. Las diagonales son perpendiculares
8. Las diagonales son las bisectrices de los ángulos de los vértices

9. Una diagonal forma dos triángulos iguales
10. Las diagonales forman cuatro triángulos iguales.

Fuente: Docente Soledad

El intercambio abrió una discusión epistemológica acerca del contenido de los carteles, lo que nos permitió dialogar acerca de cómo el problema propuesto, aporta al aula un riesgo motivado por la incertidumbre y un desafío cognitivo de valor para el aprendizaje (espacio de trabajo idóneo; KMT; KMLS). La discusión se organizó sobre estos interrogantes: qué contenidos trae el grupo de estudiantes al aula, cuando resuelven la actividad; qué contenidos incorporan al resolver la actividad; qué evaluará la profesora cuando se resuelve esta actividad; qué decisiones tomará Soledad antes, durante y después de implementar esta actividad (espacio de trabajo idóneo y personal; KoT; KSM; KFLM)

Compartimos con Soledad algunas ideas acerca de la demostración en el aula y acordamos con ella que esta práctica matemática (KPM), entra en el abanico de los problemas profesionales referidos a la enseñanza de la geometría, en tanto implica para quien enseña la necesidad de discernir entre considerarla una herramienta de la actividad matemática de las y los estudiantes, o un objeto de enseñanza. (KSM; KPM) La demostración es una herramienta esencial de prueba, una manera de validar un enunciado, un género discursivo cuya estructura hace posible en forma simultánea la comunicación y la evaluación. En este contexto, el problema de enseñanza consiste en reflexionar sobre la evidencia que supone aquello que se ve en una figura. Es decir, problematizar la evidencia en orden a tensionar la racionalidad del grupo de estudiantes (espacio de trabajo idóneo y personal; geometría axiomática natural). Se erige, entonces, como una escisión entre mostrar al estudiante cómo se hace para demostrar para que lo copie u orientar a construir – aunque en forma desprolija, caótica y tal vez incompleta- sus propios enunciados que, siendo válidos, les permitan argumentar sobre la verdad de aquello que están afirmando. En la primera opción se copia una demostración, en la segunda se construye un camino posible a la demostración (espacio de trabajo personal – idóneo; KPM; KFLM). Diferenciamos demostrar de otras competencias a desarrollar en el aula, como la de *explicar* se asumiría la acción de despejar las razones que hacen que algo ocurra para lo que se puede usar el lenguaje cotidiano. El resultado obtenido será considerado como *prueba*, cuando las y los estudiantes puedan usar una serie de enunciados organizados de acuerdo con un conjunto bien definido de reglas. (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría axiomática natural; KMT)

En la *sesión 2* trabajamos sobre las supuestas respuestas que podrían dar las y los estudiantes a la actividad y qué decisiones tomaría Soledad frente a ellas. Dialogamos sobre la posibilidad de que, en la clase, las y los estudiantes pueden usar propiedades sin que las enuncien con precisión. (espacio de trabajo personal; geometría natural; KFLM; KMT) Conversamos entonces acerca de qué hacer cuando ellos recurran a la ostensión para justificarse (espacio de trabajo idóneo; geometría natural; KoT; KMT):

GI: - *¿Pensaste qué hacer si uno de los alumnos te dice que la figura “e” se lleva la mayor parte de los carteles?*

S: - *Pero pueden usar más de un cartel para cada figura*

GI: - Sí, claro. Y lo que responde no es incorrecto. Pero: ¿cómo lo justificaría si le preguntaras por qué?

S: - Me diría, es un cuadrado y tiene todas las propiedades posibles. (Riendo) ¡El cuadrado es perfecto!

GI: - ¿Pero es un cuadrado? Digamos que se parece a un cuadrado... (con tono de duda)

S: - ¡No! ¡Claro! (entre asombrada y exultante). Si me dice eso y yo lo acepto, ganó -lo- que- se -ve- y -no- lo- que- se- dice (separando cada palabra)

GI: - ¿Cómo?

S: - Él ve un cuadrado, pero: ¿está seguro de que lo es? Tiene que usar propiedades

GI: - ¿Cómo te parece desafiarte?

S: - ¡Construyendo! (con mucho énfasis)

En esta sesión se evidencia una evolución en la planificación de la clase: se toma conciencia del rol que en ella juegan los contenidos, el lenguaje y el tipo de racionalidad que sustentan las pruebas producidas. (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural; KMT; KoT; KSM; KPM) Un nuevo problema profesional tensiona el conocimiento especializado de la docente: la ruptura entre el mundo sensible que nos devuelve imágenes a través de figuras donde la eficacia del dibujo supone la verdad del contenido y el racional que, con rigor, deja de lado lo que se ve y se apoya en el método a partir del cual se relacionan la verdad y el conocimiento. (geometría axiomática natural; espacio de trabajo idóneo-personal; KSM; KPM; KMT; KFLM)

Con las tecnologías de lápiz y papel, ese pasaje se vería forzado por las necesidades pedagógicas. Con la irrupción de un Software de Geometría Dinámica (SGD) en el aula, el pasar del trazado preciso de las figuras a su estudio, es una ruptura que lleva a las y los estudiantes a acceder a la teoría, en tanto deben alejarse de la singularidad del evento para cotejar un significado contra otro, una pertinencia contra otra, una racionalidad contra otra. (espacio de trabajo personal; geometría axiomática natural; TK; TCK; TPACK). El grupo de estudiantes tiene que asumir que la validez de un enunciado es legítima cuando se confirma como necesaria, en contraposición a otros enunciados que son sólo posibles. (espacio de trabajo personal; geometría axiomática natural; KPM; KSM; KFLM; TCK) Esto supone asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos; verificar una proposición de un caso para el cual no se asume que, si funciona ahora, entonces funcionará siempre; explicar las razones de validez de una aserción para la validación de transformaciones de un objeto en calidad de representante de una determinada clase; centrarse en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural-formalista; KPM; KFLM; PCK; TPK)

En la sesión 3 nos centramos en la selección del SGD que se podría introducir en el aula con el fin de generar un escenario que cumpla con las condiciones acordadas.

GI: - ¿Usarás lápiz y papel o SGD para gestionar la discusión de esa figura y ese cartel?

S: - Voy por GeoGebra. Me encanta

GI: - ¿Los chicos lo usan?

S: - Sí, en la escuela lo usamos todos

GI: - ¿Qué les propondrías hacer?

S: - Eh... (dudando) ¡Ya sé! (con alegría). Les pediría que construyan un cuadrado y que, usando las herramientas disponibles, vayan probando si se cumplen o no las propiedades

GI: - ¿Cuál sería el enunciado de la actividad?

Seguimos trabajando con Soledad en ese enunciado y en los para qué de cada una de las acciones que les pediría hacer a los grupos de estudiantes y de aquellas que retomaría de las que esos grupos, espontáneamente, decidieran realizar. (espacio de trabajo personal; geometría natural; KPM; KMT; KFLM; TK; TCK)

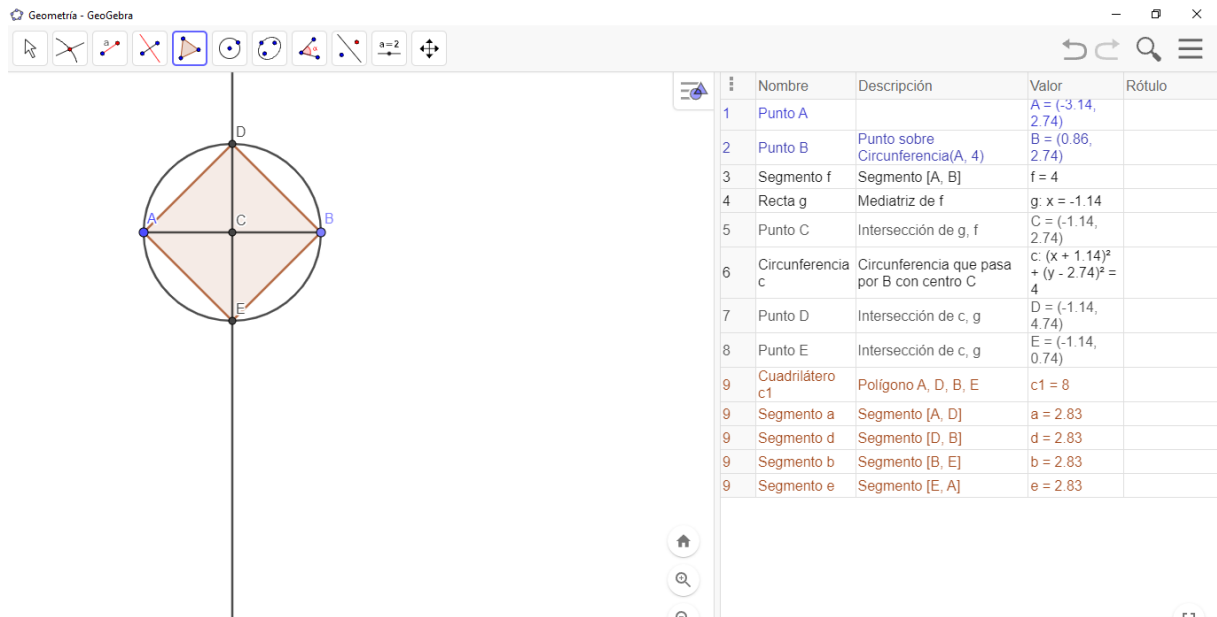
De esta manera, acordamos que la consigna sería: *Demostrar que la asignación de la mayoría de los carteles a la figura “e” sólo es posible, si “e” es un cuadrado.*

Supusimos que el aula mostraría una actividad diferente, caracterizada por la aparición de prácticas directas avaladas por el *software*: arrastrar, medir, ocultar/exponer, trazar, hacer zoom... y aquellas que fomentaría Soledad con una intervención pensada e intencional: conjeturar, validar, verificar, corroborar una conjetura, argumentar, visualizar, sistematizar información y relaciones matemáticas, justificar, explorar. (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría natural- axiomática natural; PCK; TCK; TPACK)

Las construcciones así logradas se convertirán en los objetos de experimentación sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso. Así, se contribuye a superar la tensión entre los procesos de visualización y los de justificación, para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático. (espacio de trabajo idóneo-referencial; geometría axiomática formalista; PCK; TPK; TPACK) Por ello, insistimos en la planificación de la actividad superando la idea de sólo proponer al grupo de estudiantes, una construcción: la tarea de construcción tendría que ser un problema en cuya solución, las y los estudiantes pongan en juego sus conocimientos previos, y las posibilidades del *software*. Producir un dibujo en entornos favorecidos por un SGD implica preservar propiedades espaciales durante el arrastre; requiere del uso de propiedades geométricas para su construcción, y coloca en un segundo plano los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva. (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría axiomática formalista; PCK; TPK; TPACK; KFLM) He aquí el desafío profesional de la enseñanza que, al resolverse, brinda evidencia de un conocimiento especializado que se vehiculiza generando abstracciones a partir de las acciones que se realizan sobre los objetos matemáticos y su representación.

En la *sesión 4* analizamos algunas de las producciones de las y los estudiantes que Soledad seleccionó y trajo a nuestros encuentros. Las presentó de acuerdo con lo que ella consideró de mayor a menor grado de satisfacción con la respuesta esperada. Argumentó que esa satisfacción, estuvo relacionada con el uso o no de las propiedades (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría axiomática natural; KoT, KSM; KPM; KFLM). Así, el grupo de estudiantes denominado Grupo 1, propuso la solución que se muestra en la figura 4.

Figura 4- Solución propuesta por el grupo de estudiantes 1



Fuente: Elaboración propia

Soledad dijo que este grupo le manifestó que en su protocolo pueden leerse las decisiones que tomaron. Argumentaron que primero decidieron construir un segmento de longitud dada, al que le trazaron su mediatriz. Con esto, dijeron asegurarse determinar el punto medio del segmento, la perpendicular que pasara por él y así, ya tenían carteles de las diagonales tomados en cuenta. Aseguraron que usaron ese punto medio para trazar una circunferencia con ese centro. A esa circunferencia pertenecen los extremos del segmento. Marcaron las intersecciones y esos nuevos puntos, junto con los otros dos extremos del segmento original, son los vértices de la figura. Los unieron con la herramienta polígono y el protocolo confirma lo que buscaban: el ADBE es un cuadrado (espacio de trabajo personal; geometría axiomática natural).

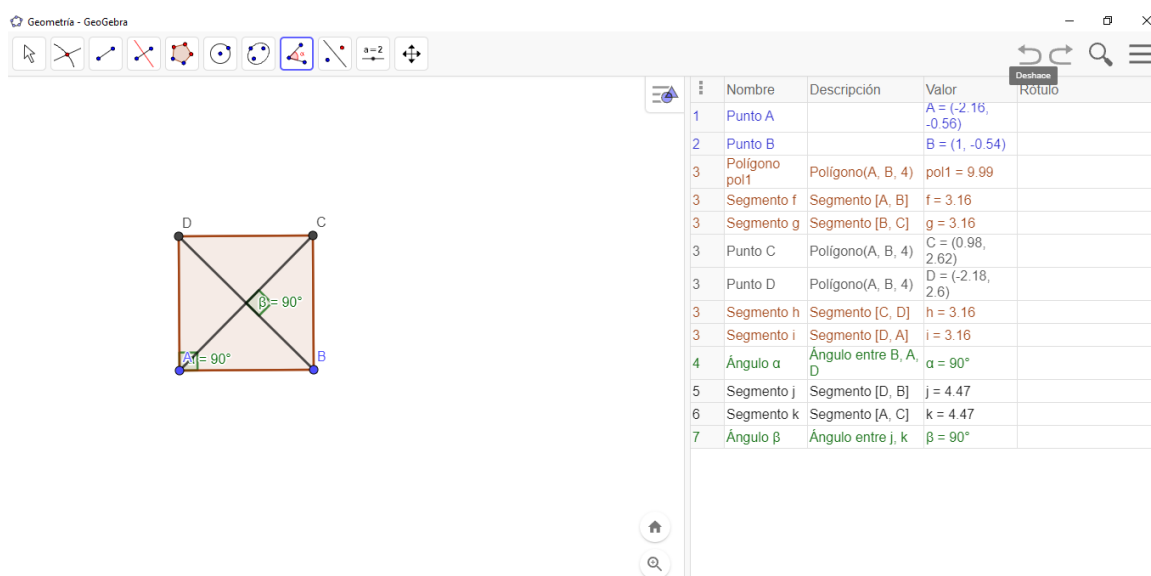
Al dialogar con Soledad, le preguntamos cómo había gestionado el diálogo con el grupo y qué puede ella decir de esta producción. Al respecto nos dijo que ella les pidió que explicaran lo que habían hecho diciendo porqué habían tomado esa decisión (espacio de trabajo idóneo-personal; geometría natural-axiomática natural; TK; TCK; TPK). Luego les preguntó por qué el grupo afirmaba que el ADBE es cuadrado. Soledad manifestó que el grupo sólo pudo contestarle “por lo que te dijimos antes” (espacio de trabajo personal; geometría natural). Ante la producción del grupo 1, Soledad aseguró que le pareció correcto el uso de las propiedades para gestionar el recurso que hizo el grupo y que, si bien requiere de algunos ajustes que va a hacer en la próxima clase cuando gestione un debate general, la producción es correcta y se ajusta al diseño curricular (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural; TPK; TPACK; KFLM; KMLS)

Al presentar la producción del grupo 2, Soledad manifestó su sorpresa por lo interesante del punto de partida, en cuanto al contenido usado y lo pobre de la producción general (KoT; KPM; KFLM). La producción del grupo 2 se muestra en la figura 5.

Al analizar la producción, Soledad relata que ella interpretó que el grupo decidió construir un cuadrado, para lo que usaron polígono regular. Al preguntarles porqué lo habían decidido, dijo recibir como respuesta que, si no tenían un cuadrado, no podían avanzar (espacio de trabajo personal; geometría natural). Además, sin que mediara intervención por parte de ella, dijo que el grupo se adelantó a aclararle que en la pantalla se ve lo que dicen los carteles 5 y 6 y también el 1 (espacio de trabajo personal; geometría natural). Es el momento en el que ella intervino con la pregunta: ¿qué quiere decir se ve? (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural; PCK; TPK; TPACK) para lo que el grupo dudó en responder y como ejemplo probaron lo que dice el cartel 7 midiendo el ángulo y, como es recto, las diagonales son perpendiculares. Ahí le dijeron que así sale todo el resto. (espacio de trabajo personal; geometría natural-axiomática natural).

Nuestra intervención hizo foco en la lectura que Soledad pudo hacer de la producción del grupo y que anticipó en el criterio de su selección y puntualizó cómo ella, gestionó las preguntas para hacer aparecer los contenidos que debieron usarse para la demostración, cuestionando la cualidad ostensiva de la figura como recurso (espacio de trabajo idóneo; PCK; TPACK; KoT; KMT).

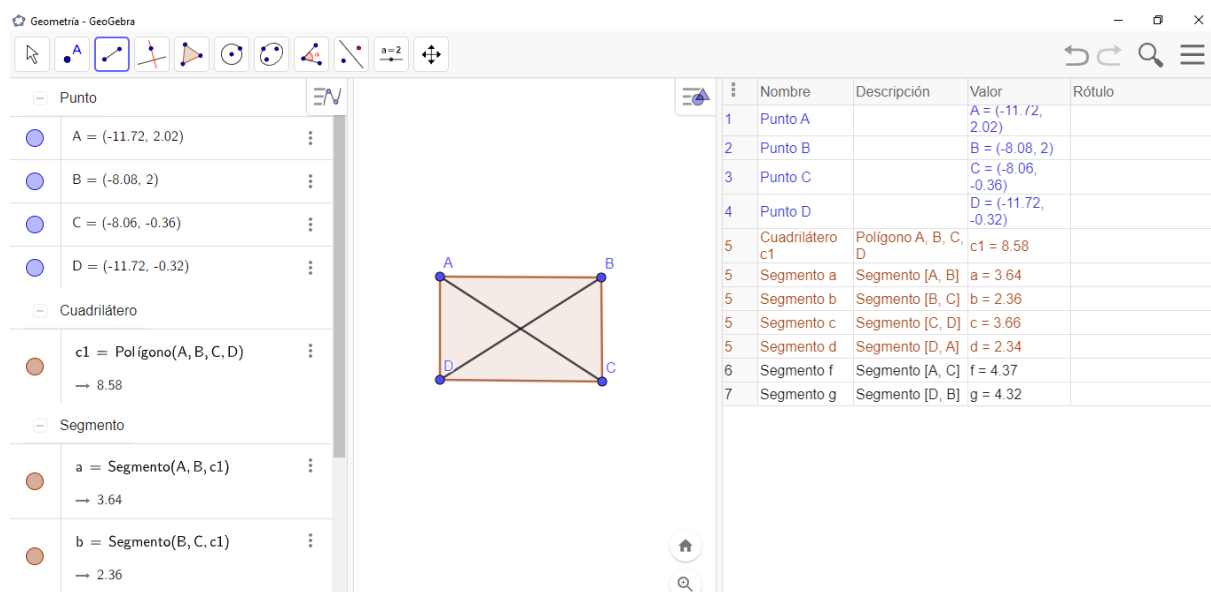
Figura 5- Solución propuesta por el grupo de estudiantes 2



Fuente: Elaboración propia

La sesión finalizó con el análisis de la producción del grupo de estudiantes 3 que, de acuerdo con el criterio de Soledad, fue el que menos calidad matemática presentó. Se muestra en la figura 6.

Figura 6- Solución propuesta por el grupo de estudiantes 3



Fuente: Elaboración propia

Soledad describió a este grupo como muy reticente al uso del SGD. Calificó la reticencia, en que sus integrantes manifiestan que no les gusta usar tecnología para trabajar (espacio de trabajo personal). Cuando pasó por la máquina en la que estaban trabajando, Soledad les preguntó cómo habían pensado la solución. El grupo respondió que, basándose en el protocolo de construcción, pueden probar que se cumplen las propiedades de los carteles 7,1,2,8,9 y 10, en ese orden. (espacio de trabajo personal; geometría natural). Ella comenta que no hurgó en más detalles y sólo cerró su intervención con la siguiente pregunta: ¿pudieron probar que ABCD es un cuadrado? (TPACK; KMT).

Al analizar juntos esta respuesta estudiantil, acordamos con Soledad en cómo lo actitudinal interfirió en la producción y que requiere del diseño de otras estrategias de enseñanza: permitir el uso de lápiz y papel, recortes de hojas, etc. (KMT; KFLM; KPM). Además, pensamos en cómo organizar los intercambios docentes-estudiantes cuando la motivación no se hace presente (KMT).

CONCLUSIONES

A partir de las sesiones relatadas, afirmamos que con Soledad trabajamos en el polo prueba del espacio de trabajo de su aula (fig. 2) ya que, para reflexionar sobre la demostración, ella necesitó pensar en cómo articular los elementos del espacio personal e idóneo de acuerdo con el modelo geométrico del referencial (eventualmente utilizó el polo visualización que tensionó cuando traspasó lo que se ve en la pantalla para centrarse en las condiciones de construcción de las figuras en ella reflejada). En Soledad, los componentes del plano cognitivo y epistemológico se relacionaron uno a uno, como se puede inferir a partir de la fig.2, y también a través de una relación de planos verticales. De acuerdo con las características de los grupos estudiantiles del aula, Soledad deberá estar atenta a las provocaciones didácticas estudiantiles que se manifiestan cuando éstos expresan su confusión respecto de los contenidos y reaccionan

de acuerdo con las exigencias inmediatas de la situación planteada (las y los estudiantes responden al problema planteado fluctuando entre el modelo de la geometría natural y el de la geometría axiomática natural). De no tomarse en cuenta lo anterior, Soledad no enseñará a demostrar, no propondrá realizar pruebas intelectuales: se conformará con un uso oportuno de pruebas pragmáticas y con minimizar la dificultad que podrán tener las y los estudiantes al pasar de una prueba pragmática a una intelectual. En próximas sesiones de trabajo con este grupo investigador, tendremos que ofrecer a Soledad la oportunidad de reflexionar acerca del rol del dibujo y el uso de SGD en las demostraciones que propiciará que aparezca en su aula. Así, esta aula mostrará un espacio de trabajo geométrico personal inestable, ya que el proceso de prueba del plano cognitivo estará tensionado por la visualización. Esta tensión didáctica, entre cómo Soledad gestionará su propio espacio de trabajo idóneo y personal que se manifiesta a través de qué decisiones toma para diferenciar su propia manera de resolver el problema y demostrar la validez de su propuesta de solución, de la que hagan sus estudiantes. Estas decisiones la llevará a reflexionar acerca de si: aceptará pruebas pragmáticas como demostración, en cómo gestionará el pasaje de argumentaciones expresadas de forma oral a formas escritas, tomará en consideración el peso que en los grupos estudiantiles juega el dibujo en las producciones (génesis figural).

La intervención del GI en la elaboración y análisis de la actividad para el aula, muestra un ejemplo de cómo reflexionar con una docente acerca de la posibilidad de utilizar un paradigma geométrico apropiado a cada grupo de estudiantes. Esto se logra al potenciar armónicamente los polos del espacio de trabajo matemático (fig.2) sin hacer que ninguno de ellos sea preponderante (por ejemplo, no abusar del polo de visualización) y generando la circulación entre el polo prueba y el referencial, al proponer redacciones de justificaciones que recurran al formalismo y leyes del lenguaje matemático. Así, estaremos proponiendo a las y los estudiantes actividades que les permitan: *interpretar* lo que se les propone; *comprender* la información dada y establecer relaciones con los comandos que provee el programa; *formular* y *comprobar conjeturas* acerca de los conceptos que está aprendiendo; *diseñar* estrategias para confirmar o refutar sus conjeturas; *resumir* la información incorporada; *comunicar* los resultados de sus hallazgos intentando definir aquello que lograron construir.

Un estudio de diseño como el que compartimos, permite relacionar la práctica educativa y los análisis teóricos, a través de informes situados (SKOVSMOSE, 2009) sobre el aprendizaje de las y los estudiantes:

- relacionando directamente el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido; testeando las teorías en la práctica;
- trabajando con las y los docentes en la construcción del conocimiento; reconociendo los límites de la teoría;
- capturando las especificidades de la práctica y las ventajas potenciales de adaptar la teoría a su contexto de forma iterativa y refinadora;
- estudiando los problemas cotidianos del aula, de las escuelas y de las comunidades que influyen en la enseñanza y el aprendizaje, adaptando la enseñanza a estas condiciones (KELLY et al., 2008; SHAVELSON et al., 2003).

Los resultados nos permiten tomar en consideración que, en un trabajo colaborativo como el descripto, se hacen evidentes componentes del conocimiento especializado del profesor

(MTSK- fig.1). Los diálogos tomados de las sesiones de trabajo, muestran cómo MTSK permite disgregar el conocimiento con propósitos analíticos, y caracterizar la enseñanza como una actividad situada, en la que la puesta en acto de conocimientos, procesos y habilidades docentes, le otorga visos de una actuación profesional. El registro de lo actuado, la discusión de lo anotado, el intercambio de puntos de vista sobre los pasos dados, pone en evidencia la necesidad de conocer en profundidad los temas de geometría que se están usando y las decisiones didácticas que focalizan en el análisis del rol de estudiantes como productores de conocimientos matemáticos en el nivel secundario de enseñanza. Los elementos con los que continuaremos indagando sobre el PCK y TPACK de Soledad a través de otro tipo de dispositivos que nos permitan dialogar con ella acerca de:

- *lo que se entiende por objeto*: todo aquello que puede ser indicado, señalado o referenciado cuando se hace, comunica o aprehende geometría. Asumimos así la metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas a la geometría y que nos permite llenarla de objetos de enseñanza –por lo tanto, de elementos que pueden ser analizados en la práctica– tomando como tales a los conceptos, las propiedades, las representaciones, los argumentos...
- *el significado de los objetos geométricos* a partir de la acción que efectúan las y los estudiantes con relación a dichos objetos por intervención de sus docentes, en particular en aulas que, como espacio de trabajo matemático, usan tecnologías informáticas para organizar las secuencias de enseñanza.
- *la idea de aula como una comunidad* constituida por estudiantes y docentes involucrados en una misma clase de situaciones problemáticas: las del aprendizaje de la geometría a través de recursos tecnológicos, que conlleva a realizar prácticas sociales compartidas condicionadas por los instrumentos disponibles, las reglas y sus modos de funcionamiento.
- *las cualidades de un proceso de enseñanza de un objeto geométrico* para un grupo de estudiantes por parte de profesionales de la enseñanza que asumen conscientemente lo que dicen las instituciones matemáticas y didácticas sobre el objeto de estudio en entornos tecnológicos.
- *la necesidad de analizar del sistema de prácticas* que tiene lugar en la clase de geometría, con el objeto de que sirva al estudio de las y los estudiantes y las evaluaciones de sus aprendizajes, así como al mejoramiento de las prácticas de enseñanza.
- *la importancia de evidenciar el rol profesional en la enseñanza* cuando, las y los docentes diseñan situaciones para que sus estudiantes aprendan contenidos en entornos que hacen dialogar la percepción con la deducción y que no se conforman con la descripción, sino que invitan a los resolutores al análisis y el trabajo colaborativo.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo es parte del proyecto PICT-2019-03051 radicado en el LICH-UNSAM-CONICET. Los autores son miembros de la red iberoamericana MTSK.

REFERENCIAS

BEDNARZ, N. Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. In M. Niss, E. Emberg (Eds.) **Proceedings of the International Conference on Mathematics Education**, Copenhagen, Denmark, 4-11 july, 2004.

CARRILLO J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L.C., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., VASCO, D., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILAR-GONZÁLEZ, RIBEIRO, M., y MUÑOZ-CATALÁN, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.

COLS, E. La enseñanza y los profesores: metáforas, modelos y formas de enseñar. **Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación**, IX (17), 8 – 22, 2000.

FERRAGINA, R. (ed.) **GeoGebra entra al aula de Matemática**. Montevideo: Ediciones Espartaco, 2012

HOYLES, C., NOSS, R. y KENT, P. On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms, **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 9(3), 309-326, 2004.

KELLY, A. E., LESH, R. A. y BAEK, J. Y. (Eds.) **Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching**. New York, NY: Routledge, 2008.

KUZNIAK, A. L'espace de travail mathématique et ses génèses. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 16, pp. 9-24, 2011.

MISHRA M., KOEHLER, J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record** Volume 108, Number 6, pp. 1017–1054, 2006.

SHAVELSON, R. J., PHILLIPS, D.C., TOWNE, L. y FEUER, M.J. On the science of education design studies. **Educational Researcher**, 32(1), 25-28, 2003.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, 15(2), 4-14, 1986.

SKOVSMOSE, Ole. **Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica**. Bogotá: Una empresa docente, 1999.

STYLIANIDES, A. y STYLIANIDES, G. Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. **ZDM. Mathematics Education**, 45(3), 333-341, 2013.

VILLELLA, J; FIORITI, G; FERRAGINA, R; LUPINACCI, L; BIFANO, F; ALMIRÓN, A. A professional development experience in Geometry for High School teachers: introducing teachers to Geometry workspaces. Herbst, P; Cheah, U; Jones, K; Richard, P. (eds)

International Perspectives on the teaching and learning of Geometry in secondary schools.
Cham: Springer, pp197 – 214, 2018.

VILLELLA, J., FIORITI, G., FERRAGINA, R., BIFANO, F., LUPINACCI, L., ALMIRÓN, A., VICTORIA GÜERCI, y SUSANA AMMANN. (2021). Train as a Math Teacher: Creative and Proactive Process of Professional Development. **Social Education Research**, 2(2), 241-255, 2021. <https://doi.org/10.37256/ser.222021894>.

VILLELLA, J., y STEIMAN, J. De un artículo periodístico a una secuencia de enseñanza de geometría: la mirada didáctica general en diálogo con la específica. **En Clave Didáctica** 2, 7-18, 2021. http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/en-clave-didactica/2020_Revista-CEDE_2.pdf.

Submetido em: 24 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

VILLELLA, José; FERRAGINA, Rosa Ana. Evidencia de conocimiento docente especializado en espacios de trabajo matemático que usan recursos tecnológicos. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 61-78, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p61-78.id451>