Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas

Jorge Gaona[1]
Universidad de Playa Ancha

Laurent Vivier[2]
Université Paris Cité

RESUMEN
La participación de los profesores en el diseño de recursos digitales ha cobrado importancia el último tiempo, particularmente en el diseño de recursos para la evaluación en línea. Este artículo busca caracterizar el valor epistémico de un conjunto de tareas diseñadas y programadas por un dos profesores en un sistema de evaluación en línea para matemáticas en una institución de educación superior en Chile. El valor epistémico es estudiado a través del Espacio de Trabajo Matemático idóneo potencial mediante un análisis cualitativo de los enunciados de las tareas diseñadas, las retroalimentaciones y los algoritmos que los definen. Los resultados muestran que se privilegia un trabajo instrumental incluso en tareas donde se usan registros gráficos. También, aparecieron fenómenos particulares ligados a la parametrización y programación de tareas, los cuales impactan el valor epistémico de estas.
Palabras clave: Profesores; Espacio de Trabajo Matemático; función; programación; diseño de tareas
.

Epistemic value of tasks designed in an online assessment system with feedback for mathematics

ABSTRACT
The design of digital resources by teachers has become more important in recent times, particularly online assessment. This article seeks to characterize the epistemic value of a set of tasks designed and programmed by two instructors in an online assessment system for mathematics at a higher education institution in Chile. The epistemic value is studied through the suitable potential Mathematical Working Space (MWS) by means of a qualitative analysis of the statements, the feedback and the algorithms that define them. The results show that instrumental work is privileged even in tasks where graphic records are used. Also, particular phenomena linked to the parameterization and programming of tasks, which impact the epistemic value of these.
Keywords: teachers; Mathematical Working Space; function; programming; task design

Valor epistêmico das tarefas projetadas em um sistema de avaliação on-line com feedback para matemática

RESUMO
A participação de professores no projeto de recursos digitais ganhou importância recentemente, particularmente no projeto de recursos para avaliação on-line. Este artigo procura caracterizar o valor epistêmico de um conjunto de tarefas projetadas e programadas por dois professores em um sistema de avaliação on-line para matemática em uma instituição de ensino superior no Chile. O valor epistêmico é estudado através do espaço de trabalho matemático potencialmente adequado por meio de uma análise qualitativa das declarações das tarefas projetadas, dos feedbacks e dos algoritmos que as definem. Os resultados mostram que o trabalho instrumental é privilegiado mesmo em tarefas onde são utilizados registros gráficos. Também surgiram fenômenos particulares ligados à parametrização e programação de tarefas, que têm um impacto sobre seu valor epistêmico.
Palavras-chave: professores; espaço de trabalho matemático; função; programação; desenho de tarefas.

[1] Docteur en Didactique des Mathématiques, Université Paris Cité, France. Profesor e investigador em la Universidad de Playa Ancha, Valparaíso. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6367-529X. E-mail: jorge.gaona@upla.cl.
[2] Docteur en Mathématiques Université de Tours, Tours, France. MC Laboratorio LDAR, Universidad París, Francia. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9203-8756. E-mail: laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de evaluación en línea con retroalimentación en matemáticas, son un tipo de tecnología con un uso sostenido en el tiempo, el cual viene incentivado por las posibilidades de su implementación a gran escala y con una interacción cada vez más sofisticada entre el estudiante y la máquina. Además, este tipo de sistemas genera una gran cantidad de datos que pueden ser aprovechados por estudiantes, profesores e investigadores (Stacey, Steinle, Price, & Gvozdenko, 2018; Stacey & Wiliam, 2013).

Al hacer un análisis de la literatura de sistemas de evaluación en línea que cuentan con retroalimentación, se advierte que hay una serie de artículos que muestran que su uso tiene efectos positivos en el rendimiento y variables socio-afectivas (Chow, 2015; González, Jover, Cobo, & Muñoz, 2010; Roschelle, Feng, Murphy, & Mason, 2016; Sancho-Vinuesa & Escudero, 2012). También hay una serie de artículos que muestran que el rendimiento varía según el tipo de formato de las preguntas (opción múltiple o respuesta abierta) y el tipo de retroalimentación en tareas sobre resolución de problemas (Attali, 2015; Attali e Kleij, van der, 2017) o según el tiempo en que se entrega la retroalimentación en álgebra y matemáticas de nivelación (Bokhove & Drijvers, 2012; Gaona, Reguant, Valdivia, Vásquez, & Sancho-Vinuesa, 2018).

Todos los artículos mencionados anteriormente, presentan diferencias en la tecnología que utilizan, los temas matemáticos tratados o la edad de los estudiantes con los que se trabaja. Sin embargo, hay algunos elementos convergentes. Todos utilizan tecnología con características técnicas específicas para los enunciados, los sistemas de entrada de respuestas, los sistemas de validación y/o los sistemas de feedback hacia los estudiantes. La mayoría de estos sistemas parametrizan algunos números, símbolos o gráficos de los enunciados, dotándolos de un carácter aleatorio. En los sistemas de entrada se advierte el uso de editores de ecuaciones para el ingreso de respuesta o deslizadores para un trabajo en entornos geométricos. En los sistemas de validación se utiliza un CAS (Computacional Algebra System) o un sistema de Cálculo Geométrico para determinar si la respuesta ingresada es correcta o no, por ejemplo, evaluando si dos expresiones son matemáticamente equivalente o características adicionales, como, por ejemplo, si una expresión está factorizada o simplificada. Finalmente, se constatan distintos tipos de retroalimentación: de tarea (correcto o incorrecto); de proceso (solución paso a paso) o retroalimentación a medida que el estudiante va resolviendo un procedimiento algebraico. Prácticamente no se usan preguntas de selección múltiple, salvo en los casos donde es una de las variables de comparación (Attali, 2015; Attali e Kleij, van der, 2017).

Otro elemento que tienen en común estos artículos es que no hay una discusión sobre los aspectos epistemológicos de las preguntas propuestas o su retroalimentación, cuando se discute, se hace más bien sobre aspectos generales. Solo se estudian los efectos en distintas variables, medido en términos estadísticos, pero, no hay un análisis cualitativo más detallado sobre esta relación.

Recientemente, hay trabajos que se centran en elementos epistemológicos en las tareas y en el feedback proporcionado en distintos temas matemáticos En funciones lineales (Barana et al., 2021), fracciones (Gaona e Menares, 2021), lectura de gráficos (Gaona, Hernández e Bravo, 2022) y números complejos (Gaona, López e Montoya-Delgadillo, 2022). Sin embargo, en estos trabajos el diseño de tareas es realizado por los investigadores desde una perspectiva

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

teórica, es decir, los profesores no tienen un rol activo en el diseño de las tareas, lo cual puede afectar la integración de estos recursos digitales en su trabajo como docentes, puesto que, si son diseñados por expertos, podría existir una lejanía con las tareas habituales que realizan los docentes en clases (Hoyles, Noss, Vahey, & Roschelle, 2013, p. 1068). En esta misma línea, (Jones e Pepin, 2016) plantean que, en relación al diseño de recursos tecnológicos, es importante, por una parte, tomar en cuenta qué diseñar y por otra, cuál es el papel de los profesores en este proceso, tanto por garantizar la calidad de los recursos y la cercanía a lo que ellos trabajan en clases, como porque la participación en este proceso, es una oportunidad de desarrollo profesional docente.

En la Universidad Tecnológica de Chile INACAP (INACAP de aquí en adelante), entre el 2015 y el 2018, se desarrolló el proyecto SEDOL-M, el cual tenía como objetivo diseñar e implementar un sistema de evaluación en línea para el trabajo autónomo de los estudiantes de matemática I[3], como complemento de las clases presenciales. Este proyecto partió en un campus y el 2018 abarcó a 8 de los 26 campus con los que cuenta la institución a lo largo de Chile (Vásquez e Gaona, 2016). Actualmente este proyecto sigue vigente, pero de forma autónoma en cada campus. Una de las particularidades del proyecto es que el diseño y la programación de las tareas que conforman SEDOL-M estuvo a cargo de equipos de profesores de cada uno de estos campus.

SEDOL-M es un proyecto masivo y en los artículos publicados sobre él, no se discute el trabajo matemático que los profesores proponen a los estudiantes a través de las tareas y retroalimentaciones concebidas en la plataforma. Es por esto que, en este artículo, se discute sobre el valor epistémico de las tareas (Artigue, 2002, p. 248), el cual se estudiará a través del Espacio de Trabajo Matemático o ETM (Kuzniak e Richard, 2014), específicamente con la idea de ETM idóneo potencial. Este estudio se hará a partir del análisis de los enunciados y se complementará con análisis de los algoritmos que definen las tareas. De forma más específica, las preguntas de investigación que guían este trabajo son:

- ¿Cuál es el impacto, de la participación de los profesores como diseñadores y programadores, en el trabajo matemático idóneo potencial de las tareas que conforman un sistema de evaluación en línea?
- ¿Cuál es la influencia de la programación en los objetos matemáticos de los enunciados?
- ¿Cuál es la influencia de los objetos matemáticos elegidos en la programación de estos?

En este artículo, del total de tareas diseñadas en el proyecto, se analizan 9 tareas sobre función afín y cuadrática, diseñadas por 2 profesores de dos campus. Se estudia el algoritmo que las define y algunas de las iteraciones del enunciado con su respectiva retroalimentación.

[3] Es una asignatura cuyo nombre es común a todas las carreras, pero, varía en las unidades que la componen según el área en que se dicte. Tiene algunas unidades que se repiten en muchas áreas como álgebra o funciones polinómicas y otras que se dan exclusivamente en un área como trigonometría y números complejos que solo se dicta en Electricidad y Electrónica.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO SEDOL-M

Este proyecto fue impulsado por el Centro de Innovación en Educación (CIEDU) de INACAP a partir de un pequeño proyecto desarrollado por un grupo de profesores de uno de los campus de la institución, financiado mediante un fondo interno en el año 2013.

En el 2015, INACAP decidió escalar el proyecto, tomando en cuenta que los resultados positivos a pequeña escala y en entornos controlados son difíciles de replicar con profesores ordinarios (Artigue, 2011). Dada la envergadura de la institución y del proyecto, se diseñó una estrategia de escalamiento paulatino la cual se basó principalmente en la formación de equipos de diseño en cada campus, quienes programaron cada una de las preguntas que componen el sistema y con quienes se discutieron decisiones con respecto a las reglas de implementación, tanto para el profesorado, como para los estudiantes.

El proyecto recomenzó en agosto del 2015, con una fase de diseño en un solo campus. El 2018 ya se había extendido a 8 campus, que es el número actual de campus que trabajan con el sistema, afectado a un poco más 13.000 estudiantes y 120 profesores a cargo, de los cuales 32 son diseñadores. En el proceso de diseño, se crearon 370 preguntas, todas con parámetros aleatorios, donde en más del 90% se debía ingresar un objeto matemático como respuesta. Además, en el diseño, se contempló una retroalimentación paso a paso para cada pregunta. En total, abarcaron 10 tópicos diferentes (proporciones y porcentajes, álgebra, funciones y trigonometría, entre otros).

En este artículo, se analiza lo desarrollado para funciones de primer y segundo grado. Esta fue la primera unidad que diseñaron. Previamente habían tenido un taller de inducción en febrero del mismo año. Había un profesor del primer campus que los acompañó en el proceso de diseño, resolviendo las dudas que tuviesen sobre programación.

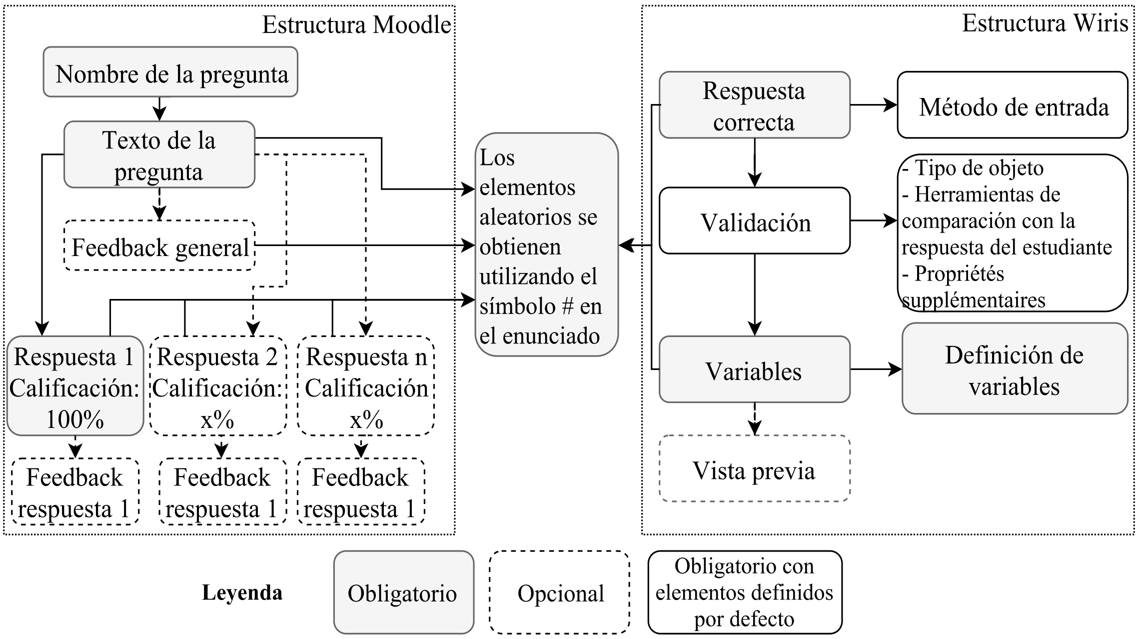
Aspectos tecnológicos

Existen diversos sistemas para desarrollar evaluaciones en línea en matemáticas, cada uno tiene limitaciones y potencialidades. En este caso, el desarrollo de las tareas se realizó en una plataforma Moodle[4], que tenía instalado MathType (editor de ecuaciones), Calcme (sistema de cálculo simbólico) y Quizzes (sistema para aleatorizar los enunciados), todos desarrollados por Wiris[5]. Estos software permiten diseñar preguntas números, símbolos y gráfico aleatorios. Además, es posible construir una retroalimentación paso a paso en función de los parámetros aleatorios. En la figura 1 se muestra, de forma esquemática, lo que deben definir los profesores al momento de diseñar una pregunta.

[4] http://www.moodle.org
[5] www.wiris.com

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Figura 1 – Decisiones que deben tomar los profesores al diseñar una pregunta de respuesta corta con Wiris y Moodle.



Fuente: Elaboración propia

El enunciado es un archivo Moodle XML que contiene elementos fijos y variables. Los fijos, son cadenas de texto y los variables, pueden ser números, símbolos, textos o gráficos aleatorios que son definidos en el enunciado con el símbolo “#” en un algoritmo con un lenguaje propio de Wiris. Una vez que estos elementos se definen, se realiza una vista previa, la cual muestra una de las posibles iteraciones que puede tener la pregunta.

Para ejemplificar, en el enunciado: “Calcular $\#a+3$” implica que \#a es un elemento que será aleatorio y que se definirá en un algoritmo, por ejemplo, se podría definir como: *a=aleatorio(-10,10)* lo que implica que *a* puede tomar valores enteros entre -10 y 10 incluyendo los extremos. Por lo tanto, algunas iteraciones de esta tarea podrían ser: “Calcular -5+3”, “Calcular 0+3”, entre otros. Los elementos aleatorios del enunciado, la respuesta y la retroalimentación en función de los parámetros del enunciado, se definen en un algoritmo (ver por ejemplo Figura 3 y Figura 5).

Una de las características más valoradas por profesores y estudiantes es la retroalimentación, puesto que, como lo indican (Sancho-Vinuesa e Escudero, 2012) la retroalimentación pertinente les ayuda a los estudiantes decidir sobre su propio aprendizaje y les entrega un referente de qué es lo que se espera de ellos. Esto es coherente con estudios que muestran que la retroalimentación es uno de las más grandes influencias en el aprendizaje y el logro, sobre todo si su entrega es oportuna, pertinente, está centrada en la tarea y cómo hacerla. Además, se obtienen mejores resultados cuando se compara con otros tipos de retroalimentación, como elogios, recompensas y castigos (Hattie e Timperley, 2007, p. 84) o cuando se complementa con formas específicas de implementarlo, como por ejemplo el feedback diferido (Gaona *et al.*, 2018). Todos los componentes descritos anteriormente sirvieron para construir la matriz de datos, teniendo como fin permitir, no tan solo estudiar el trabajo matemático potencial del enunciado y su retroalimentación, sino que, además, a partir

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

del análisis de los algoritmos, estudiar las decisiones de los profesores al programar y su influencia en la variabilidad de las tareas y su potencial de trabajo matemático.

MARCO TEÓRICO

El Espacio de Trabajo Matemático o ETM (Kuzniak, Montoya-Delgadillo e Richard, 2022; Kuzniak e Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay e Elia, 2016) permite identificar y analizar el trabajo matemático de un sujeto, tomando en cuenta aspectos epistemológicos y cognitivos del tema abordado y de quien resuelve respectivamente. Estos aspectos se articulan mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva (ver Figura 2 – Decisiones que deben tomar los profesores al diseñar una pregunta de respuesta corta con Wiris y Moodle

). Acá la palabra génesis se utiliza en un sentido amplio y hace referencia, tanto al comienzo de un proceso, como su desarrollo e interacción entre los polos de los planos epistemológico y cognitivo.

En nuestro trabajo, para identificar el valor epistémico de las tareas, identificaremos cuáles son las génesis que activan preguntas de la plataforma y para esto, es indispensable identificar si, dado un objeto matemático (tal como una función o una fórmula), es posible establecer si está siendo usado como una herramienta semiótica, artefacto simbólico o herramienta teórica. En el plano epistemológico, se encuentran los objetos y/o herramientas, que permiten desarrollar el trabajo matemático y se definen tres polos: el *representamen*, los artefactos y el referencial teórico. De acuerdo a Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016), en el modelo de los ETM, los objetos matemáticos pueden convertirse en herramientas o viceversa. Por otra parte, en el plano cognitivo, se encuentran tres procesos, a través de los cuales se intenta dar cuenta de la actividad matemática: visualización, construcción y prueba.

Cabe observar que, para poder identificar las génesis que se activan o privilegian en la resolución de una tarea, necesitamos identificar en cuál de los tres polos del plano epistemológico se encuentra un objeto matemático en particular. El estatus de un objeto o herramienta en relación al polo en el cual se encuentra, estará más bien dado por su utilización, que por una característica intrínseca.

A saber, diremos que un objeto o herramienta matemática está en el polo del *representamen* cuando se utiliza como una herramienta semiótica, en otros términos, cuando se trabaja a partir de su visualización y se tomen en cuenta las relaciones entre sus unidades figurales y no solo la percepción visual que provee el acceso directo al objeto. Los objetos del polo de los artefactos (materiales o simbólicos) se identificarán cuando se trabaje herramientas materiales (como regla y compás), herramientas informáticas (como una calculadora CAS) o artefactos simbólicos.

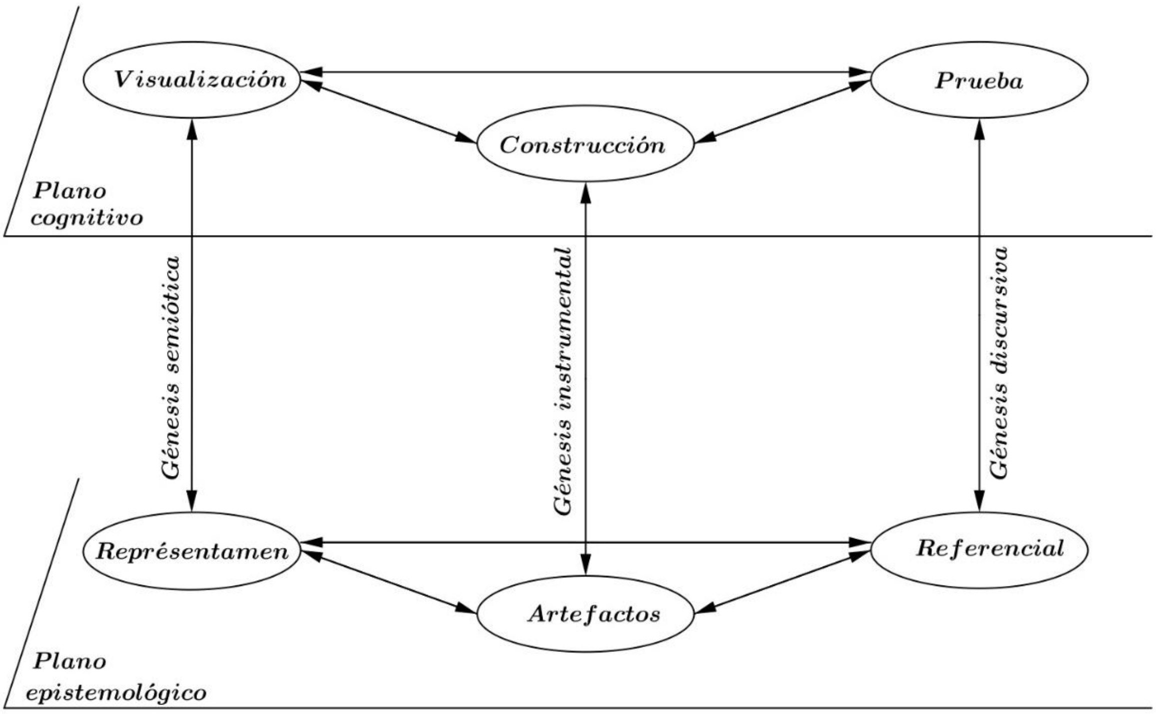
Para los dos primeros casos, dada su naturaleza, son fácilmente identificables, en cambio, el artefacto simbólico lo identificaremos cuando un objeto matemático o un algoritmo se utilice como una herramienta para obtener un resultado y no se tomen en cuenta sus propiedades, vale decir, cuando su uso no esté apoyado en el referencial teórico. Así, asociaremos el estatus de simbólico a un uso totalmente naturalizado y rutinizado, en el que no se discuta ni cuestione su validez ni justificación.

Finalmente, en el polo del referencial teórico están las propiedades, teoremas y axiomas que dan sustento al discurso matemático. Este polo no se debe pensar solo como una colección

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

de propiedades, porque al dar soporte a las justificaciones deductiva, debe estar organizado de forma coherente y bien adaptado a las tareas que se les pide a los estudiantes que resuelvan (Kuzniak, Tanguay, *et al*.,2016).

Figura 2 – Decisiones que deben tomar los profesores al diseñar una pregunta de respuesta corta con Wiris y Moodle



Fuente: Elaboración propia

Tal como lo indican Kuzniak, Tanguay, *et al*. (2016), la matemática es ante todo una actividad humana y no solo una lista de signos y propiedades. Por esta razón, este modelo considera un segundo nivel centrado en el sujeto, considerándolo como un sujeto cognitivo cuyos procesos mentales están en interacción con el plano epistemológico a través de una actividad matemática específica. Los tres procesos que se consideran en el plano cognitivo son: la visualización, la construcción y la prueba. La visualización, está relacionada con la interpretación de signos y la construcción interna de la representación de los objetos y sus relaciones. La construcción, está relacionada con la utilización de artefactos (materiales o simbólicos), junto con esquemas de uso para producir elementos tangibles como escritos o dibujos y también para la observación, exploración y experimentación mediada por un artefacto. Finalmente, la prueba, está relacionada con el proceso de justificación mediante herramientas teóricas y no solamente una validación empírica, la cual se podría entender más como el proceso de construcción antes descrito.

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. La semiótica conecta el proceso de visualización en el plano cognitivo con el *representamen* en el epistemológico. Esta génesis puede partir por el signo en

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

el *representamen* que es decodificado por el sujeto mediante la visualización. También puede partir por el sujeto que codifica y produce un signo.

La instrumental conecta el proceso de construcción en el plano cognitivo con el polo de los artefactos. Cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, está compuesta de dos procesos: el de instrumentalización y el de instrumentación. El primero, comprende la emergencia y evolución de los esquemas de uso del artefacto y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto. El segundo parte desde el sujeto y es relativo a la emergencia y evolución de los esquemas de uso y de las acciones instrumentadas, su constitución, funcionamiento, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos. El trabajo matemático podría ser considerado rutinizado si es que no se conecta con la validación y justificación de los artefactos (Flores Salazar, Gaona e Richard, 2022).

Finalmente, la discursiva, conecta el proceso de prueba con el polo del referencial teórico en el plano epistemológico y está asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades. En este último caso, el foco está puesto en las propiedades y teoremas, por lo que se está pensando en razonamientos que van más allá de los visuales o instrumentales, pero que pueden ser desencadenadas por estos (Kuzniak, Tanguay, *et al*., 2016, p. 727).

Cuando no es posible distinguir qué génesis está siendo privilegiada, lo que se da de manera frecuente, el trabajo matemático se puede caracterizar mediante la conexión de dos génesis, considerando algunos de los tres planos verticales (Coutat e Richard, 2011): semiótico-instrumental, semiótico-discursivo o el instrumental-discursivo.

Por otra parte, el trabajo matemático en una institución de educación se puede describir a través de tres niveles, el espacio definido por la institución, denominado ETM de referencia (Montoya-Delgadillo e Reyes Avendaño, 2022); el ETM organizado por el profesor, denominando ETM idóneo (Henríquez-Rivas, Kuzniak e Masselin, 2022) y el ETM de resolución de problemas efectivos tanto del profesor como del alumno, denominado ETM personal (Menares Espinoza e Vivier, 2022).

En este artículo, trabajamos específicamente con la idea de ETM idóneo potencial, donde potencial se entiende como aquellos recursos de aprendizaje construidos y organizados con el objetivo de activar un trabajo matemático específico, los cuales, se transforman en efectivo una vez que un estudiante trabaja con ellos y se analiza el trabajo que realiza. En el caso de una tarea cualquiera, al tener varios caminos de solución, el ETM potencial puede ser amplio, sin embargo, como el profesor programó la retroalimentación, podemos estudiar cuál es el trabajo matemático que espera del estudiante o a cuál lo quiere inducir. Entonces, a través del ETM idóneo potencial, estudiaremos el valor epistémico de las tareas diseñadas en la plataforma, particularmente de las tareas sobre funciones de primer y segundo grado, analizando algunas de sus iteraciones y también los algoritmos y enunciados que las definen.

Además, queremos estudiar la relación entre el ETM idóneo potencial que proponen los profesores y las decisiones de diseño en los algoritmos, es decir, la dimensión instrumental del diseño. Generalizando la definición de artefacto como un conjunto de proposiciones que serán o no utilizadas por un individuo (Béguin e Rabardel, 2000), podemos considerar el espacio virtual de diseño en la plataforma como un artefacto, por lo que también se produce una génesis

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

instrumental, pero de naturaleza diferente a la que se produce en el trabajo matemático de quien resuelve una tarea. Esta diferencia se da porque los objetivos son diferentes, puesto que el profesor diseñador debe tomar decisiones para crear un enunciado, activando algunas de las proposiciones que proporciona una plataforma, mientras que, quien resuelve una tarea debe transformar en instrumento un artefacto material, simbólico o informático para responder a la tarea propuesta.

Nos interesa la génesis instrumental del diseño porque podría haber una influencia bidireccional entre el proceso de programación y el ETM potencial de las tareas, en el sentido que, por una parte, queriendo parametrizar un enunciado particular se deben resolver desafíos específicos de programación y por otra parte, las limitaciones y fortalezas en las destrezas de programación de los diseñadores, junto con las limitaciones de la plataforma, pueden modificar el ETM potencial de la tarea diseñada.

RECOLECCIÓN DE DATOS Y METODOLOGÍA

El análisis se centra en 9 tareas, 5 sobre funciones de primer grado y 4 sobre funciones de segundo grado, creadas por una profesora Fernanda del campus Renca y el profesor Leonardo del campus Santiago Sur de INACAP. Todas las tareas de la plataforma son contextualizadas (a petición de la institución) y cada profesor trabajó varias tareas en torno a un solo contexto.

Como fuente de datos se utilizaron tres componentes que conforman una tarea en la plataforma: el enunciado, el algoritmo y una vista previa de la tarea.

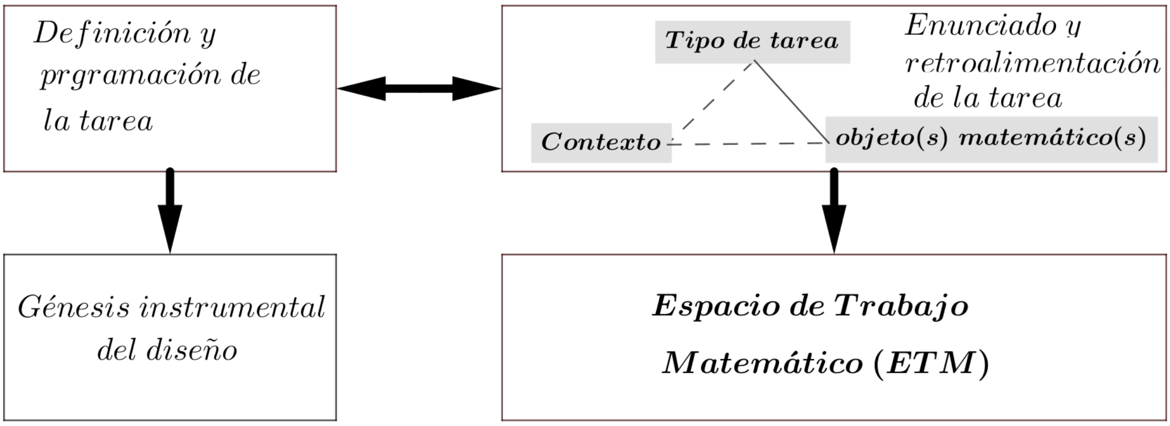
Para el análisis, se examinaron tres características explícitas de la tarea: el contexto, el tipo de tarea y el objeto matemático (su representación y características). A partir de estas características posteriormente se analizó la dinámica entre los componentes del ETM que produce la tarea, tal como se esquematiza en la **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Además de lo anterior, analizamos, a través de la génesis instrumental (Béguin e Rabardel, 2000), la definición de la tarea y particularmente el algoritmo que la define.

Utilizaremos la noción “tipo de tarea”' de (Chevallard, 1999, p. 2), para quien esta se expresa por un verbo y una acción precisa. Por ejemplo, “Calcular la imagen de x=1/3 bajo la función $f(x)=x^2–x+1$” o “Graficar la función $f(x)= (x–1)/2$” son tareas que permiten definir los *tipos de tareas* como “Calcular la imagen de un valor” o “Graficar una función”.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Figura 3 – Elementos puestos en juego para el análisis de las tareas



Fuente: Elaboración propia

El tipo de tarea tiene un objeto matemático asociado, el que podría aparecer de forma explícita o no. Del objeto matemático, se distinguen sus características, las cuales son observables a partir de la representación semiótica (Duval, 1993) elegida por el profesor. En el caso de la plataforma, es posible analizar, además, el algoritmo que la define. A través de su representación, se distinguen algunas características particulares, por ejemplo, en el caso de la función, la naturaleza de los coeficientes de la función o los números que aparezcan en el plano donde se represente.

Además, en el esquema de la figura 3, el contexto aparece conectado con una línea punteada, puesto que no siempre hay un contexto extra matemático. En caso de que se utilice uno, se analizará si el contexto podría influir en el tipo de tarea o en el objeto/herramienta matemática puesto en juego. Complementando lo anterior, se distinguirá si el contexto usado es artificial o auténtico. Se entenderá por artificial cuando no sea posible justificar que un contexto dado sea modelizado por un objeto matemático específico. Por ejemplo, un contexto que modeliza el precio de un producto, en función de las unidades producidas, implica que el dominio de la función debería ser discreto. Cabe destacar, que la flecha del enunciado y retroalimentación de la tarea va solo en dirección al ETM porque los profesores, al diseñar, no se basaron en este marco teórico o en algún otro y más bien, se guiaron por las indicaciones del programa de estudio.

Para el análisis particular, se utilizan las categorías de análisis del ETM, que dependen de los elementos de la figura 3, a saber, dependen de los componentes del enunciado, que, a su vez, varían según el algoritmo que los definen. Estos elementos pueden intencionar la activación de una génesis, plano específico o una circulación entre estos componentes (Montoya, Mena-Lorca, & Mena-Lorca, 2014).

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

RESULTADOS

ETM potencial de las tareas de la profesora Fernanda.

Fernanda creó 4 tareas, en las cuales utilizó una función cuadrática de la forma $f(x)= a_1x–a_2x$^2 (con a_1 y a_2 aleatorios). Utilizó un contexto que modeliza el ingreso en una fábrica de pantalones en términos de la cantidad de unidades vendidas. Este contexto lo denominamos artificial, puesto que no es posible justificar que este fenómeno es efectivamente modelizado por una función cuadrática. El coeficiente libre igual a cero de la función se elegió por el contexto, ya que cuando no se fabrican pantalones, es decir, $x=0$, el ingreso es cero. En forma global, las tareas propuestas se resumen en la tabla 1.

Tabla 1 – Tareas diseñadas por la profesora Fernanda..

Enunciados	Retroalimentación	
	Génesis instrumental	**Génesis semiótica**
T1: Calcular la imagen de un valor a partir de una función representada de forma algebraica (ver figura 4(a))	Se hacen cálculos rutinarios para calcular la imagen	Se establece una correspondencia entre los elementos contextuales del enunciado y la pre-imagen de la función
T2: Calcular las raíces de una función a partir de una función representada de forma algebraica (ver figura 4(b))	La fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ es usada como artefacto simbólico	Se usa un gráfico para mostrar las raíces buscadas
T3: Estimar el máximo de una función representada de forma gráfica (ver figura 5)		La graduación y la cuadrícula se utilizan como herramienta semióticas
T4: Calcular el máximo de un valor a partir de una función representada de forma algebraica (ver figura 6)	Se utiliza la fórmula *b/2a* como artefacto simbólico	

Fuente: elaboración propia

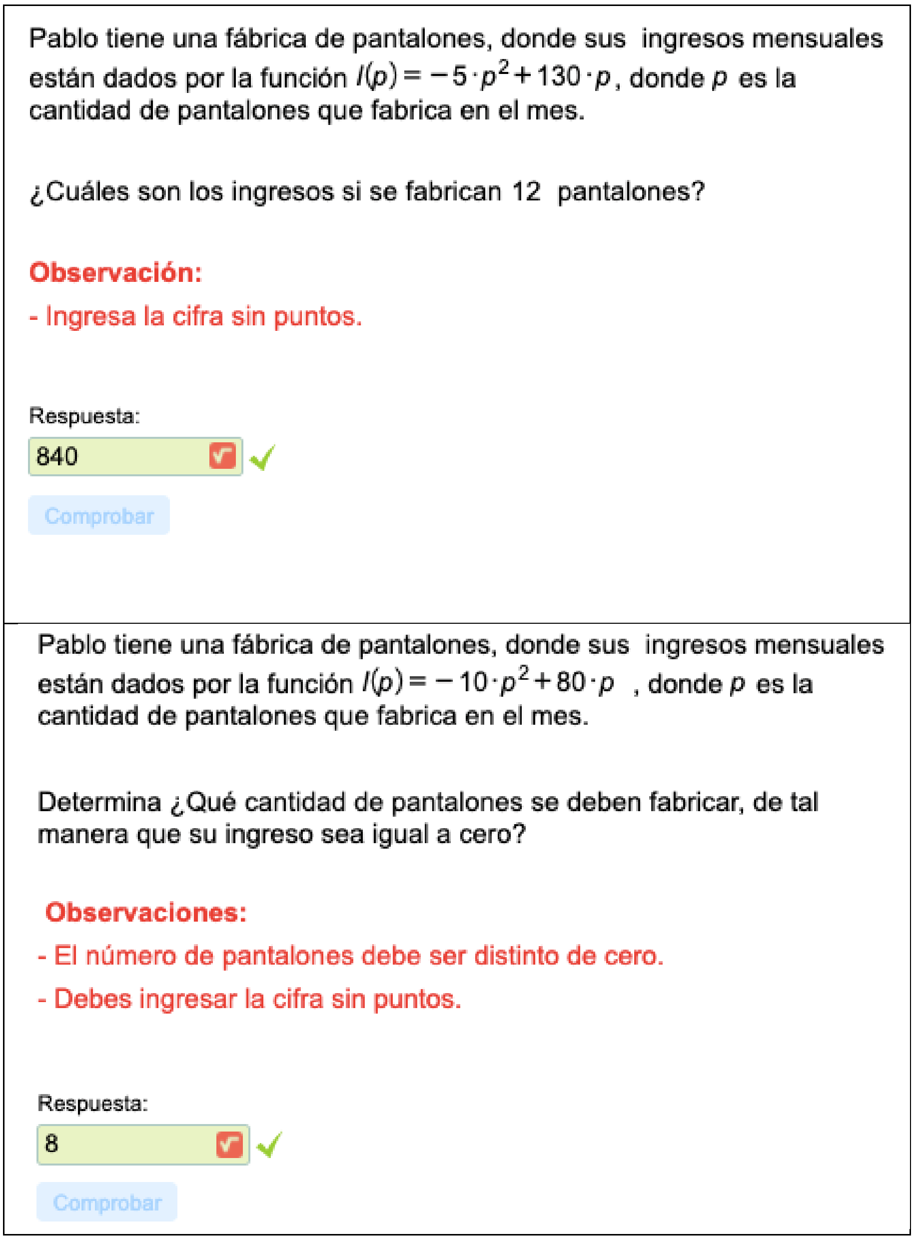
En T1 (figura 4(a)) pide calcular la imagen de un valor a partir de una función representada de forma algebraica. Se debe establecer una correspondencia entre los datos del enunciado y la función, identificando el argumento de la función donde se evalúa, cómo y dónde se reemplaza ese valor, lo que es un trabajo en la génesis semiótica. Luego, el trabajo es principalmente de cálculo rutinario. En la retroalimentación, se hace la evaluación de la función y se muestran los resultados del cálculo, lo que incentiva un trabajo en la génesis instrumental.

En T2 (figura 4(b)) pide calcular las raíces de una función a partir de una función representada de forma algebraica. Como la función es siempre de la forma $f(x)= a_1x–a_2x$^2

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

(coeficiente libre igual a cero), al igualar a cero y plantear la ecuación cuadrática hay varias estrategias para obtener el resultado. En la retroalimentación, la profesora traza el gráfico de la función y marca las raíces en el gráfico, activando la génesis semiótica y trabajando la solución desde otro punto de vista. Luego, indica que hay que igualar a cero y utiliza la fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para encontrar los valores que solucionan la ecuación, utilizando la fórmula como un artefacto simbólico y por tanto activando la génesis instrumental.

Figura 4 – Enunciado de T1 a la izquierda (a) y enunciado de T2 a la derecha (b) de la profesora Fernanda.



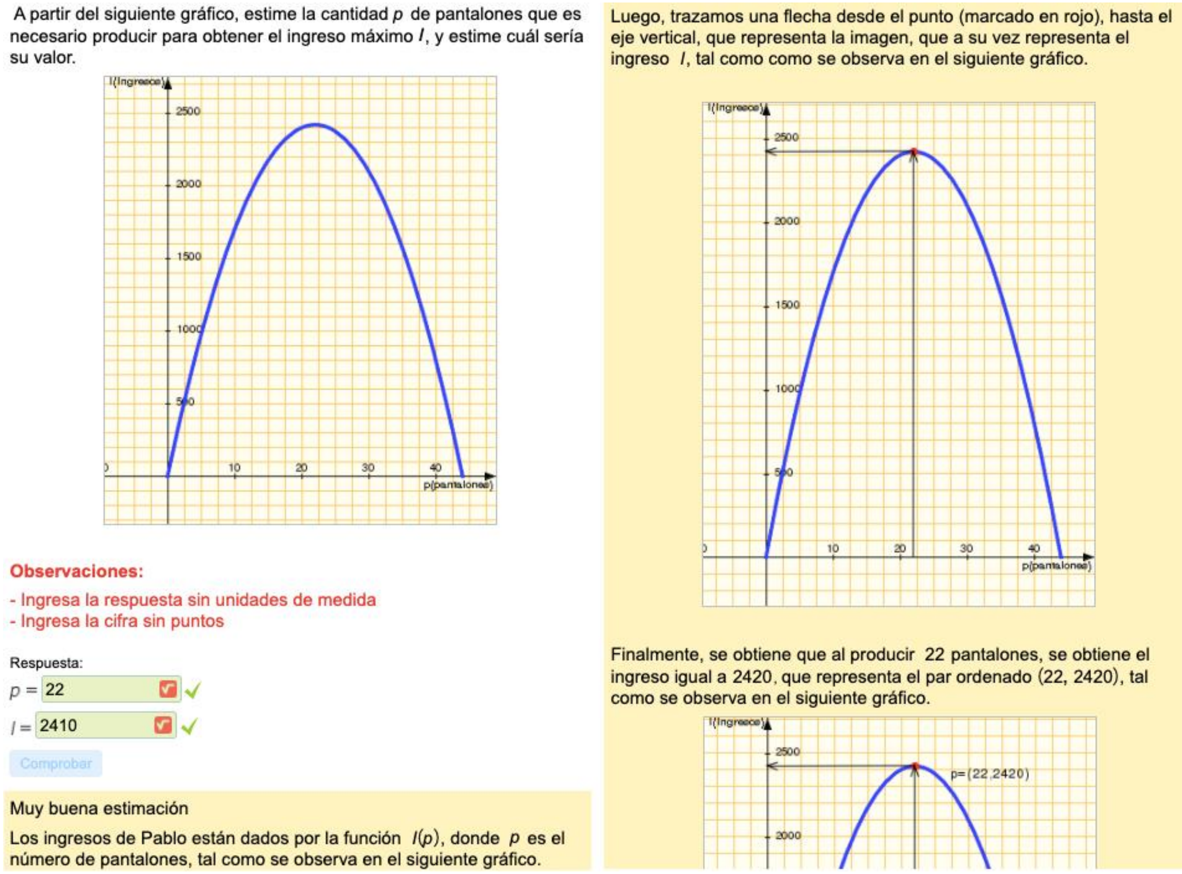
Fuente: Elaboración propia

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1

Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)



Hay dos características a destacar de esta retroalimentación. Por una parte, el gráfico no lo conecta con los resultados algebraicos obtenidos con la fórmula, por ejemplo, estimando los valores en el gráfico antes de calcularlos o ubicando las soluciones en el gráfico, es decir, no se articulan la génesis semiótica con la instrumental. Por otra parte, el uso de la fórmula no es precisamente la estrategia más eficiente, puesto que el coeficiente libre igual a cero, permitiría resolverlo, por ejemplo, factorizando.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Figura 2

Enunciado de T4 a en la parte superior (a), comienzo de la retroalimentación parte inferior izquierda (b) y parte final de la retroalimentación parte inferior derecha (c).

Pablo tiene una fábrica de pantalones, en la cual sus ingresos mensuales están dados por la función $I(p) = -p^2 + 220 \cdot p$, donde p es la cantidad de pantalones que fabrica en el mes.

¿Qué cantidad de pantalones debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

¿Cuál es el mayor ingreso que puede obtener Pablo, en su fábrica de pantalones?

Observación:

- Ingresa las cifras sin puntos ni unidades de medida

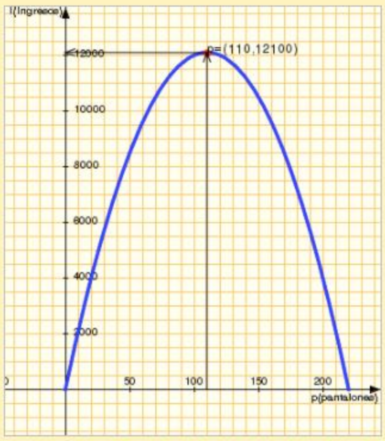
Respuesta:

$p =$ 110

$I =$ 12100

Los ingresos de Pablo están dados por la función $I(p) = -p^2 + 220 \cdot p$, donde p es el número de pantalones.

Si observas el siguiente gráfico, el vértice de la parábola (punto rojo), representa la cantidad de pantalones que se deben producir para obtener el mayor ingreso.



Si consideras que la forma general de una función de segundo grado está dada por:

$$I(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$$

La expresión que permite calcular la cantidad de pantalones está dada por:

$$p = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Luego si consideramos la función de ingresos $I(p)$, donde $a = 1$ y $b = -220$, y se reemplazan en la expresión que permite calcular p, se tiene que:

$$p = \frac{-(-220)}{2 \cdot 1}$$

$$p = \frac{220}{2}$$

$$p = 110$$

Finalmente, remplazamos la cantidad de pantalones p en la función de ingresos $I(p)$, donde se obtiene que

$$I(110) = 220 \cdot 110 - 1 \cdot (110)^2$$

$$I(110) = 12100$$

En T3 (Figura **5 -** Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1(a), Fernanda pide estimar el máximo de la función. A través de la retroalimentación (***Figura*** **5 -** Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura **1**(b)), guía un trabajo en la génesis semiótica, donde la cuadrícula funciona como herramienta para pilotar la visualización.

En T4 pide el máximo de la función (ver Figura 2), pero, a diferencia de T3, la función está representada de forma algebraica. En la retroalimentación, Fernanda entrega primero un gráfico de la función (al igual que en T2) y lee el resultado exacto del máximo, activando la génesis semiótica. La iteración, que se muestra en la Figura 2, se eligió precisamente para mostrar un caso donde en el gráfico se indica el valor exacto de la ordenada (2420) aun cuando, no es posible obtener ese valor solo por visualización, por lo que en estos casos podría inducir en los estudiantes una noción de que la lectura de gráficos es exacta.

Luego, utiliza la fórmula $-b/2a$ para obtener el valor de la abscisa y luego evalúa el resultado en la función para encontrar el valor de la ordenada, trabajando la génesis

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

instrumental. A pesar de que las observaciones precedentes, la elección que hizo Fernanda, de utilizar la representación gráfica en una pregunta con un enunciado algebraico, abre una serie de posibilidades en la retroalimentación. Por ejemplo, a partir del gráfico, podría haber obtenido la abscisa del vértice como el punto medio entre la estimación de las intersecciones de la función y el eje horizontal, conectando la génesis semiótica con la discursiva, al evocar la propiedad de simetría de las funciones cuadráticas.

En las tareas y retroalimentaciones propuestas por Fernanda se advierten algunos fenómenos relacionados con la dimensión instrumental del diseño que detallaremos a continuación.

Dimensión instrumental del diseño de Fernanda

En la Figura 3 se muestra el algoritmo de la tarea 3. Este algoritmo en las primeras 7 líneas definen la función, que aparece como *f=a1*p-a2*p^2* (línea 4) y que es la misma definición que utiliza para las cuatro tareas que diseñó. Los coeficientes de la función varían en los siguientes conjuntos $a1 \in \{1, 5, 10\}$ y $a2 \in \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 300\}$. Es decir, la variabilidad de a1 se reduce a tres opciones, mientras que la de *a2* a 60. Además, para definir la abscisa del vértice, en la línea 5, Fernanda agregó una condición que lo obliga a repetir iteraciones hasta ser un número natural.

Como *a1*, al variar, es múltiplo de 5 o de 10, el sistema no debe generar muchas iteraciones para lograr cumplir la condición que H1 sea un número entero. Es decir, Fernanda restringió la variabilidad, una posible razón de esto sería para asegurar que esta condición se cumpla de forma rápida para el sistema de cálculo.

Figura 3

Extracto algoritmo que define la pregunta de T3 de Fernanda. Los números de línea fueron añadidos con fines explicativos.

```
variables
1  repetir
2     a1=aleatorio([50..300..5])
3     a2=aleatorio{1,5,10}
4     f=a1·p−a2·p^2
5     H1=a1/(2·a2)
6     sol=a1·H1−a2·H1^2
7  hasta H1∈ℕ
8  C=a1/a2
9  D=sol
10 i(p)=a1·p−a2·p^2
11 S=resolver(i(p)=0)
12 A=S_1(p)
13 B=S_2(p)
14 c=punto(B·0.45,sol·0.5)
15 alt=sol·1.2
16 anch=C·1.25
17 P:=punto_mas_cercano(i(p),punto(C/2,sol))
18 t1=tablero({centro=c,anchura=anch,altura=alt,etiqueta_de_ejes={"p(pantalones)"
   ,"I(Ingresos)"},color_ejes=negro,estilo_de_ejes="flecha_xy"})
   anchura_ventana(350);altura_ventana(400)
19 graf=dibujar(t1,i(p),p,A..C,{anchura_linea=3,color=azul})
20 test(a,b):=(|H1−a|/|H1|<0.1∧|sol−b|/|sol|<0.01)?
```

Por otra parte, en los gráficos que utiliza Fernanda en T3 y T4, podemos notar que realiza una lectura exacta de ellos, aún cuando no es posible hacerlo. En el caso de T4 esto

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

podría bloquera la génesis semiótica, no obstante, la respuesta depende sobre todo del tratamiento de la representación algebraica. El caso de T3 (Figura **5 -** Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1) es más complicado, puesto que, la respuesta depende principalmente de una visualización.

En muchas de las posibles variaciones de la tarea, el vértice se encuentra justo en las líneas de la cuadrícula, debido, precisamente a la reducción de la variabilidad de los parámetros, pero, para algunas iteraciones, como la que se muestra en la Figura **5 -** Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1, la estimación es más difícil de realizar porque está entre las líneas de la cuadrícula. Al analizar el algoritmo, vemos que en la línea 20 aparece un test que permite evaluar la estimación del estudiante, donde da un margen de error relativo de un 10% para la abscisa y un 1% para la ordenada del vértice. Esta diferencia, en el porcentaje de error relativo, probablemente fue elegida por la diferencia entre los órdenes de magnitud de los valores de la abscisa y la ordenada del vértice respectivamente.

Para el caso de la abscisa podría surgir como estrategia alternativa calcular el punto medio entre las raíces. En cambio, para la ordenada hay que obtenerlo necesariamente mediante visualización. En la primera fila, de la tabla 2, aparece el margen de error de la tarea que se muestra en la Figura **5 -** Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

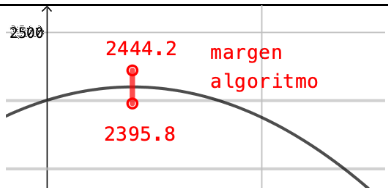
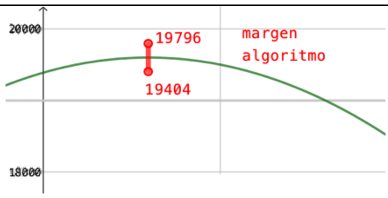
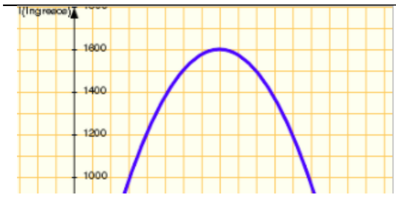
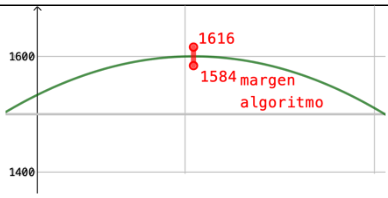
Figura 1. En este caso la solución está sobre la línea y el margen de error sobrepasa la línea que equivale a 2400. Si el estudiante respondiera justo 2400 el sistema lo tomaría correcto y cabría preguntarse si, al mirar el gráfico, consideramos que es una buena aproximación. En las siguientes filas aparecen dos casos más, en el segundo, la abscisa del vértice está al centro y en el tercero, la abscisa del vértice está justo en la línea.

Estos ejemplos, se muestran con dos fines. Primero, para cuestionar si el margen de error definido en el algoritmo es adecuado en cada caso. Segundo, para pensar, tomando en cuenta apreciaciones visuales, que se indican la última columna de la tabla 2, cómo sería posible, para los profesores diseñadores, transformar estas apreciaciones ambiguas: “justo por encima”, “cerca del centro”, “muy cerca de la línea” en un código que pueda ser tratado por el software para dar una retroalimentación más cercana a la que podría dar una persona al observar el gráfico.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Tabla 2

Diferentes iteraciones de T3 donde la solución está por encima de la línea, entre líneas o justo en la línea.

Gráfico en la plataforma	**Zoom del gráfico y margen de error del algoritmo**	**Apreciaciones visuales**
		La solución está justo por encima de la línea cuyo valor es 2400
		La solución está cerca del centro, entre las líneas cuyos valores son 19.000 y 20.000
		La solución está muy cerca de la línea que marca 1600, no se puede distinguir si está sobre o bajo la línea.

Fuente: elaboración propia

ETM potencial de las tareas del profesor Leonardo

Leonardo diseñó cinco tareas en las que utilizó una función afín, de la forma $f(x)=[(a_3–a_1)/(a_2–a_4)](x-a_4)+a_1$ (con a_1, a_2, a_3 y a_4 aleatorios). Modelizó la cantidad de fotocopias que entrega una máquina que se está descomponiendo en términos del tiempo que transcurre. Aunque la tarea podría tener cierta justificación, es difícil imaginar un contexto donde la avería de una fotocopiadora fuese modelada, por lo que se considera el contexto como artificial. La tareas que propuso Leonardo se resumen en la tabla 3.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

Tabla 3

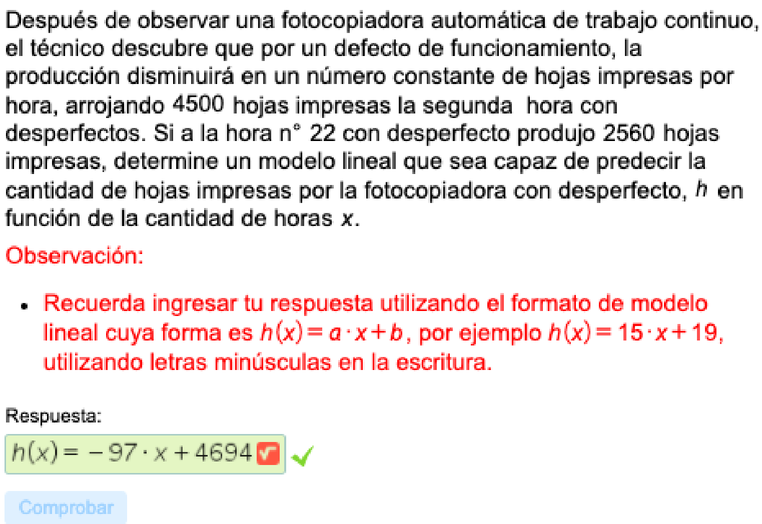
Tareas diseñadas por el profesor Leonardo.

<table>
<tr><th rowspan="2">Enunciados</th><th colspan="2">Retroalimentación</th></tr>
<tr><th>Génesis instrumental</th><th>Génesis semiótica</th></tr>
<tr><td>T1: Estimar la imagen de un valor a partir de una función representada de forma gráfica</td><td></td><td>La graduación y la cuadrícula se utilizan como herramientas semióticas</td></tr>
<tr><td>T2: Calcular la imagen de un valor a partir de una función representada de forma algebraica</td><td>Se hacen cálculos rutinarios para calcular la imagen</td><td>Se establece una correspondencia entre los elementos del enunciado y los elementos de la función</td></tr>
<tr><td>T3: Generar la expresión algebraica de una función a partir de un enunciado con lenguaje natural</td><td>Se utilizan las fórmulas $m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ e $y-y_2=m(x-x1)$ como artefactos simbólicos</td><td rowspan="3">Hay una conversión de algunas palabras: “primera hora”, “segunda hora”, etc… en valores que alimentan las fórmulas usadas como artefacto simbólico</td></tr>
<tr><td>T4: Calcular la pre-imagen de un valor a partir de un enunciado con lenguaje natural</td><td rowspan="2">Se utilizan las mismas fórmulas que en T3, como artefactos simbólicos para obtener la función y luego, es la misma función la que se usa como artefacto para obtener la pre-imagen.</td></tr>
<tr><td>T5: Calcular la raíz de una función a partir de un enunciado escrito en lenguaje natural</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia

Figura 4

T3 de Leonardo


Después de observar una fotocopiadora automática de trabajo continuo, el técnico descubre que por un defecto de funcionamiento, la producción disminuirá en un número constante de hojas impresas por hora, arrojando 4500 hojas impresas la segunda hora con desperfectos. Si a la hora n° 22 con desperfecto produjo 2560 hojas impresas, determine un modelo lineal que sea capaz de predecir la cantidad de hojas impresas por la fotocopiadora con desperfecto, h en función de la cantidad de horas x.

Observación:

- Recuerda ingresar tu respuesta utilizando el formato de modelo lineal cuya forma es $h(x)=a\cdot x+b$, por ejemplo $h(x)=15\cdot x+19$, utilizando letras minúsculas en la escritura.

Respuesta:

$h(x)=-97\cdot x+4694$

Comprobar

Es interesante ver que el profesor en las tareas T3, T4 y T5, al utilizar lenguaje natural en los enunciados, debe construir, en la retroalimentación, la función antes de responder a las preguntas que plantea, lo que muestra cómo cambia el trabajo matemático a partir de estas variaciones de representación semiótica. Para esta construcción utiliza las fórmulas que se mencionan en la tabla 5 como artefactos simbólicos. Una vez que obtiene la función, esta es utilizada para obtener las respuestas a las preguntas planteadas. En particular, en T3 (ver figura 8) el profesor pide, como parte de la respuesta el nombre simbólico de la función, específicamente h(x). Esto por una parte es coherente con el trabajo del concepto de función, pero podría crear dificultades de naturaleza instrumental, si, por ejemplo, un estudiante ingresa una expresión diferente, como por ejemplo $y=-97x+4694$, el sistema la consideraría incorrecta.

Dimensión instrumental del diseño de Leonardo

La función con la que trabaja en todas las tareas tiene la forma: $f(x)=[(a_3–a_1)/(a_2–a_4)]*(x-a_4)+a_1$, donde y es la cantidad de hojas impresas, x el tiempo en horas. Los parámetros a_1 y a_3 son números aleatorios que representan una cantidad de hojas y son múltiplos de 10 que varían entre 500 y 3000 para las tareas que usan un gráfico de la función f en el enunciado (Figura 5(a)) y entre 4,000 y 5,000 para las tareas que sí usan un gráfico de f (Figura 5(b)), es decir, hay una diferencia de un orden de magnitud en la variabilidad de cada parámetro. Esta diferencia se debe a que el tablero sobre el que se traza la función f tiene dimensiones fijas, definidas en las líneas 11 y 12 de la Figura 5(a), lo que produce que el plano cartesiano que se muestra a los estudiantes está aproximadamente entre -3 y 27 en el eje x y entre -20 y 860 en el eje y, tal como se muestra en la En relación a la validación de la respuesta de T2, Leonardo eligió dar como correcta una respuesta con un margen de error de 5 unidades (línea 10, Figura 5(a)). Esta solución es posible gracias a que el plano cartesiano es fijo y que la graduación también lo es. Para este caso, se presenta un problema similar a los casos de preguntas de estimación de las profesoras antes analizadas. Cuando la imagen esté cerca de las líneas, el margen no parece ser el adecuado, lo cual puede bloquear el proceso de visualización.

Por último, en la línea 8 de la Figura 5(a), Leonardo agregó algunas condiciones extras para que la imagen que se pide como respuesta esté dentro del plano cartesiano, además, al final de esta misma línea y también en la línea 5 de la Figura 5(b) se incluye como condición para los parámetros que $res(a3-a1,a2-a4)=0$, donde $res(a,b)$ es un comando que calcula el resto de la división entera entre dos números a y b. Esta condición obliga a que la pendiente de la función sea un número entero, es decir, todos los componentes de la pregunta y su respuesta son números enteros. A pesar de los esfuerzos realizados para que la imagen sea visible, también efectúa una lectura exacta de la imagen en la retroalimentación de T2, desplazando el foco de la estimación al cálculo.

Figura 6. Figura 5

(a) Algoritmos preguntas con gráfico a la izquierda y (b) sin gráfico a la derecha del profesor Leonardo. Los números del 1 al 12 y del 1 al 10 al lado izquierdo en cada algoritmo fueron puestos manualmente para poder identificarlas más claramente cada línea del código.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

```
variables
  repetir
1    a1=aleatorio(200..600..10)
2    a2=aleatorio (10..24)
3    a3=aleatorio (10..100..10)
4    a4=aleatorio{1,2,3}
5    a6=aleatorio(3..24)
6    b=(a3-a1)/(a2-a4)
7    c=-b·a4+a1
8  hasta c>-b·24 ∧c+b·24<630∧
9  a2≠a6∧res(a3-a1,a2-a4)=0
10 test(g):=((|g-a7|≤5)∧(g≠a7))?
11 t1=tablero({centro=punto(12,320),
12 anchura=30,altura=700})
```

```
variables
  repetir
1    a1=aleatorio(4000..5000..10)
2    a2=aleatorio (15..30)
3    a3=aleatorio (500..3000..10)
4    a4=aleatorio{1,2,3}
5  hasta res(a3-a1,a2-a4)=0
6  y=aleatorio{n,f,g,h}
7  x1=aleatorio{r,x,t,u}
8  Sol=(a3-a1)/(a2-a4)·(x1-a4)+a1
9  m=(a3-a1)/(a2-a4)
10 u6=a1-u5
```

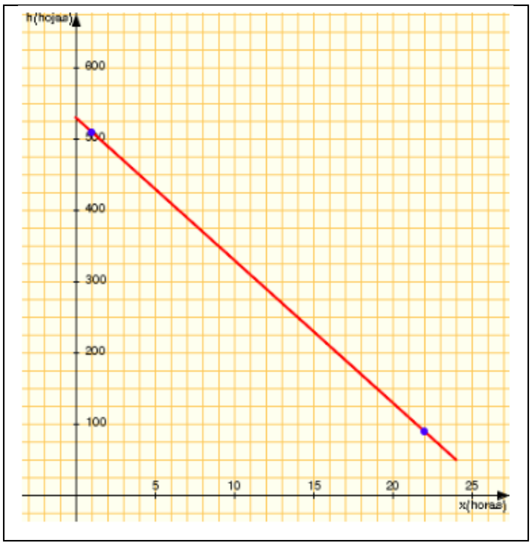
En relación a la validación de la respuesta de T2, Leonardo eligió dar como correcta una respuesta con un margen de error de 5 unidades (línea 10, Figura 5(a)). Esta solución es posible gracias a que el plano cartesiano es fijo y que la graduación también lo es. Para este caso, se presenta un problema similar a los casos de preguntas de estimación de las profesoras antes analizadas. Cuando la imagen esté cerca de las líneas, el margen no parece ser el adecuado, lo cual puede bloquear el proceso de visualización.

Por último, en la línea 8 de la Figura 5(a), Leonardo agregó algunas condiciones extras para que la imagen que se pide como respuesta esté dentro del plano cartesiano, además, al final de esta misma línea y también en la línea 5 de la Figura 5(b) se incluye como condición para los parámetros que $res(a_3\text{-}a_1, a_2\text{-}a_4)$=0, donde $res(a,b)$ es un comando que calcula el resto de la división entera entre dos números a y b. Esta condición obliga a que la pendiente de la función sea un número entero, es decir, todos los componentes de la pregunta y su respuesta son números enteros. A pesar de los esfuerzos realizados para que la imagen sea visible, también efectúa una lectura exacta de la imagen en la retroalimentación de T2, desplazando el foco de la estimación al cálculo.

Figura 6

Ejemplos de gráficos usados por Leonardo en diferentes iteraciones de T1

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En relación a los enunciados, pudimos constatar un uso de contextos artificiales de parte de los dos profesores analizados. También se observaron ciertos elementos incoherentes entre el contexto y los objetos matemáticos, lo que de alguna manera muestra que, es el objeto matemático lo que elijen y con los contextos "visten" estos objetos, sin que se tome en cuenta la validez de estos o las restricciones que imponen los contextos.

En términos del ETM potencial se privilegia el trabajo semiótico e instrumental. En el caso del trabajo instrumental, se privilegia el uso rutinizado de fórmulas, tanto en tareas con funciones de primer como de segundo grado. El referencial teórico está prácticamente ausente, no se discute la validez y pertinencia de las fórmulas usadas en las retroalimentaciones diseñadas. En el caso del trabajo semiótico, constatamos que hay una intención de los profesores diseñadores en trabajar la lectura de gráficos, utilizando, de diversas formas, la graduación y cuadrícula como herramientas semióticas. También hay un trabajo semiótico en la conversión de registros de algunos objetos de los enunciados para poder solucionar la tarea propuesta.

En relación a los registros, pudimos observar una variedad de representaciones en los enunciados: algebraico, gráfico y lenguaje natural, lo que a su vez desarrolla un trabajo matemático diferente. No obstante, no se vio una articulación entre los distintos registros, por ejemplo, usándolos como elementos de control. El potencial de estas tareas no propone un trabajo matemático varias génesis o planos al mismo, a diferencia de lo observado en otros diseños de tareas que están estrechamente relacionados con una perspectiva teórica (Barana, Marchisio e Sacchet, 2021; Gaona, 2022; Gaona, Hernández e Bravo, 2022; Gaona, López e Montoya-Delgadillo, 2022; Gaona e Menares, 2021). Esto se puede deber a la influencia del ETM idóneo o debido a limitaciones de la plataforma o instrumentales.

En relación a la dimensión instrumental del diseño, para presentar los resultados, interpretamos que, una tarea en un sistema de evaluación en línea es un artefacto que se descompone en cuatro partes: enunciado, sistema de entrada de respuestas, sistema de validación, retroalimentación. En los análisis que realizamos en este artículo, aparecieron

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

fenómenos relacionados con cada uno de estos componentes en las tareas que los profesores y profesoras diseñaron.

En el componente enunciado, en las tareas donde la función es representada algebraicamente o en lenguaje natural, no se apreciaron problemas instrumentales específicos en relación a su representación en pantalla. En cambio, cuando se debe construir un gráfico, la representación se resuelve de forma distinta. Fernanda ajusta el plano cartesiano en función de las características del objeto matemático representado, a diferencia de Leonardo, quien redujo la variabilidad para ayudar a la visualización de los objetos. En ambos casos hay una relación entre programación de tareas y el trabajo matemático potencial que se les propone a los estudiantes. En el primer caso, cuando resuelven el problema general, la dificultad de la tarea podría cambiar mucho entre una iteración y otra y, en el segundo caso, las posibles variaciones de la tarea se restringirían. Aparte de lo anterior, la validez epistemológica de lo representado podría estar en juego a partir de estas variaciones. Por lo que, discutir con los diseñadores de estos fenómenos, ayudará a mejorar los recursos diseñados y también discutir problemáticas didácticas más profundas.

En los componentes validación de la respuesta y retroalimentación aparecieron nuevamente fenómenos ligados a los gráficos, específicamente, los márgenes de error que se entregan y la lectura exacta de gráficos que todos quienes diseñaron tareas con gráficos realizaron. Ambos fenómenos pueden afectar la génesis semiótica que están intencionado con la tarea. Lo anterior podría parecer un problema de competencias de programación, pero esto sería una respuesta simplista, ya que, cuando los profesores diseñadores lo requirieron, realizaron una programación sofisticada.

Nuestra postura es que, los profesores, al programar los parámetros de una tarea deben resolver un desafío instrumental, matemático y didáctico. Es instrumental porque necesita responder preguntas como, por ejemplo ¿cuáles son los comandos para controlar la porción del gráfico que se muestra en el plano cartesiano, la graduación y la cuadrícula? También, es un problema matemático, porque si se conocen los comandos, de, por ejemplo, la distancia entre dos líneas, hay que resolver cómo medir la distancia de la ordenada del vértice a la línea más cercana, entre otros problemas específicos.

Finalmente es un problema didáctico, porque no solo hay que hacer los cálculos necesarios, hay que definir cuál sería el rango "visual" adecuado para una buena estimación. El fenómeno de la lectura exacta del gráfico lo interpretamos como un problema de transposición informática, donde hay una diferencia entre lo que se representa en la interface - definido por el mundo interno del programa, en este caso el algoritmo - y lo que puede leer el estudiante en el mundo externo (Balacheff, 1994), que sería el gráfico en pantalla.

Otra característica común, fue el uso de números enteros en los coeficientes de las funciones, en los números de las preguntas y respuestas de las tareas e incluso la utilización de condiciones específicas para que algunos componentes como el vértice o la pendiente sean números enteros, lo cual también se constató en otros profesores que trabajaron diseñando (Gaona, 2018, p. 149). Este fenómeno, suponemos que se debe más a la influencia del ETM idóneo que a limitaciones en la competencia en programación, puesto que agregar condiciones implica ir un paso más allá en los algoritmos diseñados. Aunque hay otros estudios que

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

muestran un uso particular de números enteros (Briant e Bronner, 2017), en este caso, hay una explicitación de un algoritmo para obligar a que ciertos elementos, que a priori no necesariamente tienen valores enteros lo sean.

Podemos concluir, que existe una relación entre las decisiones que toma el profesor y su impacto en el trabajo matemático potencial del estudiante. Algunas de estas decisiones pensamos que pueden ser producto de una limitación de la plataforma o falta de competencia en programación, sin embargo, creemos que también podrían existir otras razones que tienen que ver más por cómo entienden la enseñanza de la matemática. Es decir, no sabemos si los profesores diseñaron las tareas con estas características porque es lo que se podía hacer, lo que ellos podían hacer o lo que ellos creían que era correcto hacer.

Una de las perspectivas de este trabajo es analizar las tareas habituales que utilizan los profesores en sus clases, de tal forma de compararlos con los fenómenos observados en las tareas de la plataforma y poder comprender las razones de los fenómenos observados. Consideramos que hacer esta diferencia podría ayudar, por una parte, a mejorar los recursos y, por otra, a enriquecer el ETM idóneo de los profesores. Pero, para que el proceso de diseño de tareas en línea sea un espacio de formación para los docentes, parece necesario un acompañamiento no tan solo instrumental, sino que matemático y didáctico, puesto parece difícil que estos cambios se produzcan solos.

Subrayamos, además, que las discusiones sobre la parametrización de algunos elementos van más allá del software particular que se elija, puesto que, la revisión bibliográfica muestra un uso frecuente de tareas parametrizadas. Por lo que consideramos que abrir la discusión de la relación que existe entre programación de enunciados y sus efectos didácticos será fructífero para la investigación en didáctica de las matemáticas.

En términos generales, frente a la proliferación de recursos en línea, es importante fomentar la participación de los profesores en el diseño y al mismo tiempo, cuestionar el valor epistémico de las tareas propuestas, tanto por profesores como por diseñadores que sean externos a las instituciones donde se implementan estos recursos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el financiamiento otorgado por Beca de la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología de Chile CONICYT Doctorado en el extranjero 2013 resolución 1622/2013.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. **Cuadernos de Investigación en Educación Matemática**, v. 8, p. 1–15, 2011.

ATTALI, Y. Effects of multiple-try feedback and question type during mathematics problem solving on performance in similar problems. **Computers & Education**, v. 86, p. 260–267, 2015.

ATTALI, Y.; KLEIJ, F. VAN DER. Effects of feedback elaboration and feedback timing during computer-based practice in mathematics problem solving. **Computers & Education**, v. 110, p. 154–169, 2017.

BALACHEFF, N. **La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique** (A. Michèle et al., Eds.)Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. **Anais**...Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1994

BARANA, A.; MARCHISIO, M.; SACCHET, M. Interactive feedback for learning mathematics in a digital learning environment. **Education Sciences**, v. 11, n. 6, 2021.
BÉGUIN, P.; RABARDEL, P. Concevoir pour les activités instrumentées. **Revue d'Intelligence Artificielle**, v. 14, n. 1–2, p. 35–54, 2000.

BOKHOVE, C.; DRIJVERS, P. Effects of feedback in an online algebra intervention. **Technology, Knowledge and Learning**, v. 17, n. 1–2, p. 43–59, 2012.

BRIANT, N.; BRONNER, A. La prise en compte des nombres idécimaux pour le traitement du concept d'équation : une variable didactique oubliée. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 37, n. 1, p. 101–143, 2017.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221–266, 1999.

CHOW, A. F. Online homework impact in undergraduate mathematics and business statistics courses. **Educational Studies**, v. 41, n. 3, p. 244–248, 2015.

COUTAT, S.; RICHARD, P. Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 16, p. 97–126, 2011.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, n. 1, p. 37–65, 1993.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

FLORES SALAZAR, J. V.; GAONA, J.; RICHARD, P. Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. *Em*: KUZNIAK, A.; MONTOYA, E.; RICHARD, P. (Eds.). . **Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 165–209.

GAONA, J. *et al.* Feedback by automatic assessment systems used in mathematics homework in the engineering field. **Computer Applications in Engineering Education**, v. 26, n. 4, p. 994–1007, 2018.

GAONA, J. *et al*. **Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas**. [s.l.] Université Sorbonne Paris Cité - Université Paris Diderot, 2018.

GAONA, J. *et al*. Diseño de tareas en un sistema de evaluación en línea, una mirada desde la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático. **Pädi. Revista de Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería**, v. 5, n. 10, 2022.

GAONA, J.; HERNÁNDEZ, R.; BRAVO, F. G. Y V. Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. **International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)**, 2022.

GAONA, J.; LÓPEZ, S.; MONTOYA-DELGADILLO, E. Learning complex numbers using different CAS and an CAA in prospective mathematics teacher. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, p. 1–27, 2022.

GAONA, J.; MENARES, R. Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 17, p. 1–18, 2021.

GONZÁLEZ, J. A. *et al.* A web-based learning tool improves student performance in statistics: A randomized masked trial. **Computers & Education**, v. 55, n. 2, p. 704–713, 2010.

HATTIE, J.; TIMPERLEY, H. The Power of Feedback. **Review of Educational Research**, v. 77, n. 1, p. 81–112, 1 mar. 2007.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C.; KUZNIAK, A.; MASSELIN, B. The Idoine or Suitable MWS as an Essential Transitional Stage Between Personal and Reference Mathematical Work. *Em*: KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. R. (Eds.). . **Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 121–146.

HOYLES, C. *et al.* Cornerstone Mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling. **ZDM - Mathematics Education**, v. 45, n. 7, p. 1057–1070, 2013.

JONES, K.; PEPIN, B. Research on mathematics teachers as partners in task design. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, n. 2–3, p. 105–121, 2016.

KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. **Mathematical Work in Educational Context**. Cham: Springer International Publishing, 2022.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A.; DROUHARD, J. P. Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. **ZDM - Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 861–874, 2016.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 4, p. 1–8, 2014.

KUZNIAK, A.; TANGUAY, D.; ELIA, I. Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. **ZDM - Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 721–737, 2016.

MENARES ESPINOZA, R.; VIVIER, L. Personal Mathematical Work and Personal MWS. *Em*: KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. R. (Eds.). . **Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 91–120.

MONTOYA, E.; MENA-LORCA, A.; MENA-LORCA, J. Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 4–1, p. 191–210, 2014.

MONTOYA-DELGADILLO, E.; REYES AVENDAÑO, C. G. The Reference Mathematical Working Space. *Em*: KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. R. (Eds.). . **Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 73–90.
ROSCHELLE, J. *et al.* Online Mathematics Homework Increases Student Achievement. **AERA Open**, v. 2, n. 4, p. 1–12, 2016.

SANCHO-VINUESA, T.; ESCUDERO, N. ¿Por qué una propuesta de evaluación formativa con feedback automático en una asignatura de matemáticas en línea? **Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento**, v. 9, n. 2, p. 59–79, 2012.

STACEY, K. *et al.* Specific mathematics assessments that reveal thinking: an online tool to build teachers' diagnostic competence and support teaching. *Em*: LEUDERS, T.; PHILIPP,

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 111-138, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453

K.; LEUDERS, J. (Eds.). . **Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Mathematics Teacher**. Cham: Springer, 2018. p. 241–261.

STACEY, K.; WILIAM, D. Technology and assessment in mathematics. *Em*: CLEMENTS, M. A. K. *et al.* (Eds.). . **Third international handbook of mathematics education**. New York: Springer, 2013. p. 721–751.

VÁSQUEZ, M.; GAONA, J. **Sistema de evaluación dinámica online en matemática para desarrollar el estudio autónomo fuera del aula (SEDOL-M)** (V. Sánchez, Ed.)III Congreso de Innovación Educativa. **Anais**...Monterrey: TecLabs, Tecnológico de Monterrey, 2016

***Submetido em*:** 20 de Setembro de 2022.

***Aprovado em*:** 01 de Novembro de 2022.

***Publicado em*:** 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:
GAONA, Jorge; VIVIER, Laurent. Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 79-110, Set.-Dez., 2022.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453