Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental

Cecilia Gaita[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Francisco Ugarte[2]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Cintya Gonzales[3]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

RESUMEN
Se presenta una propuesta de criterios que permiten valorar y modificar problemas para lograr un incremento progresivo en el nivel de algebrización de las actividades matemáticas realizadas por los alumnos. Para la construcción de los mismos, se toman en cuenta los niveles de razonamiento algebraico, propuestos por el Enfoque Ontosemiótico. Luego, se valida la propuesta a partir del trabajo con un grupo de docentes en ejercicio y presentamos el resultado de su aplicación a una tarea perteneciente a un libro de texto, se analiza el problema original y se modifica de acuerdo a los criterios. Concluimos que el uso de los criterios propuestos ayudó a incorporar interrogantes que demandan el empleo de diversos lenguajes, evidenciando a través de la solución esperada que, en ese proceso, las prácticas matemáticas demandarán cada vez un mayor grado de generalización: desde la identificación de las regularidades a partir de un conjunto finito de valores, las cuales se comunican verbalmente, hasta la unitarización de la regla de formación de funciones lineales y afines, y el reconocimiento de familias de funciones, empleando el lenguaje alfanumérico.
Palabras clave: razonamiento algebraico; niveles; generalización; lenguajes; covariación.

Criteria for modifying tasks that develop algebraic reasoning.

ABSTRACT
A proposal of criteria is presented that allow the assessment and modification of problems to achieve a progressive increase in the level of algebraization of the mathematical activities carried out by the students. For the construction of these criteria, the levels of algebraic reasoning proposed by the Ontosemiotic Approach are taken into account. Then, the proposal is validated by working with a group of practicing teachers. We present the result of its application to a textbook task, analyzing the original problem and modifying it according to the criteria. We conclude that the use of the proposed criteria helped to incorporate questions that demand the use of diverse languages, evidencing through the expected solution, that in this process, mathematical practices will demand an increasing degree of generalization: from the identification of regularities from a finite set of values, which are communicated verbally, to the unitarization of the rule of formation of linear and affine functions, and the recognition of families of functions, using alphanumeric language.
Keywords: algebraic reasoning; levels; generalization; languages; covariation.

---

[1] Doutora em Didáctica de la Matemática pela Universidade de Valladolid (UVa), España. Professora da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av. U niversitaria, 1801,Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7827-9262. E-mail: cgaita@pucp.edu.pe.

[2] Doutor em Matemáticas pela Universidade de Valladolid (UVa), España. Professor da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av.Universitaria, 1801,Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5071-8924. E-mail: fugarte@pucp.edu.pe.

[3] Mestre em Enseñanza de las Matemáticas pela Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Professora da Pontificia Universida Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801,Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-1710. E-mail: cintya.gonzales@pucp.edu.pe.

Critérios de modificação de tarefas para desenvolver o raciocínio algébrico

RESUMO

Apresenta-se uma proposta de critérios que permitem avaliar e modificar os problemas, a fim de alcançar um aumento progressivo do nível de algébricas das atividades matemáticas realizadas pelos alunos. Os níveis de raciocínio algébrico propostos pela Abordagem Ontosemiótica são tidos em conta na construção destes critérios. Depois, a proposta é validada pelo trabalho com um grupo de professores praticantes e apresentamos o resultado da sua aplicação a uma tarefa de manuais escolares, analisando o problema original e modificando-o de acordo com os critérios. Concluímos que a utilização dos critérios propostos ajudou a incorporar questões que exigem o uso de diferentes línguas, mostrando através da solução esperada, que neste processo, as práticas matemáticas exigirão um grau crescente de generalização: desde a identificação de regularidades a partir de um conjunto finito de valores, que são comunicados verbalmente, até à unitarização da regra de formação de funções lineares e afins, e o reconhecimento de famílias de funções, utilizando a linguagem alfanumérica

Palavras-chave: raciocínio algébrico; níveis; generalização; línguas; covariação.

INTRODUCCIÓN

Actualmente se plantea la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, y no como el salto de actividades puramente aritméticas (en Educación Primaria) a otras donde el álgebra se presenta como un producto acabado (en Educación Secundaria), en medio del cual no hay sino un vacío de sintaxis sin semántica (WILHELMI, 2017).

El desarrollo del pensamiento algebraico a través de una transición desde las generalizaciones empíricas, basadas en conjeturas sobre casos concretos, a las generalizaciones teóricas, como resultado de las operaciones entre enunciados explícitos de relaciones matemáticas (CARRAHER; MARTÍNEZ; SCHLIENANN, 2008), permitiría a los estudiantes apropiarse gradualmente de herramientas que les permitan representar lo general en matemáticas. De esa manera, primero se identificarán patrones, relaciones y estructuras, para luego usar la notación algebraica, como medio para comunicar la generalidad. Para ello, se requiere considerar actividades que demanden cada vez un mayor grado de generalidad y mayor capacidad de comunicar dicha generalidad (AKÉ; GODINO, 2018).

En consonancia con estos resultados, los sistemas educativos de varios países proponen la incorporación del álgebra como parte de los currículos de matemáticas desde edades tempranas. Sin embargo, aún hacen falta programas de formación para la ejecución de itinerarios de pensamiento algebraico desde los 6, hasta los 17 años (CARREHER; SCHLIENANN, 2019). De la revisión de diversos trabajos en donde se analizan textos didácticos de Educación Primaria para determinar en qué medida estos consideran situaciones que promuevan el desarrollo del razonamiento algebraico se encuentra que, si bien hay un esfuerzo por introducir el álgebra en la educación básica, todavía su presencia es escasa (LLANES; PINO-FAN; IBARRA, 2022; GAITA; SUPO; UGARTE, 2021).

Al analizar los problemas de los manuales oficiales y de documentos utilizados por los profesores de secundaria para la enseñanza del álgebra en el Perú, se observa una simplificación de la realidad que desvirtúa la situación o el contexto que se desea analizar. En otros casos, las situaciones resultan ser demasiado artificiales y en otros no se aprovechan adecuadamente para desarrollar el razonamiento algebraico (GAITA *et al*., 2022).

A modo de ejemplo, presentamos un problema (ver Figura 1) propuesto en el texto oficial de matemáticas para estudiantes de segundo año de secundaria (13 años) en el Perú, que se enmarca en el desarrollo de la llamada competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio (PERÚ, 2016). A través de esta tarea se espera que el estudiante resuelva problemas referidos a interpretar cambios constantes, traduciéndose a funciones lineales y relaciones de proporcionalidad directa, y compruebe si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Este propósito corresponde al sexto nivel de desarrollo de la competencia (PERÚ, 2016, p. 139).

Figura 1 – Tarea Albergamos perros sin hogar

Albergamos perros sin hogar

Una asociación protectora de animales acondiciona una casa para albergar a todos los perros que encuentra abandonados en la calle. La asociación tiene dificultades para dar en adopción a perros adultos. Para promoverla, da a conocer el consumo de alimento de los perros buscando sensibilizar al público, ya sea para que adopten o donen alimentos.

Se sabe que en el albergue hay 16 perros adultos y cada uno de ellos consume dos bolsas de alimento durante un mes.

Fuente: https://goo.gl/awn2Y3

1. ¿Cuántas bolsas se necesitarán para alimentar a los 16 perros durante un mes?
2. ¿Qué relación encuentras entre la cantidad de perros y la cantidad de bolsas de alimento?
3. Si llegan 4 perros adultos más al albergue, ¿cuántas bolsas de alimento se necesitarán a partir de este mes?

Fuente: Resolvamos problemas 2, Cuaderno de trabajo (2019, p.27)

Al analizar el problema, se reconoce que, si bien el contexto seleccionado demanda establecer relaciones entre dos cantidades (número de perros y cantidad de alimento que se consume mensualmente), basta hacerlo implícitamente, pues para dar solución a la tarea, se requiere únicamente realizar cálculos aritméticos particulares. Así, para responder la pregunta 1, será suficiente multiplicar 16 por 2; para la pregunta 2, el estudiante dará como respuesta que por cada perro adulto se requieren dos bolsas de alimento (información que es dato del problema) y para responder la pregunta 3, bastará sumar a la respuesta dada en el apartado 1 el resultado de multiplicar 4 por 2.

Sin embargo, el libro propone como camino de solución esperado (ver Figura 2) el completar una tabla de valores (apartado 1), para luego establecer una relación entre la cantidad de perros y de alimento a través de expresiones algebraicas (apartado 3.) y, finalmente, particularizar la fórmula encontrada y responder la última pregunta (apartado 5). Es decir, se

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

pretende desarrollar el razonamiento algebraico, pese a que para resolverse solo se requiere realizar operaciones entre números particulares.

Figura 2 – Etapas propuestas en el libro para resolver la tarea

1. Completa la tabla y establece la relación entre la cantidad de perros y la cantidad de bolsas de alimento.

Cantidad de perros	2	4	6	8	10	12	14	16
Cantidad de alimento (bolsas)	4							

2. ¿Cuántas bolsas de alimento se necesitan para 16 perros?

3. Vamos a establecer una relación numérica entre las dos magnitudes. Para ello, ¿qué operación plantearías entre ambas magnitudes? Escribe la relación de proporcionalidad entre la cantidad de perros y la cantidad de alimento.

4. La relación que hay entre la cantidad de perros y cantidad de alimento (bolsas) permite establecer una proporción. ¿Es una proporción directa? Explica con un ejemplo.

5. A partir de la relación de proporcionalidad, planteamos el total de alimento para 4 perros más.

Fuente: Adaptado de Resolvamos problemas 2, Cuaderno de trabajo (2017, p.29)

Consideramos fundamental proponer pautas que ayuden al profesor a determinar si un problema contribuye al desarrollo del razonamiento algebraico; a partir de ello, los profesores de matemáticas podrán no solo valorar la idoneidad de la tarea, sino también proponer cambios de modo que las sucesivas preguntas demandan cada vez un mayor grado de generalidad y de expresión de dicha generalidad, es decir, demandan cada vez un mayor nivel de razonamiento algebraico. En este trabajo proponemos criterios para valorar y modificar problemas presentes en textos escolares, asociados a contenidos matemáticos tradicionalmente asociados al álgebra (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, funciones, entre otros).

ELEMENTOS TEÓRICOS

En el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) se entiende por práctica matemática "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (GODINO; BATANERO, 1994, p. 182). Desde el EOS, una práctica será considerada como algebraica si esta incluye procedimientos que privilegien procesos de particularización y generalización.

Se plantea un modelo para el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), el cual caracteriza las prácticas matemáticas consideradas como algebraicas, basándose en supuestos pragmáticos, antropológicos y semióticos sobre el conocimiento matemático (GODINO *et al*., 2012).

En el trabajo de Godino *et al*. (2014) se proponen criterios básicos para definir niveles de algebrización, asignados a la actividad matemática que se pone en juego al resolver tareas en educación primaria; dicha práctica está caracterizada por grados de generalidad y el uso de diversos registros de representación semiótica, así como sus transformaciones y conversiones. En un trabajo posterior, Godino *et al*. (2015) amplían el modelo, considerando tres niveles más avanzados para describir la actividad matemática, considerada como algebraica, en la educación secundaria y bachillerato. Los dos criterios considerados para esta ampliación son el uso de parámetros tanto en actividades de tipo estructural y funcional, así como el estudio de estructuras algebraicas, sus definiciones y propiedades.

Teniendo en cuenta lo anterior y los niveles de la competencia Resuelve problemas de regularidad y cambio (figura 3) descritos en el Currículo Nacional del Perú (PERÚ, 2016), consideramos que es posible que los estudiantes que finalizan la secundaria en el Perú muestren rasgos de hasta un nivel 4 de razonamiento algebraico, ya que se hace referencia al reconocimiento de parámetros. De la misma forma, currículos de diversos países también proponen que los egresados de la educación básica alcancen el equivalente a un nivel 4 de razonamiento algebraico elemental.

Figura 3 – Niveles de la competencia Resuelve problemas de regularidad y cambio

DESCRIPCIÓN DE LOS NIVELES DEL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA

7

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.

Fuente: Perú (2016, p.139)

Por lo anterior, describimos los cuatro primeros niveles de razonamiento algebraico propuestos en el modelo RAE (GODINO *et al.*, 2015).

Nivel 0: Intervienen objetos intensivos de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares). Se emplean lenguajes natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.

Nivel 1: Intervienen de manera implícita objetos intensivos de grado 2, esto es, clases de intensivos de grado 1. Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales. Se emplean lenguajes natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes.

Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos de grado 2 En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma Ax+B=C. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. Se emplean lenguaje simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.

Nivel 3: Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma Ax+B=Cx+D. Se opera con las indeterminadas o variables. Se emplean lenguaje simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

Nivel 4: Se emplean parámetros como registro numérico y también para expresar familias de ecuaciones y funciones. Se debe discriminar el dominio y rango de la función paramétrica, esto es, identificar la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Se trata de un estudio cualitativo cuya primera finalidad es establecer criterios para valorar y transformar situaciones problemas, propuestas en textos escolares, de modo que contribuyan a desarrollar el RAE en los estudiantes. Para ello, se identifican los rasgos fundamentales de las prácticas matemáticas consideradas como algebraicas, según el modelo teórico propuesto para el RAE y se propone una lista de indicadores asociados a dichos rasgos.

Para validar la propuesta se lleva a cabo un taller con docentes en el cual se presentan los elementos teóricos del modelo y los criterios propuestos. Los docentes analizan la pertinencia de los problemas de textos escolares apoyados en los criterios y brindan sugerencias para su modificación. A partir de ello, se plantean nuevos problemas, apoyados también en el uso de recursos como GeoGebra y Hojas de cálculo, haciendo explícito cómo es que las tareas modificadas demandan prácticas matemáticas con niveles de algebrización cada vez mayores.

Muestra y recolección de la información

Para el trabajo con docentes, se consideró una muestra formada por 90 docentes de secundaria en ejercicio, los cuales laboraban en escuelas públicas peruanas. La selección de los docentes fue intencional; se invitó a docentes que habían participado en capacitaciones anteriores, las cuales fueron organizadas por el instituto de investigación sobre enseñanza de las matemáticas (IREM-PUCP), al cual pertenece el grupo de investigadores. Los docentes se agruparon libremente para trabajar en equipos de 4 personas.

Todas las interacciones llevadas a cabo con los maestros se registraron a través de la plataforma zoom; la selección y análisis del problema que eligió cada grupo se presentó por escrito. Posteriormente, con ayuda del equipo de investigadores, el problema seleccionado se transformó en varias tareas.

Construcción de criterios

Se consideran las descripciones de los niveles de RAE dados previamente y se identifican aspectos cruciales para la evolución de dicho razonamiento. A partir de ello, se proponen criterios que permiten reconocer si una situación tiene el potencial para desarrollar el razonamiento algebraico, y cómo podría modificarse para que lo desarrolle efectivamente.

Elementos considerados para la construcción de los criterios

Para que los estudiantes desarrollen prácticas algebraicas, las tareas que se les planteen deben movilizar:

- Objetos considerados como algebraicos, tales como relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones, así como estructuras, sus tipos y propiedades (GODINO *et al*, 2014).

- Diversos lenguajes que permitan expresar los tipos de objetos y procesos algebraicos, esto es, desde el lenguaje ordinario, gráfico hasta el lenguaje alfanumérico, predominante en los niveles superiores de algebrización (GODINO *et al*, 2014).
- Procesos de particularización, generalización y unitarización, los cuales son inherentes a las prácticas algebraicas, tal como se explica en GODINO *et al, 2012*a, p.287

A continuación, se proponen criterios que debe cumplir la situación para que se considere apropiada para desarrollar el RAE. Además, señalamos un conjunto de pautas que ayudarán a graduarlas, de modo que la situación promueva el progreso en los niveles de RAE.

Cuadro 1– Criterios para identificar situaciones que contribuyan al desarrollo del RAE

Criterio	Descripción	Para el progreso en el RAE
1. Objetos matemáticos que involucra la situación	Se trata de una situación sobre patrones o de búsqueda de regularidades, o que requiere manipular expresiones alfanuméricas y usar propiedades de las estructuras (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, etc.), o que estudia el cambio y la covariación.	La situación requiere la modelización de los datos a través de alguno de los objetos considerados como algebraicos. Para que el RAE evolucione, se debe demandar una modelización de complejidad creciente.
2. Lenguaje que moviliza la situación	La solución del problema debe requerir del uso de distintos lenguajes: gestual natural, numérico, tabular, gráfico, alfanumérico, incluyendo el uso de parámetros, y las transformaciones entre ellos. El paso del lenguaje natural, numérico al alfanumérico requiere que la situación exija atribuir significado a los cálculos.	Para que el RAE evolucione, se debe propiciar el uso gradual de los distintos lenguajes. El uso del lenguaje alfa-numérico se hace necesario en la medida que la situación requiera justificar la solución.
3. Grado de generalidad que demanda la situación	Las cuestiones que se desprendan de la situación deben demandar generalizaciones progresivas de los resultados; desde tareas en donde primero los datos adoptan valores particulares, pasando por aquellas en donde se obtiene una regla general que define a la clase (objeto intensivo), hasta tareas en donde se estudia el comportamiento de familias de problemas (lo que requiere el uso de parámetros).	La situación exige realizar generalizaciones sucesivas. En este proceso, resulta esencial que el estudiante valide las soluciones obtenidas utilizando diversos medios de control, incluyendo la verificación que lo general se cumpla también para lo particular.

Fuente: Elaboración propia de los autores

Así, por ejemplo, a partir de una situación que requiere establecer relación entre dos magnitudes, se reconoce una relación de proporcionalidad directa para números particulares, para luego identificar que la relación se preserva para un conjunto de números dados en una tabla, pasando por la obtención de la constante de proporcionalidad, para luego asociar a dicha relación una expresión correspondiente a una función lineal. Dicha función será vista posteriormente como una relación particular entre dos magnitudes cuya representación más general está dada por $f(x)=mx$, con elementos particulares tales como domínio y rango, y on una gráfica que intercepta a los ejes y tiene pendiente. Si dicha relación se amplía al de las funciones que cumplen que, a incrementos constantes de una variable, se producen incrementos constantes de la otra, pero con un "desfase", se extenderá el estudio a las funciones lineales afines $f(x)=mx+b$, que más adelante se reconocerá como un caso particular de las funciones polinómicas.

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En la segunda etapa, se interactúa con docentes de matemáticas de secundaria en ejercicio a través del desarrollo de un taller de 4 sesiones, de 4 horas cada una. En las dos primeras sesiones se presenta el modelo RAE y su relación con la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, declarada en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016). A partir de la necesidad de identificar tareas que promuevan el progreso en el desarrollo del RAE, se introducen los criterios establecidos previamente.

En la tercera sesión, se forman grupos y se les solicita seleccionar un problema perteneciente a los textos oficiales de matemáticas de secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación, que ellos consideran, a priori, cumple con los criterios establecidos. A partir de la discusión grupal, reconocen que, aunque la mayoría de los problemas seleccionados sí estudia fenómenos relacionados con objetos algebraicos, cumpliéndose el criterio 1, las preguntas que se plantean no contribuyen a evolucionar ni en el lenguaje, ni en procesos de generalización, incumpliéndose los criterios 2 y 3.

En la cuarta sesión, los investigadores trabajan junto a los maestros para transformar el problema, previamente seleccionado, de modo que se cumplan los criterios propuestos. En este trabajo, se les plantea incorporar preguntas que requieran del uso tablas de valores (empleando Hojas de cálculo) y de gráficas (en GeoGebra) de modo que el paso del lenguaje natural al alfanumérico sea mediado por actividades que demandan lenguajes numéricos y gráficos, los cuales pueden contribuir al desarrollo del razonamiento algebraico.

A modo de ejemplo, se presenta el problema seleccionado por uno de los grupos, su análisis empleando los criterios propuestos y una nueva actividad, que considera varias etapas, cada una de las cuales demanda un mayor nivel de generalización que la anterior.

Problema original y solución esperada

En la figura 4, se presenta el problema seleccionado por uno de los grupos de profesores que participaron del taller. El problema fue tomado del texto denominado "Resolvamos problemas 3", empleado en la clase de tercero de secundaria. La actividad se denomina "Elegimos un servicio más conveniente" y tiene como propósito de aprendizaje el siguiente:

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

Figura 4 – Propósito de la sección del libro

Propósito: Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos, condiciones de equivalencia y las transformamos a expresiones algebraicas o gráficas que incluyen a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Asimismo, expresamos con lenguaje algebraico y diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas nuestra comprensión de la solución de un sistema lineal para interpretarlo en el contexto de la situación, estableciendo conexiones entre dichas representaciones.

Fuente: Resolvamos problemas 3, Cuaderno de trabajo (2019, p.83)

La figura 5 reproduce el problema de forma literal.

Figura 5 – Problema original seleccionado por un grupo de docentes

Elegimos un servicio conveniente

Matías desea alquilar juegos de video, razón por la cual visita una tienda y solicita información al respecto. La vendedora le manifiesta que hay dos maneras de usar el servicio y le detalla:

Primera forma: "Si se inscribe como socio de la tienda, pagará una cuota anual de veinte soles y por cada alquiler pagará cinco soles".

Segunda forma: "Pagar diez soles por cada alquiler sin la necesidad de inscribirse como socio".

Fuente: https://goo.gl/QS4VEq

A partir de lo informado:

1. ¿Cuál es la cantidad de juegos que debe alquilar Matías para que cancele el mismo monto en las dos formas de usar el servicio?
2. Determina las expresiones matemáticas que modelen a las dos formas de usar el servicio.

Fuente: Resolvamos problemas 3 (2019, p. 83)

La resolución esperada en la institución escolar es la siguiente:
Para responder la primera pregunta se espera que se obtengan las expresiones siguientes:

- *Primera forma*: $y = 20 + 5x$
- *Segunda forma*: $y = 10x$

Donde "x" es la cantidad de videojuegos que se alquilan. Luego se establece la igualdad de dichas expresiones:

$$20 + 5x = 10x \text{ , de donde } x = 4.$$

La respuesta a la pregunta b) corresponde a mostrar las expresiones analíticas utilizadas en la resolución de la parte a), es decir, las fórmulas "$y = 20 + 5x$" y "$y = 10x$" .

Los docentes observan que, para responder la primera pregunta, no es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, como se señala en el propósito de aprendizaje; bastará con obtener valores para casos particulares. Así, teniendo en cuenta la descripción dada, se puede elaborar una tabla (figura 6) y luego concluir que el precio de las dos formas de usar el servicio coincide cuando se alquilan 4 videojuegos.

Figura 6

Cantidad de videojuegos alquilados	1	2	3	4	5	6
Primera forma	25	30	35	40	45	50
Segunda forma	10	20	30	40	50	60

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 44)

Para la pregunta 2), se piden las fórmulas "$y = 20 + 5x$" y "$y = 10x$". Más allá de responder a una indicación externa, estas expresiones no son necesarias para responder ninguna otra pregunta. Más aún, se deja de lado el estudio de la variación; no se discute cómo se modifica la relación entre los pagos que se hacen a las tiendas antes y después de $x = 4$.

Aplicación de los criterios para analizar el problema original

Se emplean los criterios propuestos para analizar la pertinencia del problema para el desarrollo del RAE (cuadro 2).

Cuadro 2 – Descripción de los criterios propuestos

Criterio	Descripción	Comentario
1. Objetos matemáticos que involucra la situación	Se trata de una situación que requiere del uso de sistemas de ecuaciones o de funciones lineales y afines para estudiar el cambio.	El contexto de la situación es pertinente para desarrollar el RAE.
2. Lenguaje que moviliza la situación	La solución esperada por la institución propone pasar directamente del lenguaje natural a una regla de correspondencia expresada en lenguaje alfanumérico.	Será pertinente un trabajo previo con valores numéricos particulares, para identificar qué relación existe entre las magnitudes involucradas.
3. Grado de generalidad que demanda la situación	Tal como está planteada la tarea, se espera obtener la expresión algebraica para cada función costo. Sin embargo, como esa regla no se genera a partir de los elementos que la constituyen, no se puede afirmar que sea una entidad unitaria que emergerá del sistema de prácticas.	Es pertinente considerar otras preguntas que permitan reconocer un patrón de formación a partir de un conjunto finito de valores, para luego extraer la regla que generaliza la relación y actividades posteriores, en donde se obtengan nuevos intensivos que representen a la familia de funciones lineales y afines.

Fuente: Elaboración propia de los autores

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Problema modificado y soluciones esperadas

Teniendo en cuenta el análisis previo, se propone transformar el problema (ver Figura 7) en una actividad con cuatro tareas (ver Figuras 8, 11, 12 y 13), de modo que la solución de cada una de ellas demande cada vez mayores rasgos de razonamiento algebraico.

Figura 7 – Enunciado del problema modificado

En una tienda que alquila videojuegos en línea por horas se ofrecen las siguientes opciones:

- Opción 1: hacerse socio pagando una única cuota de 42 soles al año y por cada hora de uso del videojuego realizar un pago de 2,8 soles.
- Opción 2: no hacerse socio y, por lo tanto, no realizar el pago de cuota anual, pero pagar 4 soles por cada hora de uso del servicio.

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 45)

Figura 8 – Tarea 1 del problema modificado

a) ¿Qué opción le resultará más conveniente a una persona que suele jugar dos horas por semana? ¿siempre esa opción será la más conveniente? Sustenta tu respuesta.

b) i) ¿Cuál es el mínimo de horas al año que tendría que jugar una persona para que le convenga la opción 1? Puedes realizar tus cálculos con ayuda de una tabla

Opción 1		Opción 2		
Nºhoras	Costo total	Nºhoras	Costo total	Comparación
0		0		
1		1		
2		2		
3		3		
4		4		

Figura 3.1

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 45)

Solución esperada

En un primer acercamiento al problema, es conveniente que los estudiantes comparen los costos por concepto de alquiler para una cantidad de horas específica. El trabajo exploratorio generará respuestas diversas, entre ellas, algunas en donde se afirmará la conveniencia de tomar siempre un tipo de servicio, mientras otros estudiantes responderán de manera cualitativa señalando que la elección dependerá del tiempo considerado: si son muchas horas, será mejor la opción 1 y si son pocas, la opción 2.

La parte b) puede abordarse haciendo un tratamiento numérico exhaustivo o “por saltos”, para luego usar una hoja de cálculo como Excel que permite introducir la noción de

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

variable de manera implícita al definir el contenido de las celdas en función de otras. Queda pendiente determinar el número de horas exacto en dónde empieza a ser más conveniente la opción 1.

Al completar la tabla usando el "arrastre", se encontrará que a partir de n=36, la opción 1 será más conveniente (ver Figuras 9 y 10).

Figura 9 – Gasto a realizar por las primeras 17 horas

1	Opción	Cuota anual	Costo hora				
2	1	42	2.8				
3	2	0	4				
4							
5	Opción 1			Opción 2			
6	Nºhoras	Costo total		Nºhoras	Costo total		Comparación
7	0	42		0	0		42
8	1	44.8		1	4		40.8
9	2	47.6		2	8		39.6
10	3	50.4		3	12		38.4
11	4	53.2		4	16		37.2
12	5	56		5	20		36
13	6	58.8		6	24		34.8
14	7	61.6		7	28		33.6
15	8	64.4		8	32		32.4
16	9	67.2		9	36		31.2
17	10	70		10	40		30
18	11	72.8		11	44		28.8
19	12	75.6		12	48		27.6
20	13	78.4		13	52		26.4
21	14	81.2		14	56		25.2
22	15	84		15	60		24
23	16	86.8		16	64		22.8
24	17	89.6		17	68		21.6

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 48)

Figura 10 – Gasto a realizar entre 20 y 36 horas

28	20	98		20	80		18
29	21	100.8		21	84		16.8
30	22	103.6		22	88		15.6
31	23	106.4		23	92		14.4
32	24	109.2		24	96		13.2
33	25	112		25	100		12
34	26	114.8		26	104		10.8
35	27	117.6		27	108		9.6
36	28	120.4		28	112		8.4
37	29	123.2		29	116		7.2
38	30	126		30	120		6
39	31	128.8		31	124		4.8
40	32	131.6		32	128		3.6
41	33	134.4		33	132		2.4
42	34	137.2		34	136		1.2
43	35	140		35	140		0
44	36	142.8		36	144		-1.2
45							

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 49)

A continuación, se plantean atividades que requieren del empleo de otros lenguajes (como el gráfico y alfanumérico), de modo que se establezcan relaciones entre las variaciones numéricas y gráficas, así como la obtención de una expresión que represente el comportamento de forma general (figuras, 11, 12, 13 y 14).

Figura 11 – Tarea 2 del problema modificado

c) Luego de completar la tabla de la figura 3.2 —disponible en el siguiente enlace `https://www.geogebra.org/m/dmdzrc6u`— realiza las gráficas que representan la relación entre el monto a pagar y el número de horas para cada opción. Luego de manipular la tabla del enlace responde las cuatro preguntas que se enuncian a continuación.

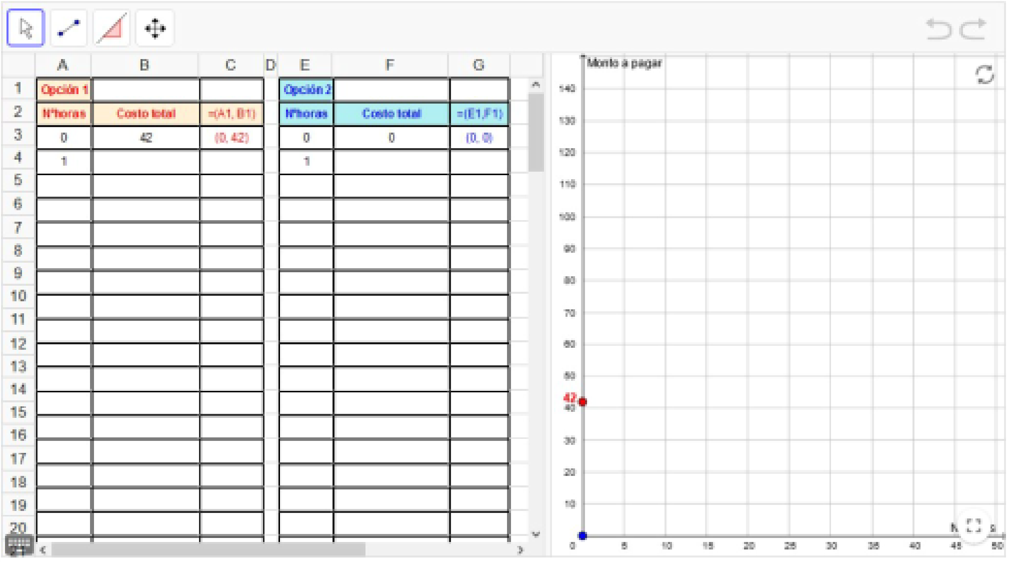


Figura 3.2

i) ¿Qué representa el pago anual de 42 soles en la gráfica?

ii) El incremento de 2,8 soles por hora, ¿qué representa en la gráfica de la opción 1?

iii) El incremento de 4 soles por hora, ¿qué representa en la gráfica de la opción 2?

iv) ¿Por qué la gráfica azul parte desde el punto (0,0)? Interprete considerando la situación.

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 46)

Solución esperada

Se incluyen cuestiones que requieren interpretar el significado de lo que luego serán los coeficientes de los términos lineales de las funciones costo, así como de los términos independientes. Por ejemplo, se asociará el pago anual de 42 soles con el punto (0; 42) en la gráfica. Adicionalmente, al completar las tablas y representar los pares en el plano cartesiano, se podrá reconocer la posición relativa entre las dos gráficas.

Figura 12 – Tarea 3 del problema modificado

ii) Encuentra expresiones algebraicas que representen los costos totales según la opción 1 y la opción 2.

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 45)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

Solución esperada

Se pregunta por las expresiones alfanuméricas que describen la relación entre las magnitudes involucradas; **a partir del análisis previo, se concluye que** las expresiones que permiten obtener el costo empleando cada opción son las siguientes:

Primera forma: $C_1(n) = 20 + 5n$
Segunda forma: $C_2(n) = 10n$

Figura 13 – Tarea 4 del problema modificado

d) Emplee el applet de la figura 3.3 —disponible en el enlace `https://www.geogebra.org/m/w9nyf6h6`— para responder las cuatro preguntas siguientes:

i) Si mantenemos los valores iniciales, pero el costo por hora de la opción 1 es ahora 5 soles, ¿qué ocurre con las gráficas?

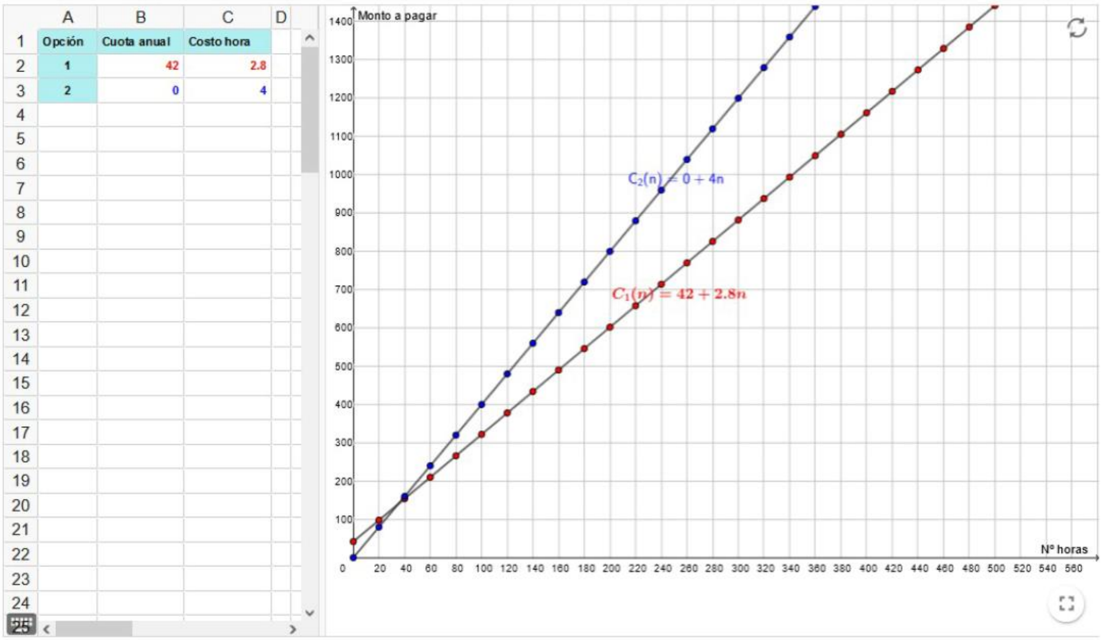
ii) Si mantenemos los valores iniciales y ahora solo se cambia el costo por hora de la opción 2 de modo que sea 2 soles, ¿qué ocurre con las gráficas?

iii) Manteniendo las condiciones iniciales de la opción 1, ¿cómo tendría que modificarse la opción 2 para que resulte siempre ser más barata?

iv) Manteniendo las condiciones iniciales de la opción 2, ¿es posible modificar la opción 1 para que esta sea siempre más barata?

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 46)

Figura 14 – Figura 3.3 de la Tarea 4



Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 47)

Solución esperada

Al realizar modificaciones en las condiciones del problema, se obtendrán gráficas distintas, a partir de las cuales se pueden responder las preguntas planteadas. Si el costo por hora de la opción 1 es 5 soles, las gráficas no se cortan y tampoco lo harán si se mantienen los valores iniciales y sólo se cambia el costo por hora de la opción 2 de modo que sea 2 soles. El estudio de la posición relativa entre las rectas permitirá encontrar condiciones para que uno de los tipos de servicio siempre sea más conveniente que el otro.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

ANÁLISIS DE LAS TAREAS MODIFICADAS SEGÚN LOS CRITÉRIOS PROPUESTOS

Se analiza cada tarea que resulta de modificar el problema original, teniendo en cuenta los criterios definidos previamente para valorar el qué medida el problema contribuye a desarrollar el razonamiento algebraico.

Cuadro 3 – Análisis de cada tarea empleando los criterios definidos previamente

	CRITERIOS		
	Objetos matemáticos que involucra la situación	**Lenguaje que moviliza la situación**	**Grado de generalidad que demanda la situación**
Tarea 1	Operaciones con números en Q^+ Relación de orden entre números particulares Relación entre dos magnitudes	Verbal, tanto en el enunciado como en las justificaciones. Numérico y tabular.	La tarea permite identificar regularidades y expresarlas verbalmente. A partir de un conjunto "grande", pero finito, de datos para cada tipo de costo, se identifica una relación entre el monto a pagar y el número de horas: "En el primer caso, el costo se incrementa en 2,8 soles por cada hora; en el otro caso, se incrementa en 4 soles. Además, la diferencia entre los dos costos se reduce en 1,2 soles por cada hora adicional de juego". También se enuncia una conjetura: "Al principio parece que la opción 2 será más económica, pero luego notamos que para muchas horas de juego, convendrá la opción 1".
Tarea 2	Relación entre dos magnitudes Progresión aritmética Recta en el plano: pendiente, ordenada en el origen. Posición relativa entre rectas	Verbal, tabular y gráfico, transitando entre ellos en varios sentidos.	La representación gráfica de cada relación permite hacer conjeturas sobre el comportamiento de la relación entre las dos magnitudes, más allá de los valores tabulados. Permite un estudio global. También posibilita establecer relación entre los datos del problema y algunas características de la gráfica, lo que obliga a estudiar la covariación.
Tarea 3	Función lineal	Lenguaje alfanumérico	Se unitariza la regla de formación para cada caso y se representa en lenguaje alfanumérico.
Tarea 4	Familia de funciones lineales	Verbal, tabular y gráfico y alfanumérico.	Se promueve un proceso de generalización aun mayor que permite reconocer el significado gráfico de los coeficientes *m* y *b* en las expresiones $f(x) = mx + b$.

Fuente: Elaboración propia de los autores

CONSIDERACIONES FINALES

Es fundamental que el profesor de matemáticas sea capaz de adaptar o construir problemas que usualmente emplea en sus clases, de modo que generen prácticas matemáticas de diferentes niveles de complejidad y que contribuyan al desarrollo del razonamiento algebraico de sus estudiantes.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141

En la medida que esto ocurra, se requerirá también una evolución en el lenguaje, así como la consideración de mecanismos que sirvan de medios de control para los procedimientos y resultados obtenidos.

El trabajo llevado a cabo con los maestros permitió poner a prueba los criterios propuestos y aplicarlos en la valoración de actividades específicas. A partir de ello, y de los conocimientos y experiencia de los docentes participantes, se analizaron problemas propuestos en los textos didácticos y se hicieron sugerencias de mejora.

Los problemas modificados pretenden favorecer el trabajo exploratorio, seguido de la búsqueda de regularidades, lo que permite realizar generalizaciones y motivar la utilidad y eficacia del uso del lenguaje algebraico. En esa línea, se propone transformar los problemas considerando que su solución demande el empleo de distintos lenguajes, y de establecer elaciones entre ellos.

A partir de un estudio inicial con números particulares, se pueden estudiar regularidades, las que pueden ser más evidentes si se cuenta contempla el uso de recursos como Hojas de cálculo o GeoGebra. Si se formulan preguntas que exijan establecer relación entre las representaciones gráficas y otros lenguajes, se obtendrá información adicional que contribuirá a una mejor comprensión del problema.

En un nivel de generalización aun mayor, se pueden considerar preguntas adicionales, a las planteadas en el problema original, que permitan caracterizar la situación dada como un caso particular de una familia de problemas; ello justificará el uso de parámetros y dará lugar a un nuevo proceso de generalización.

De esa manera, los criterios aquí propuestos constituyen una herramienta para los docentes en ejercicio, que ayuda a valorar y modificar, de ser necesario, los procesos de instrucción tradicionalmente implementados, para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de sus alumnos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló como parte del proyecto CAP ID 823, Competencias didáctico-matemáticas del profesorado para el desarrollo del razonamiento algebraico, con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

REFERENCIAS

AKÉ, L. P.; GODINO. J. D. Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. **Educación matemática**, v. 30, n. 2, p. 171-201, 2018.

CARRAHER, D. W.; MARTÍNEZ, M.; SCHLIENANN, A. D. Early algebra and mathenatical generalization. **ZDM-The International Journal on Mathenatics Education**, v. 40, n. 1, p. 3-22, 2008.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos. **Infancia y Aprendizaje**, v. 42, n. 3, p. 479-522, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 3, p. 289-318, 2014.

GAITA, R. C.; GONZALES, C. S.; UGARTE, F. J.; WILHELMI, M. R. **Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Desarrollo didáctico de la competencia**. Lima: Fondo editorial PUCP, 2022.

GAITA, R. C.; SUPO, R. A.; UGARTE, F. J. Avaliação de uma proposta educacional para o desenvolvimento do raciocínio algébrico a partir da noção de linearidade. **Revemop**. v. 3, p. 1-20, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/5044

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n.3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M.; WILHELMI, M.R. Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XVI**, (p. 285 - 294). Jaén: SEIEM, 2012a.

GODINO, J. D., CASTRO, W., AKÉ, L. y WILHELMI, M. D. Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, v. 26, n. 42b, p. 483-511, 2012.

GODINO, J. D.; AKÉ, L.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 32, n. 1, p. 199-219, 2014.

GODINO, J. D.; NETO, T.; WILHELMI, M. R.; AKÉ, L., ETCHEGARAY, S.; LASA, A. Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 8, p. 117 – 142, 2015.

GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P.; BURGOS, M.; GIACOMONE, B. Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En: **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. Granada: CIVEOS. p. 1-13, 2017. Disponível em: enfoqueontoseniotico.ugr.es/civeos.html. Acesso em: 20 nov. 2020.

LLANES, A.; PINO-FAN, L.; IBARRA, S. Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile. **Educación Matemática**, v. 34, n. 2, p. 182-216, 2022.

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú. **Resolvamos problemas 2. Cuaderno de trabajo de Matemática**, p. 83. Lima: 2019a. Disponível em: https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6861

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú. **Resolvamos problemas 3. Cuaderno de trabajo de Matemática**, p. 83. Lima: 2019b. Disponível em:

https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6861

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú. **Currículo Nacional de la Educación Básica**. Lima: 2016, Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf. Acesso em: 10 mar. 2021.

WILHELMI, M.R. Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano et al. (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI** (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM, 2017. Disponível em https://n9.cl/zlt38

***Submetido em*: 23 de Setembro de 2022.**

***Aprovado em*: 01 de Novembro de 2022.**

***Publicado em*: 08 de Dezembro de 2022.**

Como citar o artigo:
GAITA, C.; UGARTE, F.; GONZALES, C. Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., 2022.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p162-179.id455