Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

Un acercamiento hacia la enseñanza de números reales con estudiantes de primer año de ingeniería

Rosa Elvira Páez Murillo[1]
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Víctor Larios Osorio[2]
Universidad Autónoma de Querétaro

RESUMEN

En este artículo presentamos los resultados obtenidos de la puesta en práctica de tres actividades didácticas utilizadas en la enseñanza de la noción de número real, con estudiantes de primer año de la licenciatura en ingenierías. Estas actividades han sido diseñadas en función del enfoque propuesto por Bronner (1997). Se realiza un análisis cualitativo del trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en estas actividades, fundamentado en el marco de la teoría de Espacios de Trabajo Matemático. Los resultados evidencian que la activación de la génesis instrumental con el artefacto tecnológico supera al artefacto simbólico, sin que haya una confrontación de lo obtenido con la TIC, propiciando un ambiente de confusión entre número y su valor aproximado.
Palabras clave: Actividades didácticas, número real; trabajo matemático; ETM; artefacto.

An approach towards teaching real numbers with first year engineering

ABSTRACT

In this article we present the results obtained from the implementation of three didactic activities used in the teaching of the notion of real number with first year undergraduate engineering students. These activities have been designed according to the approach proposed by Bronner (1997). A qualitative analysis of the mathematical work developed by the students in these activities is carried out, based on the framework of the theory of Mathematical Working Spaces. The results show that the activation of the instrumental genesis with the technological artefact surpasses the symbolic artefact, without there being a confrontation of what is obtained with ICT, leading to an environment of confusion between number and its approximate value.
Keywords: Didactic activities, real number; mathematical work; MWS; artefact.

Uma abordagem para o ensino de números reais com alunos do primeiro ano de engenharia

RESUMO

Neste artigo apresentamos os resultados obtidos com a implementação de três atividades didáticas utilizadas no ensino da noção de número real, com alunos do primeiro ano do curso de engenharia. Essas atividades foram desenhadas com base na abordagem proposta por Bronner (1997). É realizada uma análise qualitativa do trabalho matemático desenvolvido pelos alunos nestas atividades, com base no referencial da teoria dos Espaços de Trabalho Matemático. Os resultados mostram que a ativação da gênese instrumental com o artefato tecnológico supera o artefato simbólico, sem que haja confronto do que se obtém com as TIC, promovendo um ambiente de confusão entre número e seu valor aproximado.
Palavras-chave: Atividades didáticas, número real; trabalho matemático; ETM; artefato.

---

[1] Doctora en Ciencias. Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). Profesora-Investigadora de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM). Ciudad de México (CDMX), México. Dirección postal: Calzada Ermita Iztapalapa 4163. Colonia Lomas de Zaragoza. Alcaldía Iztapalapa, CDMX, C.P. 09620. E-mail: rosa.paez@uacm.edu.mx ORCID: 0000-0001-7825-9686

[2] Doctor en Ciencias. Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). Profesor-Investigador de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Querétaro, México. Dirección postal: Cerro de Las Campanas, s/n, Centro Universitario. Santiago de Querétaro, Querétaro. C.P. 76010. E-mail: vil@uaq.mx. ORCID: 0000-0002-4454-8516

INTRODUCCIÓN

En la formación profesional de un licenciado en ingeniería en México, encontramos en el programa de estudios la presencia de un curso de cálculo diferencial que suele iniciar con el tema de números reales, el cual precede al estudio del concepto de función y límites. En particular, en la universidad pública en la que se realizó la experimentación se presenta en este programa "una breve introducción a los números reales", asumiendo la posición de que el estudiante ya ha tenido un primer acercamiento en el nivel medio superior. Esto último es cierto siempre y cuando el estudiante haya seleccionado la asignatura de cálculo diferencial dentro de su campo disciplinar.

Aunque no se específica en el programa de estudios del nivel medio superior, es clásico que el primer acercamiento que tienen los estudiantes con los números reales corresponde al enfoque racional vs irracional. El cual, como lo afirma Vivier (2015), es insuficiente, ya que esta identificación no conforma la base fundamental en la noción de completitud y continuidad, las cuales son propiedades primordiales en la construcción de conceptos subsecuentes contemplados en el curso de cálculo diferencial (SIERPINSKA, 1985; BRONNER, 1997; BERGÉ, 2004; DURAND-GUERRIER y VERGNAC, 2013; DURAND-GUERRIER, 2016; DURAND-GUERRIER y VIVIER, 2016; VIVIER, 2015; KIDRON, 2016; KUZNIAK, MONTOYA-DELGADILO y VIVIER, 2018).

Es así que se retoma la propuesta de Bronner (1997), la cual se centra en la expansión decimal del número. En ésta se propone que la oposición "racional/irracional" sea desplazada por la oposición "decimal/no decimal". En esta propuesta de enseñanza, desarrollada en un contexto de educación en Francia, los estudiantes se apropian de "nuevos números" los cuales presentan una expansión decimal infinita y que dentro de ese contexto corresponde a los "no decimales", etiquetado por el autor como "idecimales". Es importante precisar que cuando Bronner se refiere a "decimal" está haciendo mención a un número que se puede escribir con un número finito de cifras después de la coma (o punto) decimal. Esto dentro del contexto de educación francés.

Para efectos de este trabajo de investigación, que se desarrolla en el contexto de educación en México, cuando se hace referencia a número decimal, se considera un número que consta de una parte entera y una decimal, separadas por un punto o por una coma (definición matemática que proporciona la Real Academia de la Lengua Española). Lo que significa que el número decimal puede tener una expansión decimal finita o infinita. Esta definición es la adoptada en los planes y programas de la educación secundaria, como se evidencia en el glosario del documento de aprendizajes clave para la educación integral (SEP, 2017, p. 259) que señala como números decimales los "que se pueden expresar usando la notación decimal. Su expansión decimal (las cifras que vienen después del punto) puede ser finita o infinita". También allí aparece la definición de "número decimal finito" refiriéndose a los que corresponden a una fracción decimal y "número decimal periódico" a los que no son equivalentes a una fracción decimal. Por último, se precisa que "Los números decimales también pueden tener una expansión decimal infinita no periódica, por ejemplo, π y $\sqrt{2}$." (p. 667). En consecuencia, en el currículo mexicano no evidenciamos una diferenciación entre número decimal y número real, lo cual es relevante como objeto de estudio al investigar las dificultades conceptuales que los estudiantes pudieran tener, producto de esta posición.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

En el interés de implementar la propuesta que especifica Bronner, se contempla el uso de artefactos tecnológicos, implementando además de la calculadora, aplicaciones como Photomath, Excel, GeoGebra, entre otros; y que dependiendo de la capacidad del artefacto tecnológico que se utilice proporciona una aproximación de los números (independiente de su naturaleza), promoviendo así confusiones en los estudiantes entre el número y su valor aproximado (BLOCH, 2018). Además, actualmente existen artefactos tecnológicos que introducen signos semióticos como el signo de igualdad y el de aproximación que quizás pueda ayudar a la reflexión de "= vs ≈".

Igualmente, la intención de recuperar la propuesta de Bronner es por la pertinencia que tiene en la formación de ingenieros ya que, tal y como lo especifica Pluvinage (1988), la escritura bajo la forma de cifras decimales envía directamente a resultados de medidas, independiente de todo procedimiento de obtención. En el campo profesional de un ingeniero se refleja en el manejo de aproximaciones y el margen de error de diseño y/o de cálculo.

Por tanto, como parte de este experimento educativo nos interesa describir y comprender el trabajo matemático, entendido como un proceso intelectual humano, el cual es apoyado por las matemáticas y la cultura matemática, en el desarrollo de una tarea (KUZNIAK, NECHACHE y RICHARD, 2022), que en este caso, corresponde al trabajo de los estudiantes en las tres actividades didácticas propuestas. Dentro de este contexto las preguntas que pretendemos responder son las siguientes:

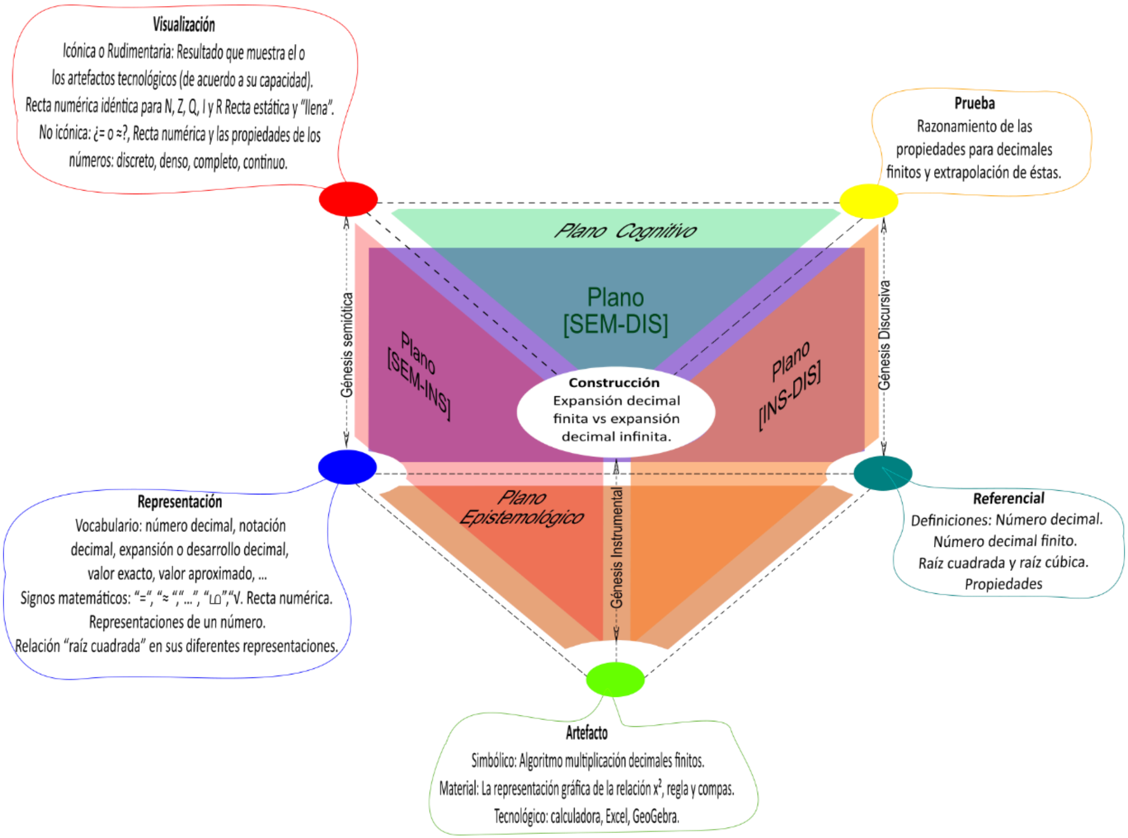
- ¿En qué artefacto (simbólico y/o tecnológico) se apoya la activación de la génesis instrumental? y ¿qué dificultades se identifican de acuerdo al artefacto utilizado?
- ¿Qué concepciones previas en relación a número decimal poseen los estudiantes universitarios?

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el diseño de actividades didácticas para esta experimentación, como el análisis de la información recolectada, se fundamentan en la Teoría de Sistemas de Representación Semiótica (DUVAL, 1999), la cual coloca en relevancia las formas semióticas de representación de los objetos matemáticos y la coordinación entre registro de representación semiótica. Además, se integra la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (KUZNIAK, TANGUAY y ELIA, 2016) que permite realizar la organización matemática del objeto de estudio dentro del plano epistemológico, que en este caso corresponde a la noción de números reales y presenciar procesos cognitivos en el espacio de trabajo matemático del estudiante (ver Figura 1)

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

Figura 1 -Algunos componentes del análisis cognitivo del tema de estudio con la Teoría ETM



Fuente: Diagrama ETM presentado en Kuzniak, Tanguay y Elia, (2016), adecuado por los autores

En la herramienta metodológica que propone la teoría de ETM a través del diagrama, podemos identificar los elementos del plano epistemológico (representamen, artefacto y referencial) y los procesos dentro del plano cognitivo (visualización, construcción, y discursivo), los cuales se relacionan a través de la activación de génesis (semiótica, instrumental y discursiva), producto del diseño de la tarea propuesta en la actividad didáctica y del trabajo del docente en el aula de clase. Asimismo, en el diseño de la actividad didáctica se considera que el trabajo matemático a realizar contemple la interrelación entre génesis dando lugar a un trabajo dentro de los planos [SEM→INS], [INS→DIS] y [SEM→DIS]. O un trabajo de manera circular, integrando las tres génesis [SEM→INS→DIS] de acuerdo a la tarea propuesta y a los procesos que provoque en el estudiante y cuyo objetivo final es el éxito de la misma, la cual sería evidencia del aprendizaje.

LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

De un grupo de dieciocho actividades didácticas diseñadas o rediseñadas, para la enseñanza del concepto número real, como para la preparación del terreno en cuanto a conocimientos previos que los estudiantes deben de tener para el desarrollo de la propuesta, de acuerdo al enfoque seleccionado, se seleccionaron tres actividades que son las que aquí vamos a presentar. El trabajo matemático a desarrollar con estas actividades se contempla en el registro numérico (Duval, 1999). La actividad previa corresponde a un diseño propio de este proyecto de investigación, basado en las dificultades reportadas por Bronner (1997). Las siguientes dos

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

actividades corresponden a un rediseño de las actividades utilizadas por Bronner para introducir el enfoque mencionado.

Actividad previa 1 (AP1)

Consta de nueve preguntas (ver Cuadro 1) que giran alrededor de la tarea principal que es la *identificación del número de cifras decimales que contiene el producto de dos números decimales finitos y el valor de la última cifra decimal de este producto*. Cada una de las preguntas que componen la actividad didáctica se han diseñado con el fin de propiciar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, no de manera independiente, sino relacionándose entre ellas en un trabajo matemático situado en los planos semiótico→instrumental (pregunta 1 y 4), semiótico→discursivo (pregunta 3) y semiótico→instrumental→discursivo (pregunta 2, 5, 6, 7, 8 y 9).

Cuadro 1 -Actividad Previa 1 aplicada a estudiantes de licenciatura en ingeniería en el semestre 2021-I

En las Tablas No. 1 y No. 2, cada letra representa un número decimal. Utilice los siguientes números decimales para completar las tablas y responder a las preguntas planteadas.

a = 1.2	d= 7.0233	g= 10.2003452
b = 4.21	e = 8.20545	h = 1.254321009
c = 6.205	f = 1.201434	j= 3.0002156654607

1) Complete la Tabla No. 1, indicando el **número de cifras decimales** **(cantidad de cifras después del punto)** que tiene el resultado de la multiplicación de los números dados.

Nota: Por el momento no nos interesa el resultado que se obtiene. Escriba en la tabla solo lo que se le solicita.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*j*
a									
b									
c									
d									
e									
f									
g									
h									
j									

Tabla No. 1

2) Explique brevemente el procedimiento que siguió para completar la Tabla No. 1. Especifique si para el llenado de la tabla utilizó algún instrumento tecnológico.

3) Explique si es o no necesario completar las celdas que aparecen en color gris en la Tabla No. 1.

4) Complete la Tabla No. 2 (mismo formato que la Tabla No. 1), indicando la **última cifra** del producto de los números dados.

5) Explique brevemente el procedimiento que siguió para completar la Tabla No. 2. Especifique si para el llenado de la tabla utilizó algún instrumento tecnológico.

6) Justifique la respuesta dada en la Tabla 1, con respecto a la **cantidad de cifras después del punto** que tiene el producto de h*j.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

7) Justifique la respuesta dada en la Tabla 2, con respecto a la **última cifra** que tiene el producto de h*j.
8) ¿En términos generales, explique cuántas cifras decimales debe tener el producto de dos números decimales finitos?
9) ¿En términos generales, explique cuántas cifras decimales debe tener el cuadrado de un número decimal finito y cuál es su última cifra?

Fuente: Actividad didáctica diseñada para el desarrollo del proyecto de investigación

En la pregunta 1 de la actividad didáctica se propone activar la génesis semiótica a través del lenguaje y representación de número decimal, número de cifras decimales, multiplicación de decimales, uso de literales que representan los decimales finitos. Así como con la solicitud de completar la tabla realizando la multiplicación, lo cual implica también la activación de la génesis instrumental, que permite dar respuesta a la solicitud de llenado de la "Tabla No. 1" (de la actividad didáctica) haciendo uso de artefactos simbólicos y/o tecnológicos. Esto es, el trabajo matemático a realizar por el estudiante en un primer momento, está enmarcado en el plano que vincula la génesis semiótica con la instrumental [Sem→Ins].

En relación a la génesis instrumental que se activa en el trabajo matemático del estudiante se tiene que dependiendo del artefacto al que se recurra, se permite o no un trabajo eficiente y sin *errores de precisión*. En el caso del artefacto simbólico, el cual en esta tarea corresponde al más eficiente, los estudiantes deberían hacer uso del procedimiento que se enseña en el primer año de secundaria en México (Matemáticas 1). Es decir, para multiplicar decimales finitos, se puede quitar el punto decimal, multiplicar los números y, posteriormente, colocar el punto decimal en el resultado de la forma adecuada (procedimiento soportado en el valor posicional). Además, se esperaría que utilicen un lenguaje matemático, como el de "el resultado tendrá *a lo más* el número de cifras decimales que resulte de sumar las cifras decimales que tiene cada uno de los factores". O bien, que muestre evidencia de este razonamiento, colocando una cifra menos, cuando la última cifra decimal corresponde a un 0, como es el caso de la multiplicación de $a \times c$ (ver Cuadro 1)

En el caso de que el estudiante recurra al artefacto tecnológico (calculadora, GeoGebra, Excel u otro), su trabajo matemático estará influenciado por la capacidad de éste y por la activación de su referencial teórico (multiplicación de decimales finitos) que le permitirá establecer una diferenciación (si este fuera el caso) entre la respuesta proporcionada por la TIC y la respuesta que debería obtener de acuerdo al artefacto simbólico (algoritmo de la multiplicación de decimales finitos). A continuación, se presenta un panorama breve en relación al proceso de instrumentación ligado a tres artefactos tecnológicos.

GeoGebra muestra el desarrollo decimal con una aproximación de 10^{-15}, con un redondeo de la última cifra. Pero, dependiendo de las cifras decimales seleccionadas, la visualización en casos en que no debería causar dificultad (resultados con menos de 15 cifras decimales), pueden empezar a causar problemas. Por ejemplo, como es el caso de la multiplicación la multiplicación de $h \times e$ (que se muestra en amarillo en la Figura 2a, 2b y 2c), en el cual el producto contiene 14 cifras decimales y la última cifra decimal es 5. Para el caso de un redondeo a 15 cifras decimales, GeoGebra muestra un número cuya última cifra es 2. Otro ejemplo del ruido que causa este artefacto tecnológico corresponde igualmente con el redondeo a 15 cifras decimales, en donde para algunas multiplicaciones, cambia su

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

representación de una expansión decimal finita a "quizás" una equivalente con representación decimal infinita (por así llamarlo a la aparición de cifras con el 9). Esto es, $a \times d = 1.2 \times 7.0233 = 8.42796$ que sufre un tratamiento por parte del artefacto mostrándolo como 8.4279599999999999. Se ha utilizado el "quizás" dado que el usuario de este artefacto debe realizar la interpretación del tratamiento del número en sus diferentes representaciones como: $8.42796 = 8.427959\overline{9} = 8.42795999\ldots$ Esto último que se presenta se podría decir que tiene sentido, no así la aparición del 2 como última cifra de la multiplicación de $h \times e$.

En Excel aparece una situación que puede provocar aún más confusión en el estudiante, en aspectos de valor exacto/valor aproximado. El software presenta un desarrollo decimal con una aproximación de 10^{-15} con un redondeo de la última cifra y además coloca ceros después de este redondeo. Pero también hay casos especiales, como cuando el resultado tiene exactamente 14 o 15 cifras decimales (ver Figura 2c).

En el caso de la calculadora de un Android, su capacidad es mayor y muestra la aproximación de 10^{-40} (Figura 2d)

Figura 2a -Tabla No. 1 de la AP1 con GeoGebra, redondeo a 13 cifras decimales

A	B	C	D	E	F	G	H	I
	1.2	4.21	6.205	7.0233	8.20545	1.201434	10.2003452	1.254321009
1.2	1.44	5.052	7.446	8.42796	9.84654	1.4417208	12.24041424	1.5051852108
4.21	5.052	17.7241	26.12305	29.568093	34.5449445	5.05803714	42.943453292	5.28069144789
6.205	7.446	26.12305	38.502025	43.5795765	50.91481725	7.45489797	63.293141966	7.783061860845
7.0233	8.42796	29.568093	43.5795765	49.32674289	57.629336985	8.4380314122	71.64008444316	8.8094727425097
8.20545	9.84654	34.5449445	50.91481725	57.629336985	67.3294097025	9.8583066153	83.69842252134	10.2922683232991
1.201434	1.4417208	5.05803714	7.45489797	8.4380314122	9.8583066153	1.443443656356	12.2550415350168	1.5069839071269
10.2003452	12.24041424	42.943453292	63.293141966	71.64008444316	83.69842252134	12.2550415350168	104.047042199163	12.7945072834123
1.254321009	1.5051852108	5.28069144789	7.783061860845	8.8094727425097	10.2922683232991	1.5069839071269	12.7945072834123	1.5733211936188
3.0002156654607	3.6002587985528	12.6309079515895	18.6163382041836	21.0714146832301	24.6181196321545	3.6045611078171	30.6032354621469	3.7632335407183

Fuente: Elaboración propia con uso de GeoGebra

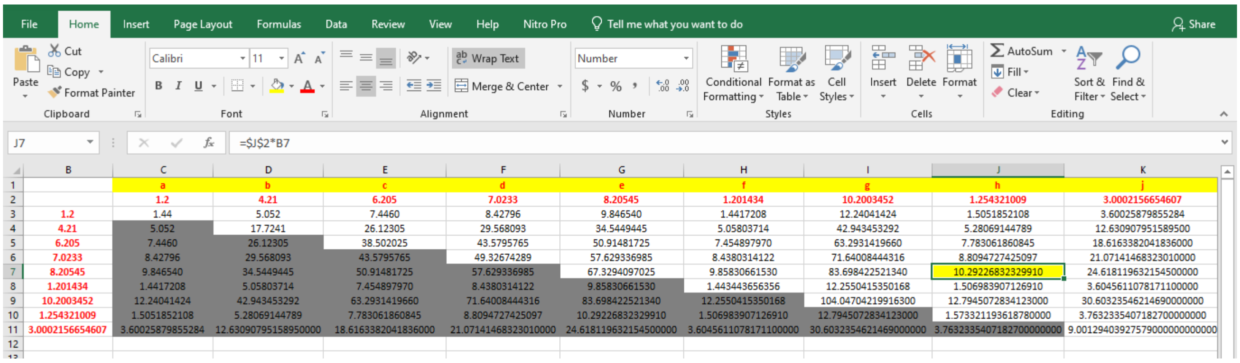
Figura 2b -Tabla No. 1 de la AP1 con GeoGebra, redondeo a 15 cifras decimales

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1.2	4.21	6.205	7.0233	8.205450000000001	1.201434	10.200345199999999	1.254321009
2	1.2	1.44	5.052	7.446	8.427959999999999	9.846540000000001	1.4417208	12.240414239999998	1.5051852108
3	4.21	5.052	17.7241	26.123049999999999	29.568092999999998	34.5449445	5.05803714	42.943453291999994	5.280691447890001
4	6.205	7.446	26.123049999999999	38.502025000000003	43.579576500000002	50.914817250000006	7.454897969999999	63.293141965999993	7.783061860845001
5	7.0233	8.427959999999999	29.568092999999998	43.579576500000002	49.326742889999998	57.629336985000002	8.438031412199999	71.640084443159992	8.809472742509701
6	8.20545000000000	9.846540000000001	34.5449445	50.914817250000006	57.629336985000002	67.329409702500016	9.8583066153	83.698422521340007	10.292268323299052
7	1.201434	1.4417208	5.05803714	7.454897969999999	8.438031412199999	9.8583066153	1.443443656356	12.255041535016797	1.506983907126906
8	10.2003451999999	12.240414239999998	42.943453291999994	63.293141965999993	71.640084443159992	83.698422521340007	12.255041535016797	104.04704219916303	12.794507283412306
9	1.254321009	1.5051852108	5.280691447890001	7.783061860845001	8.809472742509701	10.292268323299052	1.506983907126906	12.794507283412306	1.573321193618778
10	3.0002156654607	3.60025879855284	12.630907951589547	18.616338204183645	21.071414683230135	24.618119632154503	3.604561107817111	30.603235462146856	3.763233540718272
11									

Fuente: Elaboración propia con uso de GeoGebra

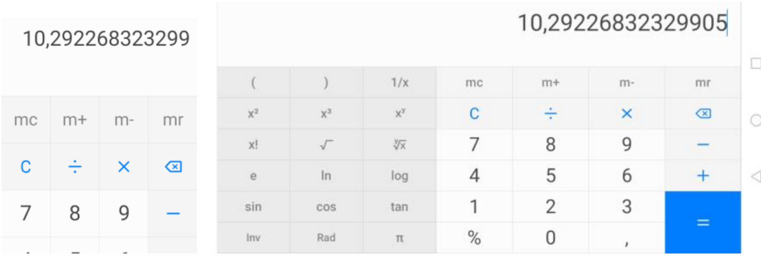
REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

Figura 2c. -Tabla No. 1 de la AP1 con Excel



Fuente: Elaboración propia con uso de Excel

Figura 2d – Calculadora de Android: Resultado de $h \times e$ (pantalla vertical y pantalla horizontal)



Fuente: Elaboración propia con uso de un Android

Actividad 1 (A1)

Consta de dos preguntas (ver Cuadro 2) que giran alrededor de la tarea principal de *aplicar los operadores "la raíz cuadrada de" y "el cuadrado de" para números que son cuadrados perfectos y reflexionar sobre la naturaleza de los números que se obtienen en relación a su expansión decimal.*

Cuadro 2 -Actividad 1 aplicada a estudiantes de licenciatura en ingeniería en el semestre 2021-I

1) Si es posible, completen con uno o varios números, los espacios vacíos de la tabla. En caso de que no se pueda, coloquen una X.

x	5					$\frac{4}{3}$		
x^2		169	-225	0	$\frac{1}{4}$		$\frac{625}{121}$	$\frac{-9}{100}$

x	1.5	3.141592654			
x^2			1.8496	0.0000390625	$\frac{400}{529}$

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

2) Expliquen brevemente el procedimiento que siguieron para completar la Tabla No. 1. En el caso de que no hayan podido completar, expliquen la razón de ello.

Fuente: Actividad didáctica tomada de Bronner (1997) y rediseñada para efectos de la investigación

Con el grupo de números que se presentan en esta actividad didáctica, se procura activar un trabajo matemático dentro del plano [Sem→Dis] en relación a la noción más básica de "la raíz cuadrada", la cual Bronner (1997, 2005) le llamó el *modelo cuadrado perfecto* (CP). Se incluyen fracciones no decimales, a fin de que surja de manera natural la representación de números decimales con expansión infinita periódica. También se incluyen decimales finitos, uno de ellos parecido a π. Se analizan los tratamientos dentro del mismo registro numérico, identificando si ello produce dificultades en términos de "valor exacto/valor aproximado", como también al trabajo matemático en particular propio de la instrumentación en relación al artefacto tecnológico.

Actividad 2 (A2)

Corresponde a la misma tarea que la A1, solo que se incluyen números que son y que no son cuadrados perfectos (ver Cuadro 3).

Cuadro 3 -Actividad 2 aplicada a estudiantes de licenciatura en ingeniería en el semestre 2021-I

Si es posible, completen con uno o varios números, los espacios vacíos de la tabla. En caso de que no se pueda, coloquen una X.

x	x^2	Justificación
2.236006		
	5	
$\frac{1}{3}$		
	$\frac{100}{144}$	
	4.9	
1.03		
	1.1025	
	1.03	
	9.072234360225	
	12	
	12.623	

Fuente: Actividad didáctica tomada de Bronner (1997) y rediseñada para efectos de la investigación

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

Se espera que los estudiantes identifiquen la diferencia entre las respuestas que proporciona el artefacto tecnológico entre un cálculo exacto y un cálculo aproximado, así como los tratamientos que éste realiza en el registro numérico. De acuerdo a la capacidad del artefacto tecnológico, es posible tener las dos opciones mencionadas. Es decir, al utilizar la tecla "√" bien se puede visualizar su valor exacto y en algunos casos con un tratamiento en el registro numérico, o bien se puede visualizar la representación decimal. Por ejemplo, para el caso de la raíz de 4.9 es posible obtener $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ o 2.213594362. Si se usa Photomath se tienen las dos opciones a la vez. Es decir, en la pantalla aparece "$= \frac{7\sqrt{10}}{10}$" y en renglón más abajo aparece "≈2.211359".

Con la representación decimal se pretende propiciar la reflexión en función del carácter finito o infinito de la expansión decimal de estos números. Elementos como el valor de la última cifra decimal y el número de cifras decimales obtenidos al elevar un número al cuadrado, discutidos en las actividades previas, son factores primordiales en el carácter finito/infinito de la expansión decimal.

LA EXPERIMENTACIÓN

Las actividades didácticas se colocaron a prueba en el semestre 2021-1 con dos grupos de estudiantes de la licenciatura de ingenierías que cursan cálculo diferencial. En el primer grupo se trabajó con 22 estudiantes y en el segundo con 26 estudiantes. Las actividades didácticas fueron desarrolladas por los estudiantes de manera autónoma y asincrónica en un ambiente no presencial, ello por el contexto de pandemia. Los resultados que en la siguiente sección se reportan corresponde al trabajo individual que forma parte de la primera etapa de la metodología de enseñanza contemplada en el experimento de enseñanza (BORBÓN, 2003; PÁEZ, 2004; HITT y QUIROZ, 2019).

De acuerdo a nuestros intereses y a las preguntas de investigación planteadas, en el análisis de la información presentamos un análisis descriptivo de los resultados obtenidos en esta primera etapa dentro de este experimento educativo. Aunque hacemos uso de lo cuantitativo para dar una idea global de la caracterización realizada, como ya lo mencionamos, nos interesa analizar el trabajo matemático que desarrollan los estudiantes, así como las génesis activadas y artefactos utilizados en este trabajo. De la misma manera, identificar las concepciones previas que florecen en base a la actividad propuesta y que pueden actuar como barrera en el desarrollo del enfoque de enseñanza de los números reales.

RESULTADOS

A continuación presentamos el análisis del trabajo escrito de los 48 estudiantes que hicieron entrega de las actividades didácticas ya descritas.

Actividad Previa 1

De acuerdo al objetivo y diseño de la actividad previa 1, en la Tabla 1 se puede evidenciar, que la mayoría de los estudiantes realizaron su trabajo matemático en el plano

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

[Sem→Ins]. Son pocos los estudiantes que tienen éxito en la tarea que corresponde a la precisión del número de cifras del producto de dos decimales finitos y a la identificación de la última cifra decimal de dicho producto. Gran parte de los estudiantes presentó respuestas con errores de precisión a causa específica del uso del artefacto tecnológico. Ello nos lleva a reflexionar sobre el proceso de instrumentación que realizan estos estudiantes. Se puede inferir que este proceso se realiza de manera "automatizada" con el fin de completar la tarea y sin tomar conciencia de la limitación del artefacto tecnológico usado, ni tampoco de la respuesta que debería de obtener con o sin él. Es decir, en el trabajo matemático desarrollado no se evidencia la activación del referencial teórico apropiado a la tarea propuesta.

Tabla 1. -Categorización del trabajo matemático de los estudiantes, preguntas 1 y 4.

Categorización	Subcategorización	No. de estudiantes
1. Uso del artefacto simbólico.		6
2. Uso del artefacto tecnológico.	Sin errores de precisión	5
	Con errores de precisión	26
3. Uso del artefacto simbólico y tecnológico	Sin errores de precisión	0
	Con errores de precisión	4
4. Otras respuestas		6
5. No responde		1

Fuente: Elaborado por los autores

En las preguntas 2 y 5 la interpretación de la consigna "explique brevemente el procedimiento que siguieron para completar la Tabla" depende del artefacto utilizado. En el caso de seis estudiantes que utilizaron el artefacto simbólico, sí procedieron a dar una explicación del algoritmo utilizado en un lenguaje natural y en algunos casos haciendo uso de ejemplos numéricos. Aunque no fueron más allá del algoritmo y ninguno utiliza frases como "*a lo más* tendrá…". Los 31 estudiantes que utilizaron el artefacto tecnológico manifestaron únicamente que utilizaron una calculadora, o algún otro artefacto, y en su mayoría hicieron la multiplicación una por una, es decir, un procedimiento poco eficiente y sin ninguna reflexión de la respuesta obtenida. Ello se debe a la confianza absoluta que los estudiantes depositan en las TIC y las respuestas proporcionadas por éstas, tal como aparece reportado en la literatura (LARIOS y GONZÁLEZ, 2010; PÁEZ y PLUVINAGE, 2019; 2018).

El diseño de las Tablas No. 1 y No. 2 de la actividad didáctica (ver Cuadro 1), se les presentó en gris las celdas que se pretendía que no completaran dada la aplicación de la propiedad conmutativa y que correspondían a un mismo resultado de las celdas en blanco, pero no se les indicó si tenían o no que completarla. La idea de fondo del diseño de utilizar el color gris es que los estudiantes tomarán este color como un acuerdo semiótico de no completar, utilizando la misma idea que se usa en los crucigramas. Pero dado que en una experimentación previa se presentó el fenómeno de que los estudiantes completaron toda la tabla, surge así la pregunta 3 con el fin de explorar sobre la apropiación de la propiedad conmutativa. Así se tuvo que 19 estudiantes ejecutaron la acción de completar las tablas completamente, es decir, también llenaron las celdas marcadas en gris. Solo uno de ellos hizo referencia en un lenguaje simbólico a la propiedad conmutativa, pero aun así ejecutó esta acción. Fueron 13 estudiantes

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

los que no completaron las tablas, argumentando de manera simbólica (3 estudiantes), haciendo referencia específica al nombre de la propiedad (2 estudiantes) o en un lenguaje natural refiriéndose a que son los mismos procedimientos por lo tanto es el mismo resultado (8 estudiantes). Hubo 10 estudiantes que no completaron la tabla, pero en su explicación no hay evidencia del manejo de la propiedad conmutativa. En resumen, sí hay una activación de la génesis semiótica, pero no así de la génesis discursiva. Son pocos los estudiantes que realizan un trabajo en el plano [Sem→Dis].

Una modificación importante que se le realizó a la actividad didáctica entre la experimentación previa y la que aquí se reporta, tiene que ver con las respuestas obtenidas en las preguntas 6 y 7 y el rol de las literales utilizadas para representar cada uno de los números decimales propuestos en la actividad didáctica. En la primera experimentación dentro de las literales utilizadas estaba x e y, lo cual conlleva a que algunos estudiantes le cambiaran el rol de constante al rol de variable. Es como lo afirman Kuzniak y sus colegas (2018): la visualización influye en el trabajo matemático y, como ellos lo ejemplifican, una x dentro de una figura fomenta que los estudiantes planteen una ecuación. En este caso el uso de las etiquetas "x" e "y" fomenta que se les otorgara el significado de variables. Con el cambio realizado por h y j se evitó esta situación en la experimentación reportada.

En términos generales, para las preguntas 6 y 7 se mantienen los comportamientos presentados en las preguntas 1, 2, 4 y 5. Es decir, a pesar de que en estas preguntas se precisa que justifiquen las respuestas proporcionadas en las tablas, los 31 estudiantes que utilizaron el artefacto tecnológico les parece suficiente con mencionar que "contaron" las cifras para colocar el número solicitado y que "tomaron" la última cifra que les mostraba el artefacto. Para algunos estudiantes en esta categoría la justificación se basó en colocar los números que corresponden a las literales mencionadas y colocar el número dado por éste.

Finalmente, las preguntas 8 y 9 son contestadas con un "cierto éxito" por tan solo cinco estudiantes, tres de los cuales desarrollaron la actividad didáctica con el uso del artefacto simbólico, uno con ambos artefactos y otro con el artefacto tecnológico. Se menciona un "cierto éxito" dado que su explicación se basa en un lenguaje natural y cuando recurren a un lenguaje simbólico no hay evidencia de un manejo eficiente de éste (ver Figura 3), asimismo, hay una ausencia de un lenguaje matemático necesario como por ejemplo "a lo más", y de una precisión en la terminología utilizada, como al usar el término "producto" en vez de "factor".

Figura 3 -Respuesta del estudiante E14

8) ¿En términos generales, expliquen cuántas cifras decimales debe tener el producto de dos números decimales finitos?

Con los números que estuvimos trabajando son números decimales finitos
Entonces el resultado de las cifras decimales que debe tener el producto de números decimales finitos no es más que la suma de las cifras decimales de cada producto que tengamos.
Es decir

(n) de cifras decimales + (n) de cifras decimales = (n) de cifras decimales

Fuente: Información recolectada en la investigación desarrollada

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

Con la tarea planteada en esta actividad didáctica, se evidencia que el trabajo matemático de la mayoría de los estudiantes en relación al proceso discursivo es insuficiente. Hay un trabajo en el plano [Sem→Ins] que requiere de la vinculación de la génesis discursiva.

Actividad 1 (A1)

El uso de artefactos tecnológicos para el desarrollo de esta actividad didáctica aunado a las nociones previas que se poseen los estudiantes y que se evidencian en su trabajo matemático, permitió identificar *concepciones* (DUROUX, 1983) o *teoremas en acción* (VERGNAUD, 1991). Entre las más notables podemos mencionar las siguientes:

i. *Dificultades en el tratamiento dentro del registro numérico o un teorema en acción.* Para el número 0.0000390625 algunos de los artefactos tecnológicos, por ejemplo las calculadoras científicas CASIO *fx*-350ES, proporcionan como respuesta la fracción 1/160. Haciendo uso de la tecla que proporciona la representación decimal proporciona la respuesta $6.25 * 10^{-3}$. Este tratamiento en el registro numérico causó ruido en nueve estudiantes que colocaron la X para este número específico. De acuerdo a la indicación de la actividad didáctica la X especifica que no se puede completar con un número. El trabajo realizado por los estudiantes de manera escrita es insuficiente para entender esta situación. Es así que acudimos a la pregunta planteada en la discusión grupal. Esta fue "¿Por qué no se puede completar con un número?", a lo que un estudiante manifestó: "*obtuve* $6.25 * 10^{-3}$ *y pienso que es un error de la calculadora*". Es decir, la respuesta proporcionada en notación científica no es reconocida como número. Ningún otro estudiante manifestó otra noción. Otra concepción o teorema en acción que pudiera existir detrás de esta respuesta es que la raíz cuadrada de un número en representación decimal no puede ser una fracción. Esta última noción está relacionada con la dificultad identificada en la experimentación de Bronner (1997) de que una fracción no puede ser un decimal, o dificultades en términos de identificación de representaciones de un mismo número (PÁEZ, et al., 2012).

ii. *Errores de precisión.* La mayoría de los estudiantes no establecen diferenciación entre un cálculo exacto y un cálculo aproximado. No hay un planteamiento de cuestiones cómo ¿cuántas cifras decimales debe de tener el cálculo realizado? o ¿el artefacto tecnológico me proporciona un cálculo exacto? En términos generales, la manipulación del artefacto sigue siendo de manera automatizada. Por ejemplo, sólo cuatro estudiantes tuvieron "éxito" en esta tarea, tres de los cuales mantuvieron la misma representación en el registro numérico y un estudiante realizó un tratamiento en el que surgieron los tres puntos que representan la periodicidad infinita de la expansión decimal. El resto de estudiantes trabajó con aproximaciones que les proporcionó el artefacto tecnológico. En el caso de 3.141592654^2, la precisión de todas las cifras decimales no es relevante. Para cuatro estudiantes hay una equivalencia entre el cálculo mencionado y π^2. No hay un uso del signo "≈". En el caso de fracciones no decimales surgió la expansión decimal infinita periódica, pero predominó el redondeo dado por el artefacto tecnológico y no su escritura semiótica equivalente con los signos propios que indican la periodicidad infinita. O bien, establecen equivalencias entre la fracción decimal y la no decimal, como, por ejemplo, el estudiante E17 planteó la siguiente igualdad $\sqrt{\frac{625}{121}} = \frac{227}{100}$.

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

iii. *Existencia de la raíz de un cuadrado perfecto negativo.* Para 20 estudiantes existe la raíz cuadrada de $\sqrt{-225} = -15$ o $\sqrt{\frac{-9}{100}} = \frac{-3}{10}$. Se evidenciaron representaciones espontáneas de los estudiantes (HITT, 2003) como $\frac{X}{10}$ o nociones en la que colocan la X porque el artefacto tecnológico les indica que es un error y el estudiante lo relaciona como un número irracional.

Con la tarea planteada en esta actividad didáctica, el trabajo matemático realizado por los estudiantes estuvo dimensionado en las tres génesis. La activación de la génesis discursiva y semiótica permite evidenciar concepciones y/o teoremas en acción que están dentro del referencial teórico personal.

Actividad 2 (A2)

El trabajo matemático realizado por los estudiantes en esta actividad didáctica también está influenciado fuertemente por el artefacto tecnológico. En relación al uso del artefacto, la Teoría ETM especifica que el artefacto influencia el proceso de visualización y los signos encontrados en el representamen. Es así que, a partir del artefacto tecnológico utilizado por los 48 estudiantes, se ha encontrado que solo el estudiante E47 proporcionó el valor exacto de casi todos los números que no son cuadrados perfectos. Es decir, expresó la respuesta con el símbolo de raíz, aunque no mostró evidencia en su discurso de que hay una comprensión de la naturaleza de estos números. Por ejemplo, dado que su instrumento no realizó ningún tratamiento numérico para obtener la raíz de 12.623, colocó un valor aproximado sin especificación alguna que corresponde a una aproximación sustentado en la cantidad de cifras decimales. No surgió por parte de los estudiantes el uso del símbolo "≈". Para E47, así como también para seis estudiantes más, la confianza de que su resultado correspondía a un valor exacto se depositó en el artefacto tecnológico dado que, al elevar al cuadrado, éste les proporcionó el número al que tenían que sacarle la raíz cuadrada. Esto es una limitación de los artefactos tecnológicos que a partir de cierta aproximación realiza equivalencias no existentes entre los números.

En términos de la presencia o ausencia de signos en el trabajo matemático de los estudiantes vinculados al artefacto tecnológico, se evidenció que ninguno de ellos utilizó alguno que hiciera una diferenciación entre "=" y "≈". En este aspecto, consideramos que este trabajo realizado con la aplicación de Photomath pudiera motivar la reflexión en los estudiantes sobre cálculo exacto y cálculo aproximado ya que esta aplicación presenta en su pantalla los dos cálculos, el que corresponde al exacto el cual lo precisa con el símbolo "=" y el aproximado que lo presenta a diferencia de la calculadora, o de GeoGebra o de Excel, con el símbolo "≈".

ALGUNAS REFLEXIONES Y PERSPECTIVAS

En el interés de introducir los números reales con el enfoque desarrollo decimal finito/infinito, a través del operador raíz cuadrada, e iniciando en el registro numérico, así como también parte de la primera pregunta de investigación aquí planteada, se evidencia que en el trabajo matemático de los estudiantes prima la activación de la génesis instrumental con el uso de artefactos tecnológicos. El uso de algunos de estos artefactos, promueve confusiones como las ya mencionadas por Bloch (2018), pero a su vez, también promueven que afloren

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., *e*-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457

concepciones en relación a la identificación del número y sus representaciones (PAEZ et al, 2012.

El análisis del trabajo matemático de los estudiantes en relación a los artefactos usados nos direcciona a que en el diseño de las actividades didácticas se promueva la transformación de dicho trabajo y que en la activación de la génesis instrumental se equilibre este acercamiento numérico. Ello promoviendo una confrontación entre el trabajo realizado con artefactos tecnológicos seleccionados específicamente para nuestro objetivo y el trabajo realizado con el artefacto simbólico. Siendo necesario para esto último que el estudiante posea un referencial teórico pertinente.

En relación a la segunda pregunta de investigación, hemos detectado deficiencias de conocimientos matemáticos que traen los estudiantes del nivel medio superior, que impiden avanzar con la profundidad necesaria para la construcción de la noción de número real. La aplicación de estas tres primeras actividades didácticas propició un trabajo matemático en las tres génesis, que permitió determinar concepciones difusas e incoherentes que tienen los estudiantes y con las cuales, como dice Artigue (2001), hay que enfrentarlos para generar un conflicto cognitivo y de esta manera intentar sobrepasar.

De acuerdo con la metodología de enseñanza que se tiene contemplada para estos experimentos educativos, las concepciones identificadas en las actividades didácticas, corresponden al punto de partida para la discusión grupal.

Como perspectiva de esta investigación, está el rediseño de las actividades didácticas en base a los resultados aquí obtenidos, así como la propuesta del rediseño de programas de estudios con un enfoque específico para la enseñanza de número real. Es decir, más que enfocarse primordialmente en la enseñanza de las operaciones con los números reales, se debe ir en la dirección de procurar la enseñanza de las propiedades discreto-denso-continuo.

AGRADECIMIENTOS

El diseño de las actividades didácticas y estudio de los diferentes enfoques para la enseñanza de número real se desarrolló en el marco de una estancia sabática dentro del grupo de trabajo de Espacio de Trabajo Matemático del Laboratorio de Didáctica André Revuz, de la Universidad de París Diderot y hace parte del Proyecto de Enseñanza del Cálculo que se desarrolla en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México desde 2006 con estudiantes de ingeniería y que desde sus inicios hasta el 2020 contó con la colaboración del Dr. François Pluvinage† (a su memoria).

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. What can we learn from educational research at the university level? In
BERGÉ A.; SESSA C. Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**. Vol.6, (3), p.163-197, 2003.

BERGÉ, A. **Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria**. 2004. Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires, Argentina.

BLOCH, I. Connaissances sur les nombres des élevés de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x, nº 106*. 65-77. 2018

BORBÓN, A. **Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial**. México: Cinvestav-IPN. Tesis de maestría, 2003.

BRONNER A. Vers la recherche d'un milieu perdu pour l'apprentissage des nombres réels au collège: racine carrée et idécimalité. En SALIN, M. CLANCHE, P. y SARRAZY, B (Edits.), **Sur la théorie des situations didactiques**. París, Francia: La Pensée Sauvages Editions. 2005.

BRONNER, A. **Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carré**. 1997. Tesis doctoral no publicada. Grenoble, Francia: Universidad Joseph Fourier.

DURAND-GUERRIER, V. & VERGNAC, M. Les réels à la transition secondaire-supérieur du discret au continu – quelle élaboration ? Dans La réforme des programmes du lycée et alors? **Actes du colloque IREM**, 2013, p. 135-147.

DURAND-GUERRIER, V. & VIVIER, L. Densité de **D**, Complétude de **R** et analyse réelle – Première approche. **Acte First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM**), Montpellier, France, 2016, p.143-152.

DURAND-GUERRIER, V. Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. **International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education, 2,** 2016, p. 338-361**.**

DUROUX, A. La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure. **Petit x**, 3, 1983. p. 43-67.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

HITT, F. Le caractère fonctionnel des représentations, **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, **8**, 2003. p. 255-271.

HITT, F. y QUIROZ, S. Formation et évolution des représentations fonctionnelles spontanées à travers un apprentissage socioculturel. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 24, 2019. p. 75-106.

KIDRON, I. Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals. **Acte First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM**), Montpellier, France, 2016, p.73-82.

KUZNIAK, A., MONTOYA-DELGADILO, E. Y VIVIER, L. La visualización en el análisis. En CUEVAS, C.; MARTÍNEZ, M. y CRUZ, R. (Eds), **Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes,** 2018. México: Pearson.

KUZNIAK, A., NECHACHE, A. Y RICHARD, P. The Theory of Mathematical Working Spaces in brief. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), *Mathematical work* *in educational context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer International Publishing. 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

KUZNIAK, A., TANGUAY, D., & ELIA, I. Mathematical working spaces in schooling: an introduction. **ZDM**, 48(6), p. 721-737. 2016.

LARIOS OSORIO, V., & GONZÁLEZ GONZÁLEZ, N. Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)**, *13*(4-I), 2010. p. 147-160.

MONTOYA-DELGADILLO, E., VIVIER, L. Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, **ZDM**, 48(6), 2016. p. 739-754.

PÁEZ MURILLO, R. E., VIVIER, L., MARTÍNEZ OJEDA, E. Y TORRES MARTÍNEZ, C. A. Concepciones detectadas en estudiantes de primer semestre de universidad en relación al conjunto de números reales. En **Colloque La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michele Artigue**. París, Francia. Mayo 31 a junio 2 de 2012.

PÁEZ, R. **Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión**. México: Cinvestav-IPN. Tesis Doctoral, 2004

PÁEZ, R. y PLUVINAGE, F. Estudio de las asíntotas de una función en un ambiente con tecnología dinámica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, *39*(3), 2019. p. 331-369.

PÁEZ, R. y PLUVINAGE, F. Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, caso de las ramas infinitas de una función. **Sexto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático**. Valparaíso, Chile. Diciembre 13 al 18 de 2018.

PLUVINAGE, F. Deux questions sur les nombres réels soulevées para l'article de R. Duval. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 1, 1988. p. 27-31.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. **Aprendizajes Clave para la educación integral. Plan y programas de estudios para la educación básica**. México: SEP, 2017.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite**. Recherches en didactique des mathématiques,** Paris, v. 6, n. 1, p. 5–67, 1985.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques,** Grenoble : La Pensée Sauvage, 1991.

VIVIER, L. **Sur la route des réels, Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique.** Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les Recherches (HDR), Université Paris Diderot. 2015.

***Submetido em*: 0**5 de septiembre de 2022.

***Aprovado em*:** 01 de Novembro de 2022.

***Publicado em*:** 08 de Dezembro de 2022.

Como citar:

PÁEZ, R; LARIOS, V. Un acercamiento hacia la enseñanza de números reales con estudiantes de primer año de ingeniería. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., 2022.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457