Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 43, e2023037
10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023037.id519

Uma Organização Matemática para o cálculo da medida da área do fractal Árvore Pitagórica

A Mathematical Organization for calculating the measure of the area of the Pythagorean Tree fractal

Una Organización Matemática para calcular la medida del área del fractal del Árbol de Pitágoras

Luan Padilha[1]

Mariana Moran[2]

RESUMO

O presente artigo é parte de uma dissertação de mestrado cujo objetivo foi investigar praxeologias matemáticas mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra. Para tanto, apresentamos a análise de uma tarefa referente ao desenvolvimento do cálculo para a medida da área do fractal. Este trabalho fundamenta-se em pressupostos teóricos-metodológicos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) que possibilitou modelar e analisar praxeologias matemáticas mobilizadas por estudantes de uma turma do 3º ano do Ensino Médio de um colégio estadual do município de União da Vitória–PR. As análises evidenciaram, por exemplo, que os estudantes identificaram uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis do fractal, e escreveram algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.
Palavras-chave: Educação Matemática; Didática da Matemática; Teoria Antropológica do Didático; Geometria dos Fractais.

ABSTRACT

This article is part of a master's thesis whose objective was to investigate mathematical praxeologies mobilized by high school students during the construction of the fractal Pythagorean Tree in the GeoGebra software. Therefore, we present the analysis of a task related to the development of the calculation for measuring the fractal area. This work is based on theoretical-methodological assumptions of the Anthropological Theory of Didactics (TAD) that made it possible to model and analyze mathematical praxeologies mobilized by students of a 3rd year high school class at a state school in the city of União da Vitória–PR. The analyzes showed, for example, that the students identified a numerical relationship between the total measure of the area of the figure and the levels of the fractal, and wrote algebraically the expression for calculating the total measure of the area of the figure at any stage.
Keywords: Mathematics Education; Didactics of Mathematics; Anthropological Didactic Theory; Geometry of Fractals.

RESUMEN

Este artículo es parte de una tesis de maestría cuyo objetivo fue investigar las praxeologías matemáticas movilizadas por estudiantes de secundaria durante la construcción del Árbol de Pitágoras fractal en el software GeoGebra. Por ello, presentamos el análisis de una tarea relacionada con el desarrollo del cálculo para la medición del área fractal. Este trabajo se basa en supuestos teórico-metodológicos de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) que posibilitaron modelar y analizar las praxeologías matemáticas movilizadas por alumnos de 3º año de la enseñanza media de una escuela pública del municipio de União da Vitória–relaciones públicas Los análisis mostraron, por ejemplo, que los estudiantes identificaron una relación numérica entre la medida total del área de la figura y los niveles del fractal, y escribieron algebraicamente la expresión para calcular la medida total del área del figura en cualquier etapa.
Palabras clave: Educación Matemática; Didáctica de las Matemáticas; Teoría Didáctica Antropológica; Geometría de Fractales.

1 Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Doutorando em Educação Para a Ciência e o Ensino de Matemática na Universidade Estadual de Maringá (UEM). Endereço para correspondência: Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Av. Colombo, 5790, Bloco F67 sala 007, Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: padilha.luan16@gmail.com.

2 Doutorado em Educação Para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora Associada da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Av. Colombo, 5790, Bloco F67 sala 007, Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: mmbarroso@uem.br.

Fluxo Contínuo

INTRODUÇÃO

A Matemática pode fornecer ao professor e ao estudante, a exploração e a contemplação de objetos matemáticos que possuem certos aspectos harmônicos na arte, na pintura, na arquitetura e na natureza. Por exemplo, a noção de simetria é presente no campo da arte e da arquitetura, sendo reconhecida como um fator determinante de emoções, ordem e ritmo estático.

Observar o belo e apresentar senso estético se faz presente em temas da Matemática. Um desses temas que contribui para o desenvolvimento do senso estético e apreciar do belo é o Fractal, mais especificamente a Geometria dos Fractais. A Geometria dos Fractais foi iniciada por Benoit Mandelbrot e se refere ao estudo de formas irregulares, salientes, fragmentadas. Mandelbrot denominou-as fractais porque se baseou na palavra fractus, cuja origem vem do latim, correspondente a quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar (BARBOSA, 2005).

Segundo Barbosa (2005, p. 9, grifo do autor),

> [...] essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma das suas partes. Segue que suas partes são semelhantes; propriedade conhecida como *autossimilaridade*.

As três principais características de um fractal são autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita. Barbosa (2005, p. 19) justifica a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula baseado em

> [...] conexões com outras ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para estudo de formas da natureza [...]; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Entendemos que esse tema possui relevância para ser abordado na Educação Básica, considerando que ele apresenta ligações com diversas áreas do conhecimento, como Medicina (SEDIVY *et al.*, 1999), Computação (MARTINS; LIBRANTZ, 2006) e Economia (HAYASHI, 2002), além de ser evidenciado em documentos oficiais de orientações curriculares, como o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, em âmbito estadual; e na Base Nacional Comum Curricular–BNCC, em âmbito nacional.

O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná sugere o estudo dos fractais porque “permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades” (PARANÁ, 2021, p. 541).

Nesse sentido, nota-se que a temática dos fractais está presente em uma das habilidades na parte da BNCC para o Ensino Médio, referindo-se à primeira competência para a área de Matemática e suas Tecnologias: “Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)." (BRASIL, 2018, p. 533).

A Geometria dos Fractais possibilita a aprendizagem de conceitos matemáticos como área e perímetro de figuras planas, funções, ângulos entre outros (REZENDE; MORAN; MÁRTIRES; PAIXÃO, 2018). A esse respeito, a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula e a construção de fractais utilizando um software como o GeoGebra, proporciona aos professores a exploração de diversos conteúdos matemáticos e propicia aos alunos perpassar por diferentes representações semióticas durante a exploração de entes geométricos, por exemplo, do fractal Hexagonal Tipo Dürer (MORAN; REZENDE, 2020).

Dessa forma, despertou-nos uma inquietação em investigar possíveis praxeologias matemáticas mobilizadas por estudantes[3] do Ensino Médio durante a construção do fractal Árvore Pitagórica no software GeoGebra. Nesta discussão apresentamos a análise de uma tarefa referente ao desenvolvimento do cálculo para a medida da área do fractal.

Para aporte teórico-metodológico da proposta de construção do fractal Árvore Pitagórica, embasamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1998), que nos permite realizar uma Organização Matemática (OM) e uma Organização Didática (OD). A OM consiste em um quarteto composto por um tipo de tarefa (T), que é realizada a partir da mobilização de uma técnica (τ). Para isso, é preciso que seja justificada por uma tecnologia (θ) e tenha uma teoria (Θ) que rege a tecnologia em si (CHEVALLARD, 2018). No que diz respeito à OD, que são as escolhas que o professor faz referente à OM, ela "permite estudar o modo como é apresentada e estruturada a praxeologia matemática" (FREITAS; BITTAR, 2016, p. 9).

SOBRE A GEOMETRIA DOS FRACTAIS

O matemático Benoit Mandelbrot foi o iniciador do estudo dos objetos geométricos chamados fractais. Essas entidades geométricas possuem propriedades particulares, e entre elas destacam-se a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária (BARBOSA, 2005). Mandelbrot denominou esses objetos de fractais baseando-se na palavra fractus, adjetivo do latim, do verbo frangere, que corresponde a quebrar, fragmentar.

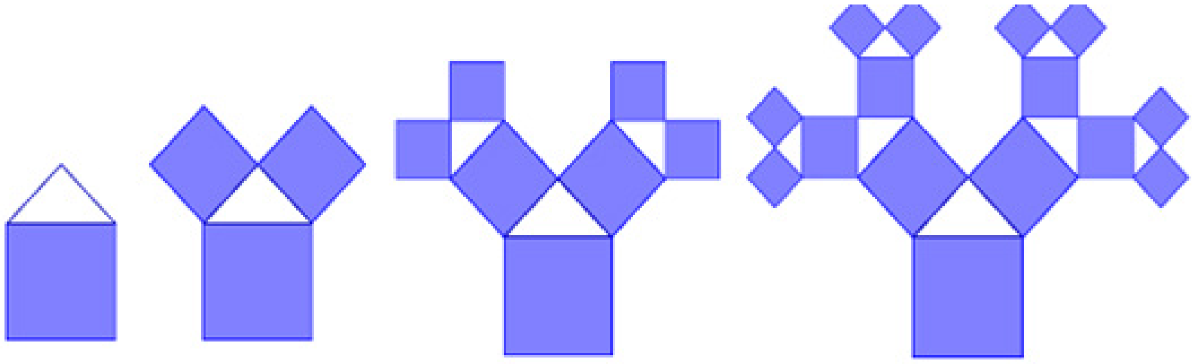
A Geometria dos Fractais está relacionada a uma ciência chamada Caos. As estruturas fragmentadas, belas e complexas, fornecem uma ordem ao Caos, buscando padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório (BARBOSA, 2005). De acordo com Barbosa (2005), na natureza existem formas irregulares, e tentar simplificá-las usando formas da Geometria Euclidiana é considerado inadequado. Neste sentido, a Geometria dos Fractais pode oferecer aproximações para essas formas.

Um fractal possui suas partes semelhantes ao conjunto como um todo, de forma exata ou aproximada, e isso é chamado de autossimilaridade (BARBOSA, 2005). A autossimilaridade exata é possível através de instrumentos de desenho, como o lápis, o compasso, a régua e o esquadro, ou por meio de softwares de geometria dinâmica. Tomemos como

3 Esta investigação foi aprovada por Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos sob o parecer consubstanciado número: 5.410.362.

exemplo a construção do fractal Árvore Pitagórica feita no GeoGebra, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 1. Árvore Pitagórica até o nível 3



Fonte: Elaboração dos autores.

Em relação à noção de autossimilaridade aproximada, em que os padrões não se repetem com exatidão, podemos observar esses aspectos em elementos presentes na natureza, como no brócolis e na samambaia.

Outra característica do fractal é a complexidade infinita, expressada através do processo gerador dos fractais, podendo ser recursivo ou iterativo (BARBOSA, 2005). Em um fractal, podemos realizar um número infinito de iterações e nunca obteremos a imagem final desse fractal. O fractal será a figura limite do seu processo gerador, e vale ressaltar que esses objetos geométricos não perdem sua definição formal na medida em que são ampliados, mantendo a estrutura idêntica à original.

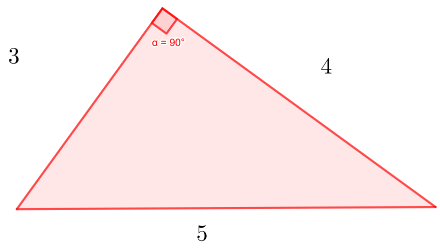
Já a dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro. Ela representa o grau de ocupação do fractal no espaço e está ligada ao grau de irregularidade ou fragmentação (BARBOSA, 2005).

Embora a Geometria dos Fractais seja uma temática nova no cenário educacional brasileiro, trazida à tona nos últimos anos, especialmente no estado do Paraná (PEREIRA; BORGES, 2017), ela já havia sido recomendada nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008) e está presente no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná–CREP (PARANÁ, 2021). Este último recomenda sua abordagem na unidade temática de Geometria, nas noções de Geometrias Não Euclidianas.

Nesse sentido, a Geometria dos Fractais possibilita o uso de softwares de geometria dinâmica para o estudo de conceitos matemáticos. Dentre os softwares que se destacam no contexto do ensino de Matemática está o GeoGebra. Ele é uma ferramenta educacional que combina álgebra, gráficos, geometria, tabelas, cálculos e estatística. O programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria, com as mais avançadas da álgebra e do cálculo. Assim, existe a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

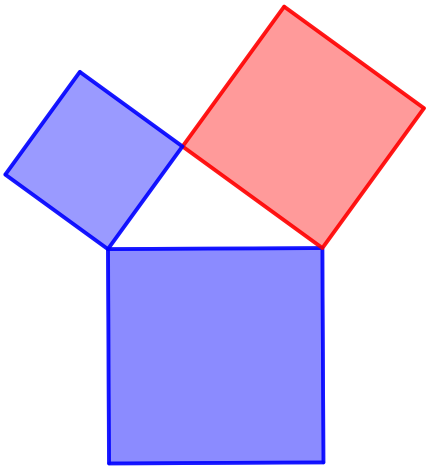
O fractal Árvore Pitagórica consiste inicialmente em um triângulo retângulo, cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (Figura 2). A partir da hipotenusa e dos catetos, os quadrados que formam o fractal são construídos. O quadrado, que tem como medida a hipotenusa, é o tronco inicial da árvore, e os quadrados que têm os catetos como medida constituem o iniciador-gerador[4] (Figura 3).

Figura 2. Triângulo pitagórico



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 3. Tronco inicial e iniciador-gerador

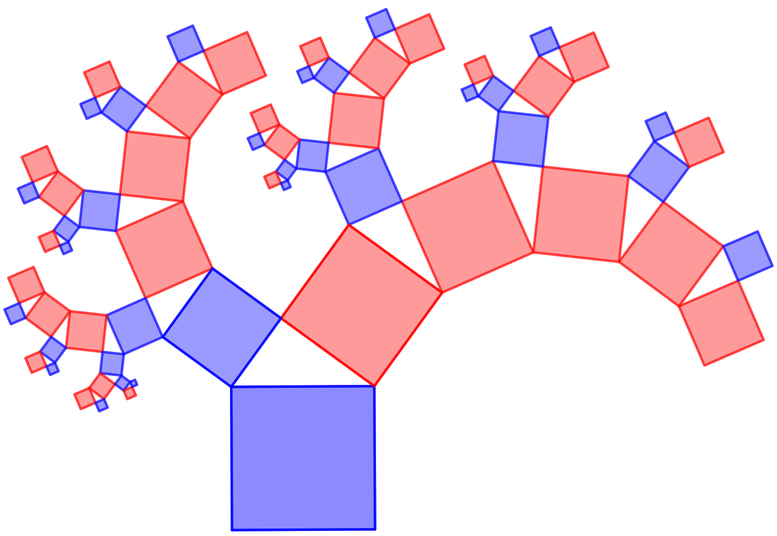


Fonte: Elaboração dos autores.

Para cada nova etapa são construídos, sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto, novos triângulos retângulos semelhantes ao inicial, tendo a medida da hipotenusa como aquela do lado do quadrado em que o triângulo está justaposto. A cada nova iteração, cada cateto se transforma em um lado de um novo quadrado, que se transforma em hipotenusa.

Conforme explica Barbosa (2005, p. 62), "[...] para se obter a autossimilaridade, os novos triângulos retângulos precisam ser semelhantes ao inicial, isto é, seus lados devem ser proporcionais aos números 3, 4 e 5" (Figura 4).

Figura 4. Árvore Pitagórica Fundamental

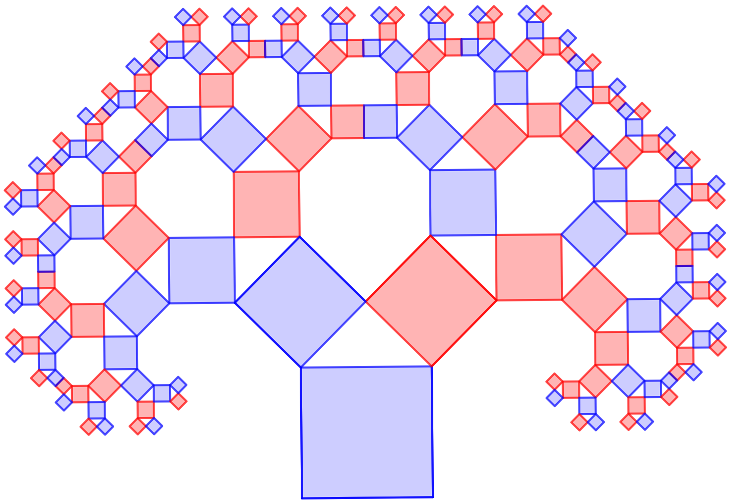


Fonte: Elaboração dos autores.

4 De acordo com Barbosa (2005), entende-se por iniciador-gerador o modelo gerador para todas as novas partes.

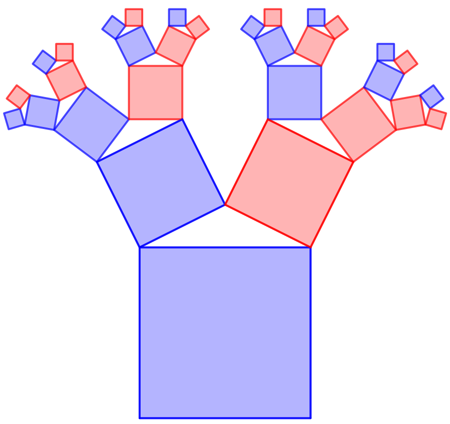
Para a proposta implementada, escolhemos como objeto geométrico de estudo, dentre uma variedade de fractais, a Árvore Pitagórica. Um dos motivos pela escolha deste fractal é pode variar o triângulo inicial em outros ternos pitagóricos, por exemplo: Árvore Pitagórica Isósceles Retangular (Figura 5), Árvore Isósceles Obtusângula (Figura 6) e Árvore Equilátera (Figura 7).

Figura 5. Árvore Pitagórica Isósceles Regular



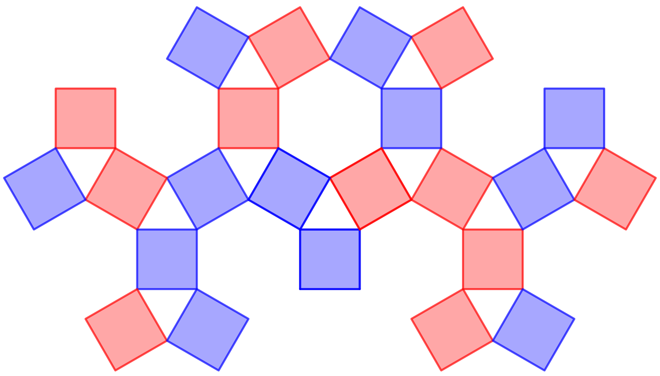
Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 6. Árvore Isósceles Obtusângula



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 7. Árvore Equilátera



Fonte: Elaboração dos autores.

Além disso, a escolha se deve pelas possibilidades de exploração desse fractal em sala de aula: 1) uma exploração da medida do comprimento dos lados dos triângulos e a relação entre os catetos e a hipotenusa; e 2) uma exploração relacionada ao cálculo da medida do perímetro e da área do fractal em suas etapas, investigando uma expressão que represente o cálculo a partir do modelo gerador com lado de comprimento unitário.

Para a implementação realizada com alunos do Ensino Médio de um colégio público no interior do Paraná, optamos por construir a Árvore Pitagórica com o iniciador-gerador formado a partir de um triângulo retângulo isósceles.

NOÇÕES DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Didática da Matemática é a ciência que estuda situações que se propõem à aquisição de conhecimento pelos estudantes. Dentre os constructos teóricos desenvolvidos no campo da Didática da Matemática situa-se a TAD.

A TAD situa a atividade de matemática e o estudo de Matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais, conforme observa Chevallard (1998). Diante disso, o postulado básico da TAD corresponde à possibilidade de analisar toda atividade humana por meio de um modelo único, denominado praxeologia.

O trabalho direcionado para o ensino da Matemática pode ser moldado em termos de praxeologia, composta por uma OM e uma OD, que contribui para uma construção do conhecimento, de modo a possibilitar avanço na compreensão dos assuntos propostos. Para tal, é possível estabelecer uma estrutura praxeológica em prol do ensino e da investigação desse conhecimento.

Santos e Freitas (2017, p. 53) destacam que "a OM caracteriza o estudo do objeto matemático em um esboço praxeológico das atividades matemáticas", e

> [...] no desenvolvimento da OM, o professor faz as suas escolhas sobre como introduzir o conteúdo, os conceitos valorizados e as atividades tidas como essenciais, entre outras escolhas, que são compreendidas por meio da Organização Didática (OD), ou seja, as escolhas metodológicas da forma de apresentação, ou da aula de matemática.

A estrutura praxeológica consiste em um quarteto composto por um tipo de tarefa (T), que é realizada a partir da mobilização de uma técnica (τ), que precisa ser justificada por uma tecnologia (θ), que tenha uma teoria (Θ) que rege a tecnologia em si (CHEVALLARD, 2018). Uma determinada praxeologia matemática é denotada por [T / τ / θ / Θ], que comporta a parte prático-técnica ou práxis (também chamada de bloco do saber-fazer), denotada por $\Pi = [T / \tau]$; e a parte tecnológico-teórica ou logos (também identificada como bloco do saber), denotada por $\Lambda = [\theta / \Theta]$ (CHEVALLARD, 2018).

Segundo Chevallard (1998), as noções de tarefa (t) e os tipos de tarefa (T) podem ser expressos por meio de um verbo que designa ação e está associada a um objeto, como por exemplo, varrer a sala, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ler um manual, subir as escadas, integrar a função .

Assim, um determinado tipo de tarefa (T) exige um modo de fazer ou modo de realizar as tarefas (t): a ele damos o nome de técnica. De acordo com Chevallard (1998, p. 3, tradução nossa), "uma técnica (τ) não é necessariamente de natureza algorítmica". Nesse sentido, por exemplo, pintar uma paisagem e fundar uma família são tarefas que não exigem uma técnica algorítmica.

Com relação à tecnologia (θ), discurso que tem o objetivo de justificar racionalmente a técnica (τ), ela possui uma racionalidade que varia de acordo com o espaço institucional em que a técnica é desenvolvida (DIAS; SANTOS JÚNIOR, 2018). Desse modo, Chevallard (1998) enfatiza que, em uma determinada instituição (I), qualquer que seja o tipo de tarefas (T), a técnica (τ) relativa à T é sempre acompanhada por um resquício de tecnologia (θ).

Chevallard (1998) esclarece que o fato de existir uma técnica canônica, em princípio a única reconhecida e a única utilizada, confere a essa técnica a virtude de ser autotecnológica: utilizá-la não exige justificação, pois é o jeito certo de fazer isso (em I).

Além da função de justificar a técnica, a tecnologia pode assumir uma segunda função, que é a de explicar a técnica. Com essa função, pretende-se explicar o porquê é assim; as técnicas precisam ser inteligíveis e esclarecidas.

Uma terceira função da tecnologia corresponde à produção de técnicas. Conforme Chevallard (1998), existem tecnologias potenciais, à espera de técnicas, que ainda não são tecnologias de nenhuma técnica ou de pouquíssimas técnicas. Assim, deve-se destacar o modo insuficiente de explorar das tecnologias disponíveis, tanto do ponto de vista da justificação ou explicação quanto da produção.

Por sua vez, Chevallard (2018) elucida que o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, para as quais podemos pedir razões. Passamos, então, para um nível superior de justificação-explicação-produção, o da teoria (Θ), que assume, em relação à tecnologia, o papel que ela desempenha em relação à técnica, ou seja, a tecnologia da tecnologia. De acordo com o autor, a regressão de justificativa pode ser infinita, mas três níveis são suficientes (técnica/ tecnologia/ teoria) para explicar uma atividade analisada.

Valendo-nos das explicações apresentadas, neste trabalho, apresentamos a análise de uma Organização Matemática mobilizadas pelos estudantes participantes para o cálculo da medida da área do fractal Árvore Pitagórica.

A ANÁLISE DE UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, apresentamos a análise praxeológica *a posteriori* das resoluções efetivadas pelos estudantes participantes desta pesquisa. Como uma forma de subsidiar a análise *a posteriori*, foi realizada uma análise *a priori*, mas por conta da limitação de páginas disponível para a produção deste texto, ela não será apresentada na presente discussão.

O colégio, onde foi realizada a produção dos dados, localiza-se na cidade de União da Vitória – PR. A implementação foi realizada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio e contava com 34 estudantes. Todos desenvolveram as tarefas propostas, mas apenas 17 estudantes devolveram os Termos de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e Consentimento

Livre e Esclarecido (TCLE) assinados. Por esse motivo, as análises realizadas são com base nas tarefas desses 17 estudantes.

A equipe que aplicou a sequência didática foi composta pelo pesquisador e primeiro autor deste trabalho, pela professora regente da turma e por duas professoras colaboradoras. A implementação ocorreu nos dias 12 e 26 de abril e 03 de maio de 2022, com duração de 8 horas-aulas, dividida em 3 horas-aulas para os dois primeiros encontros e 2 horas-aulas para o último.

De modo a preservar a identidade dos estudantes, identificamos cada participante com a letra E referindo-se a estudante, seguido de um número subscrito de 1 a 17, da seguinte forma: E_1, E_2, ..., E_{17}. Os estudantes E_1, E_8 e E_{17}, e optaram por realizar as tarefas individualmente, os demais estudantes formaram duplas. A dupla formada pelas estudantes E_{15} e E_{16} não compareceu ao primeiro encontro da implementação e por esse motivo suas resoluções são a partir da construção da Etapa 2 do fractal.

Com o objetivo de organizar e sistematizar as análises das praxeologias mobilizadas pelos estudantes participantes, elaboramos quadros relacionando os quartetos praxeológicos e os respectivos estudantes que mobilizaram a praxeologia indicada. Para a organização da análise *a posteriori*, identificamos as tarefas e as enumeramos de t_1 e t_2. Além disso, elaboramos cinco subtarefas para cada tarefa; e depois, indicamos a técnica, tecnologia e teoria correspondente a cada subtarefa.

Iniciamos com a apresentação do Quadro 1 contendo a análise *a posteriori* das praxeologias do tipo de tarefa T_1 referente à tarefa t_1.

Quadro 1. Análise *a posteriori* referente ao tipo de Tarefa

Tipo de Tarefa T_1	Generalizar o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_1	Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Estudantes	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (6 participantes)	$t_{1.1}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{1.1.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{1.1.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{1.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (4 participantes)	$t_{1.2}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{1.2.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{1.2.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{1.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (5 participantes) E_2 e E_3. (2 participantes)	$t_{1.3}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{1.3.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{1.2.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{1.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

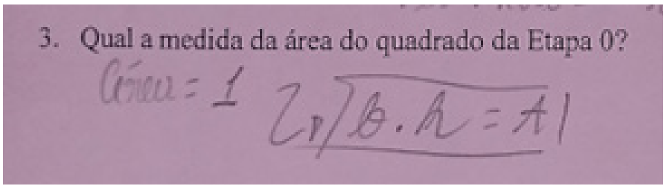
E_1; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}; E_{15} e E_{16}. (7 participantes)	$t_{1.4}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{1.4.1}$: Multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado.	$\theta_{1.4.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção geométrica de área e de multiplicação aritmética.	$\Theta_{1.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
Nenhum participante.	$T_{1.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído na Etapa N do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{1.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida da área de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{1.5.1}$: Noção de relação de recorrência; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; noção de multiplicação e de progressão geométrica.	$\Theta_{1.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: Elaboração dos autores.

Após a leitura do Quadro 1, no que concerne às subtarefas da tarefa , podemos observar que os estudantes apresentaram resoluções conforme previsto na análise *a priori*, com exceção da subtarefa , pois nenhum estudante conseguiu construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.

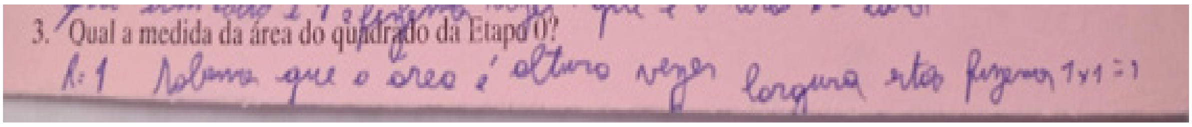
A respeito da resolução da subtarefa , os estudantes e , e , e e apresentaram a solução correta e com a técnica multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado. As imagens a seguir mostram as repostas dos estudantes:

Figura 8. Resolução de E_4 e E_5 referente à subtarefa $t_{2.1}$



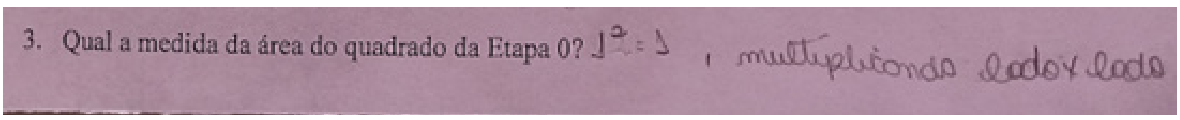
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Figura 9. Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.1}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

Figura 10. Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{2.1}$

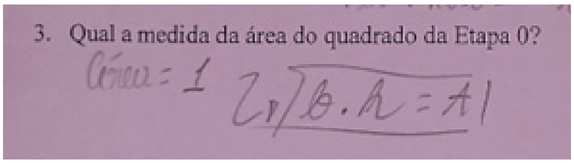


Fonte: Acervo dos autores (2022).

Assim, os es tudantes E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10} e mobilizaram a técnica $\tau_{1.1.1}$. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.1.1}, \theta_{1.1.1}, \Theta_{1.1.1}]$.

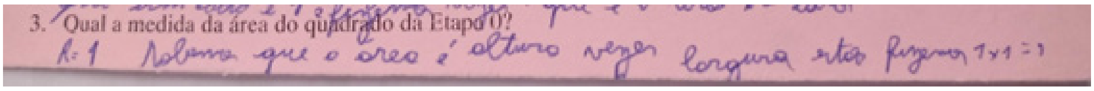
Os estudantes E_1, E_8, E_{11} e E_{12}, E_{13} e E_{14} apresentaram a resposta correta, mas com justificativas que consideramos inadequadas e por esse motivo não enquadramos a resposta em um quarteto praxeológico. A seguir, podemos ver as justificadas apresentadas pelos estudantes e E_1 e E_8:

Figura 11. Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{2.1}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

Figura 12. Resolução de E_8 referente à subtarefa $t_{2.1}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

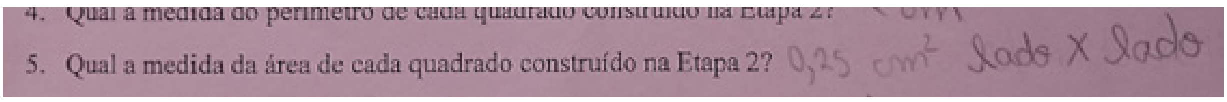
As estudantes E_{11} e E_{12}, E_{13} e E_{14} apresentaram uma justificativa idêntica à do estudante E_8. Poderíamos considerar essa justificativa se fosse complementada, por exemplo, do emprego da ferramenta Área, clicando sobre o quadrado para descobrir a área da figura, ou visualizando o valor da medida da área na Janela de Álgebra. Assim, se tratando de apenas um quadrado para essa etapa, se justificaria a resposta.

Para a resolução da subtarefa $t_{2.1}$, os estudantes E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} apresentaram a resposta correta, mas sem explicitar o processo utilizado. A resposta dos estudantes encontra-se na forma decimal e com valor aproximado, diferente do que previmos em nossa análise, uma vez que esperávamos a resposta na forma fracionária (1/2). Intuímos que os estudantes empregaram para essa subtarefa a mesma estratégia do item da etapa anterior, multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado. Nesse sentido, os estudantes E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{1.2.1}$. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.2.1}, \theta_{1.2.1}, \Theta_{1.2.1}]$.

Já os estudantes E_3 e E_4, E_{11} e E_{12} apresentaram a resposta correta, mas sem evidenciar o processo utilizado, por esse motivo não conseguimos identificar nem intuir a técnica empregada, portanto, as respostas não foram enquadradas em um quarteto praxeológico.

Para a subtarefa $t_{1.3}$ os estudantes E_1, E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} apresentaram resoluções semelhantes e que consideramos correta, mas na forma decimal, ao invés da forma fracionária (1/4) conforme previmos em nossa análise. A seguir apresentamos a resposta do estudante E_1:

Figura 13. Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{2.3}$

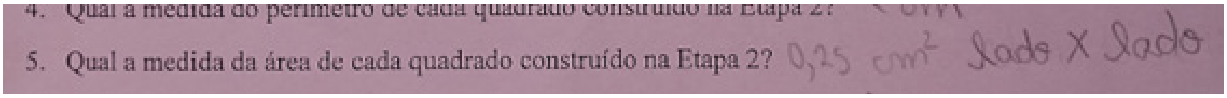


Fonte: Acervo dos autores (2022).

Desse modo, os estudantes E_1, E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{1.3.1}$. Logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.3.1}, \theta_{1.3.1}, \Theta_{1.3.1}]$.

As estudantes E_2 e E_3 apresentaram a resposta correta, mas com uma técnica diferente da que havíamos previsto em nossa análise. Portanto, para a resposta das estudantes identificamos o seguinte quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.3.2}, \theta_{1.3.2}, \Theta_{1.3.1}]$. A Figura 14 mostra a resposta das estudantes.

Figura 14. Resolução de E_2 e E_3 referente à subtarefa $t_{2.3}$

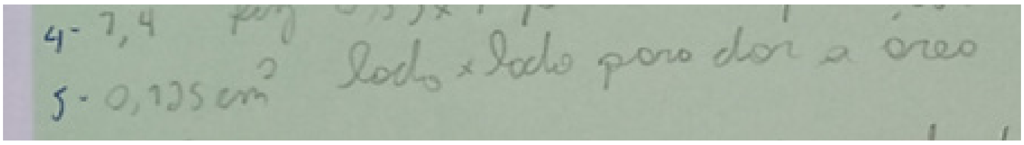


Fonte: Acervo dos autores (2022).

A justificativa é válida pois ao reconhecer a relação de recorrência entre a medida da área do quadrado construído em cada etapa, é possível afirmar que a medida da área do quadrado construído na Etapa 2 equivale à metade da medida da área do quadrado construído na etapa anterior. Desse modo, as estudantes E_2 e E_3 mobilizaram a técnica $\tau_{1.3.2}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{1.3.2}, \Theta_{1.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{1.3.2}$ ampara-se na noção geométrica de área e de divisão aritmética. Com relação à teoria $\Theta_{1.3.1}$, identificamos a Aritmética, a Geometria e Grandezas e medidas. Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.3.2}, \theta_{1.3.2}, \Theta_{1.3.1}]$.

No que diz respeito à subtarefa os estudantes E_1, E_6 e E_7, e E_{15} e E_{16} apresentaram respostas semelhantes, além de expressarem o valor aproximado e na forma decimal. As soluções se assemelham à resposta da dupla E_6 e E_7, conforme ilustra a figura abaixo.

Figura 15. Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.4}$



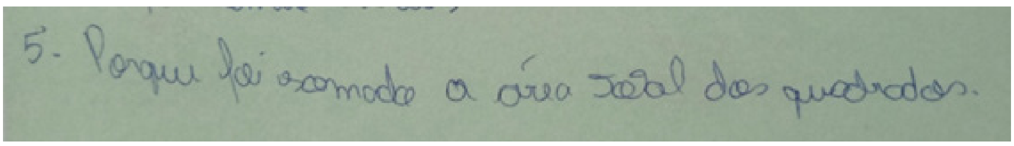
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Já as estudantes E_9 e E_{10} apresentaram apenas a resposta correta, sem explicitar a estratégia utilizada. No entanto, haja visto as respostas desse mesmo item para as etapas anteriores, intuímos que as estudantes empregaram a mesma técnica, multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado.

Dessa forma, os estudantes E_1, E_6 e E_7, E_9 e E_{10}, e E_{15} e E_{16} empregaram a técnica $\tau_{1.4.1}$. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_1, \tau_{1.4.1}, \theta_{1.4.1}, \Theta_{1.4.1}]$.

Para a resolução da subtarefa $t_{1.4}$, as estudantes E_{11} e E_{12} apresentaram a resposta correta, mas com a justificativa que consideramos equivocada. A figura seguinte ilustra a resposta das estudantes.

Figura 16. Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{2.4}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

A soma da área dos quadrados não justifica a resposta ao determinar a medida da área do quadrado construído na Etapa 3. Entendemos que essa explicação poderia ser usada ao determinar a medida da área total da figura (item 6 da tarefa), mas os estudantes não recorreram a essa justificativa.

Por fim, os estudantes E_4 e E_5 apresentaram a resposta correta, mas com valor aproximado e na forma decimal. Destacamos que a dupla não descreveu nenhuma explicação para obter essa solução. Assim, não conseguimos identificar um quarteto praxeológico para a resposta dos estudantes.

Na sequência, apresentamos o Quadro 2 contendo a análise *a posteriori* das praxeologias do tipo de tarefa T_2, referente à tarefa t_2.

Quadro 2. Análise *a posteriori* referente ao tipo de Tarefa

Tipo de Tarefa T_2	Generalizar o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_2	Construir uma fórmula para o cálculo da medida total da área da figura em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Estudantes	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
E_4 e E_5; E_6 e E_7; E_9 e E_{10}. (6 participantes)	$t_{2.1}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{2.1.1}$: Considerar a medida da área do quadrado encontrada no item anterior.	$\theta_{2.1.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado e noção geométrica de área..	$\Theta_{2.1.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_6 e E_7; (2 participantes) E_9 e E_{10}, E_{11} e E_{12}. (4 participantes)	$t_{2..2}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 1 do fractal..	$\tau_{2.2.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0). $\tau_{2.2.2}$: Somar a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0).	$\theta_{2.2.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção de multiplicação e soma aritmética. $\theta_{2.2.2}$: Conhecimento do elemento figural quadrado e noção de soma aritmética.	$\Theta_{2.2.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_1, E_6 e E_7. (3 participantes)	$t_{2.3}$: Encontrar a medida total da área da figura na Etapa 2 do fractal..	$\tau_{2.3.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 4 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 1).	$\theta_{2.3.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{2.3.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.

E_1, E_6 e E_7. (3 participantes)	$T_{2.4}$: Encontrar a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{2.4.1}$: Multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 8 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 2).	$\theta_{2.4.1}$: Conhecimento do elemento figural quadrado, noção de multiplicação e soma aritmética.	$\Theta_{2.4.1}$: Aritmética, Geometria e Grandezas e medidas.
E_6 e E_7. (2 participantes)	$T_{2.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida total da área da figura na Etapa N do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{2.5.1}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.	$\theta_{2.5.1}$: Noção de relação de recorrência; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; noção de multiplicação e de progressão geométrica.	$\Theta_{2.5.1}$: Álgebra e Aritmética.

Fonte: Elaboração dos autores.

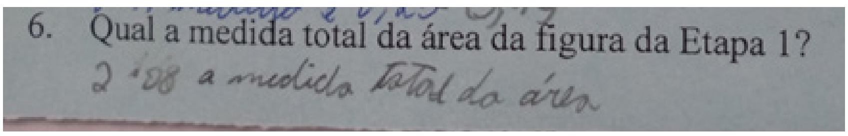
No que se refere ao que é apresentado no Quadro 2, verificamos que, para a subtarefa da tarefa $t_{2.1}$, os estudantes E_4 e E_5, E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} apresentaram a solução correta e com a técnica multiplicar a medida de um lado do quadrado pela medida do outro lado do quadrado. Ressaltamos que as soluções desse item correspondem também ao mesmo item da subtarefa $t_{1.1}$.

Deste modo, os estudantes E_4 e E_5, E_6 e E_7, e E_9 e E_{10} mobilizaram a técnica $\tau_{2.4.1}$. Assim, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.1.1}, \theta_{2.1.1}, \Theta_{2.1.1}]$.

Os estudantes E_1, E_8, E_5, E_{11} e E_{12}, e E_{13} e E_{14} apresentaram a resposta correta, mas da mesma forma que na subtarefa $t_{1.1}$, consideramos as justificativas inadequadas e por esse motivo não enquadramos a resposta em um quarteto praxeológico.

Para a resolução da subtarefa $t_{2.2}$, os estudantes E_6 e E_7 apresentaram a resposta correta, contudo não é possível identificar a técnica empregada. A seguir apresentamos a resposta da dupla:

Figura 17. Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{2.2}$

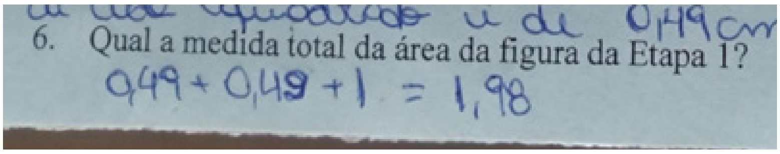


Fonte: Acervo dos autores (2022).

Com base nas respostas que os estudantes E_6 e E_7 apresentaram no mesmo item para as etapas posteriores, intuímos que, possivelmente, eles utilizaram a mesma estratégia, multiplicar a medida da área do quadrado construído nessa etapa por 2 e somar com a medida da área da figura da etapa anterior (Etapa 0). Dessa forma, os estudantes E_6 e E_7 empregaram a técnica $\tau_{2.2.1}$, logo, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico [T_2, $\tau_{2.2.1}$, $\theta_{2.2.1}$, $\Theta_{2.2.1}$].

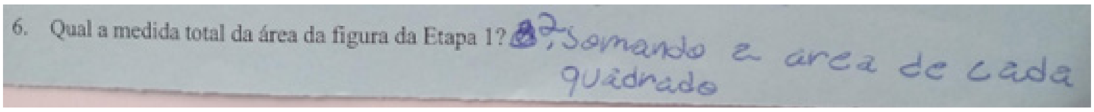
Sobre as estudantes E_9 e E_{10}, e E_{11} e E_{12} elas apresentaram resoluções corretas com o emprego da soma aritmética da área de todos os quadrados. Nesse sentido, não havíamos previsto essa técnica em nossa análise *a priori*, assim, para essa técnica identificamos o quarteto praxeológico [T_2, $\tau_{2.2.2}$, $\theta_{2.2.2}$, $\Theta_{2.2.2}$]. A técnica empregada pelas duplas é ilustrada na seguinte figura:

Figura 18. Resolução de E_9 e E_{10} referente à subtarefa $t_{2.2}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

Figura 19. Resolução de E_{11} e E_{12} referente à subtarefa $t_{2.2}$

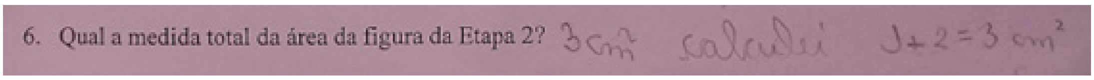


Fonte: Acervo dos autores (2022).

Assim, as estudantes E_9 e E_{10}, e E_{11} e E_{12} empregaram a técnica que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico [$\theta_{2.2.2}$, $\Theta_{2.2.2}$], em que a tecnologia $\theta_{2.2.2}$ pauta-se na noção de soma aritmética. Em relação à teoria $\Theta_{2.2.2}$, identificamos a Aritmética, a Geometria e Grandezas e medidas, pois os estudantes somaram a medida da área dos quadrados construídos nessa etapa com a medida da área total da etapa anterior. Portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico [T_2, $\tau_{2.2.2}$, $\theta_{2.2.2}$, $\Theta_{2.2.2}$].

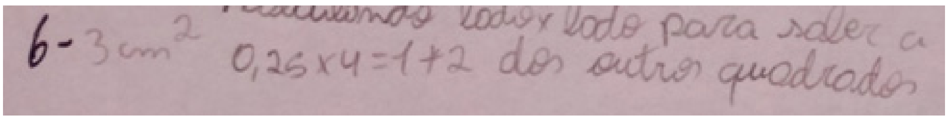
No que se refere à subtarefa $t_{2.3}$ os estudantes E_1, e E_6 e E_7 apresentaram resoluções conforme previmos em nossa análise. A seguir apresentamos as respostas dos estudantes:

Figura 20. Resolução de E_1 referente à subtarefa $t_{2.3}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

Figura 21. Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.3}$



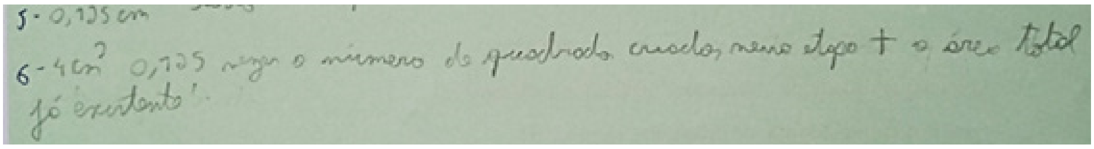
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Conforme o que foi exposto, é possível observar que os estudantes E_1, e E_6 e E_7 empregaram a técnica $\tau_{2.3.2}$, portanto, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico [T_2, $\tau_{2.3.1}$, $\theta_{2.3.1}$, $\Theta_{2.3.1}$].

Cabe destacar que as estudantes E_{15} e E_{16} apresentaram apenas a resposta correta sem evidenciar a estratégia utilizada. Dessa forma, não conseguimos identificar um quarteto praxeológico para essa solução.

No que concerne à subtarefa $t_{2.4}$, os estudantes E_1, e E_6 e E_7 apresentaram resoluções conforme previmos em nossa análise. Os estudantes descreveram justificativas idênticas para esse item da tarefa, portanto, na figura seguinte apresentamos apenas a resolução da dupla e E_6 e E_7:

Figura 22. Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.4}$



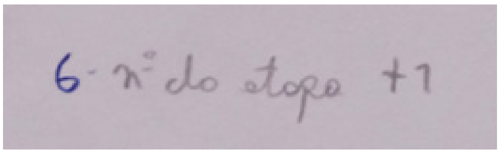
Fonte: Acervo dos autores (2022).

É possível observar que os estudantes justificaram que multiplicaram o valor 0,125 (medida do lado do quadrado construído nessa etapa) pelo número de quadrados construídos na etapa e somam com a medida da área total já existente. Assim, os estudantes E_1, e E_6 e E_7 empregaram a técnica $\tau_{2.4.1}$, por conseguinte, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.4.1}, \theta_{2.4.1}, \Theta_{2.4.1}]$.

Salientamos que os estudantes E_4 e E_5, E_8, E_9 e E_{10}, E_{11} e E_{12} e E_{15} e E_{16} apresentaram a resposta correta, contudo não evidenciaram a estratégia utilizada. Em vista disso, não conseguimos identificar um quarteto praxeológico para as soluções dos estudantes.

Por último, para a subtarefa $t_{2.5}$ apenas os estudantes E_6 e E_7 apresentaram uma solução e corresponde à resposta prevista na análise *a priori*. A seguir, apresentamos a resposta da dupla:

Figura 23. Resolução de E_6 e E_7 referente à subtarefa $t_{2.5}$



Fonte: Acervo dos autores (2022).

Como é possível observar, os estudantes e conseguiram empregar a técnica $\tau_{2.5.1}$, que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta_{2.5.1}, \Theta_{2.5.1}]$, em que a tecnologia $\theta_{2.5.1}$ se embasa na noção de relação de recorrência.

No que diz respeito à teoria $\Theta_{2.5.1}$, que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a Álgebra, pois os estudantes reconheceram um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escreveram algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer. Em vista disso, foi possível identificar a mobilização do quarteto praxeológico $[T_2, \tau_{2.5.1}, \theta_{2.5.1}, \Theta_{2.5.1}]$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizamos a TAD como aporte teórico-metodológico, que foi fundamental e permitiu a elaboração de uma Organização Praxeológica com o objetivo de explorar algebricamente o fractal Árvore Pitagórica, além disso, essa teoria nos auxiliou na identificação das praxeologias matemáticas, permitindo a modelização e análises dos quartetos praxeológicos.

No que diz respeito à análise *a posteriori* dos elementos da tarefa t_1, foi possível concluir que a OM empregada pelos estudantes para as subtarefas $t_{1.1}$, $t_{1.2}$, $t_{1.3}$, $t_{1.4}$ e $t_{1.5}$, do Tipo de tarefa T_1, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*. A única subtarefa em que ocorreu a mobilização de um quarteto praxeológico que não previmos em nossa análise foi a subtarefa $t_{1.3}$. Nessa subtarefa, as estudantes E_2 e E_3 empregaram a técnica de identificar a relação de recorrência entre a medida da área de cada quadrado construído na Etapa 2 e o quadrado construído na etapa anterior e dividir a medida da área do quadrado construído por 2. Nesse sentido, identificamos o quarteto praxeológico [T_1, $\tau_{1.3.2}$, $\theta_{1.3.2}$, $\Theta_{1.3.1}$].

No que concerne à análise *a posteriori* dos elementos da tarefa t_2, concluímos que a OM empregada pelos estudantes para todas as subtarefas do Tipo de tarefa T_2, foi validada devido à mobilização das técnicas previstas na análise *a priori*. Destacamos que para a subtarefa $t_{2.5}$, apenas os estudantes E_6 e E_7 apresentaram uma solução. A técnica empregada pelos estudantes foi de identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida total da área da figura e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida total da área da figura em uma etapa qualquer.

Por fim, salientamos que o software GeoGebra teve uma contribuição pertinente no que se refere à construção da Árvore Pitagórica e também se apresenta com um bom recurso para auxiliar no entendimento dos aspectos geométricos relacionados à visualização e às explorações matemáticas advindas deste fractal.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal**: para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica. 2005.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l' approche anthropologique. IUFM d'Aix-Marseille.1998.

CHEVALLARD, Yves. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso. (Org.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. 1. ed. Curitiba: CRV, 2018, p. 31-50.

DIAS, Marlene Alves; SANTOS JÚNIOR, Valdir Bezerra dos. Elementos da Teoria Antropológica do Didático para Análise das Propostas Institucionais Brasileiras e Metodologias de Atividades e Percursos de Estudo e Pesquisa. In: ALMOULOUD, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso. (Org.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. 1. ed. Curitiba: CRV, 2018, p. 523-550.

FREITAS, Maxlei Vinícius Cândido; BITTAR, Marilena. O Ensino de Volumes dos Sólidos Geométricos em Livros Didáticos do Ensino Médio Sob a Ótica da TAD. In: **Anais do 1º Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**, 2016, Bonito. Bonito: LADIMA, 2016.

MORAN, Mariana; REZENDE, Veridiana. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Revista Boletim online de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 15, p. 109-127, 2020. https://doi.org/10.5965/2357724X08152020109

PARANÁ. Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: SEED. 2021.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba: SEED. 2008.

PEREIRA, Tiago; BORGES, Fábio Alexandre. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 4, p. 563-581, 2017.

REZENDE, Veridiana; MORAN, Mariana; MÁRTIRES, Thais Michele; PAIXÃO, Fabrícia Carvalho. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 160-171, 2018. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n2p160-171

SANTOS, Cintia Melo dos; FREITAS, José Luiz Magalhães de. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. **Amazônia– Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Belém, v. 13, n. 27, p. 51-66, 2017. https://doi.org/10.18542/amazrecm.v13i27.4281

Histórico

Recebido: 25 de agosto de 2023.
Aceito: 11 de dezembro de 2023.
Publicado: 22 de dezembro de 2023.

Como citar – ABNT

PADILHA, Luan; MORAN, Mariana. Uma Organização Matemática para o cálculo da medida da área do fractal Árvore Pitagórica. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 43, e2023037, 2023. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023037.id519

Como citar – APA

PADILHA, L.; MORAN, M. (2023). Uma Organização Matemática para o cálculo da medida da área do fractal Árvore Pitagórica. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (43), e2023037. https://doi.org/https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023037.id519