

¿Extraer la raíz de un cuadrado? Matemática y metáfora¹

Extract the root of a square? Mathematics and metaphor

Extrair a raiz de um quadrado? Matemática e metáfora

Emmánuel Lizcano Fernandez² 

RESUMO

A linguagem matemática é habitualmente considerada como modelo de linguagem rigorosa e isenta, tanto de ambiguidades como de pré-juízos sociais ou históricos. Sem dúvida, como veremos, é uma linguagem carregada de metáforas, através das quais os significados passam das línguas maternas à linguagem matemática (a metáfora consiste no traslado de significados). Nesse trânsito, os pré-juízos e crenças de cada cultura e cada época histórica vão dando forma aos conceitos, operações e argumentações dos matemáticos, por mais severos que sejam. Analisamos aqui duas metáforas que modelam o coração de duas operações matemáticas fundamentais: a raiz quadrada e a subtração. Extrair a raiz de um quadrado, ou seja, calcular o lado de um quadrado cuja substância tenha o poder (o potência) de alimentar ou engendrar todo o quadrado, é trasladar-nos do campo da geometria ao da botânica e raciocinar como se tratássemos com plantas em lugar de fazê-lo com figuras geométricas que, como sabemos, são objetos inanimados sem nenhuma potência nem raízes das quais se alimentam. Por outro lado, para pensar a metáfora que habita sob a subtração fazemos uma comparação com sua operação equivalente na China clássica e nos questionamos como se extrai ou subtrai; isso o fazem como quem enfrenta magnitudes opostas. No marco de nossa metáfora, não podemos subtrair de donde não há, e por isso os números negativos foram impensáveis para os melhores matemáticos de nossa história... até que se puseram a pensar como os chineses: não por subtração, mas por oposição. Concluímos mostrando como julgaram essas duas metáforas (subtração e oposição) na resolução da crise que hizo tambalearse à teoria de conjuntos.

Palavras-chave: Raiz Quadrada; Matemática e Metáfora; Linguagem Matemática; Cultura Matemática; História Matemática.

ABSTRACT

Mathematical language is usually considered a model of rigorous and free language, both from ambiguities and from social or historical prejudices. Undoubtedly, as we will see, it is a language laden with metaphors, through which meanings pass from mother tongues to mathematical language (metaphor consists in transferring meanings). In this transit, the prejudices and beliefs of each culture and each historical period shape the concepts, operations and arguments of mathematicians, however severe they may be. We analyze here two metaphors that model the heart of two fundamental mathematical operations: square root and subtraction. Extracting the root of a square, that is, calculating the side of a square whose substance has the power (potency) to feed or engender the whole square, is to transfer us from the field of geometry to that of botany and to reason as if we were dealing with plants instead of geometric figures which, as we know, are inanimate objects without any power or roots from which they feed. On the other hand, to think about the metaphor that inhabits subtraction, we make a comparison with its equivalent operation in classical China and ask ourselves how one extracts or subtracts; this they do as one who faces opposite magnitudes. Within the framework of our metaphor, we cannot subtract from where there are none, and that is why negative numbers were unthinkable for the best mathematicians in our history... until they began to think like the Chinese: not by subtraction, but by opposition. We conclude by showing how these two metaphors (subtraction and opposition) judged in solving the crisis that shook set theory.

Keywords: Square Root; Mathematics and Metaphor; Mathematical Language; Mathematics Culture; Mathematical History.

RESUMEN

El lenguaje matemático es habitualmente considerado como modelo de lenguaje riguroso y exento tanto de ambigüedades como de prejuicios sociales o históricos. Sin embargo, como veremos, es un lenguaje cargado de metáforas; a través de ellas los significados pasan de las lenguas maternas al lenguaje matemático (en ese traslado de significados consiste la metáfora) y en ese tránsito los pre-juicios y creencias de cada cultura y cada época histórica van dando forma a los conceptos, operaciones y argumentaciones de los matemáticos, por severos que sean. Analizamos aquí, con detalle, dos metáforas que modelan el corazón mismo (!) de dos operaciones matemáticas fundamentales: la raíz cuadrada y la resta o sustracción. Extraer la raíz de un cuadrado, es decir,

1 Este artigo foi originalmente publicado na Revista de Occidente, Nº 422, 2016 (Ejemplar dedicado a: Metáfora y ciencia), págs. 88-104. Nesta edição da REMATEC, foram feitas algumas alterações no artigo para atualizar o tema e atender aos interesses do número especial da revista.

2 Doutor em Filosofia da Ciência e Licenciado em Matemáticas pela Universidade Autónoma de Madrid (UAM). Professor Titular de Sociología do Conhecimento da Universidade Nacional de Educação a Distância (UNED/Madrid, Espanha). E-mail: elizcano@poli.uned.es

calcular el lado de un cuadrado cuya sustancia tenga el poder (o potencia) de alimentar o engendrar todo el cuadrado es trasladarnos del campo de la geometría al de la botánica y ponernos a razonar como si tratáramos con plantas en lugar de hacerlo con figuras geométricas que, como sabemos, son objetos inanimados sin ninguna potencia ni raíces de las que se alimentan. Por otro lado, para pensar la metáfora que habita bajo nuestra resta nos ayudaremos aquí de la comparación con su operación equivalente en la China clásica. Nosotros restamos como el que extrae o sustrae; ellos lo hacen como quien enfrenta magnitudes opuestas. En el marco de nuestra metáfora, no podemos sustraer de donde no hay, y por ello los números negativos fueron impensables para los mejores matemáticos de nuestra historia... hasta que se pusieron a pensar como los chinos: no por sustracción sino por oposición. Concluiremos mostrando qué papel jugaron esas dos metáforas (sustracción y oposición) en la resolución de la crisis que hizo tambalearse a la teoría de conjuntos.

Palabras clave: Raíz cuadrada; Matemáticas y Metáfora; Lenguaje Matemático; Cultura Matemática; Historia Matemática.

INTRODUCCIÓN

Aunque ya bien adentrados en el siglo 21, las matemáticas siguen siendo el refugio del más acendrado platonismo. Sus objetos, sus operaciones, sus demostraciones... son el más claro ejemplo, acaso ya el único, de entidades inmateriales, eternas (sin origen ni final, ahistóricas), ajenas al cambio (inmutables, incorruptibles, siempre idénticas a sí mismas), autosubsistentes (independientes de ser o no pensadas, de haberse realizado o no). Por ello fungen como modelo o arquetipo de cualquier otra forma posible de ser, cuya realidad y racionalidad dependen del grado en que participe –o sea copia– de su esencia, de su posibilidad de ser más o menos matematizables. De ahí el carácter sagrado que las matemáticas aún mantienen entre nosotros, como evidencian multitud de expresiones habituales que dicen de su condición separada e intocable: *matemática pura*, *razonamiento immaculado*, *des-cubrir* (no construir) un *teorema* (de *theaomai*, 'contemplar'), cálculos *incuestionables*. En ocasiones, las metáforas habituales llegan a fetichizar los objetos matemáticos, dotándoles de vida propia: los números *cantan o hablan por sí mismos*, los indicadores *sufren* caídas o las curvas de producción *crecen*... Otras veces, los que resultan matematizados son situaciones u objetos profanos a cuyo estudio se pretende contagiar del aura de sacralidad que impregna a la matemática: así, de un problema se predica el estar *sobredimensionado*, o se habla de *parámetros* culturales, *coeficientes* de peligrosidad, *segmentos* sociales, *coordenadas* políticas, *niveles* de desarrollo, *despejar* la incógnita sobre una candidatura, *sumar* voluntades, *gradientes* de tensión laboral, o circulan como la falsa moneda oxímoros como ese de las *in-mensas mayorías*.

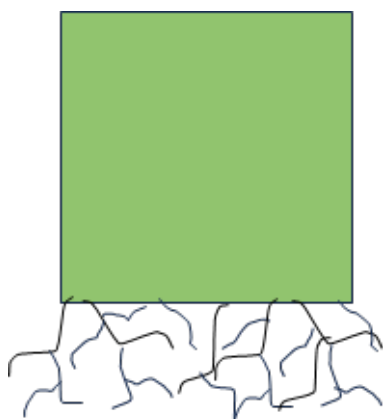
Pero no nos detendremos aquí en las metáforas que pueblan los usos profanos de las matemáticas pues podría creerse que, en ellos, las matemáticas resultan profanadas o contaminadas por agentes externos a la actividad matemática misma, que así vería reforzada su condición de pureza y sacralidad. Nuestro objetivo es internarnos en el corazón mismo de la matemática, en sus conceptos y operaciones, y mostrar cómo ya está bullendo ahí el estiércol lingüístico y cultural en el que nacen, del que se alimentan y con el que abonan su lógica. Las metáforas muertas que las operaciones y conceptos matemáticos albergan en secreto serán el vehículo por el que ese *humus* se nos manifieste, pues son ellas las que trasladan los significados propios de las lenguas vernáculas al lenguaje matemático. Esa voz *del cielo* que todos hemos aprendido a apreciar reverentemente al oír o leer definiciones, demostraciones u otros fragmentos de discurso matemático resultará, al cabo, no ser sino voz *del pueblo*, meros significados y expresiones del lenguaje *vulgar* que los matemáticos de cada momento comparten, como no puede ser de otro modo, con los paisanos de su misma lengua. Aquel prodigioso autodesplegarse de un lenguaje singular, reservado sólo a algunos expertos, resulta ser la propia lengua, el castellano que hablábamos yo y mi gente,

el griego que hablaban Euclides y su gente, el chino que hablaban Liu Hui y su gente, esa lengua *corriente* y *moliente* que, precisamente por su correr y moler, produce maravillas de continuo: mitos, dichos, leyendas, canciones... y matemáticas.

EL ARTE DE NOMBRAR

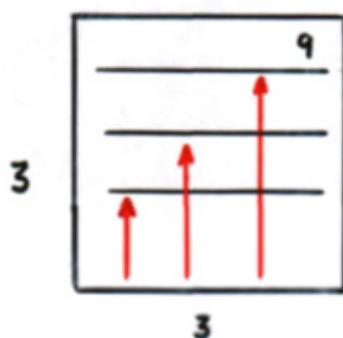
La circunstancia del matemático que se enfrenta a una situación para la que aún no tiene un concepto *apropiado* es semejante a la de cualquier profano ante un objeto, situación o hecho para el cual carece de un término *apropiado* en su repertorio léxico: evoca, más o menos inconscientemente, un término *propio* de otro objeto, situación o hecho análogo que sí le resulte familiar y lo traslada de manera *impropia* –es decir, metafóricamente– al objeto, situación o hecho inicial, que queda ahora enmarcado y aclarado. Así, cuando hablamos de sonidos graves o agudos, trasladamos términos propios del ámbito táctil al sonoro, pues ciertos sonidos nos evocan pesantez o penetración.

Imaginemos a un geómetra de la Grecia clásica que conoce el área de un cuadrado y se pregunta por la longitud de su lado. ¿Cómo pensarla? ¿Qué imagen le resulta evocada de manera inmediata? Aunque hoy nos pueda parecer increíble, la imagen que le viene a la cabeza es la de la raíz de una planta. El cuadrado se le presenta como un vegetal; y su lado, como la raíz de la que el cuadrado se alimenta: la raíz-lado, al desplegar toda su potencia (*dynamis*), engendra al cuadrado: el cuadrado es la *potencia* (cuadrada) del lado, aquello que el lado-raíz *puede* llegar a dar de sí. Las versiones latinas posteriores se referirán al lado como la *substantia* del cuadrado, aquello de lo que el cuadrado se *sustenta* u obtiene su *sustancia*; el matemático portugués Pedro Nunes aún hablará en el siglo 16 de *lado* criando *cuadrado*.



SEMEJANZA

Botánica - Geometría



ANALOGÍA

$$\frac{\text{raíz}}{\text{planta}} = \frac{\text{lado}}{\text{cuadrado}}$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3^2 = 9$$

METÁFORA

El lado es la raíz del cuadrado

Por eso, para calcular el lado, hablamos todavía hoy de *extraer* la raíz del cuadrado (o, de manera abreviada, extraer la raíz cuadrada). Y así, la situación inicial que se intentaba pensar (el lado del cuadrado), al adquirir forma (forma de raíz) resulta ya pensable y el problema (calcular su longitud) se hace un problema resoluble.

Pero lo que pudiera parecer una mera curiosidad lingüística resulta tener una importancia matemática decisiva. La condición metafórica original del concepto matemático así construido marcará el destino de éste a lo largo del tiempo. La lógica que gobernará las operaciones matemáticas en las que intervengan raíces cuadradas no será esa lógica formal que nos han acostumbrado a admirar y acatar como ineluctable, sino una lógica metafórica, una lógica en la que ciertas operaciones podrán –o no– efectuarse en función de que tengan –o no– sentido dentro del marco impuesto por el uso de esa metáfora y no de otra.

Toda la historia de los números imaginarios (las raíces cuadradas de números negativos), hasta su misma interpretación probabilística en mecánica cuántica, es una divertidísima sucesión de disparates encaminados a dar sentido a ese sinsentido que es buscar la raíz de la que se nutre un cuadrado que no sólo es nada sino, peor aún, menos que nada: ¿Cómo imaginar una raíz que alimenta a una planta inexistente?

No en vano, Leibniz los llamó *centauros ontológicos*, pues están *a medio camino entre el ser y el no ser*. Si hoy no se estudian funciones de *variable centáurica*, sino de variable compleja (integrada por números *imaginarios*), se debe a que la metáfora propuesta por Descartes pareció más *realista* a sus sucesores: esos números son imaginarios *porque sólo existen en la imaginación, y no en la realidad*. Lástima que este vulgar realista no viviera para asistir al despliegue de imaginación al que tuvo que recurrir su posteridad para construir esos números que, a diferencia de los imaginarios, hoy llamamos *reales*: ya se definan mediante cortaduras de Dedekind, ya mediante sucesiones de Cauchy o cualquier otro formalismo, su condición ficticia no es menor que la de los números imaginarios (aunque haya quien vea esos números reales plantados en la mismísima *realidad*, usando ojos parecidos, si bien ya modernos, a aquellos que veían cuadrados echando raíces).

Apliquemos ahora este análisis a aquel objeto matemático que ni siquiera el llamado *programa fuerte en sociología del conocimiento científico* (Bloor, 1998) era capaz de explicar: el cero. Y lo haremos en dos contextos sociales e históricos bien diferentes, donde los dispositivos simbólicos que se ponen en marcha son, en cada caso, también radicalmente distintos.

Analizaremos, en lo que sigue, cómo dos culturas clásicas, la griega y la china, han intentado conceptualizar un ‘mismo’ objeto matemático: el número cero (Lizcano, 1993). Veremos cómo, en el intento, sus matemáticos han movilizad metáforas bien distintas, de las cuales no sólo se han seguido *ceros* muy diferentes, sino también, siguiendo la impecable lógica impuesta por cada metáfora respectiva, operaciones matemáticas muy diferentes (como la operación que nosotros llamamos *resta*) e incluso consideraciones opuestas sobre si un cierto resultado es –o no– la solución de un problema.

MATEMÁTICA Y PRE-JUICIO

En la Grecia clásica, el texto que más aproximadamente evoca algo como nuestro cero pertenece al libro IV de la *Physica* de Aristóteles. Este texto se encuentra entre los muchos argumentos con los que Aristóteles intenta espantar racionalmente el pánico al vacío, y dice así:

Pero no hay ninguna razón en la que el vacío (*kenón*) sea excedido por los cuerpos, de igual modo que ‘nada’ (*mèdén* = nada hay que) no está en razón alguna con un

número. Pues 4 excede a 3 en 1, y a 2 en más (que 1), y a 1 en todavía más de lo que excede a 2; pero cuando llegamos a nada (*mèdenós*) no hay razón alguna en la que 4 lo exceda, pues el número que excede debe dividirse en el exceso y el número que es excedido, así que 4 debería ser la suma del exceso y nada [aquí *oudén*, no *mèdén*: no hay concepto para ese 'nada']. Por esto, tampoco una línea excede a un punto (en ninguna razón), porque no está hecha de puntos. Similarmente, el vacío no puede estar en razón alguna con lo lleno.

El argumento entrelaza tres artificios retóricos: un razonamiento por analogía, una inducción frustrada y una demostración por reducción al absurdo, que apela al prestigio de las matemáticas para consolidar un pre-juicio común a toda la tribu: la imposibilidad del vacío. El supuesto analógico es: el vacío, si existiera, sería a los cuerpos lo que nada es a los números (vacío/cuerpos = nada (no) / números). En él descansa la demostración 'por reducción al absurdo': si hubiera una relación (sumativa) entre el vacío y los cuerpos habría de ser como la que habría entre nada y los números; pero, como es impensable que haya una relación entre nada y número, hemos de concluir que tampoco puede haberla entre el vacío y los cuerpos. Y la imposibilidad de esa relación entre nada y número se evidencia en una serie inductiva que, al cabo, resulta frustrada: $4 = 3+1$, $4 = 2+2$, $4 = 1+3$, $4 = \textit{mèden}+4$: nada puede haber que, añadido a 4, dé como resultado 4. Al llegar ahí, el argumento toca fondo (el fondo de la evidencia colectiva, de la opinión común) y rebota: por analogía a la 'sinrazón' de 'nada' se concluye la sinrazón del vacío.

Si ahora nos trasladamos a la China de la época de los Primeros Han, lo primero que choca no es encontrarse con el cero ya en el texto clásico más antiguo de la matemática China (*Los nueve capítulos del arte matemático*), sino topar con una multitud de ceros: unos que reciben distintos nombres según el contexto matemático en que aparecen (resolución de ecuaciones, cálculo de raíces cuadradas) y otros que aparecen en contextos que ni siquiera son matemáticos (técnicas adivinatorias, esquemas cosmogónicos). El cero está tan extendido en China como lo está en Grecia la aversión por él.

Pero vayamos de nuevo a los textos mismos. En el capítulo 8º de *Los nueve capítulos* el problema 8 dice:

Al vender 2 vacas y 5 cabras para comprar 13 cerdos, hay un superávit de 1000 monedas. El dinero obtenido de vender 3 vacas y 3 cerdos da justo para comprar 9 cabras. Al vender 6 cabras y 8 cerdos para comprar 5 vacas, hay un déficit de 600 monedas. ¿Cuál es el precio de una vaca, de una cabra y de un cerdo?

Hasta aquí, no parece haber nada nuevo. Pero la primera sorpresa surge al ver representado el planteamiento del problema: no en un espacio extenso como el euclídeo sino en un espacio simbólico, como el que desarrollará el álgebra matricial europea del siglo 19. Pues bien, serán precisamente las características de estos espacios de representación las que den una realidad u otra, o incluso den o nieguen realidad, a lo que en ellos se representa. Será la re-presentación la que construya la presencia real de ciertos objetos, y no a la inversa.

5	3	2	vacas
6	-9	6	cabras
8	3	-13	cerdos
-600	1000	shi	

En la figura podemos observar una serie de características no matemáticas que, sin embargo, condicionan radicalmente cualquier intento de hacer matemática. Estas características atañen a: a) las propiedades de cada lengua particular, b) cierto modo de concebir el espacio de representación, y c) la materia con la que se fabrican los números para colocarlos en el espacio de representación.

La disposición de la matriz reproduce la de la lengua china escrita: en columnas de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Igual que la expresión de una ecuación en Occidente reproduce la estructura de las lenguas indoeuropeas (la segunda columna: $3x + 3z = 9y$ se corresponde con Sujeto–Verbo–Predicado: *3 vacas y 3 cerdos dan justo para 9 cabras*). Pero esta aparente trivialidad condiciona el que ciertas cosas puedan decirse y otras no.

En la matriz, cada número (colección de palillos rojos o negros) significa en función del lugar que ocupa en el conjunto. No otra cosa ocurre con los ideogramas chinos, que son invariantes que adquieren un significado u otro según la posición que ocupan en la frase.

El ‘cero’ de la segunda columna es, en el original, un hueco: en ese lugar no hay palillos (números). En nuestras lenguas, el hueco en la escritura es insignificante: se limita a separar dos significados, dos palabras (como hace también el hueco-silencio entre dos palabras habladas). Pero ese hueco en la escritura china es un hueco que significa: y significa lo que significa por ocupar precisamente ese lugar y no otro.

Junto a las características lingüísticas y a las del espacio de representación, el tercer elemento que permite al imaginario chino pensar el ‘cero’ es el singular tipo de materialidad en que se expresa su sistema de numeración. El hecho de que los números no sean trazos-segmentos (como los de la geometría griega) ni piedras-cálculos (como los de la aritmética griega), sino algo que se pone al poner palillos en el tablero de cálculo, permite que –al operar los números entre sí– los palillos vayan cambiando de un lugar a otro, y que –en ciertos momentos– determinados lugares se queden vacíos de forma ‘natural’.

Pero si estos tres elementos (lenguaje, espacio simbólico de representación y palillos numerales) posibilitan el que pueda emerger algo como el cero, no determinan necesariamente esa emergencia. ¿De dónde sacan entonces los matemáticos chinos la inspiración y el material con los que construir esos procedimientos y esos objetos que son *imposibles* para otros matemáticos, como los griegos o los renacentistas o incluso los de la Ilustración europea? Ese manantial no es otro que la sociedad china de la época, con su peculiar conformación mítico-simbólica.

Una buena pista para adentrarnos en ese universo imaginario de la China anterior a los Han nos la suministran los propios palillos numerales. Los mismos palillos que se usan en álgebra son también los empleados en multitud de otras operaciones, no matemáticas sino populares: leer el futuro, reflexionar según las técnicas del *I Ching*, jugar a diversos juegos, comer... En esos palillos está, precipitada, materializada, buena parte del imaginario social y de la memoria colectiva del pueblo chino. Por medio de los palillos la actividad matemática se funde, y se confunde, con otras mil actividades cotidianas.

Pues bien, en su uso algebraico, esos palillos son de dos colores (negro y rojo) o de dos formas (sección cuadrada o triangular), que se corresponden con lo que nosotros llama-

ríamos números negativos y positivos, respectivamente. Números que, como el cero, tampoco tienen el menor sentido ni para el álgebra geométrica griega ni para la potente álgebra simbólica árabe. Observemos cómo trabajan estos palillos en el álgebra *fang cheng* para la resolución de sistemas de n ecuaciones con m incógnitas (un método que no se conocerá en Europa hasta el siglo 19 bajo el vanidoso nombre de método de Gauss).

El propósito del método es ir emparejando (*dui ze*) y equilibrando (*qi tong*) entre sí palillos negros y rojos, de modo que se vayan destruyendo mutuamente (*xiang xiao*), hasta conseguir que determinados lugares queden vacíos, que en ellos los palillos desaparezcan (*jin*) (lo que en matemática moderna se llamaría diagonalizar la matriz). Literalmente, se trata de un sofisticado método para producir nada, para obtener el vacío, un método que pondría los pelos de punta a cualquier griego que se preciara.

La operación *zheng / fu*

	<i>dui ze</i> (emparejar)	<i>xiang xiao</i> (destrucción mutua)	RESULTADO
4 - 3			 + 1
3 - 4			 - 1

Lo interesante es observar la perfecta homología que entrelaza a la terna matemática *zheng/fu/wu* (palillos-rojos/palillos-negros/hueco-en-el-tablero) con la terna simbólica *yang/yin/tao* (Lizcano, 2013). Una terna –esta última– en torno a la que se anuda todo el complejo de significaciones imaginarias chinas y que alimenta tanto el vocabulario como los modelos teóricos de todos los saberes chinos: filosofía, física y química, geografía, astronomía, etc. Una terna que Granet (1968) ha estudiado magistralmente en su doble dimensión de dar forma a –y también expresar– las distintas dimensiones y dinamismos de la vida social en China: fiestas populares, disposición de las habitaciones de la casa, formas de gobierno de las comunidades locales, etc.

Todo este complejo es el que resulta focalizado cuando el algebrista chino se enfrenta con lo que nosotros hoy llamaríamos el ‘cero’. Ahora bien, aunque puede decirse que, en cierto sentido, tanto Aristóteles como Liu Hui afrontan el mismo problema (el de encontrar un equivalente numérico de un vacío físico, sea éste un no-ser o un hueco en el tablero), no es menos cierto que los magmas imaginarios de cada uno son muy distintos. Por eso el estagirita no puede decir nada sobre lo que nada es (el ‘cero’/vacío), mientras que el súbdito del

rey Wei ve el hueco como un número con la misma plasticidad con que tantas narraciones taoístas que él ha escuchado hablan de la potencia del vacío y de su papel como gozne o quicio que articula los opuestos.

Esos pre-su-puestos (lo que se pone previamente debajo), evidencias (lo que se da por des-contado) o pre-juicios (lo que es previo a la emisión de cualquier juicio) son los que se han movilizado ante el problema inicial y han resultado evocados al focalizar éste sobre la imagen que lo simboliza.

CÓMO HACER COSAS (MATEMÁTICAS) CON METÁFORAS

Es en el desentramado de estos nudos del imaginario donde el recurso al análisis de las metáforas presentes en los textos matemáticos se revela en toda su capacidad heurística. En última instancia, todo el análisis anterior casi puede derivarse de observar un par de metáforas básicas y, a continuación, ir sacando todas las consecuencias que se siguen de ellas.

Al chino, el cero se la ha hecho presente mediante un modo de operar con números regido por la *metáfora del emparejamiento* (*diu ze*), que es la que rige todo un imaginario estructurado en torno a la oposición *yin/yang*. Cuando se emparejan y oponen dos colecciones de igual número de palillos de diferentes colores, al destruirse entre sí (*xiang xiao*), lo que resulta o *resta* es un hueco: el cero. Para el griego, eso que resta es también un hueco; no obstante, ese hueco es un imposible, numérico y físico. Si recuperamos ahora el anterior razonamiento aristotélico contra el vacío, también aparece la operación de la resta (de modo implícito), pero esa resta viene ahora gobernada por una metáfora bien distinta: la *metáfora de la sustracción*.

Prótesis	aphaíresis
$4 = 3 + 1$	$4 - 1 = 3$
$4 = 2 + 2$	$4 - 2 = 2$
$4 = 1 + 3$	$4 - 3 = 1$
$4 = ? + 4$	$4 - 4 = ?$

El término que los matemáticos griegos usan para la operación que nosotros llamamos 'resta' o 'sustracción' es el de *aphaíresis*³, y tiene el mismo significado que en nuestra lengua: sacar, extraer, sustraer, arrancar... Los números o las magnitudes se sustraen entre sí *como si* fueran cosas materiales las que se extrajesen (por eso habla Ortega del *cosismo* griego): restar un número de otro es la misma operación que extraer piedrecitas (*calculos*, les llaman los matemáticos latinos; *psophoi*, los griegos) de una colección de ellas o extraer mármol de un bloque para modelar una estatua (la estatua sería el *resto* o *residuo* que queda tras efectuar la sustracción).

El razonamiento de Aristóteles que reproducíamos al comienzo podría exponerse entonces en términos sustractivos (es decir, en términos de *aphaíresis*) en lugar de hacerlo, como él, en términos sumativos (es decir, en términos de *prósthesis*, que es la operación opuesta a la *aphaíresis*) de la siguiente manera. Si tenemos una bolsa con 4 piedras y ex-

³ Entre nosotros aún se conservan residuos técnicos del término. 'Aféresis' se llama, en medicina, al procedimiento en el cual se *extrae* la sangre y se separa en sus componentes mediante diálisis. Y, en fonética, a la *supresión* de un sonido o grupo de sonidos al comienzo de una palabra, como la 'p' de psicología.

traemos 1, quedan 3; si extraemos 2, quedan 2; si extraemos 3, queda 1; y si extraemos 4, queda... ¡nada! Luego es imposible, es una operación sin sentido.

Este sinsentido es aún más plástico si partimos, no de una bolsa, sino de un bloque de mármol: podemos ir extrayendo material e ir obteniendo distintas figuras, pero ¿a qué escultor se le ocurriría llegar a pulverizar todo el bloque? ¿Qué figura puede *restar* tras haber aniquilado, literalmente, el bloque entero? Ha de ser un escultor que haya perdido el sentido, que haya *extraviado la razón*⁴.

La metáfora de la sustracción impone así, como toda metáfora, un «marco» desde el cual la operación enfocada actúa de cierta manera y, en consecuencia, tiene unos límites bien definidos. En este caso, tales límites vienen dados por la necesidad de concebir el objeto como una materia o sustancia de la que se extrae una parte. Lo que la matemática posterior construirá como 'número *cero*' queda así excluido y, con mucha más razón, los que también mucho más tarde se definirán como 'números *negativos*': ¿qué diríamos de nuestro escultor si, no satisfecho con haber pulverizado por completo el bloque inicial, siguiera aún golpeando en el vacío intentando extraer aún más materia?

A los matemáticos chinos les bastó con recurrir a otra metáfora para cambiar por completo el marco, desbordar los límites que imponía el anterior y, de paso, sacar del manicomio a nuestro querido escultor. Para ellos, el razonamiento que proponía Aristóteles se vería como el enfrentamiento de 4 palillos rojos con –sucesivamente– 1, 2, 3 y 4 palillos negros. Los resultado de operar $4 - 1$, $4 - 2$ y $4 - 3$ serían, respectivamente 3, 2 y 1 palillos rojos «vencedores», respectivamente. Y el resultado de $4 - 4$ sería un empate, pues los dos «ejércitos» de palillos se habrían aniquilado mutuamente. Lo cual no ofrece ninguna dificultad, pues el hueco que resulta es un número con el que se puede operar como con cualquiera de los restantes. No actúa ahí ningún *horror vacui* pues el vacío obtenido está preñado también de significado, un significado también positivo pues se asocia al *tao*, esa articulación del *yin* (palillos negros) y el *yang* (palillos rojos) en la que descansa todo el juego de los números (lo que hoy, en *teoría de grupos*, llamaríamos 'elemento neutro').

Pero más asombroso aún es que, desde este nuevo marco metafórico, tanto sentido tiene calcular $4 - 3$ como $3 - 4$. En el primer caso «sobreviviría» un palillo rojo (+1 diríamos nosotros), en el segundo sería un palillo negro el «superviviente» (nuestro -1). Los que hoy hemos construido como números positivos y negativos tienen así para el algebrista chino la misma *naturalidad*: tanto unos como otros podrían llamarse, con toda propiedad, 'números *naturales*'.

LA METÁFORA COMO DESTINO... NEGOCIABLE

Ahora bien, la impronta metafórica no se limita, como decíamos, a la mera construcción de un concepto (el *cero*) y de una operación (la sustracción o resta), sino que marcará buena parte de la historia posterior de la matemática. Basten dos ejemplos. Uno, el *Ensayo para introducir el concepto de magnitud negativa en la filosofía*, nos muestra a Kant discutiendo

⁴ La metáfora de la *sustracción* o *aphaíresis* cobra todo su peso cultural cuando observamos que ese mismo término es el usado para la operación mental de la *abstracción*. Dionisio Areopagita conecta admirablemente ambos usos cuando dice que *el escultor extrae todo el material hasta llegar a la belleza oculta en el bloque que está esculpiendo* (*Teología mística*) y aclara que *se llama aphaíresis = abstracción porque la inteligencia humana pasa de lo sensible a lo inteligible* (*Los nombres divinos*).

do aún si las magnitudes negativas deben o no considerarse números de pleno derecho: «Este caso [0-A] es imposible en el sentido filosófico, pues algo positivo nunca puede ser sustraído de nada. Si, en matemáticas, esta expresión es prácticamente exacta se debe a que [...]». ¿Imposible en filosofía pero no en matemáticas? ¿Exacta en matemáticas pero sólo *prácticamente*? Tampoco los mejores matemáticos de la Ilustración dejarán de recurrir a parecidas estrategias retóricas para evitar tratar con estos números *falsos*. Lazare Carnot, uno de los creadores de la geometría moderna, es contundente: «Para obtener realmente (*sic*) una cantidad negativa aislada, habría que quitar (*retrancher*) de cero una cantidad efectiva (*sic*), sacar (*ôter*) algo de nada: operación imposible». Las maniobras de D'Alembert para ocultar o escamotear ese imposible parecen propias de un trilerero. En las entradas *Négatif* y *Équation* en *L'Encyclopédie* de 1756, firmadas por él, sugiere reescribir el enunciado del problema de modo que donde decía 'añadir' diga 'quitar', y viceversa: con sólo un golpe semántico, lo imposible resulta posible. Pero como el truco a veces falla, se ve obligado a distinguir «diferentes grados de imposibilidad», decretando que, para los imposibles irreductibles, el enunciado habrá de declararse 'absurdo'. No que sea absurdo el resultado, sino el enunciado mismo: en realidad, se trataba de un falso problema. Y asunto resuelto.

En el otro ejemplo, podemos observar el choque de las dos metáforas de la resta aquí analizadas actuando en el origen mismo de la crisis de los fundamentos de las matemáticas asociada al desarrollo de la teoría de conjuntos. Una de las paradojas que desencadenan la crisis resulta de concebir los conjuntos transfinitos en los dos marcos alternativos ofrecidos por la metáfora sustractiva o la metáfora del emparejamiento. Desde la primera perspectiva, observamos que, si del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ extraemos el conjunto de los números pares $\mathbb{P}$, el conjunto resultante es estrictamente menor, pues queda un *resto* formado por el conjunto de todos los números impares $\mathbb{I}$. Pero, por otro lado, si apelamos al modelo de apareamiento propio de un imaginario como el chino, nos encontramos con que puede establecerse un emparejamiento o correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$, por lo que ambos conjuntos tendrían el mismo número de elementos.

Así, según enfoquemos el problema desde el marco impuesto por una u otra metáfora, obtenemos conclusiones incompatibles. Bloor (1988) ofrece un bello análisis de cómo se evitó el desastre recurriendo a un expediente tan poco matemático como es la negociación de una nueva definición de 'conjunto' que integrara ambas metáforas y disolviera la paradoja.



CONCLUSIÓN

Podemos concluir que, al imbricarse así con las metáforas que circulan en las lenguas vernáculas, el discurso matemático nos abre una fecunda vía de doble sentido. Por un lado, permite al lenguaje ordinario abordar las matemáticas en un contexto del que él mismo forma parte, evitando la sensación de extrañeza y sacralidad que tan a menudo paraliza al profano. Por otro, al reincorporarse al mundo profano del que se habían extrañado, las matemáticas pueden ser un instrumento privilegiado para comprender mejor esos otros mundos, como hemos querido hacer aquí con los mundos griego y chino, al conocimiento de los cuales quizá estas líneas hayan ayudado en alguna medida.

BIBLIOGRAFÍA

BLOOR, David. **Conocimiento e imaginario social**. Barcelona: Gedisa, 1998.

GRANET, Maurice. **La pensée chinoise**. Paris: Albin Michel, 1968.

LIZCANO, Emmanuel. «Entre el exotismo y el universalismo matemáticos: la aritmética *china* de Leibniz». En: Lola Balaguer-Núñez *et al.* (Eds). **Asia, Europa y el Mediterráneo: ciencia, tecnología y circulación del conocimiento**. Barcelona: Residència d'Investigadors CSIC–Generalitat de Catalunya, 2013, p. 131-150.

LIZCANO, Emmanuel. **Metáforas que nos piensan**. Sobre ciencia, democracia y otras poderosas ficciones. Madrid: Traficantes de Sueños, 2006. (Reed. Biblos, Buenos Aires, 2009).

LIZCANO, Emmanuel. **Imaginario colectivo y creación matemática**. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Barcelona: Gedisa, 1993. (Reed. 2009).

ORTEGA Y GASSET, José. **La idea de principio en Leibniz**. Madrid: Revista de Occidente en Alianza, 1979.

Histórico

Recebido: 03 de maio de 2023.

Aceito: 04 de julho de 2023.

Publicado: 23 de setembro de 2023.

Como citar – ABNT

LIZCANO, Emmanuel. ¿Extraer la raíz de un cuadrado? Matemática y metáfora. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*. Belém/PA, n. 45, e2023003, 2023. 10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n45.pe2023003.id542

Como citar – APA

Lizcano, E. (2023). ¿Extraer la raíz de un cuadrado? Matemática y metáfora. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (45), e2023003. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n45.pe2023003.id542>

Número temático organizado por

Iran Abreu Mendes  

Carlos Aldemir Farias  