

O Tabuleiro de Xadrez de John Napier para um estudo da operação de divisão

John Napier's Chessboard for a study of the division operation

El Tablero de Ajedrez de John Napier para un estudio de la operación división

Jeniffer Pires de Almeida¹ 

Ana Carolina Costa Pereira² 

RESUMO

Sendo base fundamental da Matemática, as operações aritméticas estão presentes em diversos conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de ensino, porém, apesar disso, ainda são presentes as dificuldades em torno dessas operações. Em particular, a operação de divisão é aquela que apresenta maiores desafios, sendo os principais motivos a complexidade de seu algoritmo e a falta de diferentes estratégias em seu ensino. Baseado nisso, como meio de auxiliar a compreensão desse conteúdo, evidenciamos a interface entre a história e o ensino de matemática, que busca levantar reflexões sobre o processo da construção do conhecimento matemático, por meio de recursos advindo da história da matemática, como os instrumentos matemáticos. Dessa forma, nesse estudo objetivamos debater sobre a manipulação da operação de divisão no instrumento Tabuleiro de Xadrez de John Napier, o qual pode proporcionar a observação de diferentes conceitos, mostrando-se como um potencializador didático e uma estratégia para o ensino dessa operação.

Palavras-chave: Operação de divisão, Tabuleiro de Xadrez, História da Matemática, Ensino de matemática, Instrumentos matemáticos.

ABSTRACT

As the fundamental basis of mathematics, arithmetic operations are present in various mathematical contents at different levels of education, but despite this, there are still difficulties surrounding these operations. In particular, the division operation is the one that presents the greatest challenges, the main reasons being the complexity of its algorithm and the lack of different teaching strategies. Based on this, as a means of aiding the understanding of this content, we highlight the interface between history and math teaching, which seeks to raise reflections on the process of constructing mathematical knowledge, using resources from the history of mathematics, such as "mathematical instruments". Thus, in this study we aim to discuss the manipulation of the division operation on John Napier's Chessboard instrument, which can provide the observation of different concepts, proving to be a didactic enhancer and a strategy for teaching this operation.

Keywords: Division operation, Chessboard, History of mathematics, Teaching mathematics, Mathematical instruments

RESUMEN

Como base fundamental de las matemáticas, las operaciones aritméticas están presentes en diversos contenidos matemáticos de distintos niveles educativos, pero a pesar de ello, sigue habiendo dificultades en torno a estas operaciones. En particular, la división es una de las operaciones que más dificultades presenta, siendo las principales razones la complejidad de su algoritmo y la falta de diferentes estrategias de enseñanza. Partiendo de esta base, como medio para ayudar a la comprensión de este contenido, hemos puesto de relieve la interfaz entre la historia y la enseñanza de las matemáticas, que pretende plantear reflexiones sobre el proceso de construcción del conocimiento matemático, utilizando recursos de la historia de las matemáticas, como los instrumentos matemáticos. De esta forma, el objetivo de este estudio es discutir la manipulación de la operación de división en el instrumento Tablero de Ajedrez de John Napier, que puede proporcionar la observación de diferentes conceptos, demostrando ser un potenciador didáctico y una estrategia para la enseñanza de esta operación.

Palabras clave: Operación de división, Tablero de Ajedrez, Historia de las matemáticas, Enseñanza de las matemáticas, Instrumentos matemáticos

1 Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dr. Silas Munguba, 1700 - Itaperi, Fortaleza - CE, CEP: 60714-903. E-mail: jeniffer.almeida@aluno.uece.br.

2 Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dr. Silas Munguba, 1700 - Itaperi, Fortaleza - CE, CEP: 60714-903. E-mail: carolina.pereira@uece.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As quatro operações aritméticas fazem parte da base fundamental do ensino e aprendizagem de Matemática. Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensino desse conteúdo deveria ser realizado com a utilização de diferentes processos e estratégias, com o objetivo de proporcionar aos alunos a compreensão de seus significados, aplicações e relações (BRASIL, 2018). No entanto, Silva (2015) relata que, na maioria dos casos, o ensino dessas operações ainda é centrado em uma estratégia de memorização de seus algoritmos, sem a preocupação em promover uma reflexão sobre seus conceitos.

Particularmente, na operação de divisão esses desafios são ainda mais presentes, principalmente pelo fato de, dentre os algoritmos das operações aritméticas que são ensinados na Educação Básica, o da divisão apresentar o maior grau de complexidade e, por consequência, haver maiores inseguranças. Assim, segundo Miguel e Miorim (1986), dentre as quatro operações elementares, a divisão é aquela que oferece maiores dificuldades, tanto para os que irão aprendê-la como para os professores que irão ensiná-la, em qualquer nível.

Baseado nisso, entre as pesquisas que buscam estratégias que auxiliem o ensino de matemática³ evidenciamos aquelas que relatam a construção de uma interface entre história e o ensino de matemática, buscando, na primeira, recursos pelos quais sejam possíveis levantar discussões sobre o processo da construção do conhecimento matemático, entre eles os chamados instrumentos matemáticos⁴ (SAITO; DIAS, 2013). Assim, através da história e, a partir de um tratamento didático, esses recursos podem ser potenciais didáticos para o estudo e compreensão dos conteúdos matemáticos, como a operação de divisão.

Dessa forma, esse estudo tem como objetivo debater sobre a manipulação do instrumento matemático Tabuleiro de Xadrez de John Napier (1550 – 1617) no cálculo da operação de divisão, como uma forma de observar conceitos matemáticos que podem emergir desse processo, mostrando tal aparato como um potencializador didático para a compreensão dessa operação e como uma estratégia para seu ensino.

METODOLOGIA

Para esse estudo, realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo, buscando analisar a operação de divisão realizada no Tabuleiro de Xadrez de Napier para que pudéssemos descrever os conhecimentos matemáticos presentes neles, pautado na proposta da interface entre história da matemática e ensino de Saito e Dias (2013).

Além disso elaboramos uma pesquisa documental acerca contexto e epistemologia do tratado *Rabdologiae*⁵, que teve sua primeira publicação em 1617, sendo escrito em latim. No entanto, utilizaremos a tradução em inglês, realizada por Willian Frank Richardson, em 1990, e publicada em 2017, por Rice, González-Velasco e Corrigan.

3 Vide por exemplo os estudos realizados por Altoé (2017) e Lautert (2005).

4 Segundo Saito (2019) são denominados "instrumentos matemáticos" recursos que foram produzidos e utilizados por praticantes e estudiosos das matemáticas antes do século XIX.

5 Tendo como nome completo: *Rabdologiae, Seu Numerationis Per Virgulas Libre Duo: cum appendice de expeditissimo Multiplicationes promptuario, quibus accessit et arithmeticea localis liber unus* (RABDOLOGIAE, 1617).

O TABULEIRO DE XADREZ DE JOHN NAPIER E SEU MÉTODO

Conhecido por seus logaritmos, John Napier foi um barão escocês que dedicou parte de sua vida ao estudo das matemáticas. Tinha um grande interesse por elaborar métodos e recursos que facilitassem os cálculos em seu período, que dizia serem *demorados e tediosos* (ALMEIDA, 2022). Dessa forma, John Napier escreveu quatro tratados com viés matemático, pelos quais apresentava a descrição de seus instrumentos e métodos, dentre eles destacamos o *Rabdologiae*.

Tal tratado está dividido em quatro livros, nos quais Napier (2017) apresenta a construção e manipulação de três instrumentos matemáticos, sendo eles as Barras de Calcular⁶, o *Promptuario*⁷ e o Tabuleiro de Xadrez, manipulado por meio do método Aritmética Local, sendo esse último foco desse estudo.

Dessa forma, o Tabuleiro de Xadrez (Figura 1) foi um recurso voltado para facilitar os cálculos das operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números naturais naquele período.

Figura 1 – Ilustração do Tabuleiro de Xadrez de John Napier (8x8)

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

Fonte: Elaborada para o estudo.

Para a manipulação do Tabuleiro de Xadrez para os cálculos das operações, o autor elabora um método denominado como *Aritmética Local*, em que as operações aritméticas são realizadas com base em movimentações de peças sobre o tabuleiro, por meio de números dispostos nele. Por conta disso, Napier (2017, p. 727) refere-se ao processo dos cálculos realizados por esse método "mais como uma brincadeira do que um trabalho"⁸.

Acerca dos números no aparato, tem-se que são dispostos (da direita para a esquerda e de baixo para cima) a partir de duplicações, iniciado por uma unidade, em que, a cada "casa" do tabuleiro, denominadas no método como *posições*, é atribuído um desses núme-

⁶ Sobre as Barras de Calcular, vide: Martins (2019); Martins e Pereira (2019).

⁷ Sobre o *Promptuario*, vide: Ribeiro, Cavalcante e Pereira (2020); Ribeiro e Oliveira (2022); Ribeiro e Pereira (2021, 2023).

⁸ No inglês lê-se: "more of a lark than a labour" (NAPIER, 2017, p. 727).

ros, de forma fixa, e "cada um deles possui uma relação de equivalência alfabética em ordem, ou seja, o número 1 é representado pela letra *a*, o 2 pela letra *b* e assim por diante", conforme indicam Almeida e Pereira (2023, p. 5) (Figura 1).

Dessa forma, é importante ressaltar que o método de Aritmética Local possui uma relação própria de valores, evidenciando duas notações numéricas para eles, a *local* e a *comum*. Sobre isso, tem-se que, na *notação local* os valores são escritos como uma determinada letra do alfabeto ou como uma junção delas, já na *notação comum*, os números naturais são escritos na forma usual (ALMEIDA, 2022).

Assim sendo, um dos principais processos no método de John Napier são as conversões numéricas, que estabelecem as relações entre as notações locais e comuns, uma vez que, os cálculos aritméticos são realizados no Tabuleiro de Xadrez com valores em sua notação local e são observados, ao final do processo, em notação comum.

Além disso, embora existam valores que sua notação local é observada de forma explícita, como o 4 equivalente ao *c*, existem valores que precisam passar pelo processo de conversão para obter sua notação local, como o 15, escrito assim em sua notação comum e como *abcd*, ou uma permutação dessas letras, em sua notação local (ALMEIDA; PEREIRA, 2021).

Para isso, Napier (2017) apresenta quatro métodos de conversões numéricas, sendo dois deles para converter um número comum em local, a saber o método de subtração e divisão por dois, e os outros dois para realizar o processo inverso, a saber o método de adição e multiplicação por dois. No entanto, visto que não é o foco desse trabalho, tais métodos não serão descritos de forma detalhada, sendo retratados de forma breve somente o método de subtração e adição, para melhor compreensão do leitor acerca dos processos seguintes.

Posto isso, a primeira regra do método de Aritmética de Localização é converter os valores que serão calculados para a notação local, seja qual for a operação aritmética a ser realizada. Nesse caso, pode-se utilizar o método de subtração, que segundo Almeida e Pereira (2020, p. 45),

consiste em escolher a partir do número fornecido, um número na lateral do tabuleiro que seja mais próximo, porém menor que o primeiro, e, ao realizar a subtração entre eles, executar o mesmo processo com o restante, até que o número fornecido seja totalmente usado.

Durante o processo desse método, cada número subtraído deve ser indicado com uma ficha na lateral do Tabuleiro, pois, ao final, poderá ser verificado as notações locais correspondentes a cada um deles, cuja junção representará a notação local do valor inicial convertido. Dessa forma, no exemplo do valor 15, citado anteriormente, tem-se o seguinte processo de conversão pelo método de subtração: $15 - 8(d) = 7 - 4(c) = 3 - 2(b) = 1 - 1(a) = 0$, tendo como resultado a notação local *dcba*, sendo representado no Tabuleiro conforme a Figura 2.

Figura 2 – Conversão numérica do valor 15

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

$$15 - 8 = 7$$

$$7 - 4 = 3$$

$$3 - 2 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

Fonte: Elaborada para o estudo.

Já no método de adição, para converter um valor em notação local para a comum, deve-se somar o valor correspondente a cada número local que o compõe. Como no exemplo anterior, o número local *dcba* é composto pelos números locais *d* que corresponde ao 8, *c* ao 4, *b* ao 2 e *a* à 1, somando-se esses valores resultamos no número comum 15. Esse processo é utilizado ao final do cálculo das operações aritméticas para a observação de seu resultado na forma usual.

Após os processos de conversões numéricas, é importante compreender as formas de movimentações de peças no Tabuleiro de Xadrez, com base no método de Aritmética Local. Na operação de divisão, foco deste trabalho, tais movimentos se dão de duas formas, sendo a primeira delas a reta, semelhante ao movimento da torre no jogo tradicional de xadrez, onde as peças se movimentam paralelas às laterais do aparato, da direita para a esquerda e de baixo para cima (Figura 3).

A segunda forma de movimentação é a diagonal, semelhante ao movimento do bispo, em que as peças se movimentam nas diagonais do Tabuleiro, nas quais os números locais de cada uma das posições são iguais (Figura 3).

Figura 3 – Movimentos no Tabuleiro de Xadrez de John Napier

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

Fonte: Elaborada para o estudo.

Além disso, ressalta-se também que, os valores a serem operados devem ser menores que o dobro do último número disposto na posição do vértice superior direito e inferior esquerdo, os quais são iguais e denominados como números do meio (Figura 4).

Figura 4 – Número do meio no Tabuleiro de Xadrez de John Napier

Número do Meio								
p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	
Número do Meio								

Fonte: Elaborada para o estudo.

Isso ocorre, pois, os valores a serem multiplicados devem ser dispostos às margens dessas duas laterais, como será discutido posteriormente. Assim, visto que os valores são escritos como uma soma dos números locais das laterais do Tabuleiro, ao considerar tais números como uma Progressão Geométrica (PG), tem-se que a soma de n termos (S_n) é igual a,

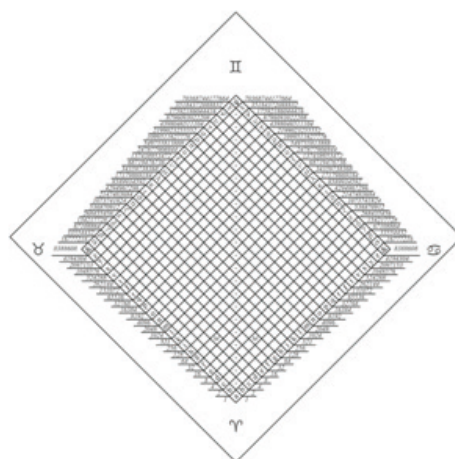
$$\frac{a1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Sendo as variáveis da equação $a1 = 1$, $q = 2$ e n o número de posições dessas laterais. Assim sendo, em um tabuleiro de dimensões 8×8 , o maior valor que poderá ser multiplicado é o 255, pois, o valor de seu número do meio é 128 e seu dobro 256, sendo 255 o maior natural menor que ele, além disso,

$$\frac{1 (2^8 - 1)}{2 - 1} = 255$$

Logo, caso desejar-se realizar cálculos com valores maiores, deverá ser construído um tabuleiro com dimensões maiores, como da Figura 5.

Figura 5 – Tabuleiro de Xadrez de John Napier (24×24)



Fonte: Napier (2017, p. 735).

Com isso, a partir dos procedimentos que envolvem o método de Aritmética Local de John Napier, é possível realizar a divisão entre quaisquer números naturais no Tabuleiro de Xadrez, o que discutiremos a seguir.

A OPERAÇÃO DE DIVISÃO NO TABULEIRO DE XADREZ DE JOHN

A operação de divisão no Tabuleiro de Xadrez de John Napier é realizada a partir das regras do método de Aritmética de Local, descritas anteriormente. Para isto, os procedimentos são organizados em uma sequência de passos que, ao final, determinam o seu resultado. Assim sendo, exploraremos os procedimentos dessa operação no Tabuleiro de Xadrez realizando diferentes exemplos para uma melhor compreensão.

Dessa forma, iniciaremos discutindo sobre a operação de divisão de números naturais com resto zero, a partir do exemplo de 30 dividido por 3. O primeiro passo para o cálculo dessa operação é a conversão para representação local dos valores do dividendo e divisor, ou seja, converter os números comuns 30 e 3 para números locais. Para tanto, será utilizado o método de subtração, realizando as seguintes subtrações com o dividendo, $30 - 16(e) - 8(d) - 4(c) - 2(b)$, encontrando a representação local *edcb*, e com o divisor, $3 - 2(b) - 1(a)$, encontrando a representação local *ba*.

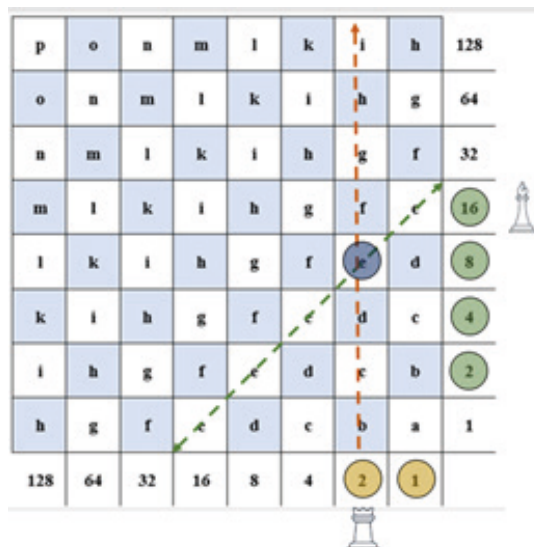
Após as conversões, serão dispostas as fichas, referentes às posições encontradas nos números locais do dividendo e divisor, à margem direita e inferior do aparato, respectivamente, destinando uma para cada número, conforme a Figura 6 a seguir.

Figura 6 – Representações do dividendo 30 (*edcb*) e divisor 3 (*ba*)

p	o	n	m	l	k	i	h	128	
o	n	m	l	k	i	h	g	64	
n	m	l	k	i	h	g	f	32	
m	l	k	i	h	g	f	e	16	$30 - 16(e) = 14$
l	k	i	h	g	f	e	d	8	$14 - 8(d) = 6$
k	i	h	g	f	e	d	c	4	$6 - 4(c) = 2$
i	h	g	f	e	d	c	b	2	$2 - 2(b) = 0$
h	g	f	e	d	c	b	a	1	
128	64	32	16	8	4	2	1		
						$3 - 2(b) = 1$	$2 - 1(a) = 1$		

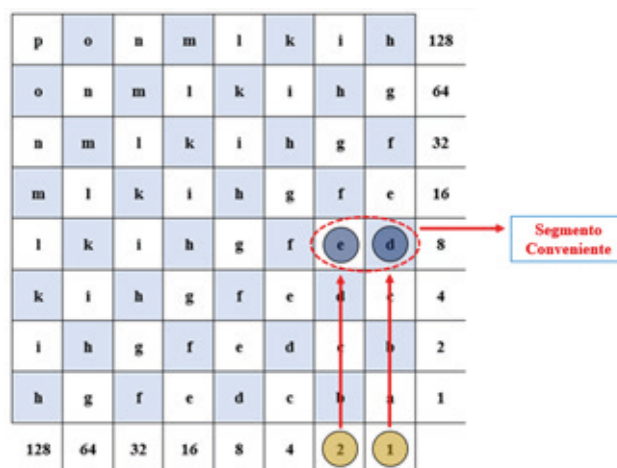
Fonte: Elaborada para o estudo.

Em seguida, movimentaremos as fichas de maiores valores de cada número, sendo a ficha do dividendo movimentada como o bispo e a do divisor movimentada como a torre, a fim de encontrar a posição de interseção entre eles. Melhor dizendo, no nosso exemplo, movimentaremos a ficha *e* do dividendo, à margem direita (sobre a diagonal de letras iguais *ee*) e a ficha *b* do divisor, à margem inferior, seguindo para cima (sobre a coluna *bi*). A partir disso, encontraremos a posição de interseção *e*, entre a linha *ld*, a qual deve ser demarcada com uma nova ficha (Figura 7).

Figura 7 – Movimentos das peças e do dividendo e b do divisor

Fonte: Elaborada para o estudo.

Com base na posição de interseção demarcada, construiremos uma linha de fichas paralela à disposição do divisor, ou seja, as fichas serão dispostas nas posições e e d , seguindo as colunas marcadas pelo número local ba , nosso divisor (Figura 8).

Figura 8 – Construção do Segmento ed 

Fonte: Elaborada para o estudo.

A linha de fichas construída (Figura 8) é denominada como segmento, e esse será chamado *conveniente* quando o seu valor for menor que o dividendo e *não conveniente* quando o contrário ocorrer. Desse modo, no exemplo realizado, temos que o valor do segmento construído é igual a 24 ($16(e) + 8(d)$), sendo menor que o valor do nosso dividendo 30, portanto, tal segmento é chamado *conveniente*.

Além disso, o valor do segmento representa um múltiplo do valor do divisor, dentro do padrão numérico da construção do Tabuleiro de Xadrez, isto é, o valor do segmento é um produto do divisor por um determinado número do Tabuleiro e, esse número é indicado à sua margem direita. No nosso exemplo, o número à margem direita do *segmento conveniente* ed é 8, denotando a quantidade de vezes que o divisor foi multiplicado para obter o valor do segmento ($3 \times 8 = 24$). Tal número também deve ser demarcado com uma nova ficha e ele representará quociente parcial da divisão (Figura 9).

Figura 9 – Indicação do primeiro quociente parcial 8

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

Quociente Parcial

Fonte: Elaborada para o estudo.

Ademais, por ser um *segmento conveniente* e, a partir movimentação da ficha de maior número local do dividendo, o seu valor representa o maior múltiplo do divisor que é menor que o valor do dividendo, dentro da disposição numérica do Tabuleiro de Xadrez. Assim, visualizar tais processos torna-se importante para a compreensão do conceito de múltiplos na divisão e sua associação com a relação fundamental dessa operação.

Prosseguindo, após identificar o quociente parcial a partir da construção do primeiro *segmento conveniente*, devemos subtrair o valor desse segmento do dividendo, a fim de continuar o cálculo da operação com o resto encontrado. Logo, subtrairemos 24 (segmento) de 30 (dividendo), resultando no número comum 6 que possui sua representação local igual a cb ($6 - 4(c) - 2(b)$).

Dessa forma, continuaremos a operação com o divisor 3, no entanto, à margem direita, serão dispostas fichas representando o primeiro resto encontrado, ou seja, o número local cb (Figura 10).

Figura 10 – Representação do resto 6 (cb)

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

1º Quociente Parcial

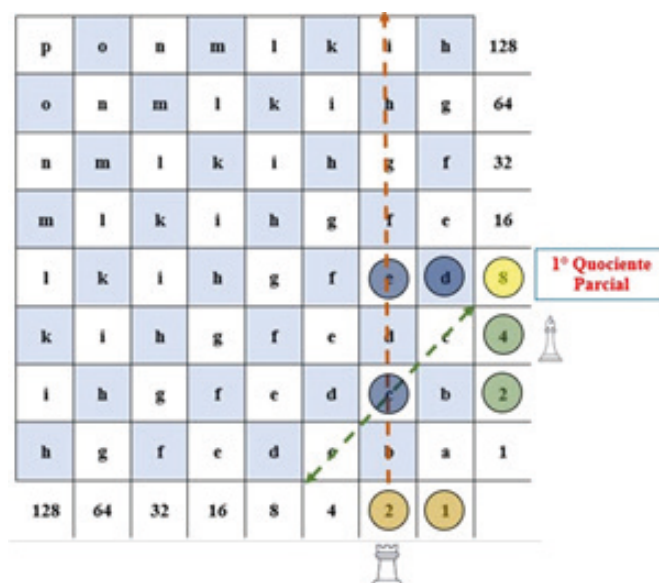
$6 - 4(c) = 2$

$2 - 2(b) = 0$

Resto

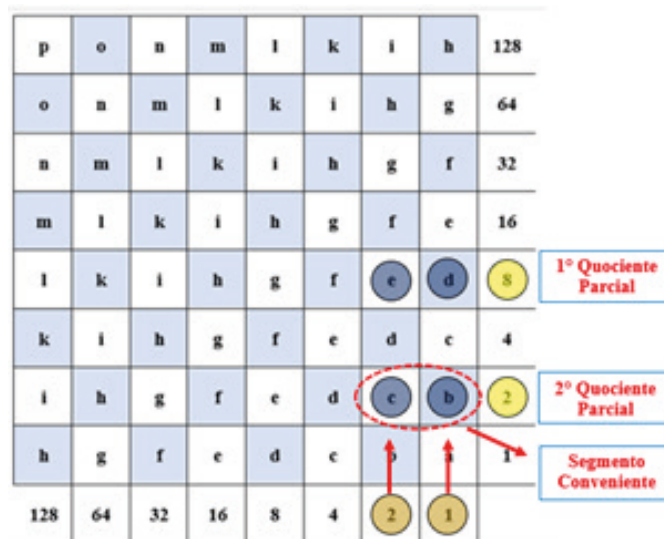
Fonte: Elaborada para o estudo.

Realizando o mesmo procedimento, movimentaremos a ficha c do resto, à margem direita, sobre a diagonal cc , e ficha b do divisor, novamente sobre a coluna bi . Com isso, encontraremos a nova posição de interseção c , entre a linha ib (Figura 11).

Figura 11 – Movimentos das peças c do resto e b do divisor

Fonte: Elaborada para o estudo.

A partir dessa interseção construiremos o segundo *segmento conveniente*, a saber *cb*. Esse segmento possui o valor igual a $6(4(c) + 2(b))$, que também é um múltiplo do divisor, sendo agora o produto dele pelo número 2, encontrado à margem direita de tal segmento, representando o segundo quociente parcial da operação, sendo também marcado com uma nova ficha (Figura 12).

Figura 12 – Construção do *Segmento cb* e indicação do segundo quociente parcial 2

Fonte: Elaborada para o estudo.

Por fim, ao subtrair do resto 6 o valor do segundo segmento, resultamos em 0 ($6 - 4(c) - 2(b) = 0$), o que será o resto da nossa divisão, uma vez que todo valor do dividendo foi utilizado. Dessa forma, finalizamos o cálculo da operação e o quociente é dado pela soma dos quocientes parciais marcados às margens do Tabuleiro de Xadrez, a saber 10 ($8 + 2$) (Figura 13).

Figura 13 – Tabuleiro de Xadrez ao final da divisão de 30 por 3

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

Quociente da
divisão $30 \div 3$
 $8 + 2 = 10$

Fonte: Elaborada para o estudo.

Outro exemplo de divisão a ser estudado na manipulação do Tabuleiro de Xadrez de John Napier é o caso da divisão de números naturais com resto maior que 0, para isso, realizamos o exemplo de 13 dividido por 5. Assim como no exemplo anterior, o primeiro passo a se realizar é a conversão numérica para número local dos valores do dividendo e divisor, por meio do método de subtração, e, em seguida, dispor suas representações às margens direita e inferior do aparato. Dessa forma, as correspondências locais de tais valores serão dca ($13 - 8(d) - 4(c) - 1(a)$) e ca ($5 - 4(c) - 1(a)$), para dividendo e divisor respectivamente (Figura 14).

Figura 14 – Representações do dividendo 13 (dca) e divisor 5 (ca)

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

$13 - 8(d) = 5$

$5 - 4(c) = 1$

$1 - 1(a) = 0$

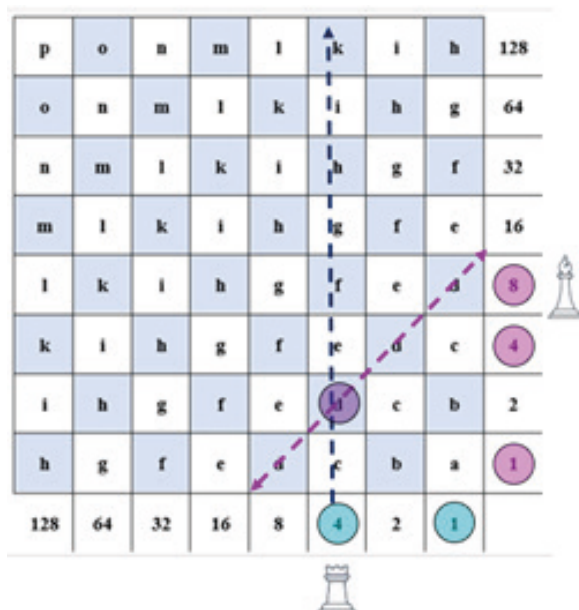
$5 - 4(c) = 1$

$1 - 1(a) = 1$

Fonte: Elaborada para o estudo.

Posteriormente movimentaremos a ficha de maior valor do dividendo, a saber d , como o bispo pela diagonal dd , e a ficha de maior valor do divisor, a saber c , como a torre de baixo para cima, pela linha ck , a fim de encontrar a posição de interseção entre os movimentos, que será a posição d , encontrada entre a linha ib , conforme a Figura 15.

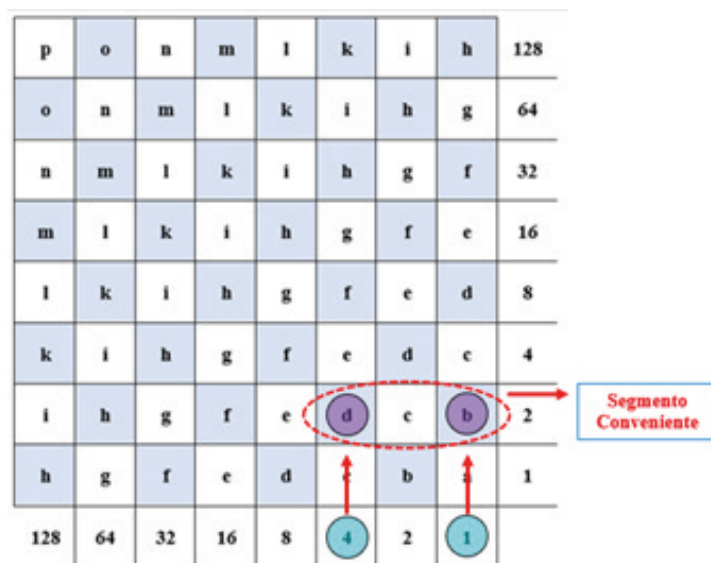
Figura 15 – Movimentos das peças *d* do dividendo e *c* do divisor



Fonte: Elaborada para o estudo.

Após isso, a partir da posição de interseção dos movimentos, construiremos um *seguimento*, paralelo ao divisor, seguindo o padrão das colunas marcadas por suas fichas, assim, ele será disposto nas posições *db* (Figura 16).

Figura 16 – Construção do *Segmento db*



Fonte: Elaborada para o estudo.

O *seguimento* construído possui o valor igual a 10 ($8(d) + 2(b)$), o que é *conveniente*, uma vez que é menor que o dividendo 13. Além disso, ele representa um múltiplo do divisor 5, dado pelo produto de 5 por 2, sendo esse último valor o quociente parcial, apresentado à margem direita do Tabuleiro e devendo ser marcado com uma nova ficha (Figura 17).

Figura 17 – Indicação do quociente parcial 2

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

Quociente Parcial

Fonte: Elaborada para o estudo.

Em seguida, devemos subtrair o valor do seguimento do dividendo, resultando em 3 ($13 - 10 = 3$), que, após ser convertido para número local, deve ser disposta à margem direita do aparato, de acordo com a Figura 18.

Figura 18 – Representação do resto 3 (ba)

p	o	n	m	l	k	i	h	128
o	n	m	l	k	i	h	g	64
n	m	l	k	i	h	g	f	32
m	l	k	i	h	g	f	e	16
l	k	i	h	g	f	e	d	8
k	i	h	g	f	e	d	c	4
i	h	g	f	e	d	c	b	2
h	g	f	e	d	c	b	a	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

1º Quociente Parcial

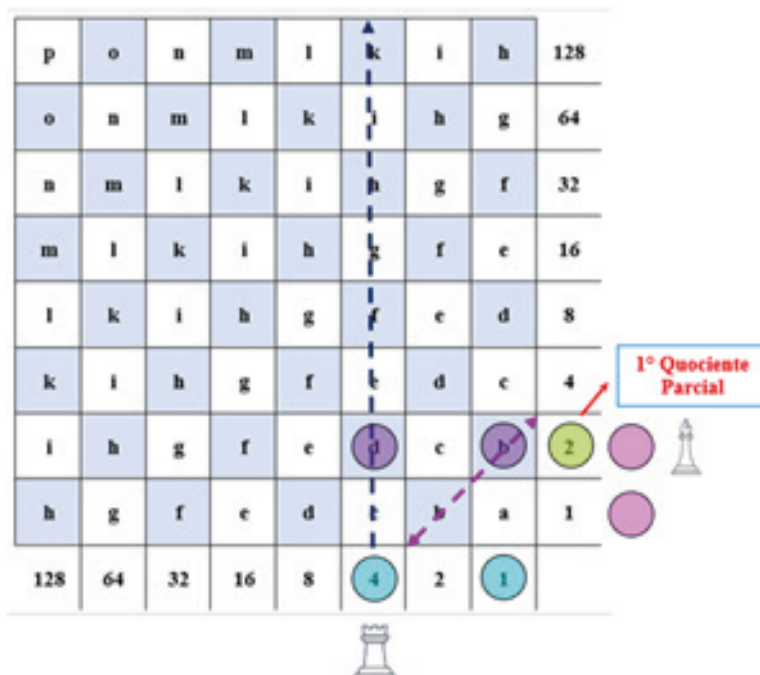
$3 - 2(b) = 1$

$2 - 1(a) = 0$

Resto

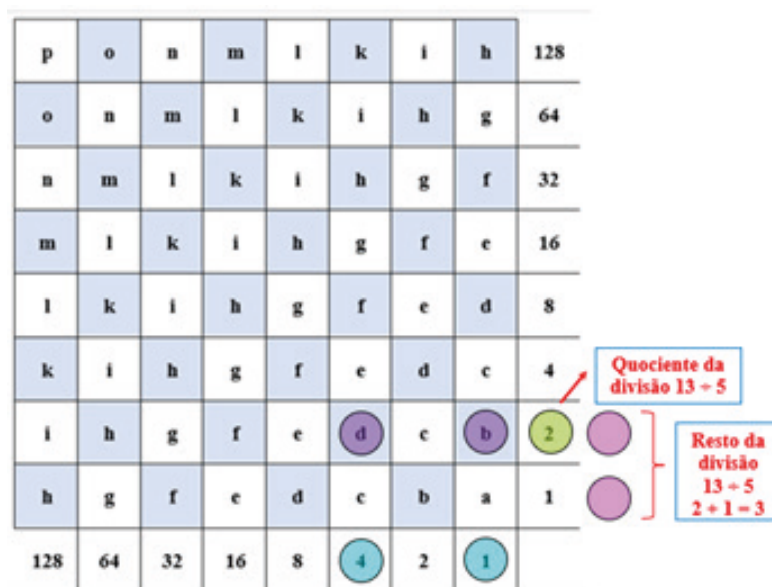
Fonte: Elaborada para o estudo.

Logo depois, seria necessário movimentar a maior ficha do divisor, com o movimento da torre, e a maior ficha do resto, com o movimento do bispo, buscando encontrar sua interseção, no entanto, conforme visto na Figura 19, no caso do exemplo dado, não há posição de interseção entre esses movimentos, visto que, o resto 3 é menor que o divisor 5.

Figura 19 – Movimentos das peças *b* do resto e *c* do divisor

Fonte: Elaborada para o estudo.

Por consequência, temos que, o resto da subtração é também o resto da divisão e esse deverá ser marcado à margem do aparato. Além disso, o quociente parcial 2, será também o quociente da operação. Portanto, na divisão de 13 por 5, encontramos o quociente 2 e o resto 3 (Figura 20).

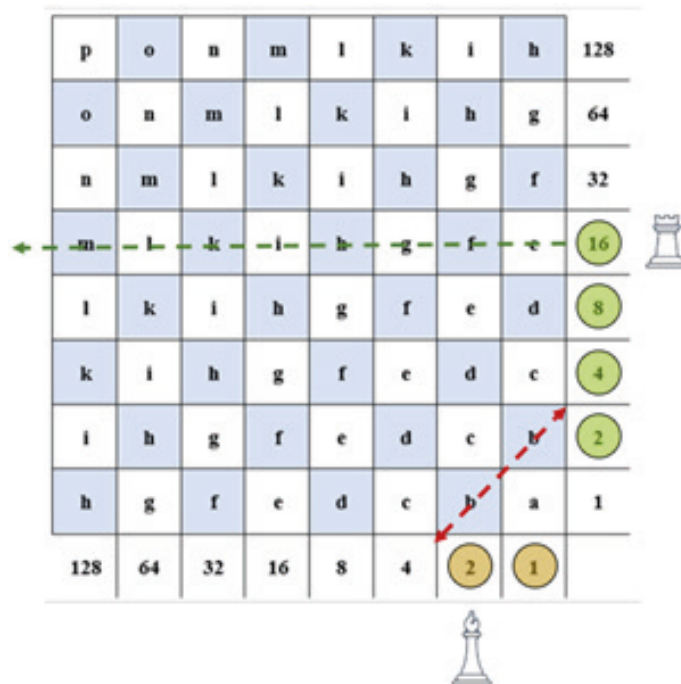
Figura 20 – Tabuleiro de Xadrez ao final da divisão de 13 por 5

Fonte: Elaborada para o estudo.

Isto posto, temos que, ao realizarmos uma divisão entre dois números naturais, α por β , em que α não é um múltiplo natural de β , haverá um valor γ natural que será seu resto, com $0 < \gamma < \beta$. Na manipulação do Tabuleiro de Xadrez, que é voltado para o cálculo com números naturais, podemos verificar tal propriedade, pois, ao movimentarmos as fichas correspondentes aos valores γ e β , não conseguiremos encontrar uma posição de interseção, demonstrando que o primeiro não é um múltiplo natural do segundo.

Com base nisso, também podemos analisar uma outra propriedade da operação de divisão na manipulação no Tabuleiro de Xadrez, o fato dessa não ser comutativa. A partir do Tabuleiro, a comutatividade da divisão com números naturais se daria pela troca de movimentos entre o dividendo e divisor, ou seja, movimentaríamos o dividendo com o movimento da torre e o divisor com o movimento do bispo (Figura 21).

Figura 21 – A comutatividade da divisão de 30 por 3 no Tabuleiro de Xadrez ($3 \div 30$)



Fonte: Elaborada para o estudo.

No entanto, ao realizarmos essa troca, não encontraríamos um quociente, uma vez que, na divisão com números naturais, para seu resultado ser um natural, o dividendo deve ser maior, ou igual, ao divisor, visto que, deve ser seu múltiplo natural. Dessa forma, como podemos verificar na Figura 21, não é possível realizar a divisão de 3 por 30, pois seu resultado não é natural, porém, no primeiro exemplo desse estudo (Figura 13), vimos que a divisão de 30 por 3 tem como quociente o valor 10.

Apoiado nisso, podemos observar que a manipulação da operação de divisão no Tabuleiro de Xadrez é realizada com base na distribuição das fichas, que representam o valor do dividendo, sobre os múltiplos do divisor presentes no aparato, obedecendo as regras de disposição.

Tais distribuições podem ser completas, como na Figura 13, em que o dividendo 30 se distribuiu em $16(e) + 8(d) + 4(c) + 2(b)$, múltiplos de 3, indicando então uma divisão exata. Ou, podem ser parciais, como na Figura 20, em que o dividendo 13 se distribuiu em $8(d) + 2(b)$, múltiplo de 5, sobrando duas fichas, $2(b) + 1(a)$, indicando uma divisão com resto maior que 0. Além do mais, a forma de distribuição dessas fichas sempre será única, demonstrando também a unicidade do quociente de uma divisão.

Dessa forma, com o estudo da operação de divisão no Tabuleiro de Xadrez de John Napier é possível levantar diferentes reflexões conceituais e interpretativas acerca desse conteúdo, podendo auxiliar tanto em seu ensino, como em sua aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Baseado no que foi exposto, podemos levantar algumas contribuições acerca da manipulação do Tabuleiro de Xadrez de John Napier para o cálculo da operação de divisão, apoiado na interface entre a história da matemática e a educação matemática.

A primeira delas está relacionada a observação interpretativa de John Napier sobre a operação, definida por ele como uma ação de subtrair o divisor do dividendo continuamente até que nada reste, sendo o número de subtrações a resposta procurada (NAPIER, 2017), o que ressalta uma das ideias associadas a divisão, que é notória durante a manipulação do instrumento.

Outro ponto está relacionado com a própria finalidade de John Napier com o seu trabalho, que tentava ao máximo reduzir os cálculos em seu período. Assim, ao falar sobre a operação de divisão, o autor relata que a parte mais difícil seria o de encontrar os múltiplos que são necessários durante a operação, o que, com o Tabuleiro de Xadrez, é identificado somente por meio da movimentação das peças.

Assim, com base na interface entre a história e a educação matemática, a partir do Tabuleiro de Xadrez de John Napier, podemos levantar debates sobre a operação de divisão para além de suas fórmulas e algoritmos, refletindo acerca da construção desse conhecimento, além de proporcionar uma nova estratégia e recurso para o ensino desse conteúdo.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE) e do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jeniffer Pires de. **A operação de multiplicação no Tabuleiro de Xadrez de John Napier para o estudo de conceitos matemáticos na formação do professor**. 2022. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em 2022) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2022.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de.; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A Aritmética de Localização de John Napier para a multiplicação. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 6, n. 2, p. 43–56, 2020.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de.; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A matemática presente nas conversões de números nas barras da Aritmética de Localização. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 23, p. 691–706, 2021.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de.; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Conceitos matemáticos na graduação numérica do instrumento Tabuleiro de Xadrez de John Napier com base em uma prática universitária. **Ensino & Multidisciplinaridade**, São Luís, v. 8, n. 2, p. e1022, 1–10, 2023.

ALTOÉ, Renan Oliveira. **Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas**. 2017. 227 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação, Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

LAUTERT, Síntria Labres. **As dificuldades das crianças com divisão: um estudo de intervenção**. 2005. Tese de Doutorado (Doutorado em Psicologia Cognitiva) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

MARTINS, Eugeniano Brito. **Conhecimentos matemáticos mobilizados na manipulação das barras de calcular de John Napier descritas no tratado Rabdologiae de 1617**. 2019. 104 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2019.

MARTINS, Eugeniano Brito; PEREIRA, Ana Carolina Costa. As barras de calcular de Napier: Percepções de uma primeira manipulação. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 6, n. 18, p. 53-64, 2019.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **O ensino de matemática no primeiro grau**. São Paulo: Atual, 1986.

NAPIER, John. **Rabdologiae, Seu Numerationis Per Virgulas**: cum appendice de expeditissimo multiplicationes promptuario, quibus accessit e arithmeticea localis liber unus. In: RICE, Brian; GONZÁLEZ-VELASCO, Enrique; CORRIGAN, Alexander. *The Life and Works of John Napier*. Cham: Springer, 2017. p. 652-749.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; CAVALCANTE, Davi Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O procedimento de construção das varetas do Promptuario de John Napier (1550-1617). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, n. 21, p. 112-121, 2020.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O processo de graduação e uma utilização do Promptuario para multiplicação. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 7, n. 2, p. 1-11, 2021.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; OLIVEIRA, Gisele Pereira. O uso do Promptuario de John Napier (1550–1617) para o Ensino de Multiplicação à luz da percepção de Licenciandos da UECE. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 26, p. 359-373, 2022.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O ensino de multiplicação a partir do manuseio do Promptuario de John Napier: uma experiência na formação inicial de professores de matemática. **CONTRAPONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v. 4, n. 5, p. 38-56, 2023.

SAITO, Fumikazu. A reconstrução de antigos instrumentos matemáticos dirigida para formação de professores. **Educação: Teoria e Prática**, v. 29, n. 62, p. 571-589, 2019.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da Matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p.89-111, mar. 2013.

SILVA, LÍlian Cristine Camargos. **Ressignificando a Construção dos Algoritmos da Adição e Subtração**. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica (PUC), 2015.

Histórico

Recebido: 22 de novembro de 2023.

Aceito: 24 de fevereiro de 2023.

Publicado: 23 de março de 2023.

Como citar – ABNT

ALMEIDA, Jeniffer Pires de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O Tabuleiro de Xadrez de John Napier para um estudo da operação de divisão. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 47, e2024009, 2024.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024009.id580>

Como citar – APA

ALMEIDA, J. P., & PEREIRA, A. C. C. (2024). O Tabuleiro de Xadrez de John Napier para um estudo da operação de divisão. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, (47), e2024009.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024009.id580>