Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024001
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024001.id588

Enseigner la géométrie plane en cohérence de 6 à 15 ans

Teach plane geometry in coherence from 6 to 15 years

Enseñar geometría plana en consistencia de 6 a 15 años

Perrin-Glorian Marie-Jeanne[1]

RÉSUMÉ

Le présent article est une reprise synthétique et complétée d'un texte non publié disponible sur HAL (https://hal.science/hal-01660837v2). Il s'agit d'une réflexion sur l'enseignement de la géométrie plane dans le contexte français, afin d'envisager une approche cohérente au long de la scolarité obligatoire prenant en compte des apprentissages habituellement ignorés de l'enseignement. Après une analyse des difficultés dans l'enseignement de la géométrie, nous nous appuyons sur les travaux de Duval et sur la théorie des situations de Brousseau pour proposer une approche de la géométrie à partir de l'analyse, de la reproduction et de la construction de figures avec des instruments de tracé, à l'exclusion des instruments de mesure, en explicitant des règles d'usage géométrique de ces instruments, visant à conceptualiser les objets géométriques théoriques de base et leurs relations, notamment droites, cercles, points, angles.

Mots-clés: Géométrie plane; Scolarité obligatoire; Analyse de figures géométriques; Instruments de tracé; Espace graphique.

ABSTRACT

This article is based on an unpublished text available on HAL (https://hal.science/hal-01660837v2). It is a reflection on the teaching of plane geometry in the French context, in order to envisage a coherent approach throughout compulsory education, taking into account the knowledge usually ignored in teaching. After an analysis of the difficulties in teaching geometry, we draw on Duval's work and Brousseau's theory of situations to propose an approach to geometry from the analysis, reproduction and construction of figures with tracing instruments, excluding measuring instruments, by explaining the rules of geometric use of these instruments. The aim is to conceptualize the basic theoretical geometric objects and their relationships, including straight lines, circles, points, angles.

Keywords: Plane geometry; Compulsory education; Analysis of geometric figures; Plotting instruments; Graphic space.

RESUMEN

Este artículo es una versión sintética y completa de un texto no publicado disponible en HAL (https://hal.science/hal-01660837v2). Se trata de una reflexión sobre la enseñanza de la geometría plana en el contexto francés, con el fin de concebir un enfoque coherente a lo largo de la escolaridad obligatoria que tenga en cuenta los aprendizajes generalmente ignorados de la enseñanza. Después de un análisis de las dificultades en la enseñanza de la geometría, nos basamos en el trabajo de Duval y en la teoría de las situaciones de Brousseau para proponer un enfoque de la geometría a partir del análisis, de la reproducción y construcción de figuras con instrumentos de trazado, con exclusión de los instrumentos de medida, explicitando reglas de uso geométrico de estos instrumentos, destinadas a conceptualizar los objetos geométricos teóricos básicos y sus relaciones, especialmente rectas, círculos, puntos, ángulos.

Palabras clave: Geometría plana; Escolaridad obligatoria; Análisis de figuras geométricas; Instrumentos de trazado; Espacio gráfico.

1 Docteur d'Etat, Université Paris 7, Paris. E-mail: marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr .

INTRODUCTION

L'étude des figures géométriques est importante dans la culture du citoyen pour traiter des problèmes de l'espace dans la vie quotidienne et aussi pour certaines professions, et donc certaines branches des lycées professionnels. Elle permet de poser les bases d'une vision géométrique du monde et de créer l'intuition qui va avec et servira pour traiter des problèmes dans d'autres domaines. Les grandeurs géométriques et leurs opérations sont un appui important pour l'extension des entiers et de leurs opérations aux nombres décimaux, rationnels et réels, et même au-delà, pour l'algèbre. Les reports de longueurs sont à la base de la construction du registre graphique comme cadre de travail à l'interface entre les grandeurs et les nombres. Même pour traiter la géométrie par le calcul, l'appui sur les connaissances géométriques liées aux figures permet de rendre celui-ci plus efficace.

Mais qu'entend-on par *étude* des figures géométriques et comment l'enseigner si on veut la penser de manière cohérente sur toute la scolarité obligatoire ? Beaucoup de recherches ont pointé la rupture, au début de l'enseignement secondaire, entre une géométrie des tracés matériels (sur papier ou sur écran) avec des instruments et la géométrie théorique des énoncés et démonstrations. Houdement et Kuzniak (2006) parlent même de deux paradigmes. Cette rupture tient notamment au mode de validation des énoncés, par la perception aidée d'instruments dans le premier cas, par un discours logique à partir d'énoncés décrivant des propriétés d'objets théoriques ou de relations entre ces objets dans le second cas. Cependant ces recherches prennent rarement en compte l'enseignement sur toute la scolarité obligatoire. Le but de cet article est de réfléchir à une construction progressive d'un point de vue théorique, en faisant jouer un rôle positif dans l'accès aux objets géométriques théoriques à la validation par les instruments de géométrie (règle, équerre, compas), dès le primaire, en encourageant la recherche de propriétés générales et l'enrichissement continu des connaissances théoriques.

OBJECTIFS ET DIFFICULTÉS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

La géométrie comme modèle de l'espace et les géométries théoriques

L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire poursuit plusieurs objectifs (KAHANE, 2002), notamment l'acquisition d'un savoir permettant de modéliser pour les résoudre des problèmes concrets qui se posent dans l'espace sensible, le développement du raisonnement mathématique, c'est-à-dire d'un moyen appuyé sur la logique, la démonstration, de valider la résolution de problèmes qui ne sont pas facilement algorithmisables, et enfin le développement de la pensée géométrique ou l'intuition géométrique qui constitue un puissant outil heuristique permettant de transférer à d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur des mathématiques, des intuitions issues de notre rapport à l'espace. Ces objectifs correspondent à deux aspects de la géométrie: la géométrie comme modèle de l'espace avec une finalité pratique et la géométrie comme théorie mathématique cohérente appuyée sur une axiomatique. Dans un texte ancien repris plus récemment, Brousseau (2000) imagine deux situations fondamentales pour les distinguer: la situation du charpentier qui découpe au sol de lourdes pièces de bois qui devront s'ajuster exactement quand il les assemblera à dix mètres du sol et la situation de l'intersection des médiatrices d'un triangle qui consiste à tracer sur papier avec les instruments usuels un triangle ayant un angle très obtus et ses trois médiatrices ; à cause de l'imprécision des tracés, celles-ci forment généralement un tout petit triangle ; il s'agit alors de chercher un autre triangle pour lequel le triangle formé par les trois médiatrices soit le plus grand possible. La situation du charpentier représente une partie des connaissances utiles pour traiter des problèmes qui se posent dans l'espace sensible, qui relèvent de ce que nous appellerons une théorie physique de l'espace qui correspond plus ou moins au paradigme GI de Houdement et Kuzniak (2006). Dans la situation des médiatrices, la recherche d'un tel triangle conduit à démontrer qu'il ne peut pas exister: pour assurer la cohérence logique du modèle, les trois médiatrices doivent se couper en un même point. Cette situation représente pour nous la géométrie théorique élémentaire qui correspond au paradigme GII de Houdement et Kuzniak (2006), enseigné dans le secondaire.

Plusieurs choix d'axiomatiques sont possibles et ont été faits à différentes époques pour fonder l'enseignement de la géométrie dans le secondaire en France, notamment l'axiomatique d'Euclide dans différentes versions, une axiomatique fondée sur les transformations et plus particulièrement la symétrie orthogonale (COUSIN-FAUCONNET, 1995) et bien sûr la notion d'espace affine euclidien enseignée à l'université. Quelle que soit la théorie, elle permet de rendre compte des problèmes qui se posent dans l'espace sensible parce que les axiomes n'ont pas été choisis n'importe comment. Cependant, l'axiomatique sous-jacente n'est pas indifférente pour penser la cohérence et la continuité de l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire. En effet, à 6 ans, il est clair qu'on ne peut pas faire appel à autre chose qu'à la perception directe pour décrire ou reproduire des formes, des positions, des déplacements d'objets de l'espace. Par exemple, on apprend à reconnaître un rectangle en s'appuyant sur la perception visuelle et tactile (qu'il est important de développer à ce niveau). Entre 6 et 12 ans des instruments sont progressivement introduits pour outiller la perception et donner des moyens plus précis et plus sûrs de le faire. Par exemple, on justifie qu'on a un rectangle en contrôlant les angles droits avec l'équerre et les longueurs avec la règle graduée. Si l'on veut lui assurer une certaine cohérence, l'enseignement de la géométrie dans le secondaire devrait s'appuyer sur ce travail avec les instruments pour construire un modèle théorique qui permet d'être sûr sans réaliser l'expérience, en s'appuyant sur des propriétés déjà connues. Mais, beaucoup de ces propriétés sont admises avec les élèves, comment alors être sûr de la cohérence du modèle ? Les enseignants qui ont en charge l'introduction de ce modèle théorique et de la démonstration devraient disposer d'une axiomatique sous-jacente pour se sentir légitimes et assurés de la validité de ce qu'ils enseignent. Or, le modèle de l'espace affine euclidien ne permet pas de fonder un enseignement appuyé sur l'espace sensible de ce type parce qu'il demande de prendre comme objets premiers les points et les vecteurs qui ne découlent pas de la perception directe de l'espace. Ce modèle, pour performant qu'il soit pour la suite des études, ne peut pas aider les enseignants qui doivent dans leur quotidien gérer les rapports conflictuels de leurs élèves entre perception dans l'espace sensible et raisonnement dans le modèle théorique de cet espace. Il ne peut venir que dans un second temps quand on dispose déjà d'un premier modèle de la géométrie appuyé sur l'espace sensible. C'est bien ce qui disait déjà Gonseth:

> Certes le géomètre peut refuser de comparer son expérience avec celle du physicien. Il peut s'enfermer dans des systèmes axiomatiques, en posant comme données a priori

> les axiomes et la logique de la déduction. Il évitera ainsi, de justesse, le problème de l'espace (…) mais il n'aura rien fait pour l'éclairer (GONSETH, 1945, I-8).

Nous reviendrons sur ce choix de l'axiomatique sous-jacente. Intéressons-nous d'abord au rôle dans la pratique de la géométrie des figures matérielles, tracées sur papier ou sur écran d'ordinateur.

L'espace graphique. Double rôle des figures matérielles

Au cœur du problème de l'enseignement de la géométrie se trouve donc le traitement du rapport entre les objets géométriques et les objets matériels de l'espace sensible, entre les figures théoriques définies par des relations entre des objets géométriques et les figures matérielles[2] qui les représentent, contrôlées par la perception ou par les instruments.

Les représentations, schémas et figures jouent des rôles différents suivant que le problème que l'on veut traiter se pose dans l'espace sensible ou dans le modèle théorique. Si le problème se pose dans l'espace sensible, des dessins, maquettes, peuvent représenter les objets de la réalité. Ces schémas ou maquettes peuvent à leur tour se modéliser par des figures représentant des objets géométriques, ce qui peut amener à les refaire. Ces schémas et figures jouent ainsi un rôle d'intermédiaire entre le monde sensible et les objets géométriques théoriques. Pour utiliser les résultats établis dans un modèle théorique de la géométrie, il est nécessaire d'identifier dans le problème concret les éléments qui pourront se traduire dans le modèle théorique à la fois comme hypothèses et conclusions du résultat qu'on utilise. La représentation est un moyen de le faire. C'est pourquoi, en plus de l'espace sensible, nous considérons une partie spécifique de l'espace sensible que nous appelons l'espace graphique des représentations. On y trouve des représentations d'objets du monde sensible ou d'objets géométriques sous forme de schémas ou de figures en dimension 2 (D2). L'espace graphique est une interface entre l'espace sensible et l'espace géométrique dans le cas d'un problème posé dans le monde sensible, cas que nous ne considèrerons pas dans la suite du texte. On trouvera plus de détails dans Perrin-Glorian et al. (2013), ou Perrin-Glorian & Godin (2018) ; nous y analysons un énoncé tiré d'un manuel de lycée professionnel où il s'agit de calculer l'aire de la surface vitrée de la pyramide du Louvre. Si le problème est théorique, il porte sur des objets théoriques qui peuvent se représenter dans l'espace sensible par des maquettes, des figures, qu'elles soient réalisées avec les instruments classiques ou avec des logiciels. L'espace graphique (voire l'espace sensible pour les maquettes) sert alors de terrain d'expérimentation pour ce problème théorique.

Dans l'enseignement de la scolarité obligatoire, l'étude des figures n'a en fait le plus souvent ni une finalité pratique ni une finalité théorique, elle poursuit plutôt une finalité d'apprentissage conceptuel. Suivant que l'objet d'étude est la figure matérielle ou la figure géométrique, on a deux modes de validation radicalement différents qui correspondent à ce que nous avons appelé théorie physique et théorie axiomatique de la géométrie.

2 De nombreux travaux de recherche sur l'enseignement de la géométrie distinguent dessin et figure et cette distinction est couramment utilisée en formation des maîtres. Cependant, les dessins géométriques ne sont pas n'importe quels dessins mais des dessins présentant des caractéristiques qu'on peut produire avec des instruments de géométrie bien définis (*in fine* la règle et le compas). Nous préférons l'expression « figure matérielle » à « dessin » pour insister sur le fait que c'est à ces caractéristiques que l'on s'intéresse. De plus, il nous paraît important que les expressions « reproduction de figures » et « construction de figures » puissent référer aussi bien à des figures matérielles qu'à des figures théoriques (dans le cas de la construction).

Dans le cas où l'objet d'étude est la figure géométrique, on a le schéma de la figure 1: la figure matérielle est une représentation de la figure géométrique théorique et la théorie de référence est une théorie axiomatique (même si les axiomes ne sont pas explicités pour les élèves). La validation des propositions se fait par déduction sur des énoncés. Certains des énoncés sont pris comme axiomes ; les énoncés déjà validés et qui méritent d'être retenus parce qu'on les utilisera souvent sont des théorèmes. D'autres énoncés sont donnés comme hypothèses: ils sont spécifiques de la figure considérée.

Dans le cas où l'objet d'étude est la figure matérielle, à l'école élémentaire voire au début du secondaire, on a un *problème graphique* qui correspond au schéma de la figure 2: la théorie de référence est une théorie physique. Dans la suite, nous allons préciser comment peut se construire cette théorie physique dans le cadre de la géométrie des tracés.

Figure 1 – Problème dans l'espace géométrique

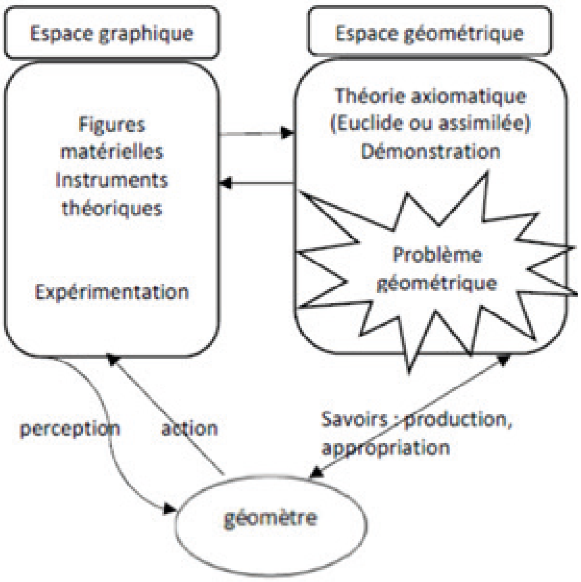
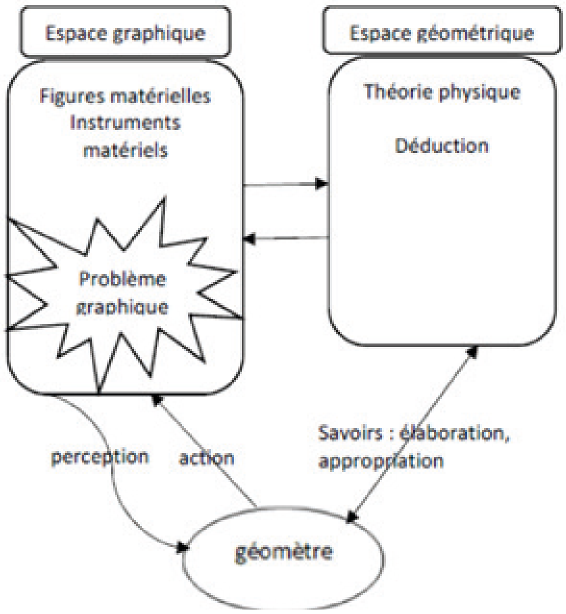


Figure 2 – Problème dans l'espace graphique



Dans Perrin-Glorian et Godin (2018), on trouvera l'exemple d'un même problème traité dans les deux cas: construire un triangle rectangle connaissant (en grandeur) un côté *c* de l'angle droit et l'hypoténuse *a*, l'un des deux étant aussi connu en position (i.e.

donné par un segment sur lequel doit se faire la construction).

L'étude des figures matérielles: continuité et rupture primaire-secondaire

Berthelot et Salin (1993, 1998), dans la suite des travaux de Brousseau, ont distingué les connaissances spatiales qui servent à gérer nos rapports à l'espace et les connaissances géométriques et se sont intéressés aux rapports entre connaissances spatiales et connaissances géométriques en distinguant deux manières de traiter les problèmes posés dans l'espace sensible. Ils identifient ainsi trois problématiques dans les rapports entre espace sensible et géométrie:

- la *problématique pratique*: le problème est posé dans l'espace sensible, les rapports à l'espace sont effectifs, « ils sont contrôlés de manière empirique et contingente » par les sens, la validation se fait dans l'espace sensible.
- la *problématique de modélisation ou spatio-géométrique*: le problème est posé dans l'espace sensible mais on ne peut pas le traiter directement dans cet espace: on le traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution ; le résultat est retraduit à son tour dans l'espace sensible et la validation se fait aussi dans l'espace sensible.
- la *problématique géométrique*: le problème, le traitement et la validation se situent dans le cadre de la géométrie théorique, selon des règles établies. Les rapports à l'espace, par exemple à la figure peuvent être effectifs mais sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente.

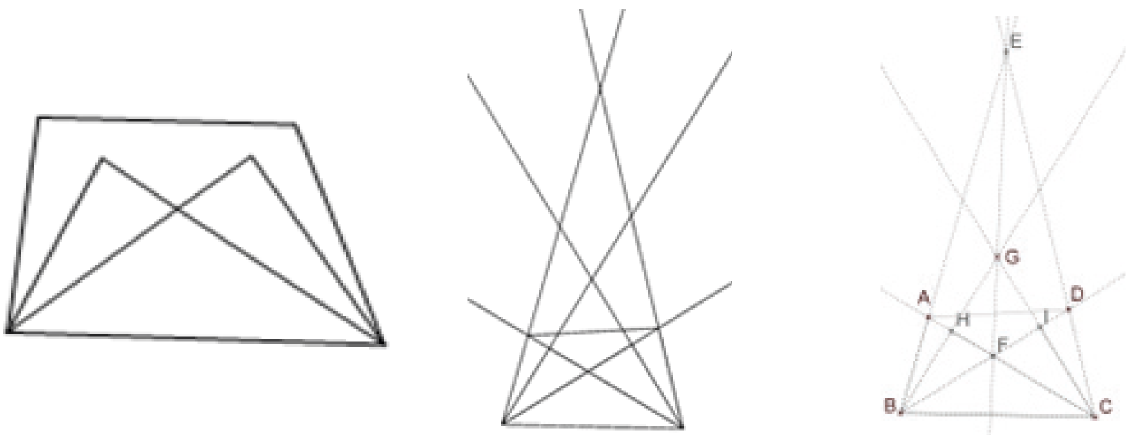
Berthelot et Salin (1993, 1998) considèrent que, pour les élèves, la problématique pratique fait obstacle à la problématique géométrique, en particulier dans le micro-espace de la feuille de papier. Ils montrent que la taille de l'espace est une variable didactique importante parce que le contrôle par la vue et les instruments matériels n'a pas la même efficacité selon la taille de l'espace. Ainsi, 50% des élèves de fin de primaire sont incapables de prévoir la position qu'occuperont les pieds d'un banc rectangulaire après déplacement alors que la majorité d'entre eux sont capables de tracer un rectangle sur une feuille de papier où ils peuvent utiliser continûment le contrôle de la vue. Ils proposent alors la problématique spatio-géométrique comme moyen d'entrer dans le géométrique à partir de problèmes posés dans l'espace mais avec blocage des procédures spatiales naturelles, notamment en travaillant dans le méso-espace. Ils retiennent ainsi trois classes de variables importantes pour l'analyse des situations de géométrie dans l'enseignement: le type de problématique, le type de rapport à l'espace, effectif ou intériorisé, le caractère adidactique ou non des situations.

Pour notre part, nous nous intéressons au travail des figures sur papier, donc dans le micro-espace, que nous avons appelé l'espace graphique. Dans la géométrie théorique qui correspond à GII ou à la problématique géométrique de Berthelot et Salin, l'objet d'étude est une figure théorique définie par des propriétés (données par des énoncés ou un codage). La validation se fait par déduction en utilisant des propriétés déjà validées (voir Figure 1). Si la figure matérielle est l'objet du travail, la validation se fait par des instruments de tracé qui contrôlent des caractéristiques graphiques correspondant à la représentation de propriétés géométriques dans GII (Figure 2). Il y a donc une rupture dans le rapport aux figures entre ces deux modes de validation. Cependant, il y a une continuité au niveau des énoncés entre GI et GII: les propriétés valides sont les mêmes[3] et les figures matérielles sont les mêmes.

Acquérir une mobilité du regard sur les figures matérielles

La démonstration en géométrie demande d'articuler le registre graphique des figures et le registre verbal du langage. Les travaux de Duval (1998, 2005) ont mis l'accent sur les difficultés cognitives liées à l'articulation de ces deux registres. En effet, les activités géométriques mettent en jeu trois processus cognitifs qui remplissent des fonctions épistémologiques différentes: la visualisation, la construction et le raisonnement qui peuvent être accomplis séparément mais qui doivent être connectés en géométrie (DUVAL, 1998, p.38). En particulier, dans la visualisation naturelle, les unités figurales de dimension 2 sont privilégiées alors que les unités figurales invoquées dans les énoncés géométriques sont le plus souvent de dimension 1 (lignes) ou 0 (points). Raisonner sur des figures demande donc une déconstruction dimensionnelle de ces figures et leur construction demande de tenir compte des contraintes des instruments. En appui sur le travail de Duval et en considérant les différents moyens de décrire et de construire des figures planes, nous avons distingué trois conceptions principales des figures planes composées[4] en prenant en compte la dimension des unités figurales mais aussi la capacité à voir des unités figurales non tracées utiles pour construire ou définir des éléments de la figure. Cette distinction tient compte non seulement de la visualisation des unités figurales mais aussi de la détermination d'unités figurales à partir d'autres. La conception « surfaces » consiste à voir la figure comme un assemblage de surfaces juxtaposées ou, ce qui est déjà beaucoup moins naturel, superposées. Dans une conception « lignes », la figure est définie par un réseau de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments: la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments, le compas pour les cercles ou les arcs de cercles. Dans une conception « points », la figure est définie par des points. Nous considérons ces conceptions comme emboîtées: ainsi, si on dispose de la conception points, on a aussi la conception lignes et la conception surfaces.

Figure 3 – Trois conceptions de la même figure



3 Pas tout à fait dans le cas des constructions approchées que nous laissons de côté ici.

4 Nous appelons figure simple une figure qui peut être obtenue en faisant le contour d'un gabarit, par exemple un polygone non croisé, et figure composée toute autre figure plane. On peut voir une figure simple comme une surface avec un bord qui ne se recoupe pas ou comme une ligne fermée qui ne se recoupe pas et englobe donc une partie connexe du plan et une figure composée comme un assemblage de figures simples juxtaposées ou superposées ou comme un assemblage de lignes dont certaines sont fermées et d'autres ouvertes.

Par exemple, pour la figure à gauche de la figure 3, avec la conception surfaces, on peut voir trois triangles juxtaposés ou deux triangles qui se chevauchent, le tout posé sur un quadrilatère. Dans une conception surfaces, des lignes et des points peuvent apparaître mais les lignes sont seulement des bords de surfaces, les points sont des sommets de surfaces ou, en cas de chevauchement, des intersections de bords. On ne peut pas créer de nouvelles lignes sans déplacer de surface. Dans une conception lignes, on voit la figure (au centre de la figure 3) dessinée sur un réseau de lignes (ici demi-droites). Les lignes qui sortent de l'enveloppe convexe de la figure initiale restent difficiles à concevoir. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà. On peut tracer des segments (voire des droites) qui relient des points qu'on a déjà. Dans une conception points de la figure, on peut créer des lignes nouvelles pour obtenir un point à leur intersection et les lignes sont définies par des points. On peut ainsi voir la figure (à droite de la figure 3) comme définie par les points A, B, C, D, G (E et F s'obtiennent par intersection de droites qu'on peut tracer à partir de A, B, C, D). Nous nommons ici les points pour faciliter la communication mais ce n'est pas nécessaire pour une analyse de figure dont on n'a pas à communiquer le résultat.

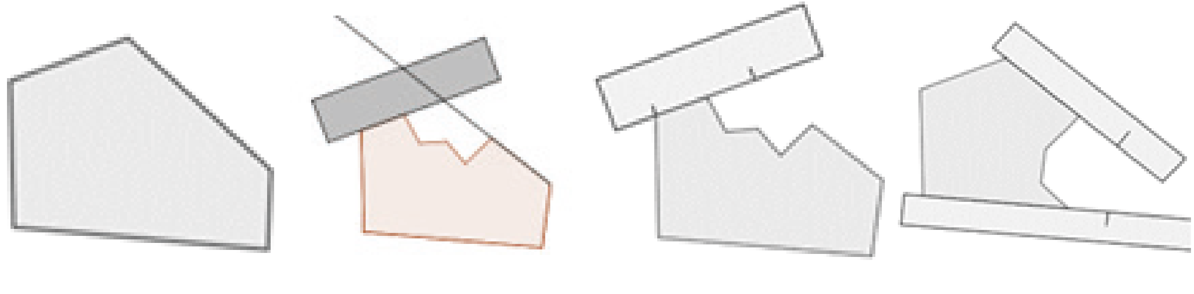
Notons que, même avec la conception points, les lignes ne sont pas nécessairement vues comme ensembles de points.

REPRODUCTION DE FIGURES COMME SOURCE DE PROBLÈMES

Que veut dire reproduire une figure?

Reproduire une figure est une tâche courante à l'école élémentaire. Elle peut prendre des significations différentes suivant les critères que l'on se donne pour juger de la fidélité de la reproduction et suivant les instruments dont on dispose pour effectuer cette reproduction. Dès l'école maternelle, les enfants apprennent à reproduire des figures sous forme de puzzle avec des formes géométriques, objets plats de l'espace que l'on manipule. Ils recourent alors à la seule perception, visuelle ou tactile (par exemple pour reconnaître un bord droit). Bientôt ils sont capables de reproduire une figure en traçant le contour d'un gabarit. S'il manque un coin au gabarit (Figure 4), il sera nécessaire d'utiliser un bord droit du gabarit ou une règle pour prolonger deux côtés pour obtenir une intersection ou de prolonger un côté et de reporter une longueur. S'il manque tout un côté, le report de longueur devient nécessaire. On peut ainsi agir très tôt sur les instruments à disposition des élèves pour changer la nature du problème qu'on leur pose et favoriser l'évolution de leurs connaissances.

Figure 4 – Reproduire un polygone avec un gabarit déchiré, une règle et des reports de longueur



Dans l'exemple précédent, nous nous sommes intéressés à la reproduction d'un polygone à l'identique: la forme et la taille du polygone sont conservées, on peut vérifier l'exactitude de la reproduction par superposition d'un calque. Plus généralement, pour l'étude ou la reproduction d'une figure matérielle tracée sur papier avec un mode de validation matériel, deux cas sont à considérer: soit on reproduit la figure à l'identique et la vérification de l'égalité des figures peut se faire par superposition avec un calque ; soit la reproduction se fait à une taille différente et la conformité au modèle demande la mise en œuvre de propriétés géométriques comme la conservation des angles, des alignements, des rapports de longueurs. Elle peut se faire aussi par la vérification des propriétés de la figure à reproduire, par exemple pour un triangle équilatéral ou un carré (le nombre de côtés détermine un polygone régulier à une similitude près, autrement dit son nom détermine sa forme). Remarquons que ce n'est pas le cas pour un rectangle non carré ou un triangle isocèle non équilatéral: pour un triangle isocèle, il faut de plus respecter les angles ou un rapport de longueur, pour un rectangle, il faut respecter à la fois les angles et un rapport de longueur. Le triangle joue un rôle majeur dans la reproduction des figures à une taille différente puisque la conservation des angles assure la conservation de la forme: des triangles dont les angles sont égaux sont semblables, ce qui n'est pas le cas des quadrilatères. Si l'on reproduit la figure à l'identique, forme et grandeurs sont conservées ; si l'on reproduit la figure à une taille différente, la forme est conservée, les angles aussi mais les longueurs ne le sont pas, seuls les rapports entre longueurs sont conservés. En géométrie, conserver la forme signifie produire une figure semblable au modèle mais le mot « forme géométrique » a un sens beaucoup plus large même en cours de géométrie dans les années antérieures.

En maternelle, les objets matériels sont premiers: on découvre et formule des propriétés qui permettent de les reconnaître par la perception visuelle ou par le toucher. Ces propriétés correspondent à des caractéristiques visuelles des objets eux-mêmes ou des traces graphiques que ces objets laissent sur le papier quand on en fait le contour. On peut produire les traces graphiques des objets matériels sans en faire le contour avec des instruments qui permettent de reproduire et de vérifier les caractéristiques visuelles de ces traces. Ces caractéristiques visuelles correspondent aux propriétés (égalités de longueur, angles droits, parallélisme) qui permettront de définir les objets géométriques. Le vocabulaire introduit sur les objets matériels reste le même ou presque quand il s'applique aux traces graphiques, puis aux objets géométriques que ces traces représentent. Au cours de la scolarité obligatoire il y a donc deux tournants majeurs à gérer dans le mode de définition des figures: passer de la seule perception au contrôle des propriétés par des instruments, puis du contrôle par les instruments au contrôle par les énoncés.

Les instruments usuels, règle, équerre, compas, jouent un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception au contrôle par les énoncés à cause de la déconstruction instrumentale qu'ils nécessitent (MITHALAL; BALACHEFF, 2019). Cependant les instruments du commerce remplissent en général plusieurs fonctions qu'il nous paraît nécessaire de distinguer dans l'apprentissage parce qu'elles sont liées à la conceptualisation de notions géométriques différentes. Par exemple, la règle graduée remplit trois fonctions: produire ou vérifier de l'alignement, reporter une longueur, mesurer une longueur. Nous expliquons dans le paragraphe suivant pourquoi nous excluons la mesure de notre approche avant de nous intéresser aux autres fonctions de tracé des instruments.

Grandeurs et mesures

Les grandeurs géométriques, et notamment les comparaisons et reports de longueurs et d'aires, jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation des nombres entiers et rationnels et de leurs opérations, mais aussi des racines carrées, et même des limites et donc aussi d'autres irrationnels par l'intuition du continu qu'elles permettent. Dans la perspective de penser une progression cohérente de la géométrie, coordonnée à une progression sur les nombres au long de la scolarité obligatoire, il est essentiel d'aborder les opérations (addition, soustraction, multiplication et division par un entier) sur les grandeurs géométriques (longueurs d'abord, angles et aires ensuite) indépendamment de leur mesure pour qu'elles puissent servir d'appui pour la construction des nombres. Bien sûr, nous ne voulons pas dire qu'il ne faut pas apprendre à mesurer avec la règle graduée ou avec le rapporteur. Mais la mesure est pour nous du côté des nombres et pour qu'elle puisse jouer son rôle dans la conceptualisation des nombres, il faut aussi (d'abord ou simultanément) travailler la mise bout à bout des longueurs, l'addition des aires et des angles…

Ainsi, nous nous intéressons aux instruments de tracé et de report de longueur ou d'angle et non aux instruments de mesure dans ce que nous appellerons la géométrie des tracés. Les grandeurs géométriques sont présentes, ainsi que le report de grandeurs et le rapport de grandeurs et non leur mesure: quand c'est nécessaire, la taille des figures est fixée par des longueurs données par des segments et non par leur mesure.

Les instruments de tracé, interface entre le perceptif et le théorique

Pour penser la continuité de l'enseignement de la géométrie sur la scolarité obligatoire, nous incluons les gabarits, pochoirs et papier calque parmi les instruments matériels utilisés pour tracer et reproduire des figures (simples ou composées) sur papier. Nous considérons ainsi des instruments de tracé variés qui permettent de reporter des formes (morceaux de surfaces ou lignes et relations entre lignes) et des grandeurs (angles ou longueurs). Ces instruments requièrent une vision plus ou moins élaborée de la figure et la mise en œuvre de plus ou moins de propriétés géométriques. Les gabarits et pochoirs permettent de transporter toute l'information sur des figures simples. Le papier calque, s'il est assez grand, permet de reporter en une fois toute l'information sur la figure à reproduire, qu'elle soit simple ou composée. D'autres instruments permettent de transporter des informations de dimension 2 (D2) sur la figure sans transporter toute l'information: gabarit ou pochoir déchiré, calque trop petit, morceau de papier opaque sur lequel on peut écrire, mais aussi équerre, compas d'angle, règle à bords parallèles. Par exemple l'équerre transporte des informations sur un morceau de surface compris entre deux bords droits. En revanche, la règle ne permet que de vérifier et de reporter des alignements, c'est-à-dire des informations de dimension 1 (D1). Le compas permet de reproduire des cercles ; en cela il transporte une information D2 (un disque ou une partie de disque) mais, pour le faire, il est nécessaire d'identifier deux points: le centre du cercle et un point de la circonférence ou bien un point et une grandeur. L'usage raisonné du compas (avec justifications) nécessite donc une conception points de la figure: savoir que, quel que soit le point qu'on prend sur le cercle, il sera à la même distance du centre. Cependant, même avec un accès à la conception points dans certaines situations, même s'ils peuvent identifier certains points sur des lignes, la plupart des élèves du début de l'enseignement secondaire ne voient pas les cercles comme des ensembles de points, pas plus que les droites ou les segments.

GÉOMÉTRIE DES TRACÉS

Nous allons maintenant définir un certain rapport à la géométrie élémentaire de l'étude des figures, que nous avons appelé « géométrie des tracés » parce qu'il ne fait pas intervenir la mesure. La situation fondamentale de cette géométrie est la reproduction ou la construction de figures avec des instruments. La reproduction demande de passer d'une figure à une figure, la construction d'un texte à une figure. Pour établir un rapport géométrique aux figures, la géométrie des tracés demande d'expliciter les règles d'usage des instruments de géométrie et de mettre en place un langage de description des figures et de leur construction.

Instruments théoriques et instruments matériels

Dans la géométrie théorique, les figures matérielles se tracent à main levée ou avec des instruments, elles supportent le raisonnement ; la figure de travail est la figure géométrique (immatérielle). Dans la géométrie physique, les figures matérielles se tracent avec des instruments concrets qui ont un domaine d'efficacité limité ; les tracés à main levée, éventuellement codés, sont des schémas qui aident la mémoire et qu'il s'agit de réaliser avec les instruments. Cependant les fonctions des instruments géométriques usuels sont liées à des concepts géométriques. La règle (non graduée) permet de tracer des lignes droites ; elle est liée à la conceptualisation de l'alignement. L'équerre permet de tracer des lignes et de reporter des angles droits ; elle est liée à la conceptualisation de la notion d'angle droit avec ses deux côtés infinis. Le compas permet de tracer des cercles et aussi (plus tard) de reporter des longueurs sur une droite déjà tracée (en produisant l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle). Nous considérons des instruments théoriques qui n'ont pas les limitations des instruments matériels pour représenter les différentes fonctions des instruments matériels, tout en envisageant comment ils peuvent être réalisés matériellement. Pour les figures utilisées dans les démonstrations au début de l'enseignement secondaire, les seuls instruments théoriques dont nous aurons besoin sont *la règle* et *le compas*, mais, quand les connaissances sont limitées, d'autres instruments sont nécessaires pour reporter les grandeurs géométriques sans recourir à la mesure et aux nombres.

- la *règle* (non graduée) permet de tracer des lignes droites aussi grandes que l'on veut. Elle représente la droite.
- le *reporteur de longueur* permet de reporter des longueurs sur une droite déjà tracée. Il peut être réalisé par une bande de carton qu'on ne peut pas plier, avec un bord droit sur lequel on peut écrire. Le compas à pointes sèches (deux branches identiques) a le même usage mais la longueur à reporter n'est pas matérialisée par un segment.
- le *médiateur de longueurs*[5] permet de prendre la moitié d'une longueur. Il peut être réalisé par une bande de papier pliable, avec un bord droit sur lequel on peut écrire.

5 Nous introduisons ce mot pour faciliter l'écriture de ce texte. Nous ne proposons pas de l'introduire auprès des élèves parce que c'est un instrument provisoire dans le cours de géométrie. On disposera plus tard de connaissances qui permettront de prendre un milieu à la règle et au compas à l'aide de la « médiatrice ».

- le reporteur d'angles permet de reporter des angles à partir d'une droite et d'un point sur cette droite. Il peut être réalisé par un gabarit, un morceau de papier que l'on plie ou un cercle avec un de ses rayons, tracés sur papier transparent. Un point est repéré comme sommet de l'angle.
- le compas classique permet de tracer des cercles.

Règles d'usage géométrique des instruments

Pour que les instruments matériels puissent jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il est important que les élèves apprennent à en faire un usage que nous appelons géométrique parce qu'il respecte des règles correspondant à la représentation par les instruments théoriques de propriétés géométriques et référant implicitement à des axiomes, des définitions ou des théorèmes de géométrie.

- Pour placer la *règle*, il faut deux points ou un segment déjà tracé.
- Le *reporteur de lon*gueur se pose sur une droite déjà tracée à partir d'un point de cette droite.
- Le *médiateur de longueur* permet de prendre la longueur d'un segment et de la partager en deux ; le report se fait sur le segment déjà tracé à partir d'une de ses extrémités.
- Le *reporteur d'angle* (ou l'*équerre*) se pose sur une droite déjà tracée avec le sommet sur un point déjà tracé de cette droite ; le report se fait d'un côté ou de l'autre de la droite (quatre positions possibles). Pour tracer des droites parallèles, faire glisser un côté du gabarit d'angle sur une droite et tracer le long de l'autre côté du gabarit.
- Le *compas* a deux branches différentes: la pointe et la mine. Pour tracer un cercle de centre donné passant par un point donné, on pose la pointe du compas sur le centre et la mine sur le point ; elle décrit un arc de cercle quand on tourne sa branche autour de l'autre. Pour reproduire un cercle, il faut repérer le centre et prendre l'écartement jusqu'à un point du bord. Cet écartement représente une longueur: la distance entre le centre et n'importe quel point de la circonférence. On peut donc reporter une longueur à partir d'un point sur une droite avec le compas en plaçant la pointe sur ce point et en faisant un arc de cercle qui coupe la droite.

Cet apprentissage n'est actuellement pas pris en charge par l'enseignement. Or il nous paraît essentiel pour éclairer les liens entre géométrie physique et géométrie théorique parce qu'il met l'accent sur la justesse de la construction plutôt que sur sa précision (PETITFOUR, 2017). En effet, l'usage des instruments est à relier à la finalité de la géométrie: si la finalité est pratique, on cherche à avoir le plus de précision possible en fonction des instruments dont on dispose ou à adapter l'usage des instruments pour obtenir plus de précision dans le tracé, ce que nous appelons un usage technique des instruments ; si la finalité est théorique, on cherche à avoir une construction juste grâce à un usage géométrique des instruments. Un enjeu de l'enseignement à la fin du primaire ou au début du secondaire est de distinguer ces deux usages.

Les élèves peuvent utiliser le compas comme reporteur de longueur quand ils voient l'écart entre la pointe et la mine comme une longueur et le cercle comme un ensemble de points à la même distance du centre. A mesure que les connaissances des élèves évoluent, ils disposent d'un répertoire de théorèmes et de procédés de construction qui leur permettent de se passer aussi du médiateur de segment et de l'équerre puis du reporteur d'angle. Les techniques associées peuvent se rencontrer plus tôt, dans la réalisation de figures particulières. Ainsi le milieu d'un segment peut se construire de multiples manières (PERRIN-GLORIAN; GODIN, 2018, p.23-24).

Restauration de figures comme situation d'action

Nous avons dit que la reproduction de figures est la situation fondamentale de la géométrie des tracés dans la mesure où elle permet d'engendrer toutes les situations à usage didactique de cette géométrie. Parmi les reproductions de figures, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à une famille de situations que nous avons appelé la restauration de figures. Nous l'avons mise au point et étudiée dans le but de travailler avec des élèves de 6 à 12 ans la mobilité du regard sur les figures (en particulier le passage de la conception surfaces à la conception lignes et points) ainsi que l'usage géométrique des instruments matériels. Nous la définissons à partir des caractéristiques d'une situation en théorie des situations: le problème et la règle du jeu, le milieu et ses variables didactiques, les connaissances en jeu.

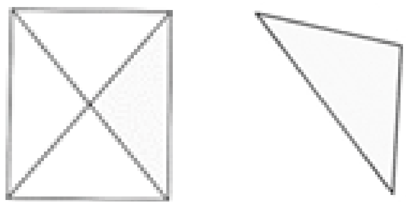
Le problème et la règle du jeu: Une restauration de figure est une reproduction de figure matérielle mais avec des contraintes particulières: une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non) ; une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument qui permet de reporter des informations D2 de la figure initiale mais sans donner toute l'information par exemple une partie de gabarit) ; on dispose d'instruments variés auxquels on peut donner un coût d'utilisation dans un barème ; quand les élèves pensent avoir terminé, ils peuvent tester leur production par un calque disponible auprès du maître.

Le milieu est constitué notamment de la figure modèle, de l'amorce de la figure, des instruments avec leur coût. Les variables didactiques portent sur les choix de ces différents éléments du milieu.

Les connaissances en jeu sont à examiner dans chaque cas. Le milieu et la règle du jeu sont choisis en fonction des connaissances supposées disponibles et de celles dont on veut favoriser l'émergence.

Il s'agit de restaurer des figures matérielles à l'aide d'instruments matériels. La figure modèle fournit des informations sur des caractéristiques graphiques que l'on peut identifier et reproduire avec les instruments. Cependant certaines de ces caractéristiques graphiques représentent des propriétés géométriques qui peuvent être reconnues comme telles et dont on peut déduire de nouvelles propriétés géométriques qui se traduisent par de nouvelles caractéristiques graphiques. Par exemple, dans un quadrilatère deux sommets opposés sont alignés avec le point d'intersection des diagonales. Le choix des variables didactiques est fait en sorte que l'utilisation des propriétés géométriques que l'on veut travailler permette de réduire le coût de la restauration. La restauration de figure vise ainsi à encourager l'identification de lignes et de points qui permettent de définir géométriquement la figure et de la construire. Si l'objectif est d'aider les élèves à passer d'une conception surfaces à une conception lignes et points des figures, on peut faire un choix des variables tel que la construction soit possible avec une conception surfaces, mais avec un coût plus élevé. L'usage géométrique des instruments est défini progressivement en lien avec la définition du coût des instruments. On peut trouver de nombreux exemples de restauration de figure dans des articles publiés par notre groupe de recherche, notamment Keskessa, Perrin-Glorian et Delplace (2007), Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013), Perrin-Glorian et Godin (2014), Mangiante et Perrin-Glorian (2018), Mathé et al. (2020), Mathé et Perrin-Glorian, (2023). En voici un exemple simple: on veut restaurer la figure constituée d'un rectangle avec ses diagonales. On donne comme amorce l'un des triangles quarts de rectangle (Figure 5). On dispose de trois instruments pour reproduire: la règle est gratuite ; chaque usage du reporteur de longueur vaut 2 points et l'usage du compas 1 point. Comment reproduire la figure au moindre coût ?

Figure 5 – Figure modèle et amorce de la figure à restaurer



L'amorce n'est pas à la même échelle que le modèle et elle est orientée différemment ; il faut savoir à quel triangle elle correspond: on peut le vérifier en se fiant à la perception visuelle ou en vérifiant les angles avec une feuille de papier que l'on plie ou bien le texte dit (par exemple comme ici en le coloriant sur le modèle) de quel triangle il s'agit. Avec le choix fait pour le coût des instruments, la stratégie gagnante consiste à utiliser le compas: on a le centre du cercle circonscrit au rectangle et deux de ses points, on peut donc le tracer au compas ; il suffit ensuite de prolonger les petits côtés du triangle isocèle fourni pour obtenir les diagonales et, à l'intersection avec le cercle, les sommets du rectangle et tracer ensuite les côtés ; le coût est de 1 point. Une autre stratégie consiste à reporter la longueur des côtés égaux du triangle isocèle sur leur droite-support vers l'extérieur à partir du sommet du triangle isocèle (qui est le point d'intersection des supports) ; elle coûte 4 points et demande de mettre en œuvre la propriété des diagonales de se couper en leur milieu. A partir d'un triangle quelconque, on obtiendrait un parallélogramme mais, comme on part d'un triangle isocèle, les diagonales sont de plus égales et on obtient un rectangle.

La première stratégie est beaucoup plus probable si le cercle circonscrit figure sur le modèle. Sinon, il faut avoir disponible la connaissance qu'un rectangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le point d'intersection des diagonales. Le report des longueurs au compas peut aussi faire émerger le cercle: on n'a pas besoin de changer l'écartement du compas entre les deux reports et on a le même centre, donc on trace deux arcs d'un même cercle et il suffit d'utiliser une seule fois le compas pour faire le cercle entier et obtenir les sommets manquants comme intersection de deux lignes (une droite et un cercle). Remarquons qu'on pourrait aussi restaurer la figure avec une équerre. Pour bloquer cette procédure, l'équerre n'est pas permise ou on lui donne un coût exorbitant.

Dans la restauration, les propriétés géométriques à utiliser pour construire sont à reconnaître à travers des caractéristiques graphiques du modèle vérifiables avec les instruments. Dans une construction, les conditions que doit vérifier la figure sont données dans un texte et les propriétés doivent être disponibles. La vérification peut se faire par superposition d'un calque qui porte la solution. Ici, la vérification du fait qu'on obtient bien un rectangle et ses diagonales peut se faire à l'équerre (quatre angles droits). On peut aussi le démontrer grâce aux propriétés caractéristiques du rectangle. La validation de la restauration peut ainsi se faire à plusieurs niveaux. Nous y reviendrons.

La restauration de figure permet d'apprendre à enrichir une figure avec de nouveaux tracés qu'on a le projet d'utiliser dans la restauration: ces éléments nouveaux sont reliés à ceux qu'on a déjà et à ceux que l'on cherche à obtenir. Dans l'exemple ci-dessus, on peut enrichir le modèle en y ajoutant le cercle. Cette activité contribue ainsi à augmenter l'épaisseur sémiotique des figures qui deviennent porteuses d'informations qui ne sont pas visibles d'emblée et aussi celle du vocabulaire: par exemple le mot « rectangle » sera progressivement porteur de relations entre ses éléments visibles – angles, sommets, côtés – et ceux de la figure enrichie – diagonales, cercle circonscrit, axes de symétrie etc.

La restauration de figure peut viser des propriétés géométriques spécifiques (comme dans l'exemple ci-dessus) mais elle vise d'abord des apprentissages liés à la pratique géométrique et qui ne sont que rarement considérés explicitement, comme:

- Un segment est porté par une droite. Une droite peut se prolonger autant que l'on veut de chaque côté: dès qu'on en connaît un segment, on la connaît tout entière.
- Il faut deux points pour définir une droite.
- Un point s'obtient par l'intersection de deux lignes.

Ces énoncés correspondent à des axiomes ou à des théorèmes plus ou moins directement dérivés des axiomes qu'il est hors de question de démontrer avec les élèves. Il nous paraît cependant important d'identifier avec les enseignants ces savoirs généralement ignorés par l'enseignement mais qui sont essentiels pour que les savoirs de la géométrie théorique puissent s'appuyer sur ceux de la géométrie des tracés en dépassant les malentendus identifiés dans de nombreuses recherches. Pour ces apprentissages, on choisit de préférence une figure qui n'a aucune propriété particulière (voir un exemple dans Mangiante et Perrin-Glorian, 2018).

Formulation et validation dans la géométrie des tracés

La conceptualisation des objets géométriques ne peut se faire uniquement dans des situations d'action comme celle que nous avons décrite pour illustrer la restauration de figures. Il faut aussi développer un langage qui permet de décrire les problèmes et les décisions que l'on prend pour les résoudre et aussi des moyens de valider ce qui est énoncé dans le langage (BULF, MATHE, MITHALAL, 2015). La théorie des situations (BROUSSEAU, 1997) identifie trois dialectiques fondamentales imbriquées: l'action, la formulation, la validation. Dans les situations d'action, il peut y avoir des formulations mais elles ne sont pas nécessaires. Dans la situation de formulation, celle-ci est rendue nécessaire par une contrainte. Ainsi dans une situation de formulation sur la restauration de figure, le modèle et l'amorce ne sont pas disponibles simultanément, par exemple par un échange entre émetteur et récepteur: l'émetteur dispose de la figure modèle et de l'amorce ; il restaure la figure mais son travail ne s'arrête pas là, il doit écrire un message à un récepteur qui doit restaurer la figure à partir de l'amorce et des mêmes instruments mais sans disposer du modèle. Ainsi la formulation des méthodes utilisées pour reproduire la figure est-elle rendue nécessaire.

Dans la restauration de figure comme situation d'action, la validation se fait à l'aide d'un calque qui porte la solution (différente de la figure modèle dans le cas d'une restauration à une échelle différente). Il s'agit alors d'une preuve matérielle. Dans la situation de validation, il s'agit de passer à une preuve intellectuelle. Il s'agit d'une étape vers la démonstration qui demande une nouvelle lecture de la situation (BALACHEFF, 2019, p.14).

> Ce passage de preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles nécessaire pour aller vers la démonstration, est aussi celui d'une problématique pragmatique à une problématique théorique et donc d'une évolution de la lecture des situations dans lesquelles l'activité mathématique se déploie et de celle du statut des connaissances mobilisées.

En effet, des connaissances rendent certaines vérifications inutiles. Progressivement, on peut substituer à la prise d'information sur le modèle une liste de propriétés fournies avec la figure modèle ou en réponse à des questions posées par les élèves après une première exploration de la figure modèle, et à la vérification par le calque une vérification par les instruments, voire par le raisonnement. Dans l'exemple ci-dessus, pourquoi la méthode utilisée pour restaurer la figure donne-t-elle sûrement un rectangle, sans qu'on ait besoin de le vérifier avec un calque ou avec les instruments ? Il est nécessaire de s'assurer d'abord des propriétés que l'on peut considérer comme acquises, les hypothèses, ici que le triangle fourni comme amorce est bien isocèle. Ensuite, qu'on ait reporté des longueurs ou utilisé le cercle, c'est la caractérisation du rectangle par les diagonales qui permet d'apporter une preuve intellectuelle qu'on obtient bien un rectangle. Cela demande d'une part de voir le triangle isocèle de départ et le rectangle obtenu comme exemples génériques représentant tous les triangles isocèles et rectangles reliés par cette construction, d'autre part d'utiliser des résultats connus pour en déduire d'autres.

DE LA GÉOMÉTRIE DES TRACÉS À LA GÉOMÉTRIE DES ÉNONCÉS

Notre approche vise la coordination de trois dimensions majeures: la mobilité du regard sur les figures matérielles, le double rôle des instruments (matériels et théoriques) et le langage géométrique qui utilise la langue naturelle et aussi des symboles, par exemple du codage qui peut être introduit dans la géométrie des tracés pour mémoriser des informations dans une reproduction ou une construction de figure. L'objet de ce paragraphe est d'essayer de préciser en quoi la restauration de figure peut aider l'entrée dans la géométrie théorique mais aussi ce qui l'en sépare.

Restauration de figure: un premier pas vers la démonstration ?

La démarche de restauration d'une figure matérielle avec des instruments de tracé vise à apprendre aux élèves à porter un regard géométrique sur les figures par la nécessité d’analyser les caractéristiques visuelles d’une figure en termes de propriétés qu’on peut reproduire avec des instruments dont l’usage, par les contraintes qu’on y met, se rapproche de la représentation de propriétés géométriques. Elle vise de plus à introduire le langage géométrique par son usage dans une résolution de problème.

Tableau 1 – Comparaison entre restauration et démonstration dans l’usage de la figure

<table>
<tr><td rowspan="2">Restauration</td><td rowspan="2">Données:
Figure amorce,
Figure modèle

Ce sont des figures matérielles (muettes ou avec certaines informations).</td><td>Instruments
matériels de tracé avec leur coût d’utilisation</td><td rowspan="2">Figure complétée

Conformité au modèle vérifiée par un calque (ou avec des instruments pour les propriétés non utilisées dans la construction). Cette vérification nécessite soit d’effacer certaines lignes de construction (ou de n’en pas tenir compte) soit de repasser la figure à obtenir.</td></tr>
<tr><td>Connaissances:
- Reconnaître dans le modèle la figure amorce et ce qui permet de relier l’amorce aux éléments manquants. Nécessité d’enrichir la figure modèle.
- Règles d’usage des instruments à mettre en relation avec les tracés recherchés.
- Organiser les tracés dans un certain ordre: les nouveaux tracés doivent s’appuyer sur des tracés déjà obtenus.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Démonstration</td><td rowspan="2">Données:
- Codage partiel (par texte ou signes) d’une figure géométrique théorique, suffisant pour la déterminer. (Rôle joué dans la restauration par la figure amorce).
- Une propriété de la figure à démontrer.
(Rôle joué par la figure modèle).</td><td>Instruments
- Figure matérielle (à main levée ou aux instruments) codée.
- Savoirs géométriques (définitions, théorèmes).</td><td rowspan="2">Figure codée complétée
Des données et des savoirs (théorèmes ou définitions) ont été utilisés pour la construction et le codage de la figure matérielle représentant la figure théorique.
Des propriétés nouvelles ont été démontrées: on a enrichi le code de la figure.</td></tr>
<tr><td>Connaissances:
- Isoler les éléments pertinents sur la figure matérielle.
- Reconnaître des figures clés et les relier à des savoirs.
- Organiser les savoirs en une démarche permettant de relier les données aux propriétés à obtenir.</td></tr>
</table>

La restauration de figure apprend aussi aux élèves à mettre une certaine hiérarchie entre les propriétés que vérifie une figure, certaines étant déjà données (celles fournies par l’amorce), d’autres étant à identifier sur le modèle (qu’on enrichit au besoin à cette fin) parmi lesquelles il faudra choisir celles qui permettent la reconstruction de la figure avec les instruments à disposition, d’autres enfin étant conséquences de celles-là. La recherche de cette hiérarchie sur les propriétés présente une certaine analogie avec celle d’un chemin qui relie hypothèses et conclusion dans une démonstration. Le tableau 1 esquisse un parallèle entre les deux démarches dans l’usage de la figure. La deuxième colonne indique les données dans chaque cas, la troisième colonne le travail sur la figure avec les moyens qui le permettent, la dernière colonne, le résultat de ce travail et les moyens de validation.

La grande différence est que, dans le cas de la démonstration, la validation des propriétés se fait toujours dans le langage, à l'aide d'un raisonnement logique appuyé sur des définitions et théorèmes alors que dans la restauration, elle peut se faire à l'aide d'instruments matériels. Comparons sur un exemple un problème de démonstration, un problème de construction au sens de la géométrie théorique et un problème de restauration portant sur la même figure.

Tableau 2 – Trois problèmes portant sur la même figure

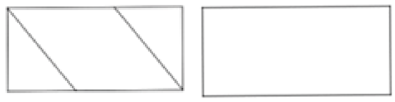
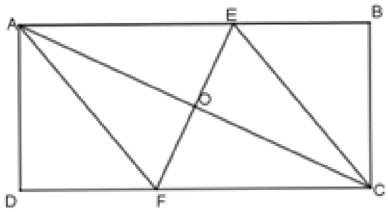
Problème 1. Soit ABCD un rectangle, E sur [AB] tel que EA=EC et F sur [CD] tel que FA = FC. Montrer que AECF est un losange.	
Problème 2. Soit un rectangle ABCD. Construire un losange AECF tel que E soit sur le segment [AB] et F sur le segment [CD].	
Problème 3. Restaurer la figure. On a déjà tracé le rectangle. Instruments : règle, équerre, compas	

Figure 6 – Figure de résolution des trois problèmes



Dans le premier problème, les informations sont données dans un texte, on peut réaliser la figure à main levée pour y porter les informations. Les données appellent à mobiliser la médiatrice de [AC] ou les triangles isocèles AEC et AFC. Pour montrer que AFCE est un losange, il faut montrer, par exemple, que AE = AF d'où l'on déduira que les quatre côtés ont la même longueur. Pour ce faire, on peut, suivant les connaissances disponibles, avoir recours à la symétrie de centre O, point d'intersection des diagonales du rectangle ou montrer que les triangles EOC et AOF (ou AEC et AFC) sont égaux.

Dans le deuxième problème, la construction n'est pas immédiate: on est conduit à faire l'analyse d'un schéma codé à main levée portant les propriétés à obtenir (problème supposé résolu) pour les relier à celles qu'il sera possible d'utiliser pour la construction. Dans cette analyse on est amené à enrichir la figure pour en rechercher d'autres propriétés à partir desquelles on peut mener la construction avec les instruments dont on dispose. Ici l'analyse amène à dire que [AC] est une diagonale commune au rectangle et au losange. Les diagonales du rectangle et du losange se coupent en leur milieu donc [EF] passe par le milieu O de [AC]. Comme les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, E et F sont nécessairement sur les intersections de la perpendiculaire à [AC] passant par O avec les côtés [AB] et [AC] du rectangle. En géométrie théorique, il reste cependant à prouver que la condition est suffisante, c'est-à-dire que AECF est bien un losange, ce qui se fait comme dans le problème 1.

Le troisième problème relève de la géométrie des tracés. Les points ne sont pas nommés mais, pour faciliter l'écriture, nous les nommerons comme dans la figure 6. Il manque deux segments ; pour les tracer, il faut placer deux points sur les côtés du rectangle et pour cela enrichir la figure modèle de façon à relier les points qui manquent à des éléments qu'on peut tracer sur l'amorce. L'amorce et le modèle ne sont pas à la même échelle, on ne peut donc pas reporter de longueur du modèle à l'amorce ; on n'a pas d'instrument de mesure, on ne peut donc pas passer par les nombres. Le segment qui relie les points manquants est perpendiculaire à la diagonale du rectangle, ce qui se vérifie avec les instruments. Sur l'amorce, on peut tracer la diagonale du rectangle. Mais pour savoir où tracer la perpendiculaire, il faut avoir vérifié sur le modèle que [EF] passe par le milieu de [AC]. Pour trouver ce milieu sur l'amorce, il faut tracer la deuxième diagonale du rectangle en utilisant un savoir: les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu. En géométrie des tracés, il est nécessaire de recourir à un répertoire de savoirs (dont la démonstration relève de la géométrie théorique mais qui ont le même énoncé). On vérifiera qu'on a bien un losange en comparant les longueurs des côtés avec les instruments.

Démonstration, figure et axiomatique sous-jacente

Pour faire des démonstrations dans la géométrie théorique, il faut des définitions et théorèmes qui, par souci de cohérence, doivent avoir une base axiomatique, même si elle n'est pas formulée. Nous avons dit dans l'introduction que la théorie de l'espace affine euclidien ne suffit pas pour aider les enseignants dans leur pratique, ils ont besoin d'un modèle de la géométrie appuyé sur l'espace sensible. Ce modèle était celui d'Euclide plus ou moins adapté avant la réforme des mathématiques modernes. En France, dans les années 80 et 90, l'enseignement de la géométrie était fondé sur les transformations et les cas d'égalité des triangles restaient ignorés. Cependant, pour les élèves, ce sont des outils de démonstration plus accessibles que les transformations (PERRIN & PERRIN-GLORIAN, 2021). Ils nécessitent moins de déconstruction dimensionnelle que les transformations qui demandent le plus souvent de considérer des points qui définissent les lignes et de voir un point comme intersection de deux lignes. Par exemple, dans le problème 1 du tableau 2, pour démontrer que AECF (Figure 6) est un parallélogramme en se servant de la symétrie centrale, il faut voir les points E et F comme intersections respectives de la droite (EF) et des demi-droites [AB) et [CD). La demi-droite [AB) a pour image la demi-droite [CD) puisque A et B ont respectivement pour image C et D ; la droite (EF) se transforme en elle-même puisqu'elle passe par O donc E a pour image F et donc AE = CF (donc AE = AF). Il faut voir un point comme défini par l'intersection de deux droites et une droite comme définie par deux points. Pour montrer que les triangles EOC et AOF sont égaux, on peut recourir au cas d'isométrie ACA (un angle entre deux côtés): on sait que AO = OC, les angles et sont égaux parce que droits, les angles et sont égaux parce qu'alternes internes par rapport à la sécante (AC) des parallèles (AE) et (CF). De même, les triangles isocèles AEC et AFC ont le côté AC en commun et les angles à la base et sont égaux car alternes internes. Les points et segments à identifier peuvent être vus comme des sommets ou côtés des triangles, ce qui est compatible avec une vision des figures comme juxtaposition de surfaces. Le choix de l'axiomatique sous-jacente entraîne donc des conséquences importantes sur l'accès des élèves à la géométrie théorique.

UTILISATION EN CLASSE ET FORMATION DES MAÎTRES

La démarche présentée dans cet article a été mise en place à l'école primaire dans un groupe de recherche dans le Nord de la France entre les années 2000 et 2010. Les situations proposées sont loin des pratiques ordinaires des enseignants. Une recherche collaborative avec des enseignants du primaire (MANGIANTE-ORSOLA ; PERRIN-GLORIAN, 2018 ; MANGIANTE-ORSOLA, 2023) a permis de produire une ressource (https://lea-geometrie.etab.ac--lille.fr/) aidant les enseignants à mettre en place cette démarche et surtout les formateurs à élaborer des formations sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et des repères de progression pour les élèves. Des recherches collaboratives avec des professeurs sont en cours pour utiliser la restauration de figure au début de l'enseignement secondaire (entre 11 et 13 ans) pour négocier le passage à la géométrie théorique.

CONCLUSION

Beaucoup de recherches ont mis l'accent sur la rupture dans le rapport aux figures entre une géométrie appuyée sur la perception, aidée d'instruments de tracé ou de mesure, et la géométrie déductive où il s'agit de valider par la démonstration à partir d'axiomes et de théorèmes déjà établis des énoncés portant sur des objets théoriques idéaux. Nous avons ici cherché à dépasser cette rupture en tentant d'identifier un chaînon manquant entre ces deux géométries. Nous avons pour cela défini ce que nous avons appelé une géométrie des tracés qui porte sur des objets d'un espace graphique servant d'intermédiaire entre l'espace physique des objets matériels et l'espace théorique d'une géométrie axiomatique, qui s'appuie uniquement sur des instruments de tracé et de reports de grandeurs, à l'exclusion de la mesure par les nombres. Notre choix se justifie parce que nous centrons notre attention sur le rapport aux figures et la conceptualisation des objets géométriques abstraits (points et droites essentiellement) sur lesquels repose une axiomatique du type de celle d'Euclide. Nous avons ainsi centré notre réflexion sur la reproduction et la construction de figures en identifiant des variables didactiques qui permettent de concevoir une progression (de 6 à 12 ou 13 ans) partant de l'utilisation du contour d'un gabarit pour reproduire une figure simple à la construction de figures à la règle et au compas. Un moteur pour passer du simple tracé avec des instruments à la conceptualisation des objets géométriques nous semble être la formulation de règles d'usage des instruments autour d'une question centrale: *de quels tracés déjà réalisés ai-je besoin pour poser mon instrument, quel tracé nouveau permet-il d'obtenir ?* Cette question préfigure une question essentielle de la démarche de démonstration: quelles sont les données, quel énoncé veut-on démontrer ? Dans la démonstration, les théorèmes et définitions jouent le rôle que jouaient les instruments dans la restauration ou la construction d'une figure. Pour développer le langage géométrique, il importe que les situations proposées aux élèves ne se limitent pas à la dialectique de l'action mais qu'elles abordent aussi la dialectique de la formulation et celle de la validation, permettant de passer de preuves pragmatiques à de premières preuves intellectuelles utilisant un répertoire de connaissances. Bien sûr il reste du chemin à parcourir pour parvenir à la rédaction de démonstrations telles qu'on les attend à la fin de l'enseignement secondaire.

RÉFÉRENCES

BALACHEFF, N. Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. **Séminaire National de didactique des mathématiques,** Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), nov. 2017, Paris, France. pp.423-456. 2019. hal-02333720. https://hal.science/hal-02333720

BERTHELOT, R.; SALIN, M.-H. L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, **Grand N,** n. 53, p. 39-56, 1993. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-53-grand-n/5-l-enseignement-de-la-geometrie-a-l-ecole-primaire-528030.kjsp?rh=1550475848540

BERTHELOT, R.; SALIN, M.-H. The role of pupill's spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In MAMMAMA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the teaching of geometry in the 21st century. An ICMI study**, pp.71-78. Dordrecht/ Boston / London: Kluwer Academics Publishers,1998.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970–1990.** Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BROUSSEAU, G. Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. **Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon 2000.** Université de Crète, 2000. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/

BULF, C. ; MATHÉ, A.C. ; MITHALAL, J. Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie. **Recherches en didactique des mathématiques**, n.35, p.7-36, 2015.

COUSIN-FAUCONNET, A. **Enseigner la géométrie au collège.** Paris: Armand Colin, 1995.

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point of view. In MAMMAMA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the teaching of geometry in the 21st century. An ICMI study**, pp. 37-52. Dordrecht/ Boston / London: Kluwer Academics Publishers,1998.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,** n. 10, p. 5-53, 2005.

GONSETH, F. **La géométrie et le problème de l'espace.** Lausanne: Editions du Griffon, 1945-1955.

HOUDEMENT, C.; KUZNIAK, A. Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 11. p. 175-195, 2006.

KAHANE, J.-P. (Org.) **L'enseignement des sciences mathématiques: Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques,** Paris: Odile Jacob, 2002.

KESKESSA, B. ; PERRIN-GLORIAN, M.-J. ; DELPLACE, J.-R. Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. **Grand N,** n. 79, p. 33-60, 2007.

MANGIANTE-ORSOLA, C. Study on teacher appropriation of a geometry education resource. In GUILLE-BIEL WINDER, C.; ASSUDE, T. **Articulations between Tangible Space, Graphical Space and Geometrical Space. Resources, Practices and Training,** chapter 11, pp. 199-220, Volume 14–Education Set by Angela Barthes and Anne-Laure Le Guern, ISTE-éditions, 2023.

MANGIANTE-ORSOLA, C. ; PERRIN-GLORIAN, M.-J. Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du Léa Valenciennes-Denain, In Barrier, T. ; Chambris ; C.: **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016.** Paris: IREM de Paris–Université Paris Diderot, 2018, 978-2-86612-386-4. <hal-01704879>. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01704879/document pages 35-59

MATHÉ, A.-C.; BARRIER, T.; PERRIN-GLORIAN, M.-J. **Enseigner la géométrie élémentaire, enjeux, ruptures et continuités,** Bruxelles: collection Les Sciences de l'éducation aujourd'hui, éditions Academia–L'Harmattan, 2020.

MATHÉ, A.-C.; PERRIN-GLORIAN, The geometry of tracing, a possible link between geometric drawing and Euclid's geometry? In GUILLE-BIEL WINDER, C.; ASSUDE, T. **Articulations between Tangible Space, Graphical Space and Geometrical Space. Resources, Practices and Training,** chapter 1, pp. 3-34, Volume 14–Education Set by Angela Barthes and Anne-Laure Le Guern, ISTE-éditions, 2023.

MITHALAL, J.; BALACHEFF, N. The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. **Educational studies in mathematics,** v. 100, n. 2, p. 161-176, 2019.

PERRIN, D.; PERRIN-GLORIAN, M.-J. (Org.) **Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer.** Brochure n°100. Paris: IREM, Université Paris-Cité, 2021.

PERRIN-GLORIAN, M.-J.; GODIN, M. De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. **Math-école**, n. 222, p. 26-36, 2014.

PERRIN-GLORIAN, M.-J.; GODIN, M. **Géométrie plane: pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège.** https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837 2018.

PERRIN-GLORIAN, M.-J.; MATHÉ, A.-C.; LECLERCQ, R. Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. **Repères-IREM**, n. 90, p. 5-41, 2013.

PETITFOUR, É. (2017). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. **Recherches En Didactique Des Mathématiques,** n. 37(2-3), p. 247-288. https://revue-rdm.com/2017/outils-theoriques-d-analyse-de-l/

Histórico

Recebido: 05 de outubro de 2023.
Aceito: 10 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Enseigner la géométrie plane en cohérence de 6 à 15 ans. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024001, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024001.id588

Como citar – APA

PERRIN-GLORIAN, M-J. (2024). Enseigner la géométrie plane en cohérence de 6 à 15 ans. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024001. 10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024001.id588

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques