Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024002
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024002.id589

Geometria Não Euclidiana na formação do professor de matemática: oficinas de práticas matemáticas

Non-Euclidean Geometry in mathematics teacher training: mathematical practice workshops

Geometría No Euclidiana en la formación de profesores de matemáticas: talleres de prácticas matemáticas

Alexandre Pereira Sousa[1]

Renato Borges Guerra[2]

José Messildo Viana Nunes[3]

RESUMO

Evidencia-se a necessidade da inserção de conteúdos relativos à Geometria Não Euclidiana na proposta curricular do Curso de Formação de Professores de Matemática. Nessa perspectiva, tem-se como objetivo, nesta pesquisa, propor Oficinas de Práticas Matemáticas, na formação de professores, para fomentar a inserção de assuntos da Geometria Não Euclidiana no currículo de cursos de licenciaturas em Matemática. Para levar a cabo essa proposição, desenvolveu-se uma pesquisa-ação com alunos do sétimo semestre da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão. O quadro teórico adotado foi a Teoria Antropológica do Didático, que elenca ferramentas necessárias para o desenvolvimento de Oficinas de Práticas Matemáticas como dispositivo de formação de professores. O resultado aponta as oficinas como um dispositivo importante para inserir a Geometria Não Euclidiana na formação de professores de Matemática e fomentar a presença deste campo da geometria na proposta curricular do Curso de Formação de Professor de Matemática no Maranhão.
Palavras-chave: Formação de Professores; Geometria Não Euclidiana; Oficina de Práticas Matemáticas.

ABSTRACT

The need to include content related to Non-Euclidean Geometry in the curricular proposal of the Mathematics Teacher Training Course is evident. From this perspective, the objective of this research is to propose Mathematical Practice Workshops in teacher training to encourage the inclusion of Non-Euclidean Geometry subjects in the curriculum of undergraduate Mathematics courses. To carry out this proposition, action research was developed with students in the seventh semester of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Maranhão. The theoretical framework adopted was the Anthropological Theory of Didactics, which lists easy tools for the development of Mathematical Practice Workshops as a teacher training device. The result points to workshops as an important device to insert Non-Euclidean Geometry in the training of mathematics teachers and encourage the presence of this field of geometry in the curricular proposal of the Mathematics Teacher Training Course in Maranhão.
Keywords: Teacher training; Non-Euclidean Geometry; Mathematical Practices Workshop.

RESUMEN

Se evidencia la necesidad de incluir contenidos relacionados con la Geometría No Euclidiana en la propuesta curricular del Curso de Formación de Profesores de Matemáticas. Desde esta perspectiva, el objetivo de esta investigación es proponer Talleres de Práctica Matemática en la formación docente para incentivar la inclusión de asignaturas de Geometría No Euclidiana en el currículo de las carreras de Graduación en Matemáticas. Para llevar a cabo esta propuesta, se desarrolló una investigación-acción con estudiantes del séptimo semestre de la carrera de Matemáticas de lo Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Maranhão. El marco teórico adoptado fue la Teoría Antropológica de la Didáctica, que enumera herramientas necesarias para el desarrollo de Talleres de Práctica Matemática como dispositivo de formación docente. El resultado apunta a los talleres como un dispositivo importante para insertar la Geometría No Euclidiana en la formación de profesores de matemáticas y fomentar la presencia de ese campo de la geometría en la propuesta curricular del Curso de Formación de Profesores de Matemáticas de

1 Doutorado em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor (IFMA), São Luiz, Maranhão, Brasil. Endereço para correspondência: Rua P, Quadra 15B, Casa 43, Residencial Planalto Anil 2, número, complemento, bairro, São Luiz, Maranhão, Brasil, CEP: 65050-874. E-mail: alexandresousa@ifma.edu.br.

2 Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Trav. Tiradentes, 700, Reduto, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66053-330. E-mail: rguerra@ufpa.br

3 Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Trav. Lomas Valentinas, 146, Pedreira, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66083-390. E-mail: messildo@ufpa.br

Maranhão.
Palabras clave: Formación de profesores; Geometría no euclidiana; Taller de Prácticas Matemáticas.

INTRODUÇÃO

A geometria, segundo Boyer (2003, p. 4-5) está ligada às ações humanas desde os primórdios da civilização. Nesse sentido, as práticas com geometria são remetidas ao Egito antigo, Babilônia, Grécia etc. Mas, foi por intermédio dos gregos que os conhecimentos geométricos alcançaram os resultados e significados que conhecemos hoje. Outros povos da Antiguidade usavam seus resultados sem a preocupação de justificá-los. Mas, os gregos, levados pela inquietação do saber, além de utilizarem de forma prática a geometria, buscaram entendê-la e justificá-la e são os responsáveis por sua difusão para o resto do mundo.

Dessa justificativa, surgiu uma estrutura sistemática que apresentava a matemática como uma ciência dedutiva. Dentro dessa estrutura, estava o Quinto Postulado, de escrita complexa e diferente, que não podia ser deduzido dos outros quatro, o que o tornava misterioso.

Segundo Leivas (2013, p. 648), "o quinto postulado de Euclides, conhecido como o Postulado das paralelas, já causava incômodo e controvérsia desde sua apresentação". O próprio Euclides evitava empregá-lo em suas demonstrações, o que conduziu à suspeita de que se tratava de uma proposição que tentaram em vão demonstrar, enquanto outros propunham sua eliminação do sistema axiomático.

A independência desse postulado, em relação aos quatro primeiros, só foi percebida no século XIX. A negação do Quinto Postulado abria um universo geométrico no qual o Quinto Postulado não era válido. Nessa perspectiva, surgiram a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica que, juntas, construíram outro contexto epistemológico que fundamenta esta pesquisa, a qual tem por objetivo propor Oficinas de Práticas Matemáticas na formação de professores para fomentar a inserção de assuntos da Geometria Não Euclidiana no currículo de cursos de licenciatura em Matemática, devido à importante necessidade de contextualizar a formação do professor de Matemática no modelo geométrico, que se aproxima da forma curva do mundo.

A problemática se impõe sobre o estudo de geometria, na escola, em virtude de historicamente, nas salas de aula de matemática, a abordagem da geometria sempre estar vinculada ao universo euclidiano, desde o ensino fundamental até o ensino médio. Na maioria das vezes, chega-se a concluir o ensino superior e essa realidade não muda.

Convém esclarecer que não se trata de a Geometria Euclidiana ser menos importante, já que ela evidencia o compasso no início da construção científica e que, na atualidade, é usualmente empregada em várias aplicações, como, por exemplo, no campo da engenharia civil. No entanto, grandes distâncias, como a distância da cidade de Barcelona, na Espanha, à cidade de Tóquio, no Japão, não podem ser medidas a partir de conceitos euclidianos. Caso considerássemos o Planeta Terra como uma esfera, teríamos a Geometria Esférica, Não Euclidiana, que pode se incumbir de estudar distâncias sobre a esfera, triângulos esféricos, astronomia e outras aplicações, incluindo a navegação, que podemos encontrar no texto de Zanella (2013).

Por essa razão, a opção por incluir a Geometria Não Euclidiana na formação do professor de Matemática é uma tentativa de confrontar o ensino clássico, em que a geometria se caracterizava, dentre outros aspectos, pelas longas listagens de termos para memorizar, com ênfase nos exercícios, na repetição de conceitos ou fórmulas.

Nesse contexto, o ensino da Matemática, mais precisamente o Ensino da Geometria, em seus diferentes níveis, deve manter-se atualizado com uma estruturação Não Euclidiana; como defendida por Ribeiro (2012) e Carli (2019), que vislumbram a possibilidade/necessidade do ensino da Geometria Não Euclidiana desde o Ensino Médio.

Segundo Kaleff (2010, p. 3), foi "através das novas geometrias que os cientistas iniciaram a busca por explicar o mundo físico dos nossos dias". Assim, além de professores bem formados e atualizados, a escola como local de vivências de situações de ensino deve possibilitar aos educandos estratégias pedagógicas que lhes permitam refletir sobre o contexto das modificações científicas e tecnológicas proporcionadas desde o século XIX.

Os conhecimentos matemáticos (geométricos) a serem apresentados, alguns de caráter não euclidianos, devem fazer parte desse ambiente que tem a responsabilidade de apresentar ao educando desafios, estimulando suas capacidades cognitivas e emocionais, de forma a permitir-lhe conhecer o novo e, nele, questionar, pesquisar e, em particular, saber identificar formas que o levem a crer que o mundo onde vive possui características Não Euclidianas.

Para levar a cabo essa proposta, realizamos um estudo histórico-epistemológico e bibliográfico que não apresentaremos aqui na totalidade, mas discorreremos de forma dialogada sobre esses estudos ao longo de texto.

Para estruturar a pesquisa no âmbito teórico-metodológico, fundamentamo-nos na Teoria Antropológica do Didático – TAD, mais precisamente no dispositivo de formação de professores cunhado na TAD como Oficinas de Práticas Matemática**4** (OPM).

Trata-se de uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa ação (TRIPP; WILSON, 2021), contando com a participação de dezoito alunos do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA). Os referidos alunos já haviam cursado a disciplina Geometria Plana e Espacial (90 horas) e para o desenvolvimento das 8 oficinas se organizaram em grupos de seis componentes.

ENREDO DA PESQUISA

É do nosso conhecimento que a Geometria Euclidiana é uma geometria definida para superfícies planas, porém sabemos que nosso mundo não é plano. Nestas condições, é comum surgir o questionamento: A Geometria Euclidiana é a geometria que representa o espaço que vivemos? Esse questionamento aparece naturalmente num contexto introdutório de Geometria Não Euclidiana, pois coloca-nos em uma conjuntura epistemológica que envolve história da ciência e história da matemática, em particular, história da geometria.

Além do mais,

4 Do original em francês *Talleres de Práticas Matemáticas.*

> [...] o estudo das Geometrias não Euclidianas permite romper o paradigma euclidiano da existência de uma única Geometria verdadeira para a interpretação e descrição do espaço, mostrando que existe uma multiplicidade de sistemas geométricos logicamente consistentes. Dessa forma, o conhecimento de outras geometrias permite mostrar as diversas possibilidades de interpretação do espaço e das aplicações dessas geometrias nos fenômenos do mundo real (CAVICHIOLO, 2011, p. 106).

Analisando a controvérsia, vemos que, quando superfícies curvas estão envolvidas, como a própria curvatura do planeta, por exemplo, a Geometria Euclidiana não possibilita o estudo; esses estudos estão incluídos em um contexto Não Euclidiano, assim "não podemos continuar limitando o pensamento do homem moderno, quando diante dele existem fatos que a Geometria euclidiana não explica" (PATAKI, 2004, p. 2).

Convém ressaltar que:

> Muitos dos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas Geometrias Não-Euclidianas. Um exemplo são os estudos que resultaram na Teoria da Relatividade, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma Geometria Não-Euclidiana, de modo que conceitos, como a luz se propaga ao longo de geodesias e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche, foram fundamentais (PARANÁ, 2008, p. 56).

A partir do século XIX, surgiram sistemas geométricos que não eram euclidianos, como a Geometria Fractal[5]. A Geometria Projetiva, em particular, desenvolvida a partir do Renascimento, com os estudos de perspectiva, é anterior ao século XIX. Segundo Courant e Robbins (2000), trata-se de uma Geometria Não Euclidiana, uma vez que no espaço projetivo o Quinto Postulado de Euclides não se verifica, ou seja, nesse espaço, dadas duas retas paralelas, elas se interceptam intuitivamente, num lugar chamado de ponto no infinito sobre a reta.

Nestas condições, evidenciamos a necessidade do estudo

> [...] das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, além de contribuir na compreensão dos conceitos geométricos, constitui-se em tema profícuo para levar o futuro professor à compreensão da natureza e do processo de produção da Matemática. [...] conhecer estes aspectos do conhecimento matemático poderá ser relevante para a formação do professor, oportunizando a aquisição de um conhecimento mais profundo da Matemática, uma vez que a situa em um contexto mais amplo do que o de suas relações internas, ou seja, envolve o conhecimento matemático historicamente produzido no contexto das relações sociais e culturais no qual se processaram (CAVICHIOLO, 2011, p.21).

No sentido de encaminhar alternativas para o ensino dos conteúdos vinculados à Geometria Não Euclidiana, devem-se criar ações pedagógicas que funcionem como pontes que interligam o meio (processo de ensino) e o fim (a aprendizagem do aluno). Essas ações educativas buscam construir um polo de constantes debates em torno dos temas, que possuem em comum a democratização de conceitos e teorias ligadas à Geometria Não Euclidiana, como ciência, que a consolidam como disciplina.

5 A *geometria fractal* é uma geometria não euclidiana que desenvolve o estudo dos subconjuntos complexos de espaços métricos. É a parte da matemática que estuda as propriedades e os comportamentos dos fractais, a qual descreve situações que a geometria clássica não poderia explicar.

Portanto, melhorar a interação entre o que possa ser euclidiano ou não euclidiano é idealizado a partir de nossas OPM, que aproximam alunos e professores de um modelo de ensino que expõe a existência da Geometria Não Euclidiana. Nestas condições, na formação do licenciado em Matemática, a ausência desta Organização Matemática (OM) conduz o ensino à continuidade do currículo atual, que precisa ser debatido. Uma vez que sabemos que o ensino precisa de formação continuada, politizada e crítica, o estudo de conteúdos não euclidianos contribui na formação do professor para o entendimento do avanço científico, da prática matemática, bem como dissemina metodologias inovadoras voltadas para o ensino desta área da matemática.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Segundo Bosch e Gascón (2010), a Oficina de Práticas Matemáticas (OPM) é um dispositivo didático cuja principal função é a de legitimar, institucionalizar e fazer visível o momento do trabalho da técnica dentro dos processos didáticos escolares. Sua origem se deu nas universidades espanholas com a busca de superar as limitações intrínsecas da estrutura binária *classe de teoria/classe de problemas*, relativas aos problemas docentes habituais, que influenciam na estrutura do ensino, baseados em um modelo epistemológico marcado por teorias e tecnologias matemáticas que estão intimamente ligadas à construção ou à adaptação do bloco prático-técnico (tarefa e técnica) das Organizações Matemáticas () e do bloco tecnológico-teórico (tecnologia e teoria) do saber.

Nestas condições, no que se refere à classe de teoria, cabe ao professor introduzir as componentes do bloco tecnológico-teórico da OM que objetiva mostrar o contexto teórico da Geometria Não Euclidiana que fundamenta e justifica a prática.

Vale ressaltar que

> A análise do funcionamento controlado das OPM permite colocar de manifesto sua capacidade de incidência sobre os dispositivos didáticos existentes e sobre a vida do resto das dimensões do processo de estudo. Em particular, se evidenciou sua capacidade para integrar três momentos didáticos que aparecem claramente desvinculados na organização tradicional: o momento exploratório, o tecnológico teórico e o do trabalho da técnica [...] (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 68, tradução nossa).

O funcionamento geral de uma OPM pode ser descrito, ao retomarmos uma OM pontual previamente estabelecida, ou seja, citar um tipo de problema previamente explorado pelo grupo de alunos, para o qual dispomos de um embrião da técnica de estudo.

Nesse contexto, uma OM apresenta a teoria *fazendo trabalhar* a técnica disponível, com o objetivo de enriquecê-la com novos problemas, criando uma ponte entre a experiência adquirida e o novo desafio. Isto é, por meio da Geometria Euclidiana, podemos entender e resolver questões da Geometria Esférica, por exemplo.

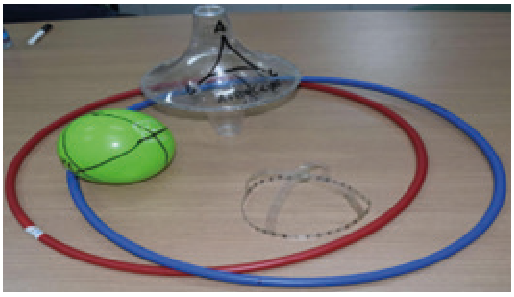
A construção da técnica é resultado dos tipos de problemas específicos desenvolvidos a fim de dar sustentabilidade à teoria desenvolvida. Nestas condições, a técnica pode apresentar alcance e uma capacidade limitada de seu alcance. Isto é, a técnica pode ser empregada para resolver um tipo de exercício, porém, pode não ser suficiente para resolver outros. Isso nos faz entender que o objetivo da OPM é progredir de acordo com o nível da exposição trabalhada e, com isso, causar nos alunos um desequilíbrio cuja variação é gradual, ou seja, mais ou menos forte em relação à técnica inicial, o que nos revela o seu alcance e sua evolução.

Devemos chamar a atenção que até agora as OPM possuem a mesma estrutura de trabalho. Sua organização diz respeito à exposição de teoria, de exercícios e de problemas resolvidos cujos temas se interligam, mas mantêm independência em relação à forma da prática de resolução entre elas. A cada encontro, partimos de uma pontual concreta, que tem o objetivo de construir conteúdo, a partir do contexto teórico e do trabalho da técnica, em que os elementos de cada uma das locais a incluem.

As pontuais das diferentes sessões estão relacionadas entre si, no sentido de que podem ser articuladas na mesma local ou regional. A explicação dessa possível construção mais ampla pode constituir o objetivo final da oficina, ou seja, permanecer implícita, deixando claro que o objetivo de cada sessão é dar, de início, certa autonomia ao trabalho, para então posteriormente ser tomada como base em outros processos de estudo.

A Figura 1 mostra os objetos utilizados na Oficina para suscitar aos alunos os planos não euclidianos.

Figura 1 – Materiais utilizados para confeccionar Planos Não-Euclidianos



Fonte: Elaboração dos autores.

A intenção foi tornar esses planos palpáveis e mostrar que sua confecção é de fácil manipulação. Em relação ao contexto teórico, buscamos revelar a ausência de paralelas na Geometria Esférica, na qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo definido nesse plano é maior que , e que, na Geometria Hiperbólica, dados uma reta e um ponto fora dela, passam uma infinidade de retas paralelas à reta dada. Além disso, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo definido nesse plano é menor que .

A técnica utilizada pode ser considerada como inicial, por exemplo, o trabalho desenvolvido a partir do Quinto Postulado é ponto de partida para exercícios e problemas. A intenção é contribuir para que os alunos adquiram autonomia e assim possam resolver os primeiros problemas apresentados. Caso a técnica, até então conhecida, não dê conta de resolver outra situação, devemos buscar o seu aprimoramento, de forma a seguir na direção da criação de novas que possibilitem a autonomia.

Para isso, é importante que os alunos tenham algum meio de validação para o uso da técnica, isto é, possam avaliar se o problema considerado foi convenientemente resolvido ou não. Com o passar do tempo ou com as experiências adquiridas, os próprios alunos podem ser capazes de assumir os vários tipos de técnicas necessárias e, nestas condições, continuar o estudo a ponto de sugerir maneiras diferentes das iniciais para o uso e, consequentemente, melhorar seu desempenho.

Em outras ocasiões cabe ao professor sugerir ou apresentar novos elementos praxeológicos, que devem ser considerados. Assim, a dinâmica de trabalho inserida é diferenciada da outra ou da inicial e da complexidade da técnica inicial, podendo o professor assumir diferentes formas de avaliar o progresso dos alunos. Por exemplo, o professor pode solicitar um relatório ou portfólio das atividades da oficina com exemplos das práticas.

As oficinas configuram-se a partir de problemas e exercícios que procuramos organizar em caráter progressivo. Isto é, começamos com exercícios elementares e, progressivamente, acrescentamos componentes teóricos.

Desse modo, destacamos e vivenciamos diferentes tipos de OPM, mesmo assim, outras variações ocorrem e são fundamentais, podendo ser resumidas nas seguintes observações (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 171).

> Cada oficina envolve a seleção de um número muito reduzido de pontuais relacionadas entre si que fazem parte do programa de estudos do curso considerado e que "trabalharão" e "desenvolverão" em cada sessão da oficina. Em um caso ideal, os próprios alunos devem "conceber" novas OPM centradas em outras OM pontuais como um dispositivo de estudo pessoal. [...] 2–Para cada sessão e cada OM pontual considerada, os alunos devem dispor de alguma técnica inicial de resolução dos problemas considerados e de meios de validação da utilização desta técnica. Por exemplo, em alguns casos, a disponibilidade de duas técnicas alternativas para a resolução de problemas pode funcionar como um meio dessa validação. [...] 3–Para que o momento do trabalho da técnica possa viver normalmente, é importante que as sessões da OPM sejam "longas", ou seja, que se reduza a habitual limitação do tempo de estudo em sala de aula que se impõe nos demais dispositivos didáticos (classe de aula, classe de problema, exames, etc.). [...] 4–Embora tanto a seleção dos específicos de cada sessão e os espécimes a serrem considerados quanto a ordem em que serão tratados sejam decisões que permanecem sob a responsabilidade do professor (ou do pesquisador responsável pelo projeto da OPM), é necessário que os alunos possam trabalhar com relativa autonomia durante a oficina. As intervenções específicas do professor são especialmente concentradas no início e no final de cada sessão. [...] 5–Em resumo, poderíamos dizer que em uma OPM os estudantes, que normalmente trabalham em pequenos grupos, têm autonomia limitada devido às restrições que são dadas antecipadamente pela organização global da oficina. O objetivo final da OPM é que os estudantes se tornem "especialistas" no gerenciamento de certas técnicas matemáticas e que isso lhes permita serem protagonistas (em grupos e individualmente) de seu desenvolvimento. E tudo isso como um meio para ter a possibilidade de realizar uma atividade matemática genuinamente criativa, isto é, criadora de novas técnicas, novos tipos de problemas e novos elementos tecnológicos [...].

Nestas condições, temos que o trabalho da OPM desafia e faz com que os alunos aceitem os problemas como necessários a ser resolvidos. Assim, o aluno será protagonista das ações em sala de aula e entra no jogo como um especialista, devido à técnica usada ou OM por ele trabalhada. Mas, não devemos esquecer o que está em jogo aqui: a formação do professor de Matemática, que, a nosso ver, é deficitária, em relação ao contexto não euclidiano, hiperbólico e esférico.

Segundo Bosch e Gascón (1995), embora as OPM modifiquem localmente aspectos muito importantes do contrato institucional, elas permanecem sob a responsabilidade exclusiva do professor. Ou seja, o professor, como coordenador do contrato didático, pode influenciar o rumo tomado pelas OPM. Isto é, a parte que achar necessária pode excluir ou incluir aspectos do ensino que venham a influenciar a aprendizagem dos alunos, uma vez que o professor que funciona como um *engenheiro didático* planeja e executa aspectos cruciais do processo de ensino, como, por exemplo, a escolha da conveniente e dos aspectos específicos a serem desenvolvidos, como exercícios resolvidos e problemas propostos, a fim de testar a técnica, os tipos de variações técnicas possíveis e os meios necessários para causar essas variações.

Podemos, portanto, dizer que a OPM elimina certo grau de *didatismo*, no sentido de direção não funcional do estudo, uma vez que os alunos são guiados mais por necessidades matemáticas do que por obrigações do contrato pedagógico, embora seja o professor quem escolha o tipo de problema a ser estudado, os espécimes iniciais a se considerar e aquele que projeta a direção do desenvolvimento das técnicas que são usadas durante o ensino e a aprendizagem.

De qualquer forma, é evidente que a mera incorporação das OPM só pode modificar a organização de ensino da escola localmente. Nesse sentido, a OPM que projetamos e experimentamos não questionou ou pretendeu transformar a estrutura clássica do sistema de ensino de matemática, em particular de Geometria, apenas adicionou um novo espaço de trabalho aos outros dispositivos clássicos que organizam o estudo universitário dessa disciplina. Dessa forma, as condições que favorecem o desenvolvimento dos diferentes momentos do estudo são aprimoradas, mas não fica claro até que ponto a gestão de alguns momentos pode ser influenciada, como o primeiro encontro, o exploratório e a institucionalização. Além disso, na OPM, apenas o problema da justificativa para as OM específicas é abordado de forma muito implícita, e a futura estruturação de Organizações Matemáticas, além do nível local, não é levada em consideração, pelo menos explicitamente.

OFICINAS DE PRÁTICAS MATEMÁTICAS EM FUNCIONAMENTO

Neste item, apresentaremos as atividades realizadas nas OPM. As Oficinas foram compostas de aulas e práticas que funcionaram como avaliação da teoria desenvolvida. Algumas das Oficinas resultaram de contribuições dos textos de Barbosa (1995), Pataki (2003), Rivieccio (2013) e Zanella (2013), Livros, Dissertações e Teses, que apresentam número considerável de aplicações na área de Geometria Hiperbólica e Esférica. A prática aqui formulada e respondida pelos alunos diz respeito ao contexto de estudos desenvolvidos por eles vinculados à pesquisa considerando às teorias da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica.

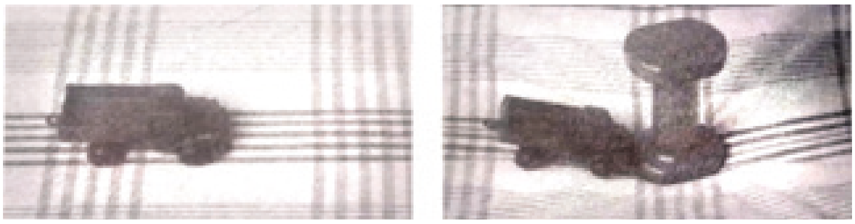
As OPM desenvolvem um modelo de ensino que impõe desafios. Mas iniciam-se de forma simples adequada à dificuldade da teoria. Iniciamos as OPM de acordo com as diretrizes de Bosch e Gascón (1995, 2010) e Ruiz, Bosch e Gascón (2007). O professor/pesquisador inicia apresentando o objetivo da oficina, destacando os tipos de problemas e a questão que os origina – a OM pontual previamente disponível. As oficinas apresentaram momentos de confecção de materiais e estudos teóricos em livros didáticos que serão mencionados, mas não esmiuçados neste artigo.

Oficina 1:

Os universos Hiperbólicos e Elípticos construídos a partir da aceitação de que o Quinto Postulado de Euclides não era uma proposição criaram a possibilidade da existência de outros planos que vieram viabilizar caminhos, como o de Albert Einstein na Teoria da Relatividade.

Segundo Rivieccio (2013), Einstein propõe um exemplo ilustrado na Figura 2 para explicar o espaço tempo a partir da determinação de um Plano Hiperbólico. Reproduzimos a experiência como indicado na Figura 3.

Figura 2 – Experiência proposta por Einstein para ilustrar o espaço tempo



Fonte: Rivieccio (2013, p. 64).

A experiência inicial, Figura 2, é montada sobre uma colcha que se encontra sobre a cama, formalizando um plano euclidiano. Um carrinho percorre as cinco linhas paralelas desenhadas no tecido da colcha na direção de um peso que influencia o plano fazendo um buraco onde o carrinho, influenciado pela curvatura produzida pelo peso, cai e se choca com o peso, que parece perfurar a cama. Se aceitarmos que o peso gire, desta forma, o experimento reproduz a ideia de uma superfície hiperbólica.

Figura 3 – Reprodução do experimento de Einstein para ilustrar o espaço tempo

Fonte: Dados da pesquisa.

Na reprodução da experiência (Figura 3), utilizamos um tecido elástico sobre um aro circular descrevendo um plano euclidiano. Primeiramente, utilizamos um carrinho e depois bolas de cores diferentes juntamente com um peso. Quando o peso atua sobre o plano euclidiano, este afunda e abre um buraco que atrai o carrinho; o mesmo acontece quando utilizamos as bolas. Nas mesmas condições que o experimento de Einstein, admitindo que o peso gire, o experimento reproduz a ideia de uma Superfície Hiperbólica.

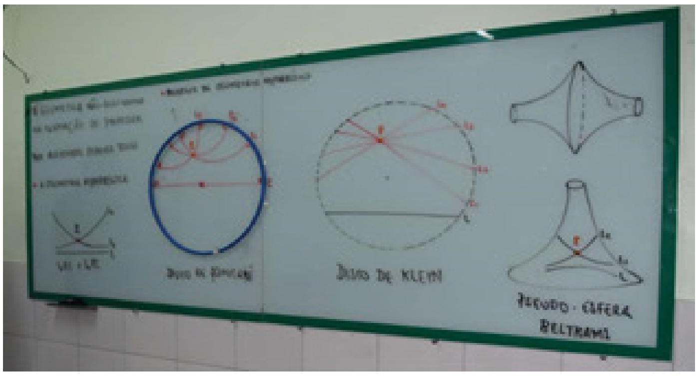
O modelo hiperbólico foi idealizado para definir o espaço-tempo. O universo de Einstein é de quatro dimensões, pois o espaço-tempo inclui três coordenadas espaciais , e mais uma quarta, puramente temporal.

A construção desta experiência constituiu um momento lúdico de estudo. O professor/pesquisador propôs assim uma situação vinculada à Geometria Hiperbólica para desencadear estudos referentes à Geometria Não Euclidiana.

Oficina 2

A exposição a seguir diz respeito a Modelos (planos) hiperbólicos (Figuras 4 e 5). Nela, temos a exposição geral na qual o professor/pesquisador apresenta os planos de Poincaré, Klein e a Pseudoesfera de Beltrami. Essa apresentação é uma atividade em que cada grupo analisou um tipo de Modelo Hiperbólico e todos os grupos trabalharam com círculos nos quais foram construídos os planos.

Figura 4 – Apresentação na OPM de Modelos Hiperbólicos



Fonte: Dados da pesquisa.

Modelo de Poincaré:

Figura 5 – Apresentação na OPM do plano de Poincaré

Fonte: Dados da pesquisa

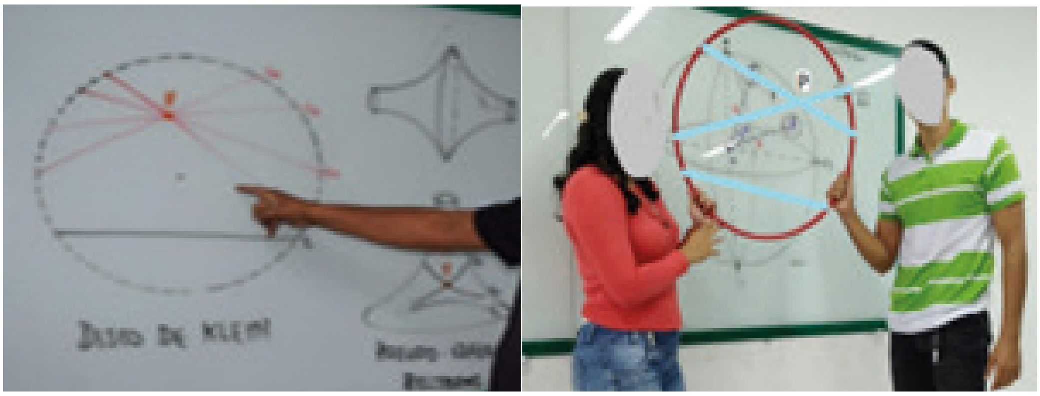
Grupos 1

Os alunos que compuseram esse Grupo ficaram responsáveis por uma análise referente ao modelo hiperbólico de Poincaré. Ao manusearem os círculos, concluíram – após estudos teóricos em livros técnicos e pesquisa na internet – que, nesse modelo, devem ser considerados os pontos internos dessa circunferência, denominados pontos do plano hiperbólico e os pontos que pertencem à circunferência, denominados pontos ideais ou horizonte hiperbólico. Além disso, os arcos de circunferência ortogonais ao disco são denominados de retas hiperbólicas ou geodésicas.

Grupo 2

Os alunos observaram o modelo de plano atribuído a Felix Klein. Esse modelo é construído a partir de uma região limitada por uma circunferência. Os pontos considerados são os pontos internos à circunferência e as retas são cordas (Figura 6).

Figura 6 – Apresentação na OPM do Plano de Klein

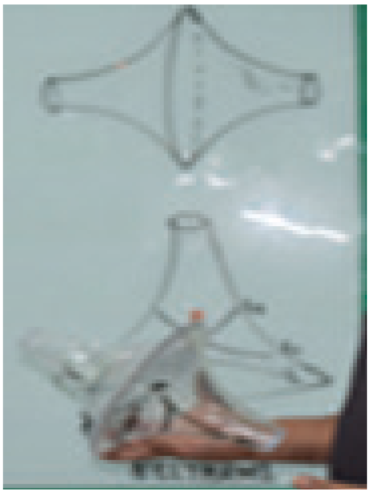


Fonte: Dados da pesquisa

Grupos 3

O modelo de plano de Beltrami (Figura 7), conhecido por pseudoesfera, é um sólido obtido a partir da rotação da função conhecida por tractriz. Essa atividade foi exposta em sala, na qual foi apresentado o contexto aos alunos. Vale também observar que foi trazida para a sala de aula uma superfície em acrílico a qual puderam manusear. Na superfície, puderam desenhar triângulos hiperbólicos, como também verificar que as retas ou geodésias são curvas.

Figura 7 – Apresentação na OPM do plano de Beltrami por aluno



Fonte: Dados da pesquisa

Nos contextos apresentados pelos Grupos 1, 2 e 3, temos que a OPM possibilita: observar, descrever e analisar os aspectos didáticos e matemáticos desencadeados.

Oficina 7

A atividade desta oficina foi reproduzida a partir da pesquisa de Zanella (2013, p. 50).

> A real forma física do Planeta Terra não é uma esfera, pois apresenta um achatamento nos polos Norte e Sul e outras irregularidades que chamamos de relevo (superfície topográfica). Na verdade, sua forma física se aproxima mais de um elipsoide. Entretanto, desprezamos o achatamento nos polos e suas irregularidades e passamos a considerar neste trabalho, o modelo esférico para a Terra, cujo raio médio é igual a 6370 *km*. Assim, foi calculada a área aproximada da superfície terrestre composta por solo, sabendo que aproximadamente de toda a superfície é composta por água.

Figura 8 – O planeta Terra

Fonte: Cleide (2019, p. 1).

Na Figura 8, procuramos mostrar o planeta terra, no qual identificamos a parte verde como o solo e a parte azul como água. Como no nosso referencial o planeta é esférico, foi calculada pelos Grupos a área total referente à superfície esférica e depois determinado 27% dela, o que corresponde à superfície terrestre sem água.

Área total da superfície esférica A_{S_λ} é dada por:

$$A_{S_\lambda} = 4\pi R^2 = 4\pi(6370)^2 = 509904363{,}8\ km^2$$

Área Procurada A_p é dada por:

$$A_p = 27\% A_{S_\lambda} = 27\% \cdot 509904363{,}8 = 137674178{,}226\ km^2$$

Essa atividade foi passada a todos os Grupos. Os Grupos reconheceram a aplicação concernente à Geometria Esférica. Não apresentaram dificuldade, pois a atividade é uma aplicação direta da fórmula relativa à área de superfície esférica, dada por $A_{S_\lambda} = 4\pi R^2$. A fórmula foi utilizada a partir de consultas em livros didáticos.

Oficina 8

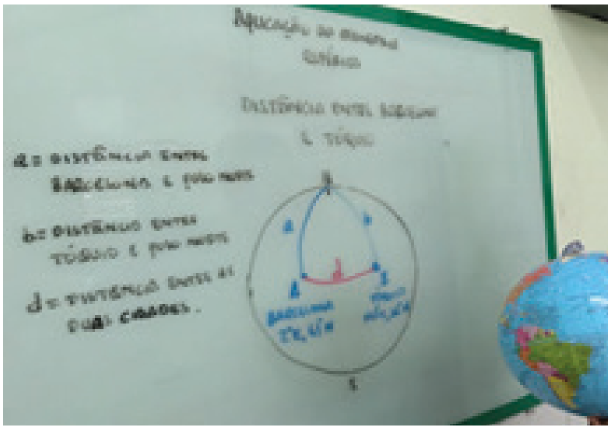
Esta atividade é relativa ao cálculo da distância entre duas cidades, dadas suas localizações no Globo. Foram feitos alguns exemplos em sala relativos ao posicionamento no Globo Terrestre. Seguimos o exemplo de Rivieccio (2013, p.113-115). A ideia é criar condições de Aplicação da Trigonometria Esférica para os alunos vinculados aos Grupos.

Qual é a menor distância entre as cidades de Barcelona e Tóquio?

Resposta dos Grupos e Análise da Oficina

Primeiramente, foram localizadas as cidades no Globo (Figuras 9 e 10).

Figura 9 – Apresentação de tarefa para OPM pelos Participaram da Pesquisa



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 10 – OPM do cálculo da distância entre a cidade de Barcelona e a cidade de Tóquio dada pelo comprimento do arco de circunferência em vermelho

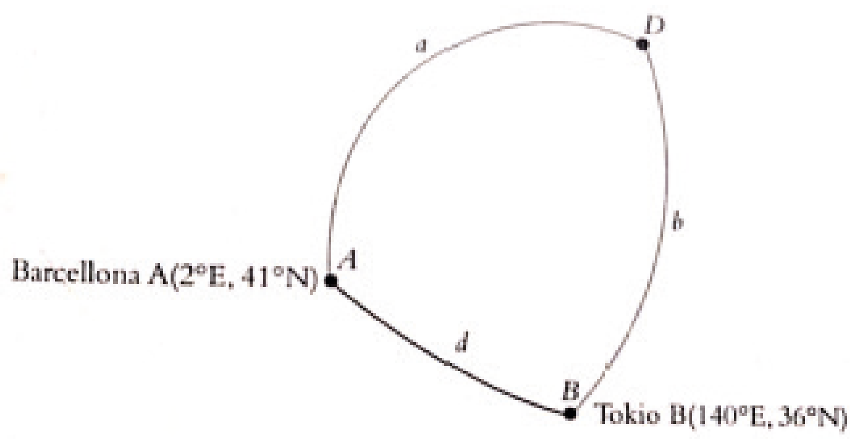
Fonte: Dados da pesquisa.

Usando o mapa do mundo pudemos observar a posição destas cidades:

- Barcelona está localizada em e 2° E e 41° N.
- Tóquio está localizada em 140° E e 36° N.

Considerando o triângulo esférico ΔABD, onde A representa Barcelona, B Tóquio e D o Polo Norte, podemos traçar o seguinte desenho e designar as distâncias (Figura 11):

Figura 11 – Distância entre Barcelona e Tóquio



Fonte: Rivieccio (2013, p. 113).

a = Distância entre Barcelona e polo Norte.

b = Distância entre Tóquio e polo Norte.

d = Distância entre as cidades de Barcelona e Tóquio.

Para o cálculo de usamos o teorema do cosseno para triângulos esféricos, dado por:

$$cosd = cosa \cdot cosb + sina \cdot sinb \cdot cosD$$

Nestas condições, calculamos o comprimento de um lado de um retângulo esférico, consideramos o equador como o eixo de abscissa de um plano cartesiano e a latitude em graus do ponto em questão, subtraído de 90°. Para o caso do ângulo D, procedemos da mesma maneira, considerando o meridiano de *Greenwich* como o eixo das ordenadas. Ou seja:

$$a = 90° - 41° = 49°$$
$$b = 90° - 36° = 54°$$
$$D = 140° - 41° = 138°$$

Substituindo esses valores na fórmula do cosseno, temos:

$$cosd = cos49° \cdot cos54° + sin49° \cdot sin54° \cdot cos138°$$
$$cosd = (0{,}656059029)\cdot(0{,}5877852523)+(0{,}7547095802)\cdot(0{,}809016944)\cdot(-0{,}7431448255)$$
$$cosd = -0{,}06812225162$$

Aplicando a função inversa do cosseno em ambos os lados da igualdade, temos, $\cos^{-1}(\cos d) = \cos^{-1}(-0{,}06812225162)$, logo $d = 93{,}92614266°$.

Obviamente a distância deve estar em quilômetros. O comprimento de uma circunferência máxima do globo terrestre pode ser calculado considerando que o raio da Terra é igual a 6350 *Km* temos:

$$C = 2\pi R = 2\pi 6350 = 39898{,}23\ Km$$

Com isso, obtemos que uma circunferência inteira (360°) corresponde a 39898,23 *Km*. A questão, portanto, foi: A quantos quilômetros corresponde um ângulo de 93,90614266°? Chamando de x o valor que queremos calcular e, usando uma regra de três simples chegamos à relação:

$$\frac{360}{39898{,}23} = \frac{93{,}92614266}{x}$$

Nestas condições, desenvolvido para x, dará como resultado x = 10407,469106 Km ou x ≅ 10407,5 Km como sendo a distância entre Barcelona e Tóquio.

Esta atividade foi construída com a participação de todos os Grupos. Para alcançarmos os resultados, foram apresentados aos Grupos os cossenos e senos de ângulos esféricos. Os Grupos 1, 2 e 3 reconheceram a aplicação relativa à Geometria Esférica, mais precisamente Trigonometria Esférica. Esses conteúdos de saber foram apresentados aos alunos durante a construção da teoria.

Os exercícios e os problemas que foram realizados aproximaram os alunos do contexto não euclidiano. Em síntese, podemos dizer que os exercícios e experimentos aplicados durante as OPM revelaram que a oficina foi um dispositivo didático, que, nos momentos de pesquisa, motivou os alunos a entrarem no jogo e nos objetivos descritos por Bosch e Gascón (1995, 2010) e Ruiz, Bosch e Gascón (2007).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As OPM favoreceram ao aluno explorar, representar, construir, discutir, investigar, perceber, descobrir e descrever as propriedades abordadas. Por sua vez, as práticas não euclidianas desenvolvidas por nossos colaboradores mostraram que podemos explicar ou resolver problemas não euclidianos a partir de contextos euclidianos. No nosso entendimento, após as oficinas, o conhecimento das Geometrias Não Euclidianas para a formação do professor de Matemática pode ser considerado como essencial, em razão de legitimar o ensino da própria Geometria Euclidiana.

Em face do exposto, algumas de nossas Oficinas desenvolvidas fizeram emergir, no bojo das práticas, possíveis relações entre conteúdos euclidianos e não euclidianos. Mostramos que o não euclidiano é explicado pelo euclidiano.

O ensino da Matemática, mais precisamente o ensino da Geometria Não Euclidiana, trabalhado em nossas OPM, é tomado como uma práxis que associa o saber fazer a nossas práticas ao saber que o legitima.

Diante dos resultados expostos nos dados construídos evidenciamos a necessidade de uma abordagem prática desta temática, por meio da qual podemos discutir conceitos, propriedades e proposições com base nas possíveis aplicações na vida dos alunos. Além disso, a geometria possui um caráter interdisciplinar, pois a visão pedagógica que ela imprime possibilita aproximar as áreas de conhecimento uma das outras, por meio do ensino de conteúdos que são comuns a várias disciplinas.

Para analisar essas ações, apropriamo-nos dos conceitos da TAD, em que as relações aluno, professor e Instituição, no âmbito do saber, foram explicitados por meio das análises das Oficinas.

Os questionamentos e as atividades geraram a construção de praxeologia que colaboram com a formação dos futuros professores de matemática, um anseio pela prática. Isso devido ao comportamento adotado na realização da pesquisa, ou seja, o dispositivo social denominado de instituição impõe aos alunos a forma de fazer e pensar, que influencia na formação dos professores de matemática e favorece com o estabelecimento de boas relações com conhecimentos de geometria.

Através de nossas Oficinas e dos entendimentos alcançados, pudemos perceber a importância de termos, na formação de professores de matemática, conhecimentos como o da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica.

A busca da solução da principal enquete envolveu a montagem de uma Oficina de Práticas Matemáticas – OPM –, assim como de construtos teóricos, que situaram o trabalho em uma posição em que a prática foi desenvolvida a partir da organização do professor, coordenador da pesquisa. Ele, ao socializar os resultados de cada prática, estimulava nova situação problema que se encadeava, criando uma base de saberes cujo principal objetivo foi introduzir conteúdos não euclidianos.

O nosso objetivo foi alcançado na pesquisa por meio da construção e organização de teorias e tarefas de dificuldade crescente, ajudou-nos a criar caminhos didáticos para as ODs. As Oficinas foram realizadas com pouca intervenção do professor, coordenador da pesquisa, que apresentou ou direcionou estudos teóricos em cada encontro, assim ministrou aulas práticas, nas quais foram apresentados os Modelos de Geometria Hiperbólica, por exemplo.

Por intermédio das OPM construímos os momentos em que foram criadas as organizações matemáticas que tomaram por base as diferentes práticas.

De acordo com o desenvolvimento das teorias e práticas, corroboramos que o nosso mundo possui características euclidiana e não euclidiana. Isto é, se a distância é pequena, o contexto é de Geometria Euclidiana, mas, se a distância é grande, o contexto é curvo, e de característica associada à Geometria Não Euclidiana.

De acordo com os resultados determinados com base nas OPM, reivindicamos a criação de Organizações Didática e Matemática que possam apresentar conteúdo da Geometria Não Euclidiana na formação do professor de matemática, como resultado direto da pesquisa.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1995.

BOSCH, M. y GASCÓN J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". *En*: A. Bronner *et al.* (Eds.). **Diffuser les mathématiques (et les autressavoirs) commeoutils de connaissance et d'action.** Montpellier, Francia: IUFM, p. 55-91, 2010.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Talleres de prácticas de matemáticas en el primer ciclo de la licenciatura. In: **Actas del Symposium de Innovación Universitaria**: Diseño, desarrollo y evaluación del currículum universitário, 1995, p. 25-36.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

CARLI, F. A. R. **A Aprendizagem de Geometrias Não Euclidianas: Um estudo realizado com Professores da Rede Pública de Ensino**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação – UEMA), Maringá, 2012. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/um%20estudo%20realizado.PDF.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2011.

CHEVALLARD, Y L' análise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19, n.2, p.221-265, 1999.

CLEIDE. **Latitudes e Longitudes.** Disponível em: http://professoracleidegeografia.blogspot.com

COURANT, R; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

KALEFF, A. M.; Nascimento; R. S. **Atividades Introdutórias às Geometrias Não Euclidianas**: o exemplo da Geometria do Táxi. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011892.pdf >. Acesso em: 23out. 2020

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. *In:* **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.15, n.3, 2013. p.647-670. Disponível em: <revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download /16187/pdf>. Acesso em: 06 jan. 2022.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Física. Curitiba: SEE/PR, 2008.

PATAKI, I. **Geometria esférica para a formação de professores**: uma proposta interdisciplinary. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004. Disponível em: https://blog.mettzer.com/referencia-de-sites-e-artigos-online/. Acesso em: 18 set.2022.

RIBEIRO, R. D. G. L. **O Ensino das Geometrias Não Euclidianas: Um olhar sob a perspectiva da divulgação científica**. 2012. Dissertação em Educação – USP. São Paulo, 2012.

RIVIECCIO, Giorgio**. Quando le rette diventano curve**: la geometrie non euclidee. Milano, Itália: Mondo matematico, 2013.

RUIZ, N.; BOSCH.; M.; GASCÓN, J. Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. In: Ruiz Higueras, L.; Estepa, A.; García, F. J. (Eds.). **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico**, pp. 677-704, 2007.

TRIPP, D.; WILSON, J. Critical incidents in action research in education. In: SANKARAN, S. *et al.* **Effective change management using action research and action learning**: concepts, frameworks, processes and applications. Lismore: Southern Cross University Press, 2001. p. 121-132.

ZANELLA, Idelmar A. **Geometria esférica**: uma proposta de atividades com aplicações. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)–Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013.

Histórico

Recebido: 03 de outubro de 2023.
Aceito: 12 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

SOUSA, Alexandre Pereira; GUERRA, Renato Borges; NUNES, José Messildo Viana. Geometria Não Euclidiana na formação do professor de matemática: oficinas de práticas matemáticas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024002, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024002.id589

Como citar – APA

SOUSA, A. P.; GUERRA, R. B.; NUNES, J. M. V. (2024). Geometria Não Euclidiana na formação do professor de matemática: oficinas de práticas matemáticas. ***Revista de Matemátsica, Ensino e Cultura – REMATEC***, (48), e2024002.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024002.id589

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques