Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024005
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024005.id592

Atividades de estudo e pesquisa no âmbito da formação de professores: modelização de tarefas sobre óptica

Study and research activities in teacher training: modeling optics tasks

Actividades de estudio e investigación en el ámbito de la formación del profesorado: modelización de tareas de óptica

Rita Lobo Freitas[1]

Saddo Ag Almouloud[2]

RESUMO

Neste texto apresenta-se um recorte da pesquisa de doutorado realizada de 2015 a 2019, desenvolvida com estagiários de um curso de licenciatura em matemática, no estado da Bahia-Brasil. Neste recorte retomam-se os principais resultados apurados de um experimento realizado no âmbito de um Percurso de Estudo e Pesquisa, cujo eixo central foi o desenvolvimento de conhecimentos profissionais envolvidos nas situações de aprendizagem, modeladas por meio de problemas da física, sobre óptica. Desenvolveu-se a pesquisa apoiada na Teoria Antropológica do Didático e nos paradigmas de Percurso de Estudo e Pesquisa, fundamentado na mesma teoria. O principal resultado foi a percepção da alteração do equipamento praxeológico dos sujeitos ante a experiência desenvolvida, ou seja, houve alterações na constituição da formação matemática, tecnológica e didática dos estagiários, aspectos relacionados à formação profissional de futuros professores.
Palavras-chave: Modelização; Percurso de Estudo e Pesquisa; Formação de professores.

ABSTRACT

In this text we present a record of the doctoral research carried out from 2015 to 2019, developed with trainees on a mathematics degree course in the state of Bahia, Brazil. In this section, we take up the main results of an experiment carried out as part of a Study and Research Path, the central axis of which was the development of professional knowledge involved in learning situations modeled on physics problems about optics. The research was developed based on the Anthropological Theory of Didactics and the paradigms of the Study and Research Path based on the same theory. The main result was the perception that the subjects' praxeological equipment had changed as a result of the experience developed, i.e. there were changes in the trainees' mathematical, technological and didactic training, aspects related to the professional training of future teachers.
Keywords: Modeling; Study and research path; Teacher training.

RESUMEN

En este texto presentamos un registro de la investigación doctoral realizada entre 2015 y 2019, desarrollada con aprendices de un curso de licenciatura en matemáticas en el estado de Bahía, Brasil. En esta sección, retomamos los principales resultados de una experiencia realizada en el ámbito de un Trayecto de Estudio e Investigación, cuyo eje central fue el desarrollo del conocimiento profesional involucrado en situaciones de aprendizaje modeladas a partir de problemas de física sobre óptica. La investigación se realizó a partir de la Teoría Antropológica de la Didáctica y de los paradigmas del Trayecto de Estudio e Investigación basados en la misma teoría. El principal resultado fue la percepción de que el equipamiento praxeológico de los sujetos había cambiado como consecuencia de la experiencia desarrollada, es decir, hubo cambios en la formación matemática, tecnológica y didáctica de los aprendices, aspectos relacionados con la formación profesional de los futuros profesores.
Palabras clave: Modelización; Trayectoria de estudio e investigación; Formación de profesores.

1 Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professora Adjunta da Universidade do Estado da Bahia (UNEB). Endereço para correspondência: Rua Silveira Martins 2555 - Cabula, Salvador - BA, 41180-045. Unidade Acadêmica de Educação a Distância UNEAD. https://orcid.org/0000-0001-6914-1483. E-mail: rlobo@uneb.br

2 Doutor em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I (França). Professor colaborador da Universidade da Bahia e da Universidade Federal do Pará. Endereço para correspondência: Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo – SP, CEP 02464-050. E-mail: saddoag@gmail.com

INTRODUÇÃO

Neste artigo, buscamos capturar aspectos relacionados à modelização matemática de situações de aprendizagem que envolvam objetos de estudo da Física na sua relação com a Geometria Analítica Plana, por meio de sessões ou episódios de estudo desenvolvidos no âmbito de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), realizado com futuros professores em formação inicial de um curso de Licenciatura em Matemática. As referidas sessões de estudo fizeram parte de um experimento realizado na pesquisa de doutorado desenvolvida por Freitas (2019), com 28 estagiários de um curso de Licenciatura em Matemática na Bahia, Brasil, inscritos no estágio supervisionado curricular e voluntariamente participantes de uma proposta de formação de professores a respeito de tópicos de Geometria Analítica Plana (GAP).

Para efeitos deste texto, selecionamos três sessões de estudo, que se coadunaram em Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), parte integrante do desenvolvimento de um PEP semiaberto, estruturado globalmente – em alguns momentos, com AEP aberta, em outros, com atividades fechadas.

Essas sessões de experimentação tiveram por objetivo apresentar uma possibilidade de articulação de saberes entre a Física e a Matemática (FREITAS, 2019), por meio da modelização matemática e didática.

Na referida pesquisa desenvolveu-se um PEP de formação de professores (PEP-FP), por meio de sessões de estudo e pesquisa, cujas AEP envolvem não apenas momentos do estudo em que as questões norteadoras do PEP – não vinculadas a uma tarefa específica – se apresentaram de forma mais livre e ampla, mas incluem também outros momentos em que essas atividades estão focadas na solução de tarefas matemáticas.

Dentre as sessões de estudo desenvolvidas na etapa de experimentação, selecionamos aquelas que essencialmente se debruçaram sobre situações que fazem apelo a fenômenos da física, modelizáveis para o estudo de Geometria Analítica Plana (GAP) dentro do Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA) proposto por Freitas (2019).

ASPECTOS TEÓRICOS

Antes de discutirmos a respeito da experimentação, apresentaremos aspectos teóricos que justificam as escolhas das atividades propostas. Em primeiro plano, temos o arcabouço teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) presente em toda a construção do trabalho.

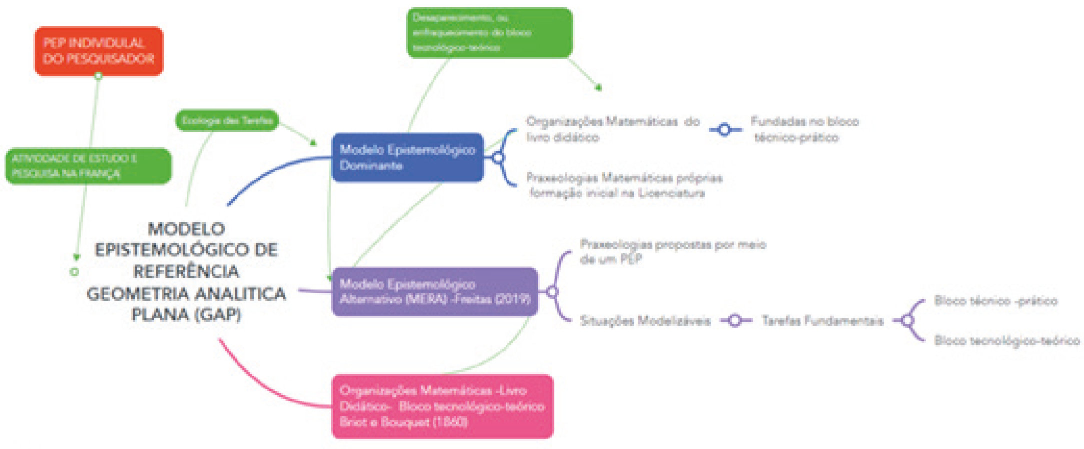
No âmbito da TAD, a atividade matemática, seja ela realizada pelo matemático, pelo professor ou pelos estudantes, está apoiada em um modelo epistemológico. Segundo Gascón (2003), para a atividade de resolução de problemas em um sistema de ensino de matemática, é imprescindível elaborar um modelo que permita analisar os múltiplos papéis desta atividade. Nesse sentido, o autor destaca a importância de um aporte teórico – em nosso caso, a TAD que situamos no que se denominou Programa de Investigação em Didática da Matemática.

Este programa defende que muitos dos problemas da Educação Matemática têm origem na própria Matemática ensinada e, por esta razão, devem-se tomar os objetos matemáticos como objetos primários de estudo, ante os problemas de ensino e aprendizagem[3]. Decorre, então, a necessidade de buscar, segundo Gascón (2003), um modelo estrutural do saber matemático e o estudo de um modelo funcional de atividade didática e atividade de estudo (de matemática).

No estudo realizado, Freitas (2019) apoiou-se na TAD no âmbito da teoria dos momentos de estudo (CHEVALLARD, 1999), desenvolvidos no *design* e na experimentação de um PEP.

A Figura 1 mostra a articulação do estudo dos objetos matemáticos, sua ecologia no processo histórico, a partir de diferentes modelos epistemológicos ancorados na atividade matemática, desenvolvida em diferentes nichos: livros, formação de professores. A atividade matemática, por sua vez, está aportada no conceito e na estrutura, segundo a TAD, denominada organização matemática.

Figura 1 – Elementos teóricos



Fonte: elaborado pelos autores

Para uma determinada tarefa, uma atividade humana, uma atividade de matemática ou do campo da física – por exemplo, o cálculo da velocidade de um carro –, geralmente existe uma técnica ou determinadas técnicas capazes de propiciar sua realização. Tais técnicas são reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, mesmo que existam outras técnicas alternativas reconhecidas em outras instituições. Para produção de técnicas, pressupõe-se a existência de uma tarefa, minimamente problemática, que possa estimular o seu desenvolvimento para responder às questões propostas. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição. Obtém-se assim um bloco "prático-técnico", formado por um tipo de tarefas e por uma técnica que pode ser identificada em linguagem corrente como um "saber-fazer" (CHEVALLARD, 2002, p. 3). Uma praxeologia compõe-se, portanto, por tarefa, técnica, tecnologia e teoria (CHEVALLARD, 1999)

3 É nesta posição que situamos as pesquisas do Grupo de Estudo e Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Tecnologias (GEMATIC).

Com efeito, Almouloud (2015), apoiado nos estudos da TAD, assevera que um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização "praxeológica" (ou praxeologia) pontual. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, a acompanha e lhe dá razão. Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento.

Chevallard (2002) reforça que uma praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico), cuja ecologia se refere às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produzem, utilizam ou transpõem.

> Consideram-se aqui as condições de "sobrevivência" de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? As respostas a estas questões ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia (ALMOULOUD, 2015, p. 4).

O processo de levantamento de dados empíricos, a partir da experimentação caracterizada como etapa de estudo a partir de um Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA), tem o aporte metodológico da Engenharia Didática. Mais especificamente, essa fase experimental apoiou-se em um Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP), cuja gestão se ancorou nos *momentos didáticos* (CHEVALLARD, 1999), para a organização dos episódios de experimentação.

Importa destacar dois aspectos fundamentais e inseparáveis do trabalho matemático, de acordo com Bosch *et al.* (2006): por um lado, o próprio processo de construção matemático; e, por outro lado, o resultado dessa construção, a praxeologia matemática. Com efeito, não há uma organização matemática sem um processo de estudo que a engendre, e não há processo de estudo sem uma organização matemática em construção. Segundo os autores, processo e produto são faces de uma mesma moeda.

Retomando a noção de momentos de estudo, estes são utilizados, como momento didático, no sentido cronológico bem como no sentido da dimensão da atividade (BOSCH *et al.,* 2006).

Chevallard (1999) assegura que uma boa gestão do estudo requer que cada um dos *momentos didáticos* seja realizado na circunstância adequada, pois um *momento de estudo* geralmente se realiza em diferentes episódios distribuídos no tempo.

Os *momentos didáticos* são uma realidade do funcionamento do estudo, e não uma realidade cronológica, ou seja, a ordem dos diferentes *momentos* é arbitrária. Os momentos são seis, segundo Chevallard (1999, p.250):

1. O momento do *primeiro encontro* corresponde ao primeiro contato dos sujeitos com a organização matemática – pelo menos, o contato com um tipo de tarefa dessa organização.
2. O segundo momento é de exploração do tipo de tarefas e de elaboração da técnica.

3. O terceiro é o momento da constituição do ambiente *tecnológico-teórico* [θ/Θ] relacionado com a técnica – . De forma geral, é o momento de estreita inter-relação com os outros momentos. No caso do primeiro encontro com um tipo de tarefa, normalmente há uma relação com o ambiente tecnológico-teórico, anteriormente elaborado.
4. O quarto momento é o do trabalho *da técnica* para torná-la mais eficiente e confiável.
5. O quinto momento é da *institucionalização*, tem como objetivo esclarecer qual organização matemática foi elaborada e distinguir quais elementos farão parte definitivamente da organização e aqueles que não serão integrados a ela.

Por fim, o sexto momento é da *avaliação,* é um momento de reflexão que se articula com a institucionalização – em alguns aspectos pode ser considerado um submomento –, em que se avalia o que foi aprendido e, principalmente, em que se aprecia o controle ou o domínio da organização matemática criada e ainda se avalia a organização matemática, sua validade.

Cada um desses momentos, segundo Chevallard (1999), pode ser realizado em várias vezes, não somente porque procedem de episódios de tempo, mas também porque, por exemplo, um episódio de trabalho de uma técnica pode conduzir a retocar a organização matemática estabelecida e, portanto, eventualmente realizar, ou viver, um novo episódio tecnológico; ou, em todo caso, considerar um outro episódio de *institucionalização.*

Na perspectiva de momentos didáticos organizou-se um PEP-FP semiaberto, engendrado por questões norteadoras a partir de uma questão geratriz, inicial e, portanto, geradora de todo o processo de estudo: *Como ensinar geometria analítica plana*? Assim, a questão faz parte do sistema didático pensado para o desenvolvimento da experimentação do PEP, no qual:

> X é um coletivo de estudo (uma classe, uma equipe de alunos, uma equipe de pesquisadores, um jornalista etc.) e Y uma equipe (em geral reduzida: y pode até ser um conjunto vazio) de ajuda ao estudo e de diretores de estudo (professor, tutor, orientador de pesquisa, diretor de redação etc.). O objetivo da construção desse sistema didático é estudar ***Q***, isto é procurar fornecer uma resposta que satisfaz certas restrições ***a priori,*** inclusive de pôr a prova pela confrontação com o ***milieu x adidático*** apropriado*.* A síntese do trabalho esperado de X sob a orientação e supervisão de Y pode ser [4]escrita como ***S*** (***X***, ***Y***, ***Q***) ➥ ***R*** (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa).

Nesse sentido, o PEP parte de uma questão geratriz proposta dentro de um sistema didático , ou seja, o objetivo de construir este sistema didático é estudar . Procurar uma resposta , que satisfaça certas restrições *a priori,* inclui a confrontação *de X com um milieu adidático* apropriado*,* adidático porque os aprendizes desconhecem a intenção *do professor*. A síntese que se espera do trabalho de sob a supervisão de pode ser escrita como: (CHEVALLARD, 2009).

Chevallard (2009) assevera que a síntese detalhada do trabalho de investigação se inscreve no que denominou “sistema herbatiano”, denotado de forma condensada pela representação: $(S(X;Y;Q) \Rightarrow M) \Rightarrow R^{\blacktriangledown}$.

4 E aqui não seria “escrita”?

Na forma desenvolvida teremos:

$S(X;Y;Q)$➡$\{\backslash\ R^{\lozenge}{}_1,\ R^{\lozenge}{}_2, \ldots\ R^{\lozenge}{}_n, O_{n+1}, \ldots O_m$ ➡$M\}]$ ➡$R^{\blacktriangledown}$, na qual $R^{\lozenge}{}_1,\ R^{\lozenge}{}_2, \ldots\ R^{\lozenge}{}_n, \ldots$ são as respostas de cada questão gerada no decurso do PEP. $O = \{O_1, O_2, \ldots O_n, O_{n+1} \ldots O_m\}$ é composto de conhecimentos que emergem da cultura escolar, sob a ótica do professor que ensina, por exemplo, os conhecimentos oriundos da tecnologia e da pedagogia, ou até mesmo do conhecimento cotidiano dos sujeitos, os quais nem sempre possuem o selo institucional; ou ainda as obras produzidas, como os livros didáticos. Significa dizer que os O_m poderão auxiliar como ferramentas de análise das respostas $R^{\lozenge}{}_1,\ R^{\lozenge}{}_2, \ldots\ R^{\lozenge}{}_n, \ldots$ de cada questão gerada no decurso do PEP. Tudo isto corrobora a resposta esperada $R^{\blacktriangledown}$.

A propósito das atividades de estudo e pesquisa, destaca-se a possibilidade do desenvolvimento de tarefas modelizáveis. Bosch *et al.* (2006) discutem uma possibilidade de evolução do domínio de investigação: a modelização e as aplicações de uma proposta de reformulação do processo de modelização. Nesse sentido, algumas atividades de experimentação realizadas se amparam na proposta desses autores.

De acordo com Bosch *et al*. (2006), o papel da modelização nos processos de ensino e aprendizagem no âmbito da Educação Matemática tem tido uma crescente importância

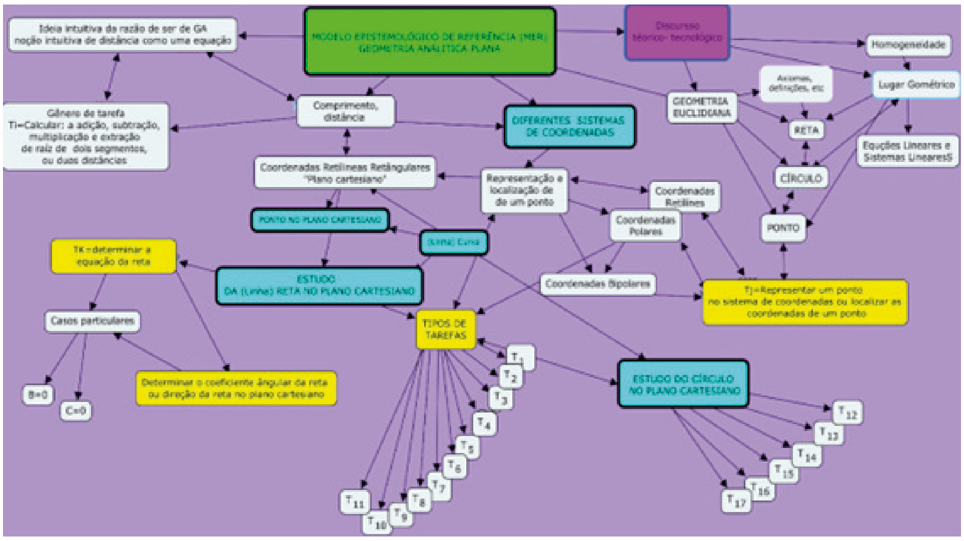
Os autores situam o termo "modelização" para além da possibilidade de construção de conhecimento matemático a partir de situações reais. Os autores evidenciam, portanto, duas questões que se impõem frente ao problema da modelização: a primeira é tornar o conhecimento matemático nos processos de modelização uma importante e valiosa ferramenta do ponto de vista didático, ou seja, investigar como esses processos podem melhorar o ensino de Matemática. A segunda questão é sobre a necessidade institucional de ensinar a modelização como um conteúdo, mas restrita a alguma disciplina concreta, de um campo profissional específico. Como conseguir que os estudantes desenvolvam a competência de modelização, em relação ao seu campo de especialização profissional? (BOSCH *et al.*,2006).

Destacamos dois aspectos presentes no trabalho de modelização no processo de investigação: a problematização epistemológica e a problematização cognitiva. Segundo Bosch *et al.* (2006), a primeira se ocupa de problematizar as características das situações reais que permitam a construção de modelos matemáticos com fins didáticos. Esses mesmos autores asseguram que a problematização cognitiva "*é a necessidade de aprofundar o conhecimento* do processo cognitivo ativado nos estudantes durante a realização de tarefas de modelização e de aplicações" (BOSCH *et al.,* 2006, p.10).

O conhecimento matemático em jogo em nossa pesquisa integrou o saber relativo a tópicos de Geometria Analítica Plana (GAP), e o trabalho desenvolvido com o PEP se apoiou em um Modelo Epistemológico de Referência (MER) geral para GAP, que foi reorganizado em um modelo epistemológico de referência alternativo (MERA) para o estudo de GAP – mais especificamente, o estudo do ponto, da reta e dos sistemas de coordenadas. O MERA é uma das várias possibilidades de escolha de pesquisa, e o MER incluiu o da Geometria Analítica Plana, sendo, portanto, uma fonte organizada para novos estudos e pesquisas com GAP, no âmbito da Didática da Matemática.

O MER (Figura 2) foi construído a partir da análise da dimensão epistemológica e serviu de referência nos estudos das dimensões econômica e ecológica, assim como na construção do Modelo Epistemológico Dominante (MED)**5** e do Modelo de Referência Alternativo (MRA) (base de sustentação do PEP-FP).

Figura 2 – Ilustração do Modelo Epistemológico de Referência (MER)

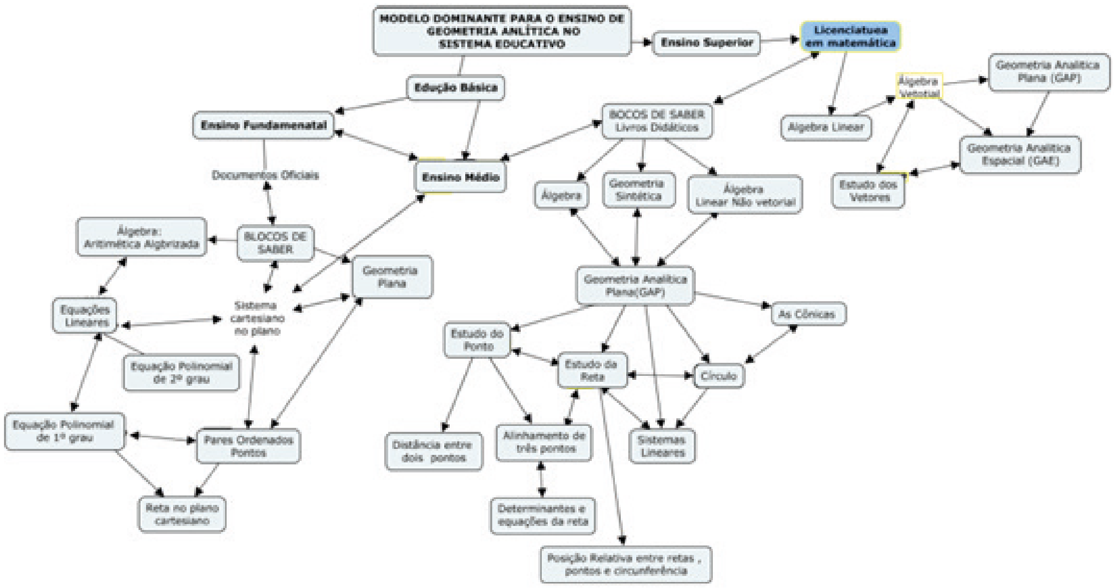


Fonte: Freitas (2019, p. 161)

As siglas representadas de forma genérica por T_i (1≤ i ≤17) indicam as tarefas atreladas a algumas dimensões do MER[6].

Apoiada no MER, a análise das dimensões econômicas e ecológicas do problema didático permitiu identificar o modelo epistemológico dominante (MED) para o ensino da GAP nas diferentes instituições: ensino fundamental, médio e universidade (Figura 3).

Figura 3 – Modelo Epistemológico Dominante (MED) no sistema educativo brasileiro



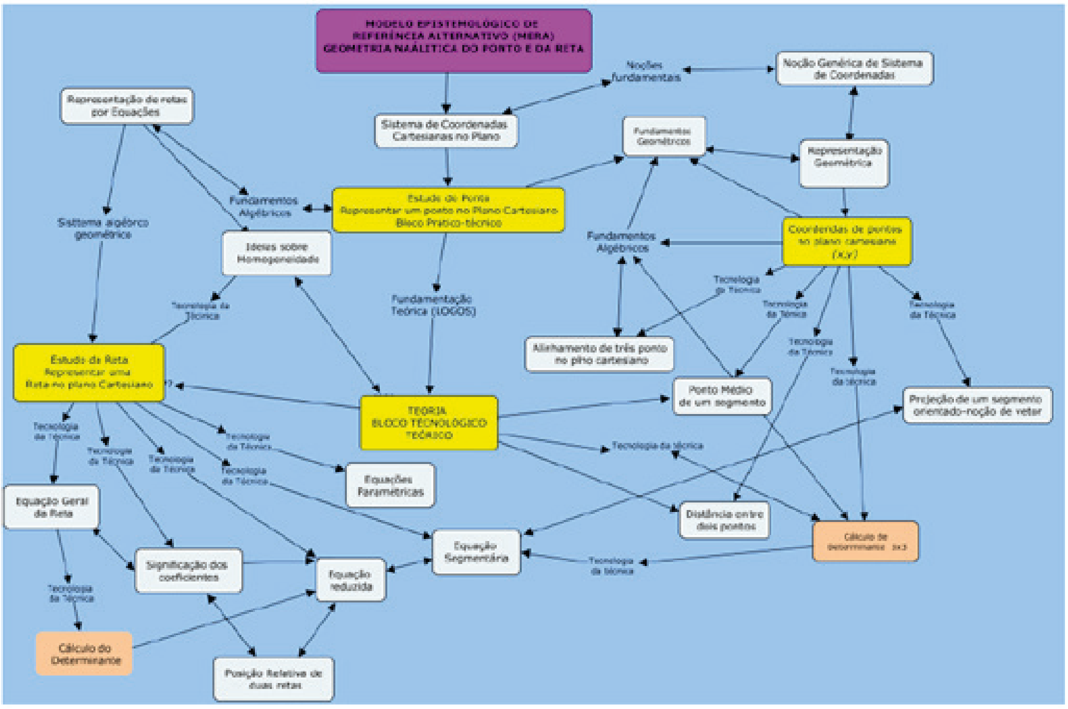
Fonte: Freitas (2019, p. 232)

5 Um MED pode ser representado por um mapa conceitual que permite descrever e interpretar praxeologias didáticas e matemáticas predominantes (vigentes) de um objeto matemático em uma determinada instituição (como, por exemplo, a BNCC, os Parâmetros Curriculares, livros didáticos, práticas docentes etc.) (CHEVALLARD, 1999; GASCÓN, 2011).

6 Cf. Lista das tarefas no apêndice.

Em coerência com o MER e o MED construídos – e com base neles –, elaborou-se um Modelo Epistemológico de Referência Alternativa (MERA) (Figura 4) do que significa «ensinar e aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo. O MER construído serviu de apoio para o desenvolvimento da fase experimental do PEP-FP.

Figura 4 – Modelo Praxeológico de Referência Alternativo (MERA)



Fonte: Freitas (2019, p. 237)

Os aspectos e as ideias teóricas, bem como as considerações levantadas sobre a formação do professor de matemática no Brasil, foram fundamentais para a constituição do PEP, pois é necessário conhecer as condições e as restrições de difusão dos conhecimentos inerentes à formação de professores, bem como o *milieu* de trabalho.

Em nossa pesquisa, as atividades propostas, tendo em conta a formação dos futuros professores de Matemática, constituíram-se em situações que envolvem conhecimentos oriundos da física, articulados a conhecimentos matemáticos que respondam aos objetos de estudo.

A proposta desta seção foi trazer aspectos teóricos cruciais aportados nas atividades desenvolvidas nos episódios do PEP, no intuito de olhar a construção das praxeologias dos sujeitos, a partir do desenvolvimento das tarefas de modelização. Na próxima seção, teceremos reflexões sobre o desenho das sessões de estudo.

ESTRUTURA DO DESENHO DAS SESSÕES DE ESTUDO

Dentre os dez episódios de estudo que trataram de certos objetos de Geometria Analítica Plana, escolhemos algumas situações de modelização matemática, cujo ponto de partida foi o contexto da física e que visavam o aprofundamento do conhecimento sobre o objeto matemático principal de estudo. Nessas perspectivas selecionamos os episódios cinco e seis do PEP-FP, realizados no estudo da reta como lugar geométrico.

Freitas (2019) realizou um estudo piloto, anterior ao PEP-FP, sobre o qual ponderou várias restrições do ponto de vista da formação matemática de futuros professores. No quadro dessas restrições, encontra-se um aspecto considerado fundamental no estudo de GA: trata-se da articulação entre o geométrico e o algébrico – por exemplo, identificar propriedades geométricas e representá-las por meio de equações. Esta articulação pode ser facilitada com o uso de interfaces tecnológicas que possibilitem aos sujeitos manipularem as representações dos objetos. Nesse sentido, o uso do *software* dinâmico de geometria, o GeoGebra, poderá se configurar como parte do *milieu* no desenvolvimento das tarefas propostas. É possível que a incorporação desse tipo de tecnologia promova o aspecto econômico do problema didático posto, que é "como ensinar GA?".

Outro aspecto importante a ser mencionado é a construção de provas e demonstrações, que tem sido uma restrição de difícil contorno. Este fato foi identificado tanto em nosso estudo piloto quanto em pesquisas de campo desenvolvidas com professores. Nosso PEP-FP tem duas perspectivas gerais: desenvolver o conhecimento matemático, presente no estudo dos objetos, e proporcionar aos estudantes, sujeitos da pesquisa, a construção de conhecimentos didáticos nesse mesmo estudo.

Por último e não menos importante, há o aspecto ecológico no estudo de GA, o qual, de acordo com o estudo dos modelos epistemológicos de referência e dominantesrealizado, revelou várias lacunas no desenvolvimento de conhecimentos relacionados com GAP, tendo em vista o desaparecimento de algumas abordagens didáticas do bloco *tecnológico-teórico* nas organizações matemáticas, e de tarefas que incluem demonstrações, potencializadoras do desenvolvimento da teoria. Um exemplo disso é a tarefa "mostrar que três pontos estão alinhados", sem utilizar a técnica do determinante, ou o discurso tecnológico-teórico apoiado na geometria sintética.

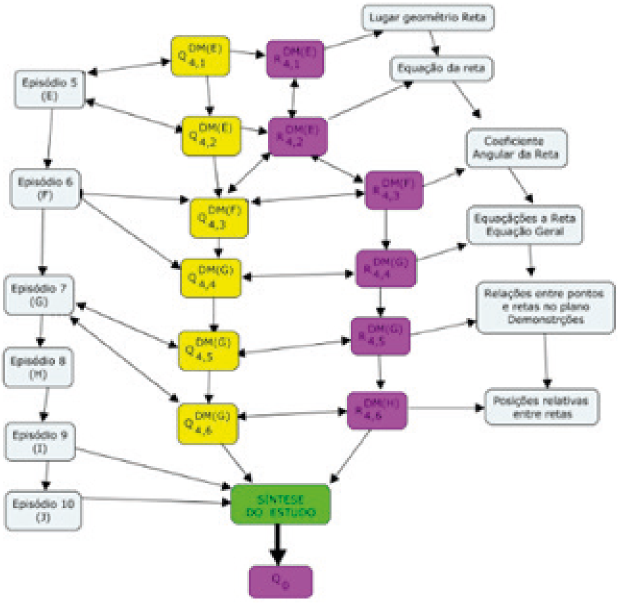
Tudo isso exposto, organizamos um mapa de questões que norteiam os episódios de estudo desde a sessão 5.

O mapa visa elucidar quais questões podem surgir quando partimos da questão $Q_4^{DM\ (C)}$[7] (como ensinar reta?), tendo em vista o modelo alternativo, o qual considera os aspectos relevantes de cada modelo epistemológico, levando em consideração aspectos ecológico, didático e econômico. A partir da questão: como ensinar reta?, o que se questiona é: o que é o lugar geométrico reta? A resposta para esta questão vai gerar várias questões, delineadas em dois aspectos matemáticos: o geométrico e o algébrico. Estes dois aspectos mobilizam a questão didática da noção do objeto e de sua representação (geométrica, algébrica ou outras).

É nesse caminho que os episódios de estudo foram delineados. O percurso do estudo e de (re)construção das organizações matemáticas e didáticas a respeito da reta deverá permitir aos sujeitos responderem à questão didática: ensinar reta, por meio das questões intermediárias do estudo. Reforçamos que as questões engendradas, representadas no mapa da Figura 5, são definidas *a priori*, pois é na experimentação que outras questões poderão surgir a partir das respostas de cada etapa.

7 Ver o significado da sigla na próxima página.

Figura 5 – Mapa de questões dos episódios E a J



Fonte: Freitas (2019, p. 281)

O mapa (Figura 5) visa descrever as relações entre as questões de cada sessão. Cada temática relacionada nos blocos faz referência ao elemento específico da organização matemática em estudo.

Neste texto, tecemos reflexões essencialmente sobre os achados relativos ao episódio 5. Em razão disso, as questões a seguir são relacionadas ao estudo do lugar geométrico reta (episódio 5) e descrevem, por meio do mapa, suas relações com as respostas provisórias e os temas gerais da organização didática. Na sigla das questões $\mathrm{Q}_{4,1}^{\mathrm{DM\,(E)}}$, $\mathbf{D}$ corresponde ao aspecto didático e M, ao aspecto matemático envolvido na questão, ou seja, cada Q_i^D corresponde a questões de natureza didática (D), em que é a variação dos diferentes questionamentos, Q são questões que vão progressivamente sendo geradas ($i = 0, 1, 2, 3$). As respostas R seguem a mesma lógica, conforme expresso na Figura 2.

$\mathrm{Q}_{4,1}^{\mathrm{DM\,(E)}}$: O que é o lugar geométrico reta, no plano?

$\mathrm{Q}_{4,2}^{\mathrm{DM\,(E)}}$: Qual(ais) relação(ões) matemática(s) envolvem uma reta no plano?

$\mathrm{Q}_{4,3}^{\mathrm{DM\,(F)}}$: Qual a direção de uma reta no plano?

$\mathrm{Q}_{4,4}^{\mathrm{DM\,(F)}}$: Como ensinar a equação geral de uma reta dada?

$\mathrm{Q}_{4,5}^{\mathrm{DM\,(G)}}$: Quais relações matemáticas podem ser estabelecidas entre pontos e retas no plano?

$\mathrm{Q}_{4,6}^{\mathrm{DM\,(H)}}$: Quais as posições relativas entre duas retas no plano?

Com relação às questões $\mathrm{Q}_{4,1}^{\mathrm{DM\,(E)}}$ e $\mathrm{Q}_{4,2}^{\mathrm{DM\,(E)}}$, espera-se que os estudantes consigam deduzir a equação geral de uma reta dada.

Neste episódio 5, o *momento de primeiro encontro* com a OM_R, propomos dar continuidade ao estudo a partir do contexto da óptica, com a formação das imagens, realizado nas sessões anteriores – lentes esféricas, do olho humano, ametropias etc.). Nesse sentido, propomos inicialmente a atividade exploratória, segundo o Quadro 1, cujo principal objetivo é relacionar as imagens com a representação geométrica de retas, semirretas e segmentos de reta, além de explorar a interface do GeoGebra.

Nesta atividade, os estudantes poderão começar a manipular a interface do GeoGebra, no sentido de reconstruir a representação dos raios luminosos e identificá-los com entes geométricos. Os estudantes podem mobilizar as noções de segmento de reta, vetores e, por fim, retas. No último caso, espera-se que os estudantes façam construções geométricas da representação dos raios, associando-os à representação algébrica de retas.

A atividade exploratória 1 tem como objetivos integrar a tecnologia digital, por meio da interface do GeoGebra, como forma de identificar as diferenças na representação geométrica de retas e semirretas; perceber que a representação figural dos raios luminosos se assemelha à representação geométrica de retas com diferentes direções; por fim, é o momento exploratório do ambiente da tecnologia digital (GeoGebra).

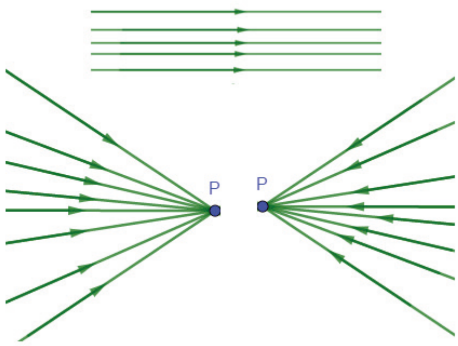
O bloco prático-técnico desta tarefa (Quadro 1) são as próprias ações do sujeito na manipulação da interface (o saber-fazer), para construção dos entes geométricos presentes na barra de menu da interface (retas, semirretas, vetores) que vão reproduzir a figura. É importante solicitar que os estudantes desabilitem a janela de visualização, para que isso não influencie na construção da parte algébrica.

Com o objetivo de viabilizar e facilitar a realização da tarefa, é importante que a professora pesquisadora institucionalize as funções básicas da interface, caso os estudantes nunca tenham tido contato com o *software*.

Quadro 1 – Atividade exploratória

Para que um observador enxergue um corpo, seus olhos devem receber a luz que esse corpo emite. Por exemplo, para uma lâmpada representar a luz se propagando e atingindo os olhos do observador, utilizam-se linhas orientadas que fornecem a direção e o sentido de propagação da luz. Tais linhas são denominadas raios de luz, que se representam segundo a Figura 6. Um feixe de luz é cilíndrico, quando seus raios são paralelos, é cônico quando todos os raios de luz têm direções que passam por um mesmo ponto P, sendo neste caso, convergente ou divergente. O ponto P é o vértice do feixe. Quando o feixe é composto por retas paralelas, o vértice está no infinito. Tendo por base a figura, reconstrua no Geogebra esses tipos de imagem e em seguida responda as questões.

Figura 6 – Representação gráfica de feixes de luz



Fonte: Adaptado de Sampaio e Calçada (1998, p. 2)

A)Quais entes geométricos podem ser associados aos raios luminosos?
B)E se prolongarmos esses raios indefinidamente em um plano? o que acontece? simule outras situações.

Fonte: Freitas (2019, p. 283)

Na construção das respostas, os estudantes poderão perceber e visualizar, por meio da manipulação da interface do GeoGebra, certas propriedades geométricas, por exemplo:

toda reta é infinita em ambos os sentidos; para determinar uma reta são necessários no mínimo dois pontos; toda reta tem uma direção que é o ângulo de inclinação no plano; um segmento de reta é um intervalo de uma reta; um vetor tem origem, direção e sentido.

Estas construções geométricas devem ser realizadas pelos sujeitos de forma livre, individualmente, para que eles explorem as potencialidades da interface. Ao final deverão partilhar no coletivo suas impressões e percepções, refletir a respeito dessa experiência, indicar os conceitos geométricos que acessaram e expor outras conclusões a que chegaram.

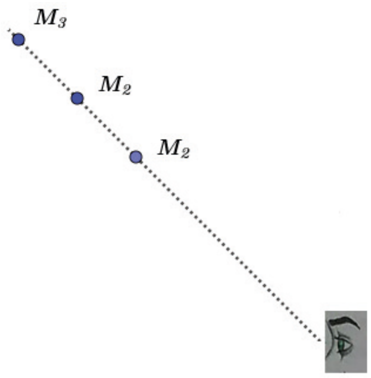
No segundo momento, a diretora do estudo proporá uma segunda atividade na qual os estudantes poderão utilizar novamente o GeoGebra, mas agora o objetivo é realizar construções algébricas, ou seja, deduzir equações da reta, a partir da figura construída, e determinar o coeficiente angular. A atividade deverá ser realizada em equipe.

Na Figura 7, da tarefa descrita no Quadro 2, não aparece o sistema cartesiano de eixos ortogonais. A proposta é que os estudantes reconstruam a figura no GeoGebra, tendo o eixo cartesiano como referência e, a partir de então, possam desenvolver matematicamente as equações que representam: a reta, o ângulo de inclinação da reta e o coeficiente angular.

Quadro 2 – Tarefa pontos no campo de visão

Um observador identifica três objetos que estão localizados no seu campo de visão, todos em uma mesma direção. Observe a figura.

Figura 7 – Ilustração da tarefa campo de visão



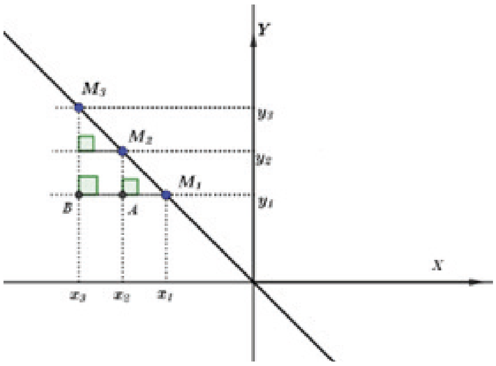
Utilizando o Geogebra reproduza uma representação geométrica no plano cartesiano; em seguida, analise essa construção com seu grupo, indicando quais propriedades geométricas podem ser observadas. Em seguida responda as seguintes questões:

A) Quais relações matemáticas podem ser estabelecidas a partir dos pontos que representam os objetos no plano cartesiano?
B) Qual a equação da reta determinada pelos pontos M_1, M_2, sabendo que $P(x,y)$ é um ponto que percorre a reta?

Fonte: Freitas (2019, p. 284)

No primeiro momento, os estudantes devem construir a representação geométrica no plano cartesiano, utilizando a interface do GeoGebra. A ideia é que os estudantes partam de um modelo matemático já conhecido por eles, ou que ele seja desenvolvido nesta construção e, por meio da livre exploração da interface do *software*, cheguem ao modelo de pontos alinhados. Neste modelo, a construção geométrica permite aplicar o teorema de Tales, ou a semelhança de triângulos, ou a noção de segmentos proporcionais, ou ainda a dependência linear entre segmentos orientados, conforme representação geométrica ilustrada na Figura 8. Este último conceito traz a noção de vetor, que não fez parte do conteúdo estudado, mas pode surgir na discussão dos grupos.

Figura 8 – Representação geométrica de três pontos alinhados



Fonte: Freitas (2019, p. 285)

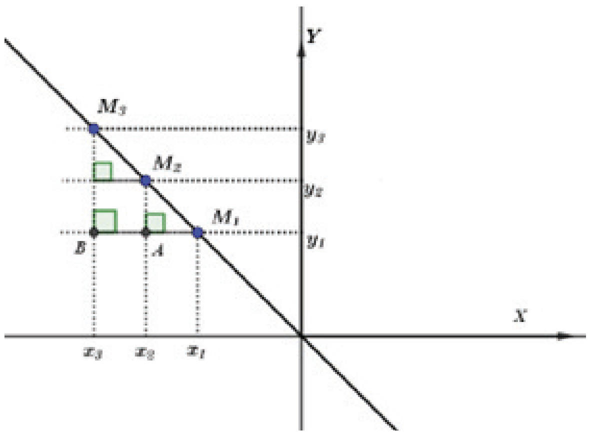
Em qualquer caminho escolhido pelos sujeitos, obter-se-á a equação que representa o determinante. Portanto, a condição para alinhamento de três pontos é que o determinante entre as coordenadas de três pontos colineares e a matriz unidade seja igual a zero.

Esse mesmo modelo deve ser o ponto de partida, como técnica utilizada pelos sujeitos para encontrar a equação da reta. Salientamos que este modelo para dedução da equação geral da reta não aparece no estudo do modelo de referência, apoiado em Briot e Bouquet (1860). No seu texto do século XIX, os autores apresentam a equação geral da reta, e todas as construções posteriores se apoiam nesta proposição para demonstrar que a equação $Ax + By + C = 0$ representa uma reta, mas não mostram o caminho contrário, pelo menos no trecho da obra analisado por nós e correspondente ao estudo da reta no plano.

Este modelo, que associa a representação geométrica da reta (por três pontos) ao cálculo do determinante, surgiu depois do movimento da matemática moderna, já com a influência da álgebra linear. Tal construção consta no nosso estudo dos modelos dominantes dos livros didáticos atuais, dos séculos XX e XXI.

Para resolução da questão (A), o primeiro passo é construir a representação geométrica no GeoGebra, inicialmente usando a opção ponto, e marcar vários pontos "alinhados". Em seguida selecionar a opção reta por dois pontos e escolher dois dos quatro pontos alinhados, para traçar a reta. Traçamos por linhas tracejadas os segmentos que determinam a localização de cada ponto, o que vai determinar as coordenadas (x_1,y_1), (x_2,y_2) e (x_3,y_3) de cada ponto M_1, M_2 e M_3 respectivamente, segundo a Figura 8.

Figura 8 – Representação geométrica de três pontos alinhados letra (A)



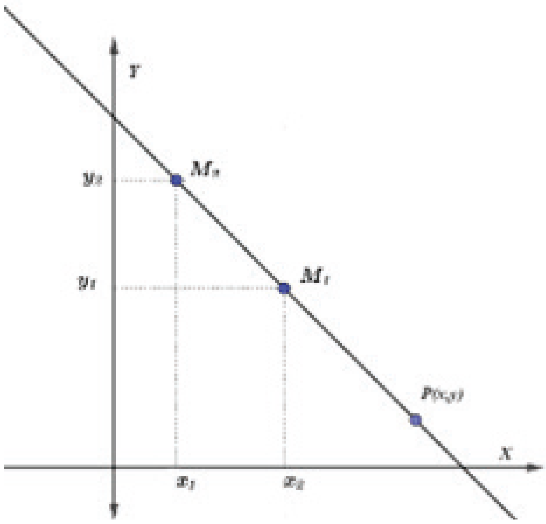
Fonte: Elaborado pela autora

Os pontos estão situados na mesma reta, portanto, são pontos colineares, o que significa que os três pontos determinam sobre a reta segmentos proporcionais. As retas paralelas que determinam as coordenadas de cada ponto são um feixe de retas paralelas cortadas pela reta (r) e evocam o teorema de Tales. Formam-se também de triângulos (retângulos) semelhantes, M_1M_3B e M_1M_2A. Essas propriedades geométricas permitem estabelecer que: $\frac{M_1M_3}{M_1M_2} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$ e $\frac{M_1M_3}{M_1M_2} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$.

Ao desenvolver as duas igualdades, chegaremos ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, que é a condição para que três pontos estejam alinhados.

Para a questão (B), a partir da Figura 9, os estudantes poderão utilizar a mesma técnica, apoiada nas relações geométricas de semelhança, no teorema de Tales, e encontrar a equação da reta: $x(\,y_1 - y_2) + y\,(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$ (I).

Figura 9 – Representação geométrica letra (B)



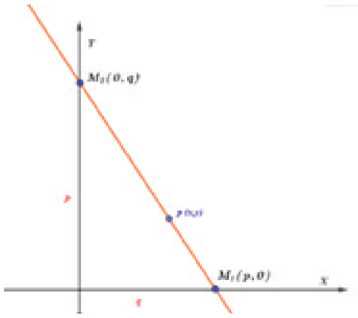
Fonte: Adaptado de Iezzi (2010, p. 18)

A análise da equação, de acordo com a Figura 6, permite afirmar que temos valores constantes x_1, x_2, y_1 e y_2 e valores variáveis x e y. Desta forma, pode-se substituir na equação (I) $y_2 - y_1 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $(x_2\,y_2 - x_1\,y_1) = c$ e teremos: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, a equação geral da reta, relação principal procurada. Os alunos podem também desenvolver diretamente o determinante $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e chegar à mesma conclusão.

Após a resolução da tarefa e a determinação da equação geral da reta, a seguinte questão poderá ser proposta pela professora pesquisadora: o que acontece com a equação da reta, se os pontos M_1 e M_2 forem pontos de intersecção entre a reta e os eixos X e Y, respectivamente? Simule e represente geometricamente, utilizando o GeoGebra, e mostre a equação resultante.

Para responder a esta questão, é necessário movimentar, por meio dos recursos de GeoGebra, os pontos M_1 e M_2 de forma que eles possam interceptar os eixos coordenados X e Y, respectivamente, obtendo-se a Figura 10.

Figura 10 – Reta que intercepta os eixos X e Y



Fonte: Freitas (2019, p. 287)

Os pontos M_1, M_2 e $p(x, y)$ são colineares. Logo, podemos concluir que: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Calculando esse determinante. temos: $-qx - py + pq = 0$. Esta equação é equivalente a: $qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq$.

Podemos fazer o artifício matemático de dividir a equação pelo produto , para obtermos uma equação, na qual x e y estejam isolados $\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$. Vamos obter a equação segmentária da reta r: $\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$

Notamos que os denominadores são exatamente as medidas dos segmentos que a reta r determina sobre os eixos coordenados X e Y.

Em síntese, os estudantes devem apresentar as relações matemáticas por meio das equações da reta, que podem ser de três tipos: $y = ax$, ou seja, uma reta que passe pela origem do sistema cartesiano; $y = ax + by$, uma reta que corta o eixo Y em um ponto diferente do ponto origem do sistema cartesiano; e uma reta que seja paralela ao eixo X, definida como $y = b$, sendo $y = ax + by$ o modelo algébrico genérico para a representação de uma reta qualquer. O modelo reduzido do desenvolvimento da equação da reta por meio do determinante permite também chegar à equação segmentada: $xp + yq = 1$, quando a reta intercepta eixos do plano cartesiano nos pontos (x, 0) e (0, y).

As etapas seguintes do estudo são fortemente influenciadas por este episódio, pois os estudantes deverão desenvolver uma organização matemática com o intuito de estudar a reta e a sua equação geral. Não dá para prever em detalhes quais construções geométricas e algébricas serão priorizadas pelos estudantes na sessão seguinte. A questão central que deve nortear o estudo é como ensinar a equação da reta para seus potenciais alunos. A resposta desta questão, acrescida de objetivos didáticos, é que vai consolidar o momento tecnológico-teórico.

O episódio seis, cujo tema é "o coeficiente angular da reta", tem por objetivo identificar as relações entre a equação da reta e o ângulo que determina a sua direção. A determinação do coeficiente angular, de acordo com Freitas (2019), apoia-se no modelo de referência do século IX, que perdura até os dias atuais no sistema educativo do Brasil. A fim de não repetir tudo o que o estudante encontrará na busca às obras, propusemos, para essa discussão, a retomada da atividade da sessão anterior.

A diretora do estudo inicia o encontro, retomando aspectos do episódio anterior que julgou necessários, e propõe a atividade apresentada no Quadro 3.

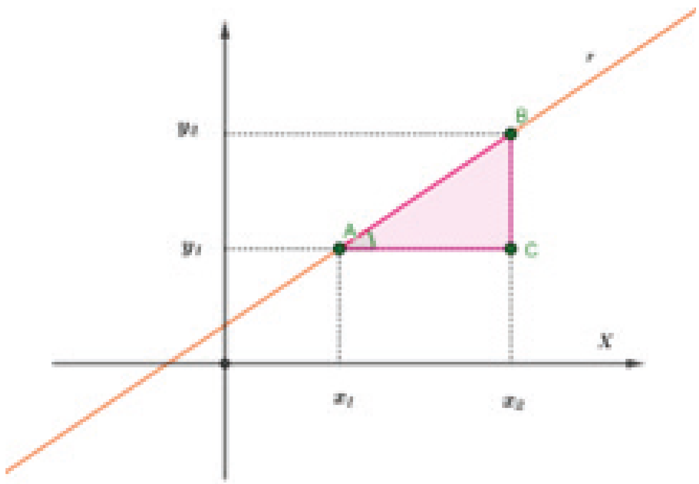
Quadro 3 - Tarefa exploratória

Seja uma reta r dada no plano cartesiano. Vamos pesquisar e estudar a inclinação de uma reta no plano, a partir da figura, tendo por base as seguintes questões norteadoras do estudo: A) Qual é o ângulo formado entre a reta e o eixo X das abscissas? B) O que é o coeficiente angular de uma reta? C) Como a equação da reta pode ser deduzida, tendo um ponto e o coeficiente angular? *Em cada caso justificar as técnicas matemáticas empreendidas com o bloco tecnológico teórico.*

Fonte: elaborado pela autora

Inferimos que os estudantes não terão dificuldade para a resolução da tarefa, pois a fundamentação matemática (bloco tecnológico-teórico), além de estar disponível em diferentes mídias (livros, internet etc.), foi desenvolvida no episódio anterior. Nesta tarefa, cuja ilustração vem na Figura 11, destacamos a importância do desenvolvimento do ambiente tecnológico-teórico e do trabalho da técnica, a partir das relações matemáticas estabelecidas entre as propriedades geométricas e algébricas. Após a conclusão da tarefa, os estudantes socializam as construções com o coletivo.

Figura 11 – Ilustração da tarefa



Fonte: Freitas (2019, p. 289)

Do ponto de vista das construções matemáticas, é possível que os estudantes desenvolvam um modelo que se assemelha àquele que apresentamos como modelo dominante no livro didático nos anos 90.

Efetivamente, o que os estudantes poderão propor é o cálculo do coeficiente angular, identificando inicialmente o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas X. A Figura 8 já explicita a imagem do triângulo retângulo. Supomos que os estudantes partirão das relações trigonométricas do triângulo retângulo BAC, em C, para a questão (A). Eles podem responder que é o ângulo C do triângulo BAC, e deverão escolher uma letra grega para representar este ângulo (como θ ou α). O coeficiente angular corresponde à inclinação da reta, ou ainda a sua direção. Para tanto:

$$\tan\theta = \frac{med\ (\overline{BC})}{med(\overline{AC})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ (I).}$$

A justificativa apoia-se nas relações trigonométricas no triângulo BAC retângulo em C, o que significa que a direção ou inclinação da reta depende da variação das coordenadas de X e Y, ou seja,

$\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. Logo, temos $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Como A e B são pontos que pertencem a r, escreve-se $\begin{cases} ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$. Se somarmos as equações membro a membro, teremos: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b}{a}$(II). Comparando (I) e (II), temos: $m = -\frac{b}{a}$. Esta construção é a dedução clássica do coeficiente angular que está no modelo dominante. A dedução da equação da reta, dado um ponto e seu coeficiente angular, já se faz presente nesta construção, bastando desenvolver um pouco mais a equação (II).

Após a socialização dos grupos, a diretora de estudo propõe as seguintes questões $Q_{43}^{DM\,(F)}$: qual a direção de uma reta no plano? $Q_{44}^{DM\,(E)}$: como ensinar a equação geral de uma reta dada?

É o momento de avaliação, ainda que parcial, da , em que se deseja identificar o que foi aprendido e como esse aprendizado se incorpora nos conhecimentos/saberes dos alunos enquanto organização didática. O episódio deve ser finalizado com o relatório final da sessão de trabalho, organizado e construído por cada grupo e, na sequência, postado no AVA.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS EPISÓDIOS DE ESTUDO

As análises que apresentamos tratam especificamente da análise *a posteriori* dos episódios selecionados e analisados, antes da experimentação. Trazemos a descrição e a análise dos achados da experimentação. É importante ressaltar que, no sentido do PEP, a previsão é sempre muito relativa, e mais ou menos aberta, com margem alta de ocorrer diferenças em relação ao planejado.

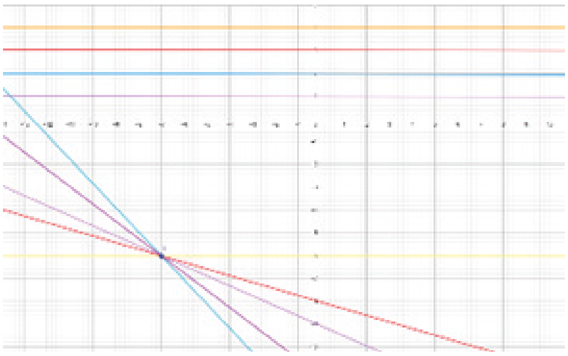
O episódio 5 teve como questões norteadoras: $Q_{4,1}^{DM\,(E)}$: o que é o lugar geométrico reta no plano? e $Q_{4,2}^{DM\,(E)}$: qual(ais) relação (ões) matemática(s) envolvem uma reta no plano?

As questões engendraram duas atividades que visavam iniciar o estudo sobre reta, a partir das construções desenvolvidas na interface do GeoGebra. Infelizmente, alguns arquivos de áudio do trabalho de cada grupo foram corrompidos e não foi possível acessá-los. Diante disso, as observações registradas pela diretora do estudo e as produções escritas de cada grupo foram os únicos dados levados em consideração neste episódio.

No primeiro momento, os estudantes se reuniram em torno da primeira tarefa, que foi a primeira atividade proposta com o uso da interface digital. Organizaram-se em pequenos grupos de três para poder trabalhar com um computador para cada grupo. Selecionamos, para descrever as atividades, três dos cinco grupos que participaram da pesquisa, ressaltando os aspectos das tarefas que julgamos significativos para os objetivos da sessão de trabalho.

O Grupo A respondeu a primeira parte da tarefa conforme previsto, desenhou várias retas, explorando a interface de GeoGebra. Na sequência, os integrantes do grupo responderam as questões propostas. Com relação às questões demandadas (quais entes geométricos podem ser associados aos raios luminosos? e se prolongarmos esses raios indefinidamente em um plano? o que acontece? simule outras situações), os estudantes produziram a seguinte representação na interface (Figura 12)

Figura 12 – Cópia de tela da produção do grupo A



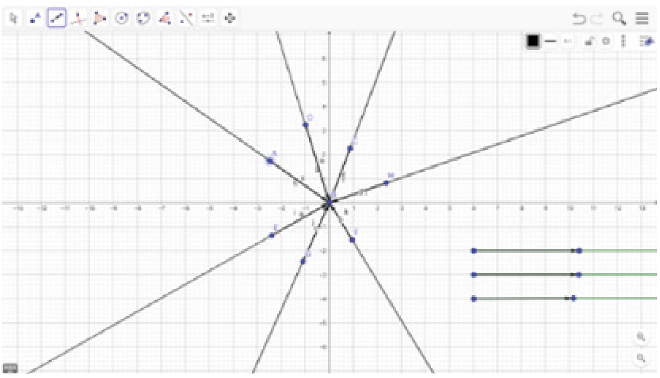
Fonte: dados da pesquisa

Na produção escrita, identificamos as seguintes respostas dadas pelos alunos: (*A) pontos, retas, semirretas, segmentos de retas. (B). Uma reta vai para o infinito mantendo a orientação, sentido e direção.* Nos áudios do trabalho do grupo, identificam-se, também, objetos matemáticos, como retas paralelas, retas concorrentes, segmentos orientados, a noção de módulo e vetor.

O grupo B reproduziu, na Figura 13, a representação no plano como sendo a representação geométrica de raios de luz, e associou os raios às retas infinitas, como pode ser observado na seguinte transcrição:

> *Linhas orientadas que representam direção e sentido. Feixe divergente: os raios de luz se afastam um dos outros ao longo da trajetória. Exemplo: um feixe de luz que atravessa uma lente divergente* (lente que afasta os raios de luz). Feixe *convergente: os raios de luz se aproximam um dos outros ao longo da trajetória. (Grupo B)*

Figura 13 – Cópia de tela da produção do grupo B



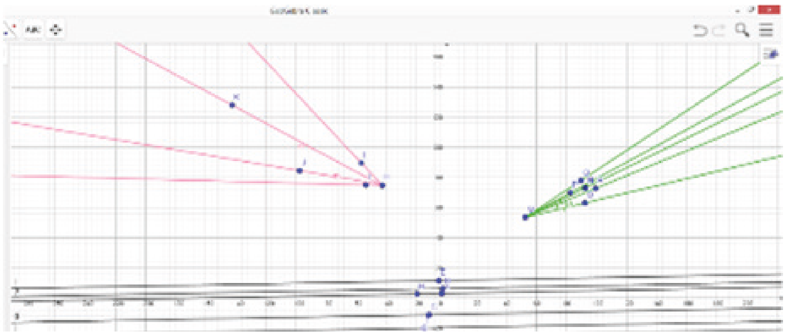
Fonte: dados da pesquisa

O Grupo C produziu no GeoGebra (Figura 14) construções semelhantes aos demais grupos e fez o registro escrito na própria interface, transcrita a seguir.

> *Para a representação geométrica dos raios luminosos, podemos utilizar retas paralelas para mostrar quando o ponto P está no infinito, sendo estas em qualquer direção. Para*

representar a situação em que os raios se encontram em determinado ponto, podemos utilizar semirretas orientadas pois possuem direção e sentido, que também associamos a vetores. Além disso, como por um ponto passam infinitos retas, podemos chamar de retas que se encontram no ponto dado. (Grupo C)

Figura 14 – Cópia de tela da produção do grupo C



Fonte: dados da pesquisa

A resposta do Grupo foi a mais completa apurada nos dados coletados da produção escrita.

Globalmente, as respostas dos grupos revelaram que os estudantes incorporaram alguns aspectos do conhecimento do *software*, associando-os às noções e aos conceitos geométricos: pontos, reta, segmento de reta e segmento de reta orientada, conforme previsto em nossa análise *a priori*.

O Grupo D realizou produções semelhantes aos demais, assim optamos por não trazer sua produção no corpo deste texto, para não sermos repetitivos.

Analisando as produções dos alunos, inferimos que alguns aspectos do conhecimento tecnológico do conteúdo foram mais mobilizados e ressignificados pelos sujeitos. As noções geométricas desenvolvidas por meio do *software* tiveram mais ênfase em razão do dinamismo do ambiente tecnológico, algo quase impossível em situação papel-lápis. Mas a exploração desse dinamismo limitou-se apenas ao acesso da barra de ferramentas e à identificação do tipo de comando que pode ser utilizado em função da tarefa de construção solicitada. Esse resultado refere-se à articulação entre os conhecimentos matemáticos e tecnológicos mobilizados durante a realização da atividade proposta, com base nos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008)

Tendo em vista a situação supracitada, a diretora do estudo propôs, durante a fase de socialização, a institucionalização dos entes geométricos importantes envolvidos na tarefa cujo cumprimento foi solicitado. Na tarefa A, por exemplo, os estudantes foram questionados pela diretora do estudo, como segue:

P: Sim, vamos lá. Então, a gente precisa entender duas coisas. A gente tem uma figura, queremos, a partir dessa figura, representar quais entes geométricos essa figura nos remete. Quais entes geométricos essa figura nos remete?
H2: No caso da figura A?
P: Figura A, em si, ela traz quais entes geométricos? Ela remete a alguns entes geométricos que vocês representaram no GeoGebra. Quais foram esses entes?
H2: Ela representa o ponto.
H2: A reta.

P: Reta.
H2: É a semirreta.
H2: Vetor.
F3: Segmento de reta. (transcrição dos áudios)

Após as respostas dos alunos, a pesquisadora mediou e institucionalizou as noções a partir das respostas apresentadas por eles.

Figura 15 – cópia de tela do grupo B, parte B tarefa

$\begin{bmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$ Temos assim:

$XY_1+X_1Y_2+YX_2-XY_2-X_2Y1-X_1Y=0$

$X(Y_1-Y_2)+Y(X_2-X_1)+(X_1Y_2-Y_1X_2)=0$ Vamos chamar:

$a= Y_1-Y_2$; $b= X_2-X_1$; $c= X_1Y_2-Y_1X_2$ logo a equação da reta é dada por:

$aX + bY + c=0$

O coeficiente angular da reta pode ser determinado por: ***m= tg θ***

$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_1-Y_2}{X2-X1}$ então $Y_1-Y_2 = m(X_2-X_1)$

Fonte: dados da pesquisa

Com relação à segunda atividade, todos os grupos associaram a situação-problema ao caso do alinhamento de três pontos. Por exemplo, o grupo B apresentou a produção representada pela Figura 16.

Figura 16 – cópia de tela do grupo D, parte B tarefa

Podemos determinar a equação da reta que comporta os pontos alem de terminar as coordenadas dos pontos

Podemos provar que os pontos são colineares. isto é, estão na mesma direção e logo esses pontos então alinhados o que vamos provar abaixo

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 \cdot y_2 \cdot 1) + (x_3 \cdot y_1 \cdot 1) + (x_2 \cdot y_3 \cdot 1) - (x_2 \cdot y_1 \cdot 1) - (x_3 \cdot y_2 \cdot 1) - (x_1 \cdot y_3 \cdot 1))$

B) Qual a equação da reta determinada pelos pontos *M1*, *M2*, sabendo que *P*(x, *y*) é um ponto que percorre a reta? *M1*,

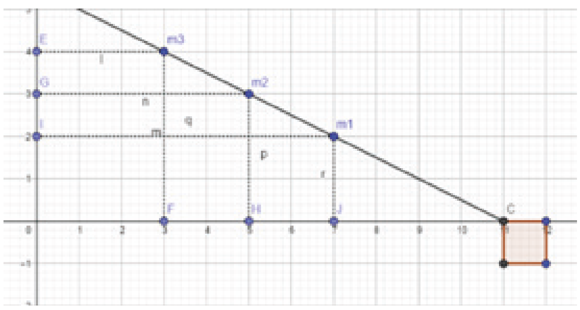
$Y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot X + \left(y_2 - \frac{(y_2-y_1) \cdot x_2}{x_2-x_1}\right)$ em que

$M_1=(x_1, y_1)$
$M_2=(x_2, y_2)$
$M_3=(x_3, y_3)$

Fonte: dados da pesquisa

No caso do grupo D, ilustramos sua resposta pelo extrato da Figura 17, construída no GeoGebra, que permite observar que chegaram à equação geral da reta , como realizado pelo grupo B.

Figura 17 – Cópia de tela da tarefa grupo D, parte B



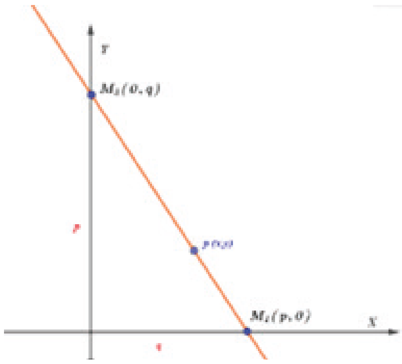
Fonte: dados da pesquisa

O Grupo C apresentou a condição de alinhamento entre três pontos pelo determinante, desenvolveu o cálculo do determinante e o igualou a zero. Mas não associou o resultado a elementos da equação da reta. Particularmente, este grupo apresentou a cópia da resolução do livro didático consultado, mas não explorou suficientemente a proposta do livro para chegar à equação da reta desejada.

Concluímos a tarefa com a partilha dos grupos. A pesquisadora institucionalizou o alinhamento de três pontos no plano e explicou os termos constantes e variáveis. Destacamos que, na etapa de partilha, construímos no GeoGebra, juntamente com os alunos, a figura solicitada. O ponto foi construído de modo que pudesse ser movimentado na reta, permitindo assim que os estudantes percebessem a variação de suas coordenadas em função de sua posição. Inferimos que o objetivo da tarefa foi alcançado, restando a última parte – que solicita a equação geral da reta –, que foi estudada na sessão seguinte.

No episódio 9, retomamos a construção da Figura 19, que envolve os pontos alinhados, e propusemos a seguinte construção: o que acontece com a equação da reta, se os pontos e forem pontos de intersecção entre a reta e os eixos X e Y, respectivamente? Simule e represente geometricamente, utilizando o GeoGebra, e determine a equação resultante.

Figura 18 – Construção a priori



Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo foi aprimorar a mesma técnica, de forma a chegar a uma equação do tipo $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (equação geral da reta) ou ainda $qx + py = pq$.

Os grupos se reuniram para discutir as novas condições propostas para o problema. Destacamos os áudios do Grupo A, que discutiu as condições postas no problema, passo a passo, construindo a figura e o desenvolvimento da técnica conforme descrito *a priori*. O grupo apenas não realizou a simplificação final.

O grupo B, na produção escrita, revelou ter compreendido o problema, geometricamente, porém algebricamente não conseguiu determinar a equação geral da reta como o grupo A. Os grupos C e D fizeram uma construção semelhante à do grupo A.

A segunda parte desse episódio corresponde ao que descrevemos no episódio 6, que se refere ao estudo do coeficiente angular da reta. As questões norteadoras do estudo foram: $Q_{4,3}^{DM\ (F)}$: qual a direção de uma reta no plano? E $Q_{4,4}^{DM\ (F)}$: Como ensinar a equação geral de uma reta dada?

Os alunos tinham por metas resolver a seguinte atividade exploratória:

> Seja uma reta r no plano cartesiano. Vamos pesquisar e estudar a inclinação de uma reta no plano, a partir da figura da figura dada, tendo por base as seguintes questões norteadoras do estudo: A) Qual ângulo é formado entre a reta e o eixo das abscissas? O que é o coeficiente angular de uma reta? B) Qual equação da reta pode ser deduzida, tendo um ponto e o coeficiente angular? C) Em cada caso, identifique o bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas empreendidas (FREITAS, 2019, p. 331).

Os grupos se reuniram para discutir a proposta da atividade. A análise dos áudios gravados no decorrer da resolução da atividade revela que os estudantes, a partir da figura fornecida, deduziram as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

O grupo A apresentou como resolução o que expomos na Figura 16. Os integrantes desse grupo fizeram uma construção correta, mas não identificaram a técnica e o discurso tecnológico-teórico, embora esses elementos estejam presentes na construção. Verifica-se um esforço do grupo para fazer as justificativas e escrever as etapas do processo de resolução da tarefa. Para resolvê-la, eles partem do fato de que as retas paralelas possuem a mesma direção.

Figura 16 – Produção escrita, grupo A

Resolução letra A

Sabemos por paralelismo entre a reta $\overleftrightarrow{AC}$ e eixo das abscissas que o ângulo BÂC é congruente ao ângulo formado pela reta r é a abscissas ao qual vamos chamar de α

Alem disso sabemos que BÂC = arco tg de $\frac{|BC|}{|AC|}$ = arco tg de $\frac{|y_2+y_1|}{|x_2+x_1|}$

Portanto α = arco tg de $\frac{|y_2+y_1|}{|x_2+x_1|}$

Resolução letra B

Dados dois pontos P e Q distintos de coordenadas P = (a, b) e Q = (c, d)

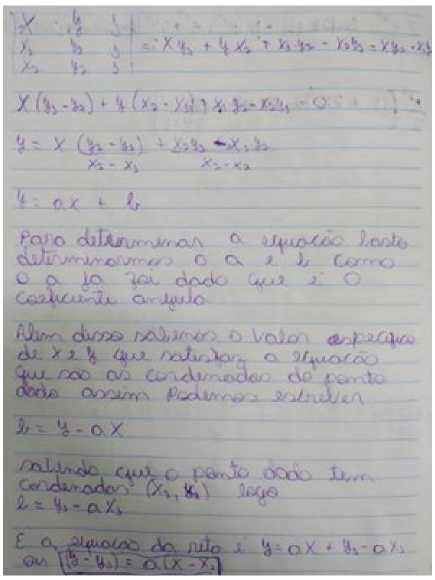
Assim o coeficiente angular = $\frac{b-d}{a-c}$

Que corresponde a tangente do ângulo formado pela reta $\overleftrightarrow{PQ}$ com o eixo das abscissas.

Fonte: dados da pesquisa

O Grupo A completou a construção com a produção aqui apresentada na Figura 17, para identificar a equação reduzida da reta e a equação que passa por um ponto dado da reta.

Figura 17 – Produção escrita grupo A



Fonte: dados da pesquisa

Os grupos B e D não apresentaram o processo de construção e suas devidas justificativas. Eles apenas escreveram as respostas solicitadas nas tarefas, e não evidenciaram o processo de construção, nem o discurso tecnológico-teórico para justificar a técnica.

O grupo C deduziu adequadamente, conforme pode ser observado na Figura 18, de forma semelhante ao modelo previsto *a priori*, justificando o processo de construção. No entanto, apesar de os áudios terem revelado que os integrantes do grupo verbalizaram o discurso tecnológico-teórico, eles não especificaram o que seria na produção escrita, nem a técnica. O mesmo ocorreu com todos os grupos.

Figura 18 – Produção escrita do Grupo C, parte 2 da tarefa

a) De acordo com o teorema de tales retas paralelas cortadas por uma transversal, temos que o ângulo formado pela reta e o eixo X e o ângulo BÂC são correspondentes, disso temos que o segmento CB é o cateto oposto e AC é o cateto adjacente em relação ao ângulo BÂC. Então tgÂ = $\frac{CB}{AC}$, disso tgÂ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

b) Pegando o exercício da letra a, a inclinação da reta r em relação ao triângulo ABC vai coincidir com a interseção da reta r com o eixo x, sendo temos que tgÂ = $\frac{CB}{AC}$, disso tgÂ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

c) tgÂ = $\frac{CB}{AC}$ .... fazendo tgÂ = m, temos m = = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)$

Fonte: dados da pesquisa

Um fenômeno que observamos no trabalho dos grupos selecionados é que, no momento do debate, eles verbalizaram todas as construções, mas não articularam esse discurso com o tecnológico-teórico para justificar suas construções. A pesquisadora enfatizou a necessidade de fazer uma justificativa detalhada das técnicas, isto é, para que suas estratégias sejam levadas para sala de aula, é necessário que eles se apropriem das praxeologias matemáticas e didáticas em jogo no cumprimento das tarefas propostas. A transcrição a seguir apresenta o diálogo entre a professora pesquisadora (indicada por P) e os alunos em formação (indicados por F_1, F_2, ...)

> *P- É a mesma coisa como acontece com os nossos alunos. É esse cuidado que precisa ter, de explicar. Eu entendi o que vocês fizeram, vocês calcularam... a linha tangente do alfa...*
> *F1- Isso.*
> *P- Alfa é o ângulo do triângulo, ali é o cateto oposto, o cateto adjacente. Eu entendi....*
> *F2- E a gente sinalizou quem é o cateto oposto...*
> *P: E eu sei, também, que vocês sabem. Mas, na hora que a gente vai olhar para os nossos alunos, a gente quer que eles façam tudo bonitinho, bem explicadinho, detalhado, e eu estou tentando formar vocês a também se organizar assim...*
> *F2- É porque segue o que está disposto acima. Portanto, o cálculo do coeficiente angular de uma reta, ela pode ser feita pela razão da diferença entre dois pontos pertencentes a ela. Aí a gente foi e colocou: A tangente de alfa é igual a delta "X" sobre delta "Y".*
> *P - Quem é delta X e quem é delta Y?* (sobreposição de vozes)
> *F2 - Delta Y sobre delta X, (foi na hora de digitar ..., que aí vai determinar o "coeficientizinho", que é o nosso...*(sobreposição de vozes).
> *P- Sabe qual é a questão de vocês? Vocês sabem direitinho. A questão de vocês só é organizar o pensamento no papel. E isso, gente, é importante. Porque, se vocês conseguem ... com isso, vocês também conseguem ter a percepção de fazer a leitura do que o aluno escreve. Quantas vezes a gente pega uma avaliação, o aluno teve o*

> *raciocínio correto. O aluno teve o raciocínio correto, mas ele não sabe escrever ou ele não... não teve o cuidado de escrever aquele raciocínio. E a gente diz que o aluno fez errado, porque ele não consegue colocar o raciocínio no papel. Então a observação que eu faço da tarefa de vocês, eu sei que vocês entenderam, que vocês sabem o que estão fazendo, mas aqui no papel não aparece para a gente* (Dados da pesquisa. Áudio transcrito do grupo A).

Nesta dinâmica, foram apresentadas as construções de cada grupo, a discussão com os demais colegas e as intervenções pontuais da pesquisadora, para chegar a uma resposta satisfatória para todos. Uma das dúvidas levantadas por uma aluna foi sobre a diferença entre a tangente e o arco tangente. O debate gerado em torno dessa dúvida permitiu apresentar elementos tecnológico-teóricos que teriam sanado a referida dúvida.

Observamos que, após a ênfase dada pela pesquisadora à importância de detalhar as técnicas, os estudantes, de maneira geral, passaram a descrever mais detalhadamente os procedimentos e a preocupar-se em explicar com mais clareza seus processos de resolução das tarefas. Isto ficou evidente nos três grupos que apresentaram seus achados. Destacamos, como exemplo, o grupo A.

> *H1: Assim, podemos escrever "B" igual a "Y" menos "AX". No caso, como a gente já sabia quem é o "A", bastava achar só o "B", então a gente colocou o "B" em evidência ali, não é? Sabemos que o ponto dado tem coordenadas "X1" e "Y1", logo "B" vai ser igual a "Y1" menos "A", "X1". A equação da reta é "Y" igual a "X" mais "Y1" menos "AX". Ou "Y" menos "Y1" igual a...*
>
> *P: Na verdade, qual foi o caminho que ele fez? Ele pegou a equação reduzida e substituiu na equação reduzida as coordenadas dos pontos. Aí ele tem "Y" menos "Y1". Então, na verdade, aí teria que ser o "Y"... no caso, esse "Y1" poderia ser um "Y" zero. Se vocês forem no livro didático, é a mesma equação, o que muda é somente que eles utilizam "Y" ...e "Y" zero. Só denominando.*
>
> *H1: Foi. Quando a gente chegou à equação da reta, "Y" é igual a "X" mais o "B" ali que está um pouco (diferente) [00:01:05], que a gente vê, aí a gente lembrou da outra, que a gente utiliza geralmente quando... quando se sabe um ponto e o coeficiente angular. Se tem um ponto que essa reta passa e o coeficiente angular, que é a equação "Y" menos "Y1", que vai ser igual a "A" vezes o "X" menos "X1".*
>
> *P: Beleza, muito bem. Perguntas? O que é que os grupos acharam? da...* (Dados da pesquisa. Áudio transcrito do grupo A).

Ao que parece, os professores estagiários começam a articular o conhecimento matemático com o conhecimento didático.

A partir desses dados, inferimos que temos duas instâncias do conhecimento didático em desenvolvimento: o conhecimento da praxeologia (TAD) das tarefas e o saber fazer, que vão se incorporando ao equipamento praxeológico desses sujeitos envolvidos no processo de estudo. Mas não podemos afirmar que houve homogeneidade nessas “aquisições”, pois os dados analisados revelam que nossos sujeitos, participantes da pesquisa, encararam de formas diferentes as tarefas propostas, de acordo com seus equipamentos praxeológicos.

Ressaltamos que a segunda instância, que definimos como parte do conhecimento didático mobilizado nas atividades, pode ser caracterizada como a habilidade do professor de explicar um conteúdo matemático, de fazer-se entender por seus alunos. Sobre essa habilidade, o trabalho desta sessão sinalizou que ela pode ser potencializada pela praxeologia de uma tarefa durante os momentos de partilha e socialização realizados nas diferentes etapas do dispositivo.

CONCLUSÕES

Globalmente o estudo desenvolvido nas sessões de trabalho descritas acima nos leva a concluir que as praxeologias adotadas por esses sujeitos, ao longo do experimento, indicam que houve alterações no equipamento praxeológico dos sujeitos da pesquisa, os estagiários. Tal corpo de conhecimento está diretamente relacionado ao conhecimento sobre o conteúdo matemático desenvolvido por meio de situações de modelização da física, na perspectiva dos processos de ensino da educação básica.

As praxeologias dos professores estagiários revelaram vários conhecimentos colocados em ação, para o desenvolvimento dos diferentes tipos de atividades e tarefas matemáticas, atividades inerentes à profissão do professor. É nesse sentido que adotamos a expressão "formação profissional" (FP), porque mobiliza conhecimentos profissionais.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 42. Nov, 2015.

BALL, D. L., THAMES,M.H. PHELPS. G. Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, n. 5, 2008, p. 389-407.

BOSCH, Marianna; GARCÍA, Francisco Javier; GASCÓN, Josep; RUIZ HIGUERAS, Luisa La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico Educación Matemática, vol. 18, núm. 2, agosto. **Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C**. Distrito Federal, 2006,México.

CHEVALLARD, Yves. Les analyses de pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique**.** Recherches en Didactique de Mathématiques. **La Pensée Sauvage-Éditions.** Grenoble, v. 19, n 2, 1999 p.221-266. Disponível em : < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27> Acesso em: 04 jun 23.

CHEVALLARD, Yves. La notion de PER : problèmes et avancées**. UMR ADE**F. Toulouse, le 28 avril 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf>. Acesso em : 22 jun 23.

CHEVALLARD, Yves. Organiser l'etude.1. Structures & fonctions. Actes de la 1 École d' Été de Didactique dês Mathématiques. France: **La Penseé Sauvage**, 2002.

2002. versão eletrônica, disponível em: <www.yves.chevallard.free.fr>. Acesso

em: 15 Jul. 2015.

FREITAS, Rita Lobo. **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo, 2019.

OCDE. **The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Readings,Science and Problem Solving Knowledge and Skills**, París, OCDE, 2003. Disponível em:<https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/pisa2003assessmentframeworkmathematicsreadingscienceandproblemsolvingknowledgeandskills-publications2003.htm.> Acesso em: 11/07/23.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** n. 42, nov. 2015.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching. What makes it special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BOSCH, Marianna; GARCÍA, Francisco Javier; GASCÓN, Josep; RUIZ HIGUERAS, Luisa. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. **Educación Matemática –** Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C., Distrito Federal, México, v. 18, n. 2, ago. 2006.

BRIOT, Charles Auguste BOUQUET Jean Claude. **Leçons de Géométrie Analytique**. 3ème édition, Paris,Dezobry, E. Magdaleine et C. Librairies-Éditeurs, 1860. Disponivel em : https://books.google.com.cu/books?id=NmkVAAAAQAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false

CHEVALLARD, Yves. Les analyses de pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique**. Recherches en Didactique de Mathématiques**. La Pensée Sauvage-Éditions, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27 Acesso em: 04 jun. 2023.

CHEVALLARD, Yves. **Organiser l'étude.1. Structures & fonctions.** Actes de la 1 École d' Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage, 2002.

2002. Versão eletrônica. Disponível em: www.yves.chevallard.free.fr>. Acesso

em: 15 jul. 2015.

CHEVALLARD, Yves. La notion de PER: problèmes et avancées**. UMR ADEF**, Toulouse, le 28 avril 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf. Acesso em: 22 jun. 2023.

FREITAS, Rita Lobo. **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD:** constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de um problema didáctico. el caso del álgebra elementar. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matémática Educativa**, v.203 n.23, p.230-245, 2011

GASCÓN, J. Efectos del autismo temático sobre el estúdio de la Genometría secundário II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. **Revista SUMA**, 45, p. 41 – 52, 2003.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

APÊNDICE

Quadro 1

Descrição de Tarefas

QUADRO DESCRITIVO DAS TAREFAS	
TIPO DE TAREFA	**DESCRIÇÃO**
T_1	encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado
T_2	por um ponto dado, levar uma reta paralela a uma reta dada
T_3	levar uma reta por dois pontos dados
T_4	achar o ponto de intersecção de dois pontos dados
T_5	achar a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas
T_6	reconhecer se três pontos estão em linha reta. Na linguagem atual utilizamos o alinhamento de três pontos dados
T_7	reconhecer se três retas passam por um mesmo ponto dado
T_8	encontrar o ângulo de duas retas
T_9	de um ponto dado, baixar uma perpendicular sobre uma reta dada, e achar o comprimento dessa perpendicular
T_{10}	por um ponto de intersecção de duas retas dadas levar uma reta perpendicular a uma reta dada
T_{11}	achar o lugar dos pontos igualmente distantes de dois pontos dados
T_{12}	encontrar a equação tangente a uma curva qualquer
T_{13}	encontrar a equação da tangente ao círculo
T_{14}	levar uma tangente ao círculo por um ponto exterior
T_{15}	levar uma tangente ao círculo
T_{16}	encontrar o lugar de pontos cujas distâncias a dois pontos fixos sejam
T_{17}	achar os pontos de intersecção de dois círculos

Histórico

Recebido: 12 de outubro de 2023.
Aceito: 09 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

FREITAS, Rita Lobo; ALMOULOUD, Saddo Ag. Atividades de estudo e pesquisa no âmbito da formação de professores: modelização de tarefas sobre óptica . **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024005, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024005.id592

Como citar – APA

FREITAS, R. L.; ALMOULOUD, S. A. (2024). Atividades de estudo e pesquisa no âmbito da formação de professores: modelização de tarefas sobre óptica. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024005.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024005.id592

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques