Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024006
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024006.id593

As limitações da geometria euclidiana e a razão de ser de outras geometrias

The limitations of Euclidean geometry and the raison d'être of other geometries

Las limitaciones de la geometría euclidiana y la razón de ser de otras geometrías

Milenko Schiavetti Basilio Kovacevic[1]

Maria José Ferreira da Silva[2]

RESUMO

Este artigo, trata de uma pesquisa de cunho teórico, sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático – TAD no sentido de destacar o potencial das geometrias não euclidianas no ensino de matemática e sua relevância histórica e cultural ao considerar as limitações da geometria euclidiana e identificar suas razões de ser. A contextualização epistemológica, sugerida pela TAD, foi fundamental para observar que a geometria euclidiana, oferece os discursos tecnológicos-teóricos que justificam as técnicas utilizadas para tarefas práticas (geometria do quintal), ou seja, apresenta a construção de um *logos* para uma *práxis* e múltiplas razões para sua existência. Por outro lado, para situar a gênese da geometria esférica na antiguidade (geometria do céu), baseada em tarefas oriundas, principalmente, da astronomia e da navegação. A evolução do conhecimento matemático, relacionado à validade do quinto postulado, motivou as geometrias não euclidianas – hiperbólica e elíptica, *logos* que só justificaram uma *práxis* no século XX na teoria da relatividade.
Palavras-chave: Geometria euclidiana; Geometria hiperbólica; Geometria elíptica; Geometria esférica; Razão de ser.

ABSTRACT

This article deals with theoretical research from the perspective of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) in order to highlight the potential of non-Euclidean geometries in maths teaching and their historical and cultural relevance when considering the limitations of Euclidean geometry and identifying its reasons for being. The epistemological contextualisation suggested by ADT was fundamental to observing that Euclidean geometry offers the technological-theoretical discourses that justify the techniques used for practical tasks (backyard geometry), in other words, it presents the construction of a logos for a praxis and multiple reasons for its existence. On the other hand, to situate the genesis of spherical geometry in antiquity (geometry of the sky), based on tasks originating mainly in astronomy and navigation. The evolution of mathematical knowledge, related to the validity of the fifth postulate, motivated non-Euclidean geometries - hyperbolic and elliptical, logos that only justified a praxis in the 20th century in the theory of relativity.
Keywords: Euclidean geometry; Hyperbolic geometry; Elliptical geometry; Spherical geometry; Raison d'être.

RESUMEN

Este artículo aborda una investigación teórica desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para destacar el potencial de las geometrías no euclidianas en la enseñanza de las matemáticas y su relevancia histórica y cultural al considerar las limitaciones de la geometría euclidiana e identificar sus razones de ser. La contextualización epistemológica sugerida por la TAD fue fundamental para observar que la geometría euclidiana ofrece los discursos tecnológico-teóricos que justifican las técnicas utilizadas para las tareas prácticas (geometría de patio), es decir, presenta la construcción de un logos para una praxis y múltiples razones para su existencia. Por otro lado, situar la génesis de la geometría esférica en la antigüedad (geometría del cielo), a partir de tareas originadas principalmente en la astronomía y la navegación. La evolución de los conocimientos matemáticos, relacionada con la validez del quinto postulado, motivó geometrías no euclidianas -hiperbólica y elíptica-, logos que sólo justificaron una praxis en el siglo XX en la teoría de la relatividad.
Palabras clave: Geometría euclidiana; Geometría hiperbólica; Geometría elíptica; Geometría esférica; Razón de ser.

1 Doutorando em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, SP, Brasil. Rua José Sversut, 84, Jardim das Belezas, Carapicuiba, SP, Brasil. CEP: 06315-200. E-mail: oknelimlili@gmail.com

2 Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, São Paulo, SP, Brasil. Rua Marques de Paranaguá, 111, Consolação, São Paulo, SP, Brasil, CEP: 01303-050. E-mail: zeze@pucsp.br

INTRODUÇÃO

No campo da educação matemática, a busca por métodos e abordagens eficazes para o ensino de geometria tem sido uma constante. A geometria, com sua riqueza de formas, propriedades e relações espaciais, desafia tanto educadores quanto estudantes a explorar um mundo de conceitos complexos e abstratos. Entre as diversas teorias e abordagens que surgiram ao longo do tempo, a Abordagem Ecológica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) emerge como um quadro teórico para entender e aprimorar o ensino de geometria.

A Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard, oferece uma perspectiva única e inovadora para discutir os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, pois em vez de se concentrar exclusivamente nos aspectos cognitivos e pedagógicos aborda a educação matemática como um fenômeno ecológico, em que o saber matemático é considerado parte de um ecossistema educacional em constante evolução.

De acordo com Artaud et al (1997) a TAD permite analisar os processos de transposição didática ao considerar os estudos das relações entre objetos, pessoas e instituições baseados na problemática ecológica que busca responder as seguintes questões apresentadas por Chevallard em 1997: o que existe ou não existe? O que deve existir? O que poderia existir? Quais são as condições que favorecem, permitem ou, pelo contrário, dificultam ou mesmo impedem a existência de tal objeto? Segundo os autores as respostas para tais perguntas podem esclarecer as condições de existência da matemática no sistema educativo. As respostas para essas questões são resultados de um estudo epistemológico que busca a construção de um Modelo Epistemológico de Referência – MER, que possibilita aprofundar os estudos didáticos e apontar a razão de ser, no nosso caso, das geometrias não euclidianas.

Assim, neste artigo buscamos, por um breve estudo epistemológico, as razões de ser das diferentes geometrias, no sentido de entender por que algumas não fazem parte do sistema educacional vigente. Para além, lançar luz sobre os desafios e oportunidades específicas que surgem ao ensinar geometria, uma disciplina que, frequentemente, exige uma mudança significativa na maneira como os alunos percebem e interagem com o espaço e as formas.

À medida que avançamos nesse estudo fica evidente que a compreensão da dimensão epistemológica das geometrias não-euclidianas desempenha um papel crucial na promoção de uma educação matemática mais eficaz e significativa, que subsidia a capacitação de professores para seu ensino. O ensino de geometrias que, em geral, não foram aprendidas, tanto na educação básica, quanto na superior, implica em vencer desafios para a busca de contextos que lhe deem sentido, além de sensibilidade para as interações complexas entre os componentes do sistema educacional.

Tal ensino provoca abordar os desafios dessa disciplina de forma mais contextualizada e sensível às interações complexas entre os componentes do ecossistema educacional, incluindo as geometrias não euclidianas que enriquecem nosso entendimento do espaço. Nesse caso, a dimensão ecológica da TAD pode ser aplicada ao mostrar como as teorias cosmológicas são adaptações matemáticas à nossa busca para compreender o universo, o que enfatiza a matemática como uma ferramenta fundamental para a exploração do ambiente cósmico e para a construção de modelos que representam sua evolução.

Assim, desenvolvemos este artigo com uma breve apresentação das teorias da transposição didática e da antropológica do didático para fazer uma reflexão a respeito das primeiras geometrias e Os Elementos de Euclides, a seguir as geometrias não-euclidianas, na sequência uma breve apresentação das limitações da geometria euclidiana e nossas considerações finais.

TRANPOSIÇÃO DIDÁTICA E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Em sentido restrito, de acordo com Chevallard (2018, p. 23), a Transposição Didática surge para determinar o porquê dos conteúdos de saber estudados em uma sala de aula e nesse processo estuda a transição do saber sábio para o saber ensinado. Essa teoria identifica duas transposições possíveis: a transposição didática externa e a transposição didática interna. A primeira é realizada pelo que Chevallard denominou de noosfera (sistema de escolas, sociedade e a esfera acadêmica) e trata das transformações do saber sábio em saber a ser ensinado. Nesse processo é necessária uma seleção, pois nem todo saber sábio é adequado para o ensino; uma adaptação para o contexto escolar, que o simplifica, o torna acessível e o relaciona à realidade dos alunos e uma organização de forma lógica e coerente que facilita o aprendizado dos alunos. J**á a** transposição didática interna é o processo de transformação do saber a ser ensinado em saber ensinado conduzido por um professor. O saber a ser ensinado é o saber adaptado para o contexto escolar, que é simplificado, organizado e contextualizado para que seja mais acessível aos alunos, ou seja, é adaptado às condições de aprendizagem dos alunos na escola e nas salas de aula. Nesse processo o professor seleciona, adapta e organiza o conteúdo a ser ensinado de acordo com sua própria visão de mundo e sua experiência como educador, entre outros fatores.

Como explica Chevallard (2018, p. 23) o saber acadêmico é o saber produzido por cientistas, que é considerado verdadeiro e rigoroso, no entanto quando trata do saber sábio se refere a um saber produzido por alguém independentemente "dos níveis considerados na escala dos valores culturais na sociedade correspondente." Nesse sentido, embora o saber produzido na academia seja complexo e abstrato e considerado sábio, há saberes sábios que não são acadêmicos.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), como uma expansão da Transposição Didática, oferece uma análise mais sistemática e dinâmica do papel dos elementos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem que permite uma investigação detalhada dos processos de transposição ao colocar em jogo as relações entre objetos, pessoas e instituições. Por exemplo, os professores fazem escolhas quanto aos aspectos de um conceito matemático destacar e podem adaptar sua apresentação de acordo com o nível de conhecimento de seus alunos. Por sua vez, os alunos trazem ou desenvolvem suas próprias concepções em relação ao mesmo conceito matemático, o que pode influenciar sua jornada de aprendizagem. Além disso, os livros didáticos podem variar na apresentação de um conceito matemático, dependendo do enfoque escolhido pelo autor. Para Chevallard (1992, p. 87, tradução nossa:

> [...] obviamente que logaritmo é um objeto matemático. Mas também existem o objeto "escola", o objeto "professor", o objeto "aprender", o objeto "saber", o objeto "dor de dente", o objeto "fazer pipi", etc."

Desta maneira, o olhar antropológico para o saber sugere uma nova epistemologia preocupada, não apenas com a construção dos saberes, mas com sua utilização, seu ensino e sua aprendizagem. Destarte, para Chevallard (2018, p. 35): "A TAD define a didática como *a*

> ***ciência das condições e restrições da difusão social das praxeologias.*** Assim a didática da ***matemática*** é a ciência das condições e restrições da difusão social das praxeologias ***matemáticas***."

Em última instancia, a TAD considera, segundo Chevallard (2002a) –- que, toda e qualquer atividade humana consiste em um "saber fazer" em que se identifica uma tarefa t de um determinado tipo T, e uma técnica τ que exige uma justificativa, que o autor chama de tecnologia e a representa por θ que, ao mesmo tempo que explica a técnica, a descreve e a justifica como uma maneira correta de cumprir a tarefa. Essa tecnologia, por sua vez é justificada por uma teoria Θ. Em suma, toda atividade humana implementa uma organização que o autor apresenta como [T/τ/θ/Θ] chamada praxeologia.

Para Chevallard (2002b) a palavra praxeologia enfatiza a estrutura [T/τ/θ/Θ]. O termo grego *praxis*, que significa "prática" refere-se ao bloco prático-técnico que agrega os tipos de tarefas e as técnicas [T/τ] e o termo grego *logos*, que significa "razão", "discurso racional ", refere-se ao bloco tecnológico-teórico composto por tecnologia e teoria [θ/Θ]. Para o autor, o mérito de usar a palavra praxeologia é que ela dá voz a um fato antropológico que é tão banal quanto fundamental: não há *práxis* sem *logos*; não há *logos* que seja para sempre inocente de implicações "*práxicas*". No contexto da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a praxeologia matemática desempenha um papel fundamental no ensino, pois é relacionada a um tema específico e é ela que o professor tem como objetivo de ensino ao elaborar uma praxeologia didática. Como destaca Almouloud (2007, p. 111), a TAD é uma contribuição significativa para a didática da matemática, uma vez que a insere "no campo da antropologia" e enfatiza "o estudo das organizações praxeológicas didáticas concebidas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticos."

Baseado na TAD, Gascón (2011) afirma que um problema didático é um fenômeno complexo que pode ser analisado com base em três dimensões fundamentais: a dimensão epistemológica, a dimensão econômico-institucional e a dimensão ecológica que ajudam na análise de problemas de pesquisa em Didática da Matemática.

A dimensão epistemológica foca no aspecto matemático central do problema e busca entender as razões históricas subjacentes à construção de determinado saber matemático com o objetivo de elaborar um Modelo Epistemológico de Referência – MER Essa dimensão é fundamental para a compreensão de um problema didático, pois é a partir dela que se define o que é ensinado. O saber matemático é um saber complexo e dinâmico, que está em constante evolução e, por isso é importante considerar as diferentes perspectivas de um saber matemático, bem como as diferentes formas de representá-lo. A dimensão econômico-institucional lida com a gestão didática para abordar as contingências institucionais e regras que afetam o ensino de matemática em instituições educacionais. Baseado no MER construído nessa dimensão se investiga como as praxeologias relacionadas a um objeto de ensino se comportam em uma instituição específica considerando fatores como currículos, livros didáticos e normas institucionais. Por fim, a dimensão ecológica, baseada no MER construído, destaca as condições necessárias para o estudo institucionalizado de matemática e as restrições que afetam esse estudo, além de ressaltar a importância de considerar as circunstâncias ambientais que podem influenciar o ensino e a aprendizagem de matemática. Essas dimensões, segundo Gascón (2011), são cruciais para uma análise aprofundada dos problemas didáticos em matemática e permitem compreender não apenas o conteúdo matemático em questão, mas também questões institucionais e ecológicas que moldam a prática educacional.

O MER desempenha um papel fundamental ao permitir uma análise mais aprofundada dos saberes matemáticos antes de serem ensinados. Assim, entendemos que o estudo epistemológico é necessário para compreender as mudanças na abordagem do ensino da geometria, como a transição da geometria euclidiana para a geometria não euclidiana, bem como as limitações da abordagem euclidiana.

Tratamos neste artigo apenas da primeira dimensão, mas n**ão pretendemos** construir um Modelo Epistemológico de Referência, mas apontar, por um breve estudo epistemológico, a razão de ser das geometrias não euclidianas, bem como as limitações da geometria euclidiana que, em geral, é o foco no ensino de geometria no ensino básico.

Na sequência, apresentamos o estudo da dimensão epistemológica em que abordamos a gênese e razões para o surgimento de diferentes geometrias na antiguidade, principalmente, da geometria esférica quando houve a necessidade de buscar meios de navegação marítima e curiosidade em calcular fenômenos em astronomia.

AS PRIMEIRAS GEOMETRIAS E OS ELEMENTOS

Quando se discute geometria, surge inevitavelmente a pergunta: qual geometria descreve melhor a natureza? No contexto da geometria do universo, é possível que estejamos, em vez disso, desvendando apenas a concepção do que pensamos ser a verdade, ou seja, uma criação da mente humana que não necessariamente reflete a realidade.

Na época de Euclides, a geometria era dividida em duas áreas distintas, a geometria do céu ou esférica e a geometria do quintal de casa. Como explicam Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948), a geometria-do-céu e a trigonometria surgiram primordialmente no âmbito da astronomia. Antigos observadores identificaram que os astros aparentavam deslocar-se em trajetórias circulares concêntricas, cujos centros coincidiam com um ponto celestial estacionário. Devido à ausência de conhecimento acerca da rotação da Terra, um fenômeno que explicaria em parte o aparente movimento das estrelas, bem como os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas, os antigos naturalmente conceberam a hipótese de que esses corpos celestes estavam associados a uma esfera celeste, centralizada na Terra, que girava em torno de um eixo que atravessava nosso planeta.

Para Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948), a geometria-do-céu era essencial para compreender processos astronômicos importantes, principalmente para egípcios e babilônios.

Os egípcios se apoiavam em conceitos geométricos em seus estudos astronômicos para planejamento e construção de edifícios e estruturas, no sentido de garantir que as medidas e proporções fossem precisas e suas construções alinhadas com constelações e equinócios. Eles observavam o céu noturno e usavam esse conhecimento para desenvolver calendários lunares e solares, além de prever eventos astronômicos, como eclipses. Os egípcios eram mestres na medição de terras e no estabelecimento de limites de propriedade por princípios geométricos para medir áreas de campos agrícolas ao longo das cheias do Rio Nilo e para planejar e construir monumentos, como as pirâmides. Embora a maioria de suas medições fosse baseada em geometria plana, a compreensão da forma da Terra como uma esfera desempenhava um papel indireto nessas atividades.

Para os autores, os fenícios eram conhecidos por suas habilidades de navegação, especialmente no Mar Mediterrâneo por conhecimentos práticos de trigonometria esférica para navegar com sucesso, por exemplo, eles usavam o astrolábio (um instrumento de navegação) para medir a altura angular das estrelas acima do horizonte que eram fundamentais para determinar sua latitude na esfera celeste e, assim, sua posição no mar. Os babilônios, famosos por seus estudos em astronomia, observavam o movimento dos corpos celestes por meio da geometria-do-céu para entender a posição e o movimento dos planetas, estrelas e constelações na esfera celeste.

Até este ponto, podemos dizer que as razões de ser da geometria-do-céu são a necessidade da esfera celeste para prática de navegação marítima e para cálculos astronômicos que mobilizam, diretamente, as concepções de figuras esféricas e de trigonometria em sua forma rudimentar.

As situações que tratam da medição da altura de astros, para serem resolvidas dependem da mobilização de concepções fundamentais de trigonometria e podem relacionar, além da trigonometria rudimentar, conhecimentos de geodésicas por exemplo, isto é, que um caminho de comprimento mínimo entre dois pontos quaisquer numa esfera é um arco de um círculo máximo que passa por esses dois pontos. Se esses pontos não forem antipodais, ou seja, não estão em extremos opostos de um diâmetro da esfera, então existe apenas um e, portanto, um único caminho de comprimento mínimo entre estes dois pontos; caso contrário, há um número infinito de círculos máximos que passam por eles.

Podemos, então, sintetizar que as necessidades de medir a altura de um astro acima do horizonte, ou de medir a distância entre dois astros, ou comparar suas aparentes trajetórias, conduzem ao desenvolvimento de tarefas de medição e de comparação que, para serem resolvidas, necessitam de formas de representar seus resultados e de cálculos. Tais necessidades conduzem ao desenvolvimento de ferramentas de navegação, além de elementos de geometria esférica e de trigonometria, tanto para as representações cartográficas, quanto para calibração de instrumentos astronômicos (no caso dos fenícios de astrolábios) como técnicas para resolver as tarefas apresentadas. Podemos identificar então diferentes tipos de tarefa que envolvem astronomia e navegação para as quais os antigos desenvolveram técnicas de solução que eram justificadas por conhecimentos específicos dessas áreas e por uma trigonometria rudimentar. Embora, em muitos casos, os cálculos sejam aceitáveis, a razão de ser desses conhecimentos e técnicas era a necessidade de resolver problemas práticos relacionados à astronomia e à navegação. Faltava, naquela época, uma teoria que sistematizasse a geometria esférica, o que impediu que os conhecimentos e técnicas desenvolvidos pelos antigos fossem plenamente compreendidos e aproveitados.

Já a geometria do quintal de casa, aquela que, segundo a lenda, Arquimedes usava para realizar seus cálculos quando foi assassinado por um soldado romano, era utilizada para resolver problemas cotidianos desde a antiguidade. Para Carrera (2009, p.71) essa geometria é a "de um pátio fechado por paredes no qual apenas se pode desenhar o que a areia que cobre o solo permitir." Essa afirmação nos conduz a imaginar que se tratava de geometria plana, mas sua razão de ser eram problemas do cotidiano, como medição de terras para cálculo de impostos para os egípcios. Embora todas as civilizações que temos conhecimento de uma forma, ou outra, tenham desenvolvido conhecimentos geométricos foi Euclides, século III a.C., que ficou conhecido como o pai da geometria com a publicação de Os Elementos, uma obra que sistematizou a geometria desenvolvida até então. Podemos entender essa obra, segundo a TAD, como o *logos* que veio para explicar racionalmente a *práxis* desenvolvida para a resolução de diferentes tipos de tarefa.

Os Elementos (ΣΤΟΙΧΕΙΑ), que consistem em 13 livros, por mais de 22 séculos contribuíram cientifica e culturalmente para a humanidade o tornando o mais antigo trabalho científico ainda em uso. O que tornou esse livro tão famoso é sua sequência simples e lógica de teoremas e problemas que influenciou o pensamento científico e basicamente dos seus seis primeiros livros foi retirada grande parte da geometria encontrada atualmente nos livros de matemática.

O primeiro livro de Os Elementos começa com uma série de definições para ponto, linha, plano, ângulo, círculo e assim por diante. Por exemplo, ponto é um lugar único no espaço que não tem partes nem grandeza alguma; linha é um comprimento sem largura; as extremidades de uma linha são pontos; uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos dela mesma; uma superfície é o que tem comprimento e largura; as extremidades de uma superfície são linhas; uma superfície plana é uma superfície que jaz igualmente com suas linhas retas; um ângulo em um plano é a inclinação mútua de duas linhas em um plano que se cruzam e não se encontram na mesma reta; um círculo é uma figura plana bordada por uma única linha (chamada periferia) de modo que todas as linhas retas desenhadas a partir de um ponto, localizado dentro da própria figura, até aquela linha (à periferia do círculo) são iguais; este ponto é chamado o centro do círculo; o diâmetro de um círculo é qualquer linha reta que passa pelo centro do círculo e é delimitada de cada lado pela periferia do círculo; ela reparte o círculo em dois semicírculos.

Notamos que estas não são definições estritas, mas apenas explicações de elementos geométricos com a intenção de criar uma representação intuitiva para cada um deles na consciência humana. Euclides baseou Os Elementos em axiomas e postulados, dos quais os postulados são de teor explicitamente geométricos. Em suas várias transcrições o número de postulados e axiomas não é o mesmo, mas é comumente aceito que a Geometria baseada em Euclides tem nove axiomas e cinco postulados. De acordo com Bicudo (2009, p.98) os postulados na forma em que Euclides os deu são:

> I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

> II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO, 2009, p. 98).

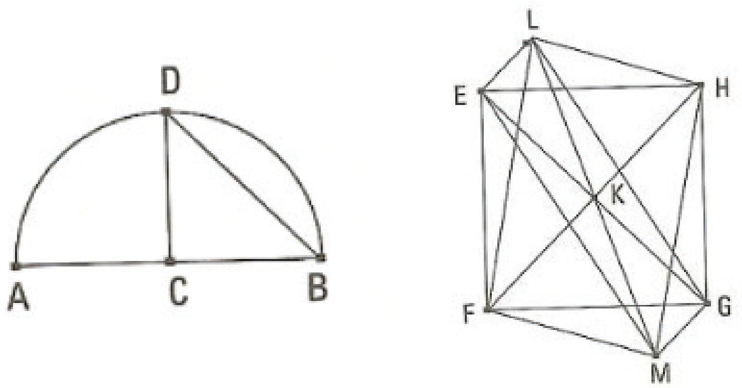
Por sua natureza, os postulados são reivindicações estritamente geométricas e explicitados em forma de exigências ou suposições que enfatizam seu caráter construtivo, principalmente os três primeiros, que foram base para a teoria das estruturas geométricas durante séculos. Os dois últimos postulados, no entanto, não podem ser considerados de caráter construtivo. Na geometria moderna o quarto postulado é uma afirmação a ser comprovada e a complexidade do quinto postulado, que é equivalente ao axioma das paralelas, estabelecida no século XVIII pelo matemático escocês John Playfair em que afirma, que por um ponto exterior a uma reta, passa apenas uma outra reta paralela à dada, despertou a atenção de outros matemáticos e os forçou a tentar derivá-lo de outros axiomas da geometria. Este enunciado nos permite ver que o quinto postulado necessita de duas assunções distintas: por um lado, que existe uma reta paralela a uma reta dada a partir de um ponto exterior a ela e, por outro, que essa reta é única. Tal discussão terá um papel fundamental na evolução posterior da geometria.

De acordo com Carrera (2009) é curioso que Euclides, no prefácio do postulado V, tenha imposto que "em certas condições" duas retas se intersectam – existe um ponto que pertence simultaneamente a ambas, ao se referir ao caso das circunferências e ao postulado I que trata da distância mais curta entre dois pontos na superfície de uma esfera, no entanto, ao "[...] abordar o caso das circunferências considerou-o tão evidente e irrefutável que nem sequer o impôs (p.68)". Destarte, Bicudo (2009, p. 62) refuta que em edição da *Euclidis Opera Omnia*, publicada por Heinrich Menge no **s**éculo XIX, no volume VIII se encontra a obra Os Phenomena (aparências do céu) com 18 proposições feitas por Euclides acerca de geometria esférica. Basicamente, Os *Phenomena* tratam de astronomia e suas proposições estão em forma de demonstrações geométricas estabelecidas por observação de "fenômenos celestes": "círculo que limita", "horizonte" e a expressão "círculo meridiano", que ocorre aí pela primeira vez. Segundo o autor, Euclides se baseou na obra "Sobre esferas em movimento" de um matemático contemporâneo, Autolycos de Pitane, além em Os *Phenomena*, onde essas proposições foram publicadas por completo, algumas foram citadas ao longo de Os Elementos, como por exemplo, a proposição I do livro V do Euclides, a proposição II no quarto e sexto e a proposição X no segundo.

Ademais, Bicudo (2009, p. 62) afirma que em Os Elementos Euclides aproveita outro trabalho de geometria esférica, *Sphaerica*, de autoria desconhecida para declarar que "[...] se sobre uma esfera dois círculos se bissectem, são ambos grandes círculos, e, na demonstração, supõe frequentemente que o leitor conhecia outros teoremas do tipo."

Convém acrescentar que no livro XIII, Euclides estuda e classifica os cinco poliedros regulares, que hoje são conhecidos como sólidos platônicos, tetraedro, hexaedro (ou cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro. Além disso, dedica um grande esforço para demonstrar as propriedades desses sólidos, incluindo seus ângulos, vértices, arestas e relações entre eles. Mostra ainda como esses sólidos podem ser inscritos em esferas, como mostra na Figura 1, em que está representado um octaedro regular inscrito em uma esfera. De acordo com Santos (2016, p. 111), Euclides apresenta o octaedro regular inscrito na esfera na proposição 14 do livro XIII: como "construir um octaedro e contê-lo por uma esfera, como nas coisas anteriores, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, o dobro do lado do octaedro". Acrescenta que o triângulo ABD (Figura 1) serve para mostrar as relações entre o diâmetro da esfera, , e a aresta do octaedro inscrito nessa esfera representada por seu raio e na figura seguinte apresenta o octaedro construído por duas pirâmides de base quadrada, ELGM. Depois de provar que reescreve a proposição 14 para uma linguagem atual: "construir um octaedro regular inscrito em uma esfera e provar que o quadrado da medida do diâmetro da esfera é igual ao dobro do quadrado da medida da aresta do octaedro regular, isto é ."

Figura 1 – Representação de um octaedro regular inscrito em uma esfera por Euclides.



Fonte: Bicudo (2009, p.580)

Os estudos de Euclides para sólidos desempenharam um papel importante no desenvolvimento da geometria e tiveram um impacto duradouro na matemática e na ciência. Os sólidos platônicos continuam sendo objetos de estudo e interesse na matemática e na física até os dias de hoje.

Entretanto, é notável que as representações apresentadas por Euclides sejam planas e a esfera não seja efetivamente representada, além disso que tenha optado por adotar, como geometria "verdadeira", uma forma de geometria ideal, caracterizada por construções que adquiriam validade exclusivamente como representações puras que transcendem a experiência empírica. A única justificativa plausível para tal escolha reside, possivelmente, na presença de uma inclinação platônica inerente à concepção de geometria ideal, que se revela não vinculada a qualquer outra realidade além daquela intrinsecamente imanente na própria noção fundamental de geometria. Proposições específicas da geometria esférica só são utilizadas por Euclides quando ele trata de astronomia.

Os gregos antigos, particularmente na era helenística, desenvolveram um interesse crescente pela astronomia e pela esfera celeste. Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948) destacam que a geometria esférica como uma disciplina matemática mais formal e abstrata foi desenvolvida posteriormente por matemáticos gregos e romanos, como Menelau de Alexandria e Cláudio Ptolomeu.

Menelau de Alexandria, que viveu por volta do século I a.C., escreveu uma obra chamada "*Sphaerica*" (também conhecida como "Sobre as Seções da Esfera"), em que desenvolveu uma teoria sistemática para geometria esférica e, por isso, lhe é frequentemente creditado como o pioneiro da geometria esférica. De acordo com Hermiz (2015) sabemos que Menelau escreveu dois tratados intitulados *Elementos de Geometria* e *Sobre o Triângulo* e, pelo menos, parte de um catálogo de estrelas. Nessas obras explorou propriedades de seções cônicas (círculos máximos) em uma esfera e estabeleceu princípios fundamentais para a resolução de problemas em geometria esférica e, para além tentou provar diretamente quase todas as proposições que apresenta. Seus escritos influenciaram matemáticos posteriores, incluindo Cláudio Ptolomeu.

Para Rudaux, Vaucoleurs e Tardi (1948), Cláudio Ptolomeu, um matemático e astrônomo greco-egípcio que viveu no século II d.C., é amplamente conhecido por seu trabalho em astronomia e em geografia que se tornaram fundamentais para o desenvolvimento da astronomia, da cartografia e da navegação. Sua obra "*Almagesto*", incluía uma seção dedicada à geometria esférica, em que desenvolveu métodos para descrever o movimento dos planetas e estrelas em uma esfera celeste imaginária por coordenadas esféricas.

A geometria esférica, desenvolvida por Menelau e aprimorada por Ptolomeu permitiu a descrição precisa das posições de corpos celestes na esfera celeste, a determinação das coordenadas celestes, como ascensão reta e declinação que eram cruciais para a criação de mapas celestes e para a navegação marítima que usavam estrelas como pontos de referência.

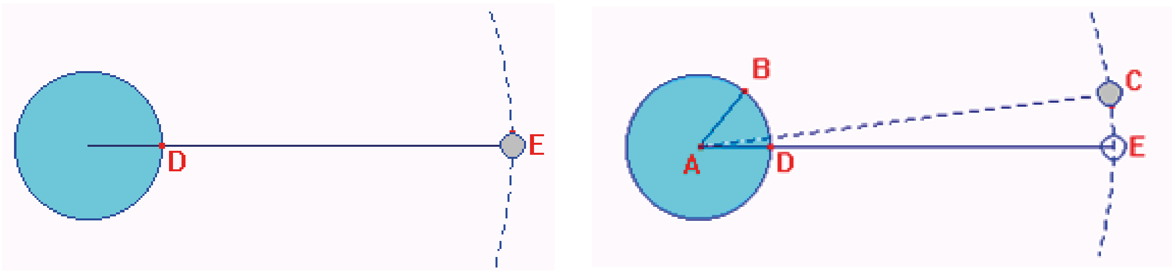
Observa-se que o desenvolvimento da geometria esférica foi impulsionado pela aplicação de técnicas derivadas da prática de navegação e de cálculos astronômicos na esfera celeste. No entanto, havia uma lacuna na existência de uma teoria sistematizada que pudesse fundamentar os conhecimentos práticos da trigonometria esférica. Essa carência persistiu até que Menelau de Alexandria empreendeu a sistematização do estudo de objetos geométricos na superfície de uma esfera e, consequentemente, da trigonometria esférica. Embora o contexto astronômico tenha servido como pano de fundo para suas demonstrações, é importante notar que ele as apresentou como estritamente geométricas. Contudo, em alguns casos, tais demonstrações parecem ter aplicabilidade limitada ou interesse restrito fora de seus domínios de aplicação astronômica.

De acordo com Hermiz (2015), neste ponto, devemos ser muito claros sobre o tipo de "trigonometria" que existia na matemática grega antiga. As "funções" trigonométricas, tal como as concebemos atualmente, não existiam embora, já na época do Hiparco, havia tabelas de aproximações para comprimentos de cordas correspondentes a determinados comprimentos de arco e a problemas astronômicos. Para eles, dado um círculo celeste de raio 1, um arco dessa circunferência de comprimento θ, ou seja, uma corda, $Crd(\theta)$ seria o comprimento do segmento de reta entre os pontos extremos desse arco que pode ser considerada como uma função trigonométrica primitiva. Quando a circunferência dada tem raio R, um arco de comprimento θ subtende um ângulo de medida θ/R que, quando $R = 1$

podemos ver que: $sen\,\theta = 1/2\ Crd(\theta)$. Segundo Hermiz (2015), a forma mais antiga da função seno foi inventada por matemáticos indianos para substituir a função de corda e, assim, eliminar os passos desnecessários de duplicar arcos e reduzir pela metade suas cordas que, frequentemente, apareciam nas utilizações gregas da função corda.

Para ilustrar podemos considerar como um tipo de Tarefa: calcular a distância da Terra a planetas do sistema solar. Uma tarefa desse tipo seria calcular a distância da Terra à Lua, para a qual Ptolomeu desenvolveu uma técnica que, de acordo com Bongiovanni (2005, p.2), consiste em "imaginar um observador na posição D da superfície da Terra que observa a Lua na posição E (Figura 2a). Após um tempo t, o observador estará na posição B e a Lua na posição C (Figura 2b)."

Figura 2 – Representação da Terra e da Lua para cálculo da distância entre elas

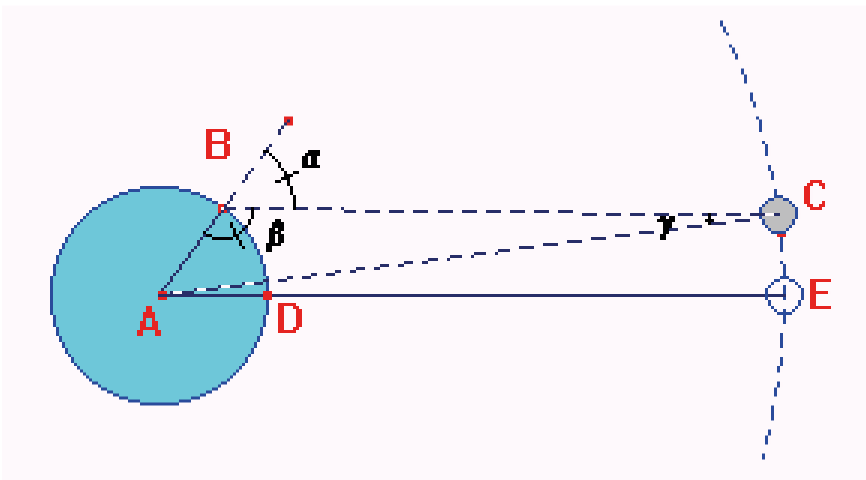


a b

Fonte: Bongiovanni (2005, p. 2)

Supondo um tempo de 4 horas, temos que o ângulo BAD mede 60º. Sabendo que a Lua dá um giro de 360º ao redor da terra em 27,3 dias, após 4 horas o ângulo CAE será de 2º (Figura 3) e, portanto, o ângulo CAB mede 58º.

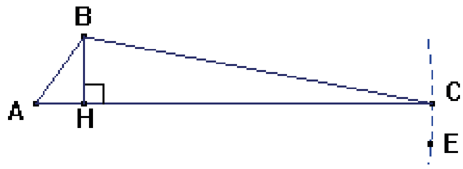
Figura 3 – Representação dos ângulos para cálculo da distância da Terra à Lua



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 2)

Observando a Figura 3 podemos determinar que o ângulo alfa mede 58,8º, para t = 4 e, como consequência, o ângulo beta mede 121,2º e o ângulo BCA mede 0,8º. Para o cálculo considera o triângulo BAC (Figura 4) em que BC representa a distância de um observador na Terra à Lua, temos que m(BAC)=60°-2°=58°. Para obter a medida de BH calcula-se o seno de 58°, ou seja, sen 58° = BH/6300 em que 6300 representa o raio da Terra na época (AB) e o seno de 58° é obtido de uma tabela trigonométrica desenvolvida pelo próprio Ptolomeu.

Figura 4 – Triângulo ABC: o centro e um ponto da superfície da Terra e a Lua



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 2)

Considerando o triângulo retângulo AHB o sen0,8°= BH/BC do qual se obtém a medida BC procurada. Basicamente o discurso tecnológico-teórico se baseia nos conhecimentos de triângulo e de trigonometria da época. As tarefas desse tipo são resolvidas por essa técnica até hoje, com a diferença de que temos mais precisão nos cálculos, pois podemos utilizar mais casas decimais do que as quatro que Ptolomeu usava. Essa técnica pode ser usada também para o tipo de tarefa: calcular a distância de um observador na Terra até estrelas mais próximas.

Diante exposto, evidenciamos que, por um lado, podemos identificar inúmeras praxeologias matemáticas, determinadas por necessidades práticas, que têm suas técnicas desenvolvidas e justificadas por uma geometria e uma trigonometria rudimentar. Por outro lado, a geometria esférica da época também era uma ferramenta essencial para a astronomia e para a navegação que permitiu aos astrônomos estudarem os movimentos dos astros e aos navegadores navegarem longas distâncias com precisão. Desta maneira, a razão de ser da geometria esférica, está na Astronomia – para calcular a posição dos planetas e das estrelas, determinar as dimensões e a forma da Terra e estudar os movimentos dos astros, bem como na navegação, para calcular a posição de um navio no oceano, determinar a direção a ser seguida e evitar obstáculos.

Por outro lado, a discussão da possibilidade de demonstração do quinto postulado, ocorrida entre alguns matemáticos durante séculos, provocou o surgimento de outras geometrias e a sistematização da geometria esférica sob o ponto de vista da existência de paralelas.

AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

De acordo com Carrera (2009) os especialistas da obra euclidiana concordam com o fato de que a estrutura de Os Elementos é de autoria do próprio Euclides e, em particular o V postulado, conhecido como postulado das paralelas que assegura que "sob certas condições duas retas "intersectam-se necessariamente". Vemos em Bicudo (2009, p.120) que Euclides só usa esse postulado a partir da proposição 29 do livro I. Para Carrera (2009) a geometria que não depende do quinto postulado é chamada de geometria neutra e, consequentemente, essa geometria se baseia em pouco menos de 30 proposições em Os Elementos.

A proposição 31 do livro I afirma que: "pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada." (BICUDO, 2009, p.121). Na demonstração, Euclides se apoia na proposição 17 do livro I: "os dois ângulos de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos." (BICUDO, 2009, p.111) que garante a existência da paralela, mas não de sua unicidade, que não pode ser deduzida de nenhum dos outros postulados. Esta observação introduz uma verdadeira transformação, como será elucidado posteriormente que, em grande parte, se atribui ao questionamento da autoridade inquestionável de Euclides.

Convencido da impossibilidade de estabelecer o quinto postulado de Euclides a partir dos outros quatro postulados, o matemático Russo Nikolai Lobachevsky formulou uma nova geometria que desafiava os princípios estabelecidos por Euclides. Nessa nova abordagem, o quinto postulado de Euclides foi substituído por uma hipótese alternativa, que, segundo Carrera (2009, p.73), Lobachevsky publicou, em um artigo de 1829 intitulado "Os princípios da geometria", a primeira geometria construída baseada em uma hipótese que contradizia o postulado euclidiano das paralelas: por um ponto exterior C a uma reta AB pode passar mais do que uma reta paralela dentro do plano ABC e que não intersecta a reta AB. Baseado nesse postulado ele deduziu uma geometria harmônica e consistente que marcou, na história da matemática, a primeira vez em que foi empregada a expressão "Geometria não-euclidiana".

A aceitação e compreensão dessa geometria inovadora foram, inicialmente problemáticas, tanto que Lobachevsky a denominou, em um primeiro momento, como "geometria imaginária". Conforme Carrera (2009), a descoberta da Geometria Não-Euclidiana teve um impacto profundo, de certa forma devastador que foi descrito pelo matemático escocês E. T. Bell da seguinte forma: "[...] Não é exagero chamar a Lobachevski o Copérnico da geometria, mas a geometria é apenas uma parte do campo mais amplo que ele renovou. Por isso, seria mais justo denominá-lo por Copérnico de todo o pensamento (BELL, 1937 apud CARRERA, 2009, p.74)."

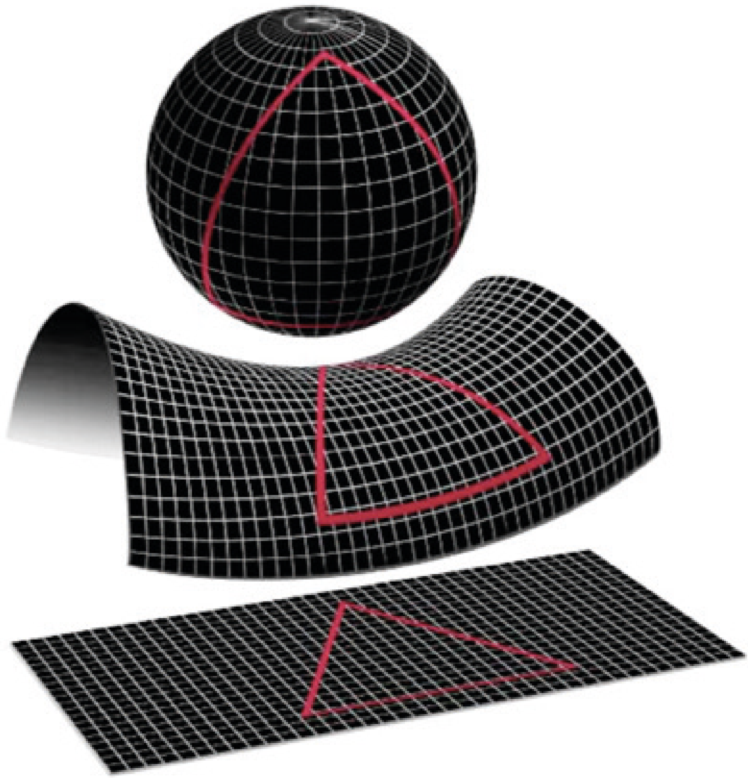
Em paralelo a Lobachevsky, o matemático húngaro Janos Bolyai chegou às mesmas conclusões, mas suas descobertas só foram publicadas em 1832, após uma correspondência com Carl Friedrich Gauss. Em uma das cartas em que discutiam seus trabalhos a respeito da nova geometria, Gauss respondeu que não poderia elogiar o trabalho de Bolyai porque "implicaria em elogiar a si mesmo", dada a concordância de pontos de vista entre eles (CARRERA, 2009, p. 74). Essa carta sugere que Gauss também chegou à conclusão de que o postulado das paralelas, na geometria euclidiana não se seguia, necessariamente, dos quatro postulados anteriores e que ele próprio havia desenvolvido outras geometrias consistentes. Atualmente a geometria desenvolvida por Lobachvesky e Bolyai é conhecida como **geometria hiperbólica** e sua característica é que dada uma reta e um ponto não pertencente a ela podem passar mais que uma reta paralela à reta dada, conhecido como postulado de Lobachevsky.

Diante do exposto, torna-se claro que a razão de ser da geometria hiperbólica reside em fornecer um exemplo de uma estrutura geométrica consistente que não depende do quinto postulado de Euclides, o que mostrou que esse postulado não é intrinsecamente necessário para se construir uma geometria válida, o que foi um marco na história da matemática. A geometria hiperbólica ajudou a desafiar a ideia de que a geometria euclidiana era a única forma de geometria possível e expandiu nosso entendimento das possibilidades geométricas.

Quanto à geometria esférica, outra importante geometria não-euclidiana, foi necessário aguardar pelo trabalho de outro conhecido de Gauss, o matemático alemão Bernhard Riemann que, em sua tese intitulada "Sobre os Fundamentos da Geometria" de 1854, generalizou a geometria esférica e outros casos, em uma abordagem que considerava apenas a curvatura métrica dos diferentes espaços e as propriedades que dela decorrem. Para Riemann, como mostra a Figura 1, no espaço euclidiano a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°; no espaço esférico essa soma é superior a 180° e esse espaço possui uma curvatura positiva; enquanto no hiperbólico, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180° e possui uma curvatura negativa.

Riemann demonstrou que o espaço euclidiano, juntamente com a geometria euclidiana que o caracteriza, era apenas um caso específico de um espaço com curvatura constante e valor zero. A geometria de Riemann ou Riemanniana é também conhecida como **geometria elíptica** e sua característica é que dada por uma reta e um ponto não pertencente à ela, por esse ponto não passa qualquer paralela à reta dada.

Figura 5 – Representação de um triângulo nas geometrias esférica, hiperbólica e euclidiana.



Fonte: https://wmap.gsfc.nasa.gov/universe/uni_shape.html (domínio público)

A geometria esférica, que pode ser comparada à representação da superfície esférica de um globo terrestre, tem seus pontos seguindo a definição euclidiana, mas as retas não, pois nessa geometria elas se caracterizam por círculos máximos. Se definirmos uma reta, no sentido do primeiro postulado de Euclides, como a menor linha que liga dois pontos, perceberemos uma particularidade, as retas se cruzam necessariamente, Como ilustração podemos vislumbrar o seguinte cenário: duas aeronaves voam em linha reta em uma distância constante da superfície esférica da Terra até retornarem ao ponto de partida. Ambas seguirão trajetórias que formarão necessariamente círculos máximos, ou seja, aquelas seções da esfera que a dividem em dois hemisférios exatos e, por consequência, os círculos máximos de uma esfera sempre se cruzam. Portanto, em geometria esférica, dada uma reta não é possível traçar qualquer paralela a ela por um ponto dado.

Podemos então dizer que essas geometrias se desenvolveram no contexto da matemática e sua razão de ser está no questionamento do quinto postulado de Euclides, ou seja, temos um saber, logos, que não se constituiu para resolver qualquer tarefa prática. Temos logos, que até aquele momento, não estava relacionado a qualquer *práxis*.

Concluído que o postulado das paralelas não podia ser deduzido dos quatro anteriores, em 1899, David Hilbert escreveu "*Fundamentos de la Geometria*" em que retomou Os Elementos de Euclides para melhor fundamentá-lo sem recorrer à intuição nem a desenhos (HILBERT, 1953). Os objetos básicos, pontos, retas e superfícies, ou mesmo cadeiras, mesas e canecas de cerveja, nas palavras de Hilbert, eram definidos pelos axiomas e por relações entre eles. Mas qual o alcance dessa geometria?

AS LIMITAÇÕES DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Na fundamentação da Teoria Antropológica do Didático, Chevallard sugere que o saber matemático é construído social e culturalmente e influenciado por fatores contextuais, como a linguagem, as instituições educacionais, as práticas de ensino e as formas de comunicação matemática. A Teoria Antropológica do Didático oferece um arcabouço analítico que lança luz sobre as limitações inerentes à geometria euclidiana, por meio de uma abordagem que enfatiza a análise das práticas matemáticas. O ambiente educacional, em geral, traz consigo concepções moldadas pela geometria euclidiana tradicional que entram em conflito com conceitos que não se alinham harmoniosamente com essa estrutura, como é o caso dos relacionados à geometria não euclidiana que provocam obstáculos conceituais específicos.

No caso da geometria euclidiana ela vem para proporcionar um discurso tecnológico teórico, para resoluções, principalmente de tarefas cotidianas que surgiram desde a antiguidade, ou seja, ela se torna o *logos* que justifica diferentes *práxis*. No entanto, sua limitação em contextos não euclidianos é atribuída ao fato de que ela foi desenvolvida em um contexto histórico e cultural específico, em que a geometria era vista como uma disciplina independente da física. Seus axiomas e postulados foram formulados em um ambiente em que a geometria era entendida como uma ciência dedutiva e rigorosa, baseada em um conjunto de verdades absolutas e universais. Porém, com o desenvolvimento da física, a geometria euclidiana mostrou-se inadequada para descrever fenômenos físicos complexos, como a curvatura do espaço-tempo em relatividade e a dualidade onda-partícula em mecânica quântica, que implica em uma geometria do Universo.

A maneira como as geometrias não-euclidianas respondem à necessidade de descrever com precisão o espaço curvo do universo implica em uma análise histórica do desenvolvimento da geometria esférica em relação à cosmologia e à física moderna, além de envolver a compreensão de aplicações da geometria esférica na modelagem espacial e sua influência nas práticas matemáticas. Nesse sentido, a geometria no universo está vinculada aos objetos geométricos compreendidos em uma superfície esférica.

No entanto, de acordo com Luminet, Starkman e Weeks (2016), na teoria da relatividade geral Einstein estabeleceu que quando há concentração de grande massas ou energias, o espaço e, por consequência, as retas são deformadas. Tal afirmação, nos conduz à pergunta: qual a geometria do Universo? Se as grandes massas ou energias alteram localmente sua geometria, o universo globalmente é euclidiano, hiperbólico ou elíptico? De acordo com o autor, a resposta dessa questão deve ser procurada fora da matemática, porque as três geometrias são válidas; as três estão estabelecidas formalmente e se uma for consistente as outras também são. Há mais de um século Carl Friedrich Gauss apresentou a mesma pergunta que fizemos aqui: como é o Universo? Que geometria tem? E concluiu que "se pudesse medir os 3 ângulos internos de um triângulo formado por 3 estrelas longínquas, obteria a geometria do universo" (GREEN, 2005, p.84). Sabemos que se a soma dos 3 ângulos for maior que 180°, igual a 180° ou menor que 180° a geometria do universo será, respectivamente, elíptica (esférica), euclidiana ou hiperbólica.

De acordo com Luminet, Starkman e Weeks (2016) em 1981, o físico norte-americano Alan Guth introduziu o conceito de Densidade do Universo: a massa total da matéria por unidade de volume, em que mostra que existe um valor crítico que determina a natureza geométrica do Universo e que implica em sua evolução futura. Se a densidade fosse maior que a geometria seria esférica e o futuro do universo seria um colapso; se fosse igual a a geometria seria euclidiana e a expansão suave; e se fosse menor que a geometria do universo seria a hiperbólica e a expansão forte. A massa calculada até hoje é menor que 10% de e, portanto, o universo parece hiperbólico e expande-se fortemente. Tais questões conduzem a discussões a respeito da finitude ou não do universo que não discutiremos neste artigo.

Se o Universo tivesse uma face externa visível, a cosmologia seria uma tarefa mais simples. Contudo, dada a ausência dessa perspectiva, os astrônomos enfrentam o desafio de inferir a forma global do universo com base em suas características geométricas. No nosso cotidiano, percebemos o espaço como sendo euclidiano, ou seja, "plano" em escalas pequenas. Nesse contexto, as linhas paralelas nunca se encontram, os ângulos internos de um triângulo somam 180º, o comprimento da circunferência é igual a 2π e assim por diante. No entanto, seria um equívoco concluir que o Universo é euclidiano em escalas maiores, da mesma forma que seria errado afirmar que a Terra é plana apenas porque parte dela parece plana. A observação do universo revelou que a geometria euclidiana não é a única possível.

A razão de ser da geometria hiperbólica reside na necessidade premente de descrever e modelar espaços curvos com uma constante de curvatura negativa. Segundo a teoria da relatividade geral, a geometria do espaço-tempo é intrinsecamente curva, e essa curvatura é uma consequência direta da presença de massa e energia. Portanto, a geometria hiperbólica desempenha um papel crucial ao proporcionar uma estrutura matemática que permite a representação de espaços curvos e desafiar a suposição de que a geometria euclidiana seja a única forma de geometria válida e expandir nossa compreensão das geometrias possíveis no universo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, as geometrias não euclidianas poderiam desempenhar um papel fundamental no ensino de matemática ao considerar as limitações da geometria euclidiana e sua relevância histórica e cultural. Esta contextualização histórica seria essencial para situar as geometrias não euclidianas no contexto da evolução do pensamento humano ao longo das épocas, como foi o caso da discussão do quinto postulado de Euclides, além das questões práticas do dia a dia das pessoas comuns e de estudo do Universo que vem desde a antiguidade.

Vimos que a geometria euclidiana vem para proporcionar um discurso tecnológico-teórico para práticas geométricas que resolviam problemas corriqueiros, como de medições de terras, de armazenamento etc., ou seja apresenta o logos que justifica a práxis, ou seja a geometria euclidiana possui diferentes razões de ser.

Por outro lado, a evolução do conhecimento matemático proporcionado pela discussão da validade do quinto postulado, em um contexto puramente matemático, se caracteriza como a razão de ser das geometrias não euclidianas, principalmente, a hiperbólica, pois a elíptica contém a geometria esférica que tem sua razão de ser na astronomia e na navegação. No caso da geometria hiperbólica temos a construção de um logos, um saber matemático, que independe de qualquer práxis, isto é, na época de seu desenvolvimento não era visto qualquer utilidade, pois não passou da discussão da validade do quinto postulado de Euclides. Foi somente no século XX que a geometria hiperbólica foi utilizada para justificar a expansão do universo na teoria da relatividade de Einstein.

Buscamos mostrar no texto uma conexão essencial entre as três geometrias em discussões no contexto do mundo real, para sua compreensão, tanto em questões triviais do dia a dia, quanto na compreensão do planeta Terra e do Universo. Conhecer a razão de ser de saberes matemáticos auxilia na busca de contextos adequados para que os estudantes possam dar sentido a esses estudos e perceberem como conceitos matemáticos podem ser traduzidos em aplicações do mundo real. Essa abordagem fomenta o desenvolvimento do pensamento crítico, um aspecto fundamental da "razão de ser" de Chevallard, que valoriza o ensino de matemática como uma disciplina que promove a capacidade de questionar e explorar conceitos em profundidade.

Kovacevic (2020, p. 80) mostra que a Astronomia Posicional, como uma aplicação da Geometria esférica, poderia ser tratada no Ensino Médio com estudos do “movimento aparente dos astros, movimento de satélites naturais e artificiais, sistemas de coordenadas relativas ao centro de galáxias, centro do sistema solar, tempo e sistemas do tempo”, pois a gênese das duas disciplinas mostra que uma é a ferramenta da outra.

Por fim, a importância da compreensão de conceitos matemáticos, indo além da mera aplicação de fórmulas e técnicas, em consonância com a perspectiva de Chevallard, que advoga por uma educação matemática que promova a verdadeira compreensão da disciplina e seu significado dentro do contexto mais amplo da cultura e da ciência.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ARTAUD, Michele (1997). **Introduction a l’approche ecologique du didactique – L’ecologie des organisations mathematiques et didactiques**. Actes de la Ixieme Ecole d’ete de Didactique des Mathematiques. Caen: ARDM&IUFM, pp. 101-139.

BICUDO, I. **Euclides:** Os elementos. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BONGIOVANNI, V. **Notas de Aula**, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, 2005.

CARRERA, J. P. **Euclides** – A geometria. Lisboa, Editora RBA, 2009.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica**. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CHEVALLARD, Y. **Concepts Fondamentaux de la Didactique** : Perspectives Apportes par Une Apprroche Anthropologique transposition didactique. Recherches en Didatique des Mathématiques, Vol. 12, nº 1, pp.73-112. 1992.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'Étude** *:* Écologie et regulation. Grenoble : Actes de la 11. École d'Été de Didatique des Mathématiques, 2002a.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'Étude** : Structures et Fonctions. Grenoble : Actes de la 11. École d'Été de Didatique des Mathématiques, 2002b.

CHEVALLARD, Y. **A Teoria Antropológica do Didático face ao professor de Matemática**. In. A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos. Organização Saddo Ag Almouloud, Luiz Marcio Santos Farias, Afonso Henriques. 1.ed, Curitiba, PR: CRV, 2018, pp.31-50.

GASCÓN, J. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico**. El caso del algebra elemental. Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, RELIME*, v.*14, n. 2, p. 203-231, 2011

GREEN, R. M. **Spherical Astronomy**. Glasgow: University of Glasgow Publications. Edition 2005.

HERMIZ, R. **English Translation of the Sphaerica of Menelaus.** Thesis. San Marcos: California State University, USA, 2015. Disponível em: https://scholarworks.calstate.edu/downloads/1n79h480n

HILBERT, D. **Fundamentos de la Geometria**. Madrid: Publicaciones del Instituto "Jorge Juan" de Matematicas, 1953.

KOVACEVIC, M. S. B. **Geometria Esférica – o elo entre Matemática e Astronomia.** 2020; 98f. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC-SP, São Paulo: 2020. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/23826

LUMINET, J. P., STARKMAN, G. D., WEEKS, J. R. **De l'infini – horizons cosmiques, multivers et vide quantique**. Paris: Editora Dunod, 2016.

RUDAUX, L; VAUCOLEURS, G de; TARDI, P. **Astronomie – Les ásteres, l'Universe**. Paris : Editora Librarie Larousse, 1948.

SANTOS, A. A. **Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática.** 2016. Tese (Doutorado) Pontifícia

Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC-SP, São Paulo: 2016. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19665.

Histórico

Recebido: 15 de outubro de 2023.
Aceito: 06 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

KOVACEVIC, Milenko Schiavetti Basilio; SAILVA, Maria José Ferreira da. As limitações da geometria euclidiana e a razão de ser de outras geometrias. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024006, 2024.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024006.id593

Como citar – APA

KOVACEVIC, M .S. B.; SAILVA, M. J. F. (2024). As limitações da geometria euclidiana e a razão de ser de outras geometrias. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (48), e2024006.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024006.id593

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques