Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024007
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024007.id594

Noções geométricas nas aplicações de integrais definidas

Geometric notions in applications of definite integrals

Nociones geométricas en aplicaciones de integrales definidas

Afonso Henriques[1]

Saddo Ag Almouloud[2]

RESUMO

Partindo da importância do cálculo diferencial e integral em matemática do ensino superior e referindo-nos à geometria plana, analítica e espacial como GEOPAES, colocamo-nos os seguintes questionamentos: Qual relação as *aplicações de integrais definidas* de funções reais de uma variável real tem com a GEOPAES? Como é que os estudantes do ensino superior lidam com esta relação na resolução de tarefas propostas? Buscar respostas para estas questões é o objetivo principal almejado neste capítulo. Para isso, recorremos à teoria dos registros de representação semiótica, assim como nas organizações didáticas locais propostas em livros de cálculo e de geometrias, culminando na análise de práticas de estudantes. Os resultados alcançados mostram que a relação está atrelada aos conceitos de medidas de áreas de regiões planas e de volume de sólidos, assim como de comprimentos de curvas, mobilizando-se objetos do saber conhecidos pelos estudantes nas instituições anteriores ao ensino superior. Contudo, estes revelam dificuldades com essa relação, que se manifestam na ausência da mobilização dos referidos saberes nos diferentes registros de representação semiótica evocados explicitamente no ensino e considerados nos geradores de tarefas propostas durante as avalições semestrais.
Palavras-chave: Lorem ipsum dolor sit amet.

ABSTRACT

Based on the importance of differential and integral calculus in higher education mathematics and referring to flat, analytical, and spatial geometry as GEOPAES, we asked ourselves the following questions: What relationship do *applications of definite integrals* of real functions of a real variable have with GEOPAES? How do higher education students deal with this relationship when solving proposed tasks? Seeking answers to these questions is the main objective pursued in this chapter. To do this, we resorted to the theory of semiotic representation records and local didactic organizations proposed in calculus and geometry books, culminating in the analysis of student practices. The results show that the relationship is linked to measuring the areas of flat regions and the volume of solids, as well as the lengths of curves, mobilizing objects of knowledge known to students in institutions prior to higher education. However, these reveal difficulties with this relationship, manifested in the absence of mobilization of the knowledge mentioned in the different registers of semiotic representation explicitly evoked in teaching and considered in the task generators proposed during the semester assessments.
Keywords: registers of representation, local objects of study, relationship between geometry and calculus, student practices.

RESUMEN

Desde la importancia del cálculo diferencial e integral en las matemáticas de educación superior y haciendo referencia a la geometría plana, analítica y espacial como GEOPAES, nos planteamos las siguientes preguntas: ¿Qué relación tienen las *aplicaciones de integrales definidas* de funciones reales de una variable real con GEOPAES? ¿Cómo afrontan los estudiantes de educación superior esta relación al resolver las tareas propuestas? Buscar respuestas a estas preguntas es el principal objetivo que se persigue en este capítulo. Para ello, recurrimos a la teoría de los registros de representación semiótica y organizaciones didácticas locales propuestas en libros de cálculo y geometría, culminando en el análisis de las prácticas estudiantiles. Los resultados muestran que la relación está vinculada a la medición de las áreas de regiones planas y el volumen de sólidos, así como las longitudes de las curvas, movilizando objetos de conocimiento conocidos por los estudiantes en instituciones anteriores a la educación superior. Sin embargo, revelan dificultades con esa relación, manifestadas en la ausencia de movilización de los conocimientos mencionados en los diferentes registros de representación semiótica explícitamente evocados en la enseñanza y considerados en las tareas generadoras propuestas durante las evaluaciones semestrales.
Palabras clave: registros de representación, objetos de estudio locales, relación entre geometría y cálculo, prácticas

1 Doutor em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier em Grenoble (França) e Professor Pleno na Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Endereço para correspondência: Rua Rosenaide Guimarães, 248. Zildolândia. Itabuna. Bahia. E-mail: henry@uesc.br.

2 Doutor em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I (França). Professor colaborador da Universidade da Bahia e da Universidade Federal do Pará. Endereço para correspondência: Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo – SP, cep. 02464-050. E-mail: saddoag@gmail.com

de los estudiantes.

INTRODUÇÃO

Criado em trabalhos independentes por Isac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), o cálculo diferencial e integral (CDI), também conhecido por cálculo infinitesimal, é um dos objetos de estudos fundamentais em matemática do ensino superior, desenvolvido à base da álgebra e da geometria. Esse objeto compõe uma matéria que auxilia o desenvolvimento de diversas competências, conceitos e definições matemáticos úteis na própria matemática, assim como em diversas áreas de conhecimentos. O CDI possibilita o estudo de taxas de variação de grandezas e das quantidades, tais como as medidas de áreas de regiões sob os gráficos de funções reais de uma variável real e de volumes de sólidos, entre outros conhecimentos das diversas áreas de ciências exatas, tecnológicas, da terra e engenharia. Vemos aí, portanto a importância desse objeto matemático na formação de recursos humanos, em especial os estudantes das instituições de ensino superior (IES).

A geometria analítica (GA), por sua vez, é uma das partes da matemática movida pelas razões possíveis existentes entre a geometria e a álgebra, e foi desenvolvida inicialmente pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650). Considerando um sistema de coordenadas, seja plano ou tridimensional, a geometria analítica permite a representação algébrica e numérica de propriedades geométricas, caracterizando-se, portanto, como um domínio múltiplo presente em outros domínios da matemática, como o cálculo diferencial e integral (CDI).

Referindo-se à aprendizagem nestas disciplinas, Henriques (2006) sublinha que o estudante de um curso de CDI e de GA deve mobilizar conhecimentos de outras áreas da matemática, tais como, conjuntos, funções, geometria, trigonometria, álgebra e aritmética, considerados como base do desenvolvimento e inter-relação desses domínios. A conversão e a coordenação de representação nessa inter-relação são condições necessárias no processo de conceitualização. O autor lembra ainda que na sua estrutura organizacional, o CDI passa, essencialmente, por três operações fundamentais, ou áreas de desenvolvimento, denominadas cálculo de limites, de derivadas e de integrais.

Este último, decomposto em dois cálculos, integrais indefinidas e integrais definidas, exerce um papel preponderante, assim como os outros cálculos. Nele, constata-se que os conceitos de integrais e de derivadas guardam uma relação importante no estudo de CDI. Tal relação, estabelecida de maneira independente por Newton e Leibniz no século XVII, é comumente conhecida como teorema fundamental do cálculo (TFC). Além do TFC, vários outros resultados exercem uma importância particular nas aplicações de fenômenos físicos. Ademais, sabe-se que, as geometrias plana, analítica e espacial, doravante denominadas GEOPAES, conservam certas estruturas organizacionais clássicas inegáveis, que concentram o desenvolvimento de conhecimentos no estudo de vários conceitos, incluindo pontos, retas, regiões planas, vetores, curvas, superfícies geométricas no espaço euclidiano, alimentando, por conseguinte, o estudo de vários outros domínios da própria matemática.

Inclinando a nossa atenção à importância atribuída ao CDI na formação de recursos humanos nas IES, e escolhendo, dentre os diversos conceitos propostos no seu ensino as "*Aplicações de integrais definidas*" de funções reais de uma variável real, nós colocamos os seguintes questionamentos: Qual é a relação que essas aplicações têm com a GEOPAES? Como é que os estudantes do ensino superior lidam com essa relação na resolução de tarefas propostas? Buscar respostas para esses questionamentos é o objetivo principal almejado neste artigo. Para isso, recorremos à teoria dos registros de representação semiótica, assim como às organizações[3] didáticas locais propostas em livros de CDI e de geometrias, culminando na análise de práticas de estudantes das IES. Com efeito, vimo-nos na posição de organizar este artigo em cinco partes. A primeira consiste nesta *Introdução*. A segunda parte, denominada *Quadro Teórico de Base* (QTB) da pesquisa, é concernente à apresentação da fundamentação teórica que adotamos para o desenvolvimento deste capítulo. A terceira parte, dita *Análise Praxeológica*, se destina à realização da análise das organizações didáticas locais propostas em livros de CDI e de geometrias para o ensino das *aplicações de integrais definidas* e de elementos geométricos, respectivamente. Na quarta parte, denominada *Práticas Efetivas de Estudantes*, analisamos os manuscritos de estudantes submetidos a uma avaliação de um Professor[4] em um curso de CDI, quando estes trabalham com as *aplicações de integrais definidas* de funções reais de uma variável real. Na quinta e última parte, apresentam-se as *Considerações Finais* como reflexões globais do produto deste artigo. Assim, obedecendo a nossa organização, partimos para a apresentação do nosso QTB como segue.

QUADRO TEÓRICO DE BASE

Vale primeiro destacarmos que as teorias didáticas ou referências teóricas em geral têm uma importância particular nas investigações educacionais, pois constituem ferramentas necessárias no desenvolvimento de pesquisas. Henriques (2019) sublinha que

> Na literatura, existem muitas referências teóricas, as quais são impossíveis de serem utilizadas por um pesquisador em um único trabalho, independentemente da pesquisa que pretende realizar. Contudo, é a partir desta existência que o pesquisador faz uma escolha das teorias capazes de fornecerem elementos de análise, dependendo, naturalmente, da problemática da sua pesquisa, constituindo assim um Quadro Teórico de base. (Op. Cit. p. 37)

Para o autor

> Um Quadro teórico é o referencial teórico de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que pretende desenvolver. (Ibid., p. 37)

Nesta perspectiva, visando o desenvolvimento de uma pesquisa em torno do ensino e aprendizagem de CDI, com um olhar na relação entre as *aplicações de integrais definidas* de funções reais de uma variável real e a GEOPAES, nos interessamos pelo estudo das abordagens teóricas que permitem analisar um dado objeto matemático, em uma dimensão

3 Henriques, Nagamine A., Nagamine C. (2012), sublinham que as organizações globais, regionais e locais de livros didáticos permitem revelar as propostas de ensino e aprendizagem de objetos de estudos em diversas instituições.

4 O termo Professor será e deveria sempre ser escrito com a letra P maiúscula, pois este é um profissional que merece e deve ser respeitado como os outros. O simples gesto de aplicar a letra maiúscula engrandece também a sua personalidade (Henriques, 2019, p. 13).

institucional e em vários registros de representação. Fazemos assim referência à teoria de registros de representação semiótica (TRSS) introduzida em estudos do funcionamento do pensamento (psicologia da aprendizagem) por Duval (1993) que resumimos a seguir, sucedida pela apresentação do modelo praxeológico de gestão de tarefas (HENRIQUES, 2019) utilizado pelo Professor da disciplina de CDI nas avaliações submetidas aos estudantes.

Teoria de registros de representação semiótica (TRSS)

Essa teoria foi introduzida em estudos de funcionamento do pensamento (psicologia da aprendizagem) por Duval (1993, 1995, ...), e vem sendo utilizada por diversos pesquisadores e educadores no mundo inteiro. Segundo o autor, na matemática, e acreditamos que em muitas outras áreas, os objetos do saber não são acessíveis, a menos que por meio de suas representações. Portanto, podemos declarar que não é suficiente que um sujeito tenha uma ideia/objeto do saber em sua mente. A socialização e, consequentemente, o acesso desta ideia/objeto por pares só é possível por meio da comunicação, da mobilização de ao menos uma representação semiótica, quer seja verbal, ostensiva, gestual, manipulação de signos etc. Fomentados pelos trabalhos de Duval (1993, 1995, ...). Henriques e Almouloud (2016) asseveram que uma

> Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. A sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e de outro lado, pela referência do objeto representado. (HENRIQUES, ALMOULOUD, 2016, p. 467)

Os enunciados em língua materna, as expressões algébricas, as equações, os gráficos de funções, as curvas de equações, as figuras geométricas, os conjuntos de números naturais, inteiros, reais, complexos, por exemplo, são representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes, com diferentes signos. Os ensinos de GOPAES e de CDI conduzidos como disciplinas independentemente nas instituições, especialmente nas IES, lidam frequentemente com essas representações. Mas, independentemente do curso associado, os (as) estudantes têm apresentado dificuldades na mobilização de um dado objeto em diferentes registros. O distanciamento estabelecido pelas grades curriculares nas IES pode ser estreitado pela mobilização de representações semióticas de objetos correspondentes. Todavia, "quando as noções não são evocadas, elas podem passar despercebidas no processo de aquisição de conhecimentos, deixando vazios didáticos[5] na conceptualização. Por mais simples que seja uma noção, deve ser evocada durante o seu tratamento para garantir a consolidação da aprendizagem" (HENRIQUES, 2019, p. 68). Para Duval (2012),

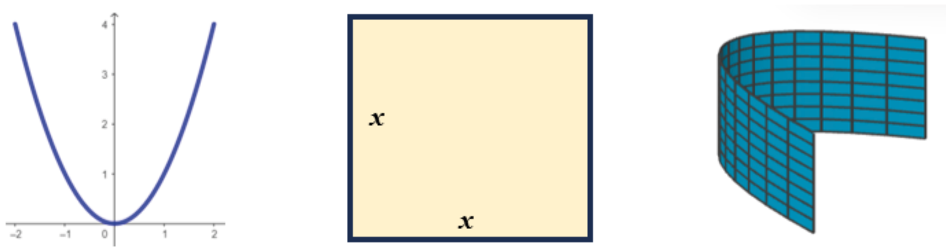
> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros de representação semióticos. Se é chamada "**semiose**" a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "**noesis**" a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose** DUVAL (2012, p. 270).

Compreende-se, portanto, que toda produção de uma representação semiótica de um objeto do saber deve ser conduzida com base na apreensão/mobilização dos conceitos

5 **Vazio didático** é a existência de saberes em torno de um objeto de conhecimentos que não são mobilizados pelo sujeito e comprometem o ensino correspondente, bem como a realização efetiva de situações-problemas ou tarefas concernentes (HENRIQUES, ALMOULOUD, 2016, p. 467).

correspondentes. Por exemplo, na dimensão da "**semiose**", a escrita algébrica expressa por $y = x^2$ ou $v = u^2$ ou $A = b^2$ ou ainda "$qualquer\ coisa$"=("$a\ outra\ coisa$")^2 não significa nada ao menos que seja mobilizada a apreensão conceitual "**noesis**" relacionada a estas representações. Todas estas representações podem permitir a apreensão de um mesmo conceito ou diferentes conceitos. Qualquer uma delas pode ser conceituada como equação de parábola (Figura 1(a)) ou a medida de área de uma região retangular de lados medindo x ou u ou b ou "$a\ outra\ coisa$" unidades de comprimento (Figura 1(b)) ou ainda de uma superfície cilíndrica com a variável muda implícita em cada representação (Figura 1(c)). Mobilizando objetos geométricos, essas conceituações podem ser representadas conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Visualização de objetos correspondentes no registro gráfico



(a) $y = x^2, x, z \in \mathbb{R}$ (c) $y = x^2, x \in \mathbb{R}$ (b) $y = x^2, x, z \in \mathbb{R}$

Fonte: Produzido pelos autores

Duval (2012) sublinha ainda que:

> é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. Independentemente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.

No ensino e aprendizagem de CDI, assim como de GEOPAES, é praticamente impossível ignorar os registros de representação semiótica no tratamento dos objetos visados, que exigem que tanto o Professor quanto o estudante expressem os conceitos em diferentes formas, mobilizando assim ao menos dois registros, mesmo que o Professor não mencione a TRRS de Duval. Nesta perspectiva, Henriques e Almouloud (2016) destacam quatro registros de representação predominantes em matemática, principalmente, no ensino superior, em especial em GEOPAES e nos cursos de CDI, a saber:

Quadro 1 – Registros de representação predominante em GEOPAES e CDI

1. **Língua materna**
2. **Registro algébrico**
3. **Registro gráfico**
4. **Registro numérico**

Fonte: Produzido pelos autores

Duval (2012) sublinha:

> Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose. A *formação* de uma re-

> presentação identificável. O ***tratamento*** de uma representação que é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. A ***conversão*** de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. DUVAL (2012, p. 271–272)

A língua materna satisfaz as três atividades, logo, de fato é um registro de representação. Quando, por exemplo, elaboramos um enunciado no ensino de GEOPAES ou de DCI, estamos *formando* uma representação de uma ideia identificável, isto é, que o estudante consegue compreender. Esta mesma ideia ou sentença pode ser reescrita de outra maneira, conservando, porém, o seu objetivo, realizando-se assim um *tratamento*. A passagem para uma representação correspondente em outro registro é uma transformação externa, entendida por Duval (1995) como *conversão*, cumprindo-se, dessa maneira, as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à "*semiose*". Naturalmente, processo equivalente ocorre nos três registros subsequentes, apresentados no Quadro 1.

Mas, o que é registro de representação?

Para responder a esta questão optamos por retomar a Definição 3 que apresentamos em Henriques e Almouloud (2016, p. 469), onde lemos que: "Um registro de representação é um sistema semiótico dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber." Portanto, o registro é o sistema no qual se realizam as representações de objetos do saber em uma dimensão da "*semiose*", externando, assim, os objetos não ostensivos (ideia, noção, conceito), isto é, as "*noesis*" pensadas pelo sujeito. Pois, como afirma Chevallard (1992), os objetos não ostensivos só são acessíveis a partir dos objetos ostensivos associados. A escolha de um registro de representação apropriado para a comunicação dos conceitos favorece o *tratamento*. No entanto, Duval (1995) afirma que dispor de vários registros de representação não é suficiente para garantir a compreensão. Daí a necessidade de outra condição, a *coordenação* de diferentes representações de um objeto formadas em registros distintos. Para Henriques e Almouloud (2016, p. 470) a *coordenação* é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos.

Duval (2012) sublinha que a *coordenação* aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em matemática e em francês.

Conjecturamos, portanto, que os conceitos teóricos apresentados até então não esgotam esta teoria, mas certamente são conceitos básicos que todo leitor que passa pelo trabalho baseado neste quadro teórico deve conhecer. Com efeito, o ensino de todo objeto do saber, em especial de CDI ou de GEOPAES, faz menção a esse conhecimento, seja de forma implícita ou explicitamente, com o objetivo de atingir uma aprendizagem significativa. As análises que realizamos sobre as práticas dos estudantes levam em consideração um modelo que espelha a prática do Professor de CDI na gestão de tarefas propostas nos processos de ensino e de aprendizagem. É este modelo que apresentamos a seguir como parte do quadro teórico em discussão nesta parte.

O modelo praxeológico de gestão de tarefas

Na perspectiva da teoria antropológica do didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1992, ..., 2003, ...), concebemos, unanimemente, que todo objeto do saber visado para os processos de ensino e de aprendizagem carece de uma organização praxeológica, independentemente da área de conhecimento a que este pertence, em particular a matemática. Os exemplos encontrados em uma organização matemática de um objeto do saber, como "*integrais simples*", tidos como tarefas do autor do livro didático (LD), e os exercícios ou problemas propostos, sistematicamente, no final de cada seção desse livro, podem ser analisados e reelaborados, seguindo o modelo praxeológico de gestão de tarefas (MPGT). Esse modelo serve de instrumento auxiliar para o Professor ou pesquisador criar tarefas capazes de convidarem os estudantes nos diferentes senários de reflexões sobre os conhecimentos visados. O modelo é definido como "um exemplar para elaboração de tarefas, que devem iniciar com um gênero (verbo no infinitivo), no contexto praxeológico, seguido de um complemento fixo, e de um Sistema de Variáveis Didáticas." (HENRIQUES, 2019, p. 106). O Quadro 2 traz uma reprodução do referido modelo, no qual pode-se conjecturar que uma vez fixado o complemento que especifica um enunciado, sem ambiguidade, fornecendo as informações globais da situação visada, é possível conduzir os estudantes na análise e na realização de diferentes tarefas mobilizando-se diferentes registros de representação semiótica. Esse aspecto é geralmente aceito pelos estudantes envolvidos na pesquisa, que entendiam o MPGT como uma metodologia de ensino que os auxilia, juntamente, com o conceito de praxeologia completa, no momento pelo qual são evidenciados os dois blocos que o constituem, notadamente, *logos* (ambiente teórico-tecnológico) e *práxis* (ambiente tarefa-técnica).

Quadro 2 - Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT)

<table>
<tr><th colspan="3">GT = [Verbo de ação, complemento fixo, SVD]</th></tr>
<tr><td colspan="3">Em que:
• GT: significa geratriz ou gerador de tarefas.
• Verbo de ação: define o gênero do tipo de tarefa T.
• Complemento fixo: especifica um enunciado, sem ambiguidades, fixando os dados ou informações globais da situação ou tarefa que devem ser utilizadas no SVD ou subtarefas.
• SVD: é um sistema de variáveis didáticas no gerador de tarefas (t).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Um exemplar de GT</td></tr>
<tr><td rowspan="5">GT1</td><td colspan="2">Considerar as informações I1, I2, I3, ..., In, para realizar as seguintes tarefas:</td></tr>
<tr><td>t1</td><td>Enunciado da t1 utilizando alguma informação In</td></tr>
<tr><td>t2</td><td>Enunciado da t2 utilizando alguma informação In e/ou resultado da t1</td></tr>
<tr><td>t3</td><td>Enunciado da t3 utilizando alguma informação In e/ou Resultado da t1, t2</td></tr>
<tr><td>..</td><td>...</td></tr>
</table>

Fonte: Henriques (2019, p. 106)

Para colocarmos esse modelo em ação e acessar as práticas efetivas dos estudantes devemos, antes, responder certos questionamentos do tipo: Existe relação entre as tarefas gerenciadas pelo Professor ou pesquisador no MPGT com exemplos encontrados na organização matemática das *aplicações de integrais definidas*? Esse questionamento é um incremento da questão que nos colocamos anteriormente que busca saber a relação que essas aplicações têm com a GEOPAES. Para responder a isso, é fundamental revisitar a praxeologia do objeto do saber em questão, pois tal visita permite o acesso de informações básicas capazes de favorecerem o Professor ou o pesquisador na gestão de novas tarefas cujo nicho encontra habitat[6] nessa organização, entre outras fontes que dão vida ao objeto em jogo. Este aspecto conduz-nos a terceira parte deste artigo, a *Análise praxeológica*, que apresentamos a seguir.

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA

Como sublinhado anteriormente, esta parte é destinada à realização de uma análise das organizações didáticas locais propostas em livros didáticos de CDI e de geometrias para o ensino das *aplicações de integrais definidas* e de *conceitos geométricos*, respectivamente. Para isso, escolhemos os livros didáticos apresentados no Quadro 3, sendo um de CDI e o outro de geometria espacial (GEOESPAÇO).

Quadro 3 - Livros didáticos que analisamos

Referência do livro Título, autor, « tradutor » edição, editor, ano de edição	P/n
Cálculo com geometria analítica. SWOKOWSKI, Earl William. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2a ed. Volume 1. São Paulo Makron Books, 1994.	100/763
Matemática aula por aula: ensino médio / Cláudio Xavier da Silva, Benigno Barreto Filho; Ilustradores Alexandre Argozino Neto, Olavo Terónio. – São Paulo: FTD, 2005. Volume 2. Livro do Professor.	109/352

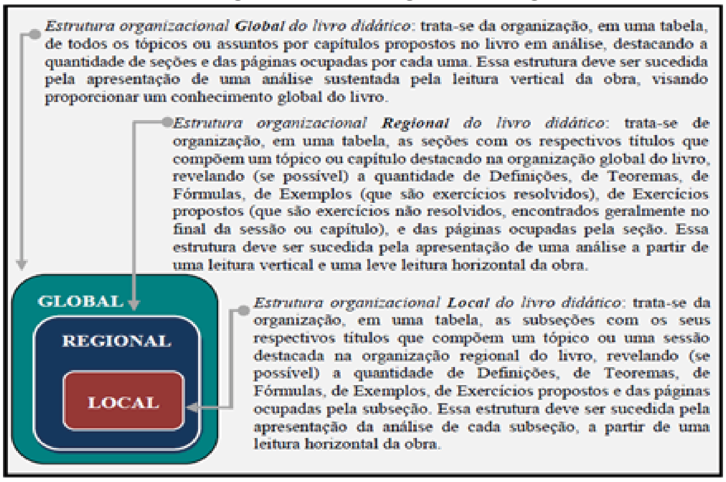
Fonte: Produzido pelos autores

Neste quadro, P/n indica o habitat ou lugar de vida conceitual ocupado pela GEOESPAÇO na obra, sendo *P* representa a quantidade de páginas ocupadas pela GEOSPAÇO e *n,* a quantidade total de páginas do livro. Segundo Henriques, Nagamine A. e Nagamine C (2012, p. 1272),

> A análise de LD possibilita o acesso dos elementos característicos da relação institucional com o objeto do ensino visado, bem como das exigências institucionais e das organizações propostas em torno desse objeto. Nesse tipo de análise consideramos três estruturas organizacionais, conforme o esquema abaixo.

As três estruturas organizacionais de análise de livros didáticos mencionadas pelos autores são esquematizadas no Quadro 4.

Quadro 4 - Estruturas organizacionais globais, regionais e locais do LD



Fonte: Henriques, Nagamine A., Nagamine C (2012, 1272)

6 Na ecologia do saber de Chevallard (1992), o habitat é definido como o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto de saber.

Os autores sublinham que

> Essas estruturas ou organizações didáticas proporcionam uma visão geral dos objetos de estudo propostos no livro em análise. Dependendo do interesse do trabalho, o pesquisador pode restringir o estudo em uma destas estruturas. Essa restrição favorece a consolidação dos conhecimentos em torno da praxeologia correspondente. Com efeito, a análise de uma sessão de um livro didático, é uma análise local. HENRIQUES, NAGAMINE A., NAGAMINE C. (2012, 1273)

Cada subseção de uma seção de LD, é um objeto local de estudo (OLE) (HENRIQUES, 2019, p. 105). Assim, neste artigo, restringimo-nos à apresentação de uma análise local de cada um dos livros listados no Quadro 3, apropriando-nos da organização realizada por Henriques (2019) na obra *Saberes universitários e suas relações na educação básica* em torno do cálculo diferencial e integral, na qual o autor elege o livro *Cálculo com geometria analítica* de Earl William Swokowski, apresentado no Quadro 3, produzindo o resultado estrutural que trazemos no Quadro 5.

Quadro 5 - Estruturas organizacionais globais, regionais e locais de Swokowski

Tabela 4.1 - Estrutura organizacional global do Swokowski

Capítulos	Assunto	Seções	Páginas
01	Revisão preliminar	03	38
02	Limite de funções	06	60
03	A derivada	09	67
04	Aplicações de derivadas	09	73
05	**Integrais**	**08**	**83**
06	**Aplicação de integrais definidas**	**09**	**88**
07	Funções logarítmicas e exponenciais	07	65
08	Funções trigonométricas recíprocas e hiperbólicas	05	36
09	Técnicas de integração	08	22
10	Formas indeterminadas e integrais impróprias	05	27
11	Séries infinitas	11	82
12	Tópicos de geometria analítica	05	40
13	Curvas planas e coordenadas polares	06	61
14	Vetores e superfícies	07	63
15	Funções com valores vetoriais	07	35
16	Derivação parcial	10	91
17	**Integrais Múltiplas**	**10**	**100**
18	Cálculo vetorial	08	59
19	Equações diferenciais	07	39
Apêndice		--	26
Respostas dos exercícios de número impar		--	70
Índice analítico		--	10

(a) organização global de LD Swokowski

Tabela 4.5 - Estrutura organizacional regional (capítulo 06) do livro Swokowski

Seção	Título da seção	Def	Teo	Cor	For	Ex	Exp	Pq	P
6.1	**Área**	**00**	**01**	**01**	**02**	**04**	**42**	**08**	**14**
6.2	**Sólido de revolução**	**02**	**00**	**00**	**02**	**05**	**44**	**07**	**11**
6.3	**Volume por anéis cilíndricos**	**01**	**00**	**00**	**01**	**03**	**34**	**05**	**08**
6.4	**Volume por seções transversas**	**00**	**00**	**00**	**01**	**02**	**26**	**02**	**06**
6.5	Comprimento de arco e superfície de revolução	04	01	00	01	04	44	13	12
6.6	Trabalho	02	00	00	-	05	24	01	09
6.7	Momentos e centro de massa	03	01	00	00	06	26	06	11
6.8	Outras aplicações	01	01	00	00	07	30	03	15
6.9	Exercícios de revisão						28	07	02
	Total	**13**	**04**	**01**	**07**	**36**	**298**	**52**	**88**

Def = Definições, **Teo** = Teoremas, **Cor** = Corolários, **For** = Fórmulas, **Ex** = Exemplos, **Exp** = Exercícios propostos, **Pq** = Pacotes, **P**=Pagina.

(b) organização regional de LD Swokowski

Tabela 4.7 - Estrutura organizacional local (seção 6.2) do livro Swokowski

Seção	Título da seção	Def	Teo	Ole	For	Ex	Exp	Pq	P
6.2	Sólido de revolução	02	00	04	02	05	44	07	11
Total		02	00	04	02	05	44	07	11

Def = Definições, **Teo** = Teoremas, **Ole** Objeto local de estudo, **For** = Fórmulas, **Ex** = Exemplos, **Exp** = Exercícios propostos, **Pq** = Pacotes, **P**=Pagina.

(c) organização local de LD Swokowski

Fonte: Henriques (2019, p. 113, p.137, p.139)

Vemos neste quadro que o objeto de estudo contemplado no nosso artigo, *aplicações de integrais definidas*, ocupa a sexta região, sendo um dos capítulos analisados por Henriques (2019), quando o autor destaca três deles (05, 06 e 17) na organização global da obra. É este assunto que analisamos na sua sexta seção (Quadro 5(b) regional e 5(c) local). Mas, antes de adentrarmos nesta análise, visando estudar as relações que nos referimos, explicitamos a estrutura organizacional global do segundo livro (GEOESPAÇO), ainda a partir de uma organização realizada por Henriques (2019), nessa mesma obra, denotado por PROFMAT_2º ANO MÉDIO[7], mostrada no Quadro 6.

7 Livro do professor de matemática do 2o ano do ensino médio

Quadro 6 - Estruturas organizacionais globais e regionais do livro PROFMAT_2º ANO MÉDIO

(a) Estrutura organizacional global do livro PROFMAT_2º ANO MÉDIO

Capítulo	Título	Seções	P
	Elementos pré-textuais		08
1	Progressões	3	47
2	Retomando a Estatística	3	21
3	Matriz	6	35
4	Determinantes	8	35
5	Sistemas lineares	5	26
6	Análise combinatória/Binômio de Newton	9	36
7	Probabilidade	5	26
8	**Geometria Espacial**	**11**	**109**
	Respostas		07
	Siglas utilizadas		02
Total		**50**	**322**

(b) Estrutura organizacional regional do capítulo 8: **PROFMAT_2º ANO MÉDIO**

Seção	Título da seção	Exp	P
---	Apresentação	-	03
8.1	Tópicos da geometria plana	53	20
8.2	Postulados	03	05
8.3	Posições relativas de duas retas no espaço	05	06
8.4	Posições relativas de uma reta no plano	04	03
8.5	Posições relativas de dois planos no espaço	06	03
8.6	**Prismas**	**42**	**12**
8.7	**Pirâmides**	**34**	**10**
8.8	**Cilindros**	**22**	**08**
8.9	**Cones**	**14**	**12**
8.10	**Esfera**	**23**	**07**
8.11	**Poliedros**	**30**	**20**
Total		**236**	**109**

Fonte: Henriques (2019, p. 113, p.137, p.139)

A relação entre as *aplicações de integrais definidas* de funções reais de uma variável real e a geometria começa a se revelar, implicitamente, a partir da estrutura organizacional regional do capítulo 8 do livro PROFMAT_2º ANO MÉDIO (Quadro 6 (b)), quando esta é comparada com a estrutura correspondente na organização do ensino das *aplicações de integrais definidas* apresentada no Quadro 5(b). Para refinar essa conjectura recuperamos, ainda nas análises realizadas por Henriques (2019), os objetos locais de estudos (OLE) evidenciados em três estruturas organizacionais locais no Quadro 7, sendo os primeiros OLE apresentados no Quadro 7(a) são propostos na seção 6.2 do ensino de *aplicações de integrais definidas*. No Quadro 7(b) leem-se os OLE da seção 8.8 do ensino de *cilindro* em GEOESPAÇO, e no Quadro 7(c) lemos os OLE da seção 8.9 do ensino de *cone* também em GEOESPAÇO.

Quadro 7 - OLE de sólidos de revolução nas *aplicações de integrais definidas* e em GEOESPAÇO

Quadro 4.5: OLE de volume por Sólido de revolução na seção 6.2

n.	OLE	*Ole com relação explícita com algum saber das IEB*
Ole_1	*Sólido de revolução*	*Geometrias, ...*
Ole_2	*Discos circulares*	*Geometrias, ...*
Ole_3	*Volume por discos circulares*	*Geometrias, ...*
Ole4	*volume por anéis circulares*	*Geometrias, ...*

(a) *Aplicações de integrais definidas*

Quadro 4.25: Objetos locais de estudo de Cilindro na seção 8.8

n.	OLE	*Ole com relação explícita com algum saber das IES*
Ole_1	*Elementos do Cilindro*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_2	*Classificação do Cilindro*	*Geometrias, ...*
Ole_3	*Área da base do Cilindro*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_4	*Área lateral de um Cilindro*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_5	*Volume de um Cilindro*	*Integrais, Geometrias, ...*

(b) Cilindro em GEOSPAÇO

Quadro 4.28: Objetos locais de estudo do *Cone* na seção 8.9

n.	OLE	*Ole com relação explícita com algum saber das IES*
Ole_1	*Elementos de um Cone*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_2	*Classificação do Cone*	*Geometrias, ...*
Ole_3	*Geratriz de um Cone*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_4	*área da base de um Cone*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_5	*Área lateral de um Cone*	*Integrais, Geometrias, ...*
Ole_6	*Volume de um Cone*	*Integrais, Geometrias, ...*

(c) Cone em GEOSPAÇO

Fonte: Henriques (2016, p.159 e p.232)

Detalhemos a seguir a análise local de, ao menos, um dentre os OLE previstos em cada obra (CDI e GEOESPAÇO).

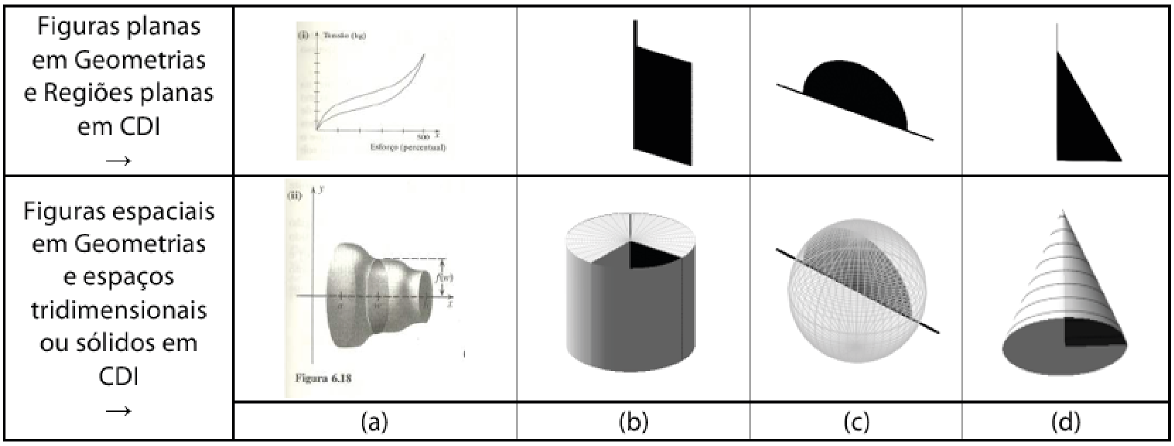
Análise local da seção 6.2: sólidos de revolução

O autor inicia esta seção enfatizando a importância que o volume de um objeto desempenha em muitos problemas nas ciências físicas, tais como a determinação de centro de massa e de momento de inércia, prometendo trabalhar com esses conceitos posteriormente, concentrando-se nos problemas de determinação de medidas de volumes de sólidos que têm formas irregulares, começando, porém, com os objetos que apresentam formas simples e incluindo nesta categoria os sólidos de revolução. Os primeiros conceitos sistemáticos que podem ser relacionados com os elementos ensinados em GEOESPAÇO aparecem nessa seção quando o autor escreve:

> Se uma região [plana] revolve em torno de uma reta no plano, obtém-se um sólido, chamado **sólido de revolução**; dizemos que o sólido é gerado pela região. A reta é um eixo de revolução. Em particular, se a região *R* exibida na Figura 6.18(i) [cf. Figura 2, neste capítulo] revolve em torno do eixo_*x*, obtemos o sólido ilustrado em (ii)[8] da figura. Como caso especial, se ***f*** é uma função constante, digamos *f*(*x*)=*k*, então a região [sob o gráfico de *f*] é retangular, e o sólido gerado [por revolução da região em torno do eixo_*y*] é um [crivo[9] do] cilindro circular reto (cf. Figura 2(b))[10]. Se o gráfico de ***f*** é um semicírculo com as extremidades de um diâmetro nos pontos (***a***,0) e (***b***,0), então o sólido de revolução [da região em torno do eixo_*x*] é uma esfera (cf. Figura 2(c)). Se a região é [delimitada por] um triângulo retângulo com [uma das] bases sobre o eixo_*x* e dois vértices nos pontos (***a***,0) e (***b***,0) com o ângulo reto em um destes pontos, o sólido gerado [seja em torno do eixo_*x* ou do eixo_*y*] é um cone circular reto (cf. Figura 2(d)). SWOKOWSKI (1994, p. 400)

A descrição apresentada pelo autor, na língua materna, contém as nossas intervenções como forma de contribuição na melhor maneira possível da comunicação matemática, que destacamos por "colchetes [...]". Essa descrição pode ser representada, por conversão para o registro gráfico, conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Visualização de regiões e sólidos de revolução correspondentes no registro gráfico.



Fonte: Swokowski (1994, p. 401) e Henriques (2019, p. 160).

De fato, estes primeiros conceitos estabelecem uma aliança de *aplicações de integrais definidas* com a GEOPAES, pois deparamo-nos com a mobilização de elementos das geometrias plana, analítica e espacial.

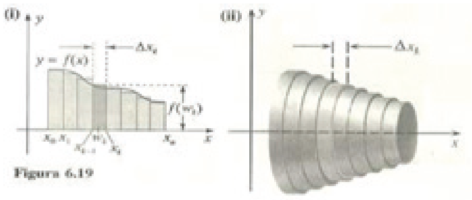
Para consolidar mais essa relação mediante a construção de técnicas de realização de tarefas, o autor apresenta, dentre as duas definições quantificadas na estrutura organizacional local da seção 6.2 (cf. Quadro 5(c)), a primeira referente à determinação da medida do

8 A região representada na Figura 6.18(i), salvo outras interpretações, não gera o sólido indicado na Figura 6.18(ii) como assegurado pelo autor da obra em análise.

9 Crivo-Geométrico é uma conservação ou escolha de parte(s) de uma curva ou de uma superfície, necessária(s) na representação do objeto matemático correspondente no registro gráfico". (HENRIQUES, NAGAMINE, SERÔDIO, 2020, p. 528). Um segmento, por exemplo, é um crivo de uma curva de curvatura nula (a reta), um arco é um crivo de uma curva de curvatura não nula, um disco é um crivo de um plano etc. A reunião conveniente de crivos de curvas pode delimitar uma região plana, ao passo que a reunião conveniente de crivos de superfícies pode delimitar um sólido enquanto objeto geométrico fechado, no sentido de que existe um limite superior para as distâncias entre os pontos do sólido. (HENRIQUES, NAGAMINE, SERÔDIO, 2020, p. 528)

10 As Figuras 4.10(b), 4.10(c) e 4.10(d), não constam no livro analisado. Estas são grifos nossos, pois na obra analisada são apenas apresentadas na língua materna através desta descrita em citação.

volume de um sólido de revolução elaborada com base no conceito de seções transversais. Assim, Swokowski (1994, p. 400), escreve:

> Se um plano perpendicular ao eixo_*x* intercepta o sólido da Figura 6.18(ii) [cf. Figura 2(a)], obtém-se uma seção transversa circular. Se conforme indicado na figura, o plano passa pelo ponto do eixo_*x* de ordenada *w*, então o raio do disco é *f*(*w*), e daí a sua área é *π*[*f(w)*]2. Chegaremos a uma definição do volume de tal sólido de revolução utilizando somas de Riemann. Particionemos o intervalo [*a, b*] e consideremos os retângulos mostrados na Figura 6.19(i), o sólido de revolução gerado por esses retângulos tem a forma indicada na Figura 6.19(ii).
>
> 
>
>
> Nota-se que o k^{mo} retângulo gera um **disco circular** (um cilindro circular) de raio da base $f(w)_k$ e altura (espessura) $\Delta x_k = x^k - x_{k-1}$. O volume deste disco, é área da base vezes altura. Isto é $\pi[f(w)]^2 \Delta x_k$. O volume do sólido da Figura 6.19(ii), é a soma [obtida pela adição] de volumes de todos esses discos. Isto é,
>
> $$\sum_k \pi[f(w)]^2 \Delta x_k$$
>
> Se a norma ‖P‖ da partição está próxima de zero, então esta soma deve estar próxima do volume do sólido. Assim, é natural definirmos o volume do sólido de revolução como um limite de tais somas.
>
> **Definição 6.5** Seja *f* contínua em [*a, b*], e seja *R* região delimitada pelo gráfico de *f*, pelo eixo_x e pelas retas verticais [de equações] $x = a$, $x = b$. O volume V do sólido de revolução gerado pela revolução da região R em torno do eixo_x é
>
> $$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \pi[f(w_k)]^2 \Delta x_k = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

A descrição apresentada pelo autor na construção da primeira técnica de cálculo de medidas de volume de sólidos de revolução permite destacar alguns conceitos comuns entre as *aplicações de integrais definidas* e a GEOPAES que apresentamos no Quadro 8.

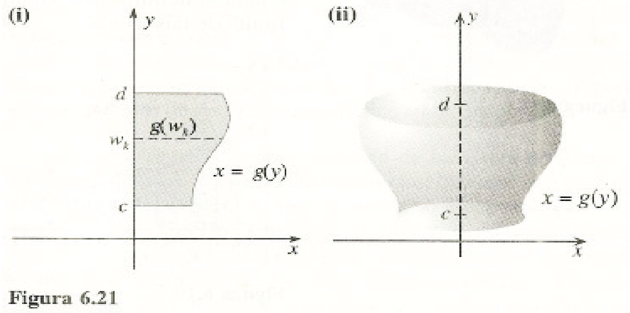
Quadro 8 - Conceitos comuns entre CDI e GEOPAES

Aplicações de integrais definidas	GEOPAES
Ponto	Ponto
Plano	Plano
Perpendicularismo	Perpendicularismo
Sólido	Sólido
Seção transversa circular	Seção transversa circular
Eixos coordenados	Eixos coordenados
Raio de disco	Raio de circunferência/Círculo
Área	Área
Volume	Volume
Somas de Riemann	
Intervalo	Intervalo
Retângulo	Retângulo
Cilindro	Cilindro
Base e Altura	Base e Altura

Fonte: Produzido pelos autores

A definição apresentada acima, identificada por 6.5 na obra, permite o cálculo de medidas de volumes de sólidos de revolução gerados pela revolução de uma região *R* em torno do eixo_*x*. Essa definição ganha um aliado na organização local das *aplicações de integrais definidas*, em torno de sólidos de revolução, quando o autor apresenta a segunda, que permite calcular volumes de sólidos (cf. Figura 3(ii)) gerados pela revolução de regiões (cf. Figura 3(i)) em torno do eixo_*y*.

Figura 3 - Região plana e sólido de revolução em torno do eixo_*y*.



Fonte: Swokowski (1994, p. 402)

A referida definição é identificada na obra por 6.6, dada na página 402, exclusivamente, no registro algébrico, como segue:

Definição 6.6 $$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \pi [g(w_k)]^2 \Delta y_k = \int_c^d \pi [g(y)]^2 \, dy$$

As duas definições 6.5 e 6.6, se restringem à revolução de regiões em torno do eixo_*x* ou eixo_*y*. Para generalizar o conceito utilizando-se qualquer reta como eixo de revolução, o autor apresenta a seguinte regra geral.

Volume V de um **disco circular**
V= π(raio)^2.(espessura)

Fonte: Swokowski (1994, p. 403)

Como aplicação, encontramos o primeiro exemplo (enquanto tarefa do autor) elaborado com o seguinte enunciado:

> A região delimitada pelo eixo_*x*, pelo gráfico da equação $y = x^2+1$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$ gira em torno do eixo_*x*. Determine o volume do sólido resultante. (SWOKOWSKI, 1994, p. 403)

Diante deste enunciado, concordamos com Henriques (2019, p. 163) quando atribui

> A menção "**gráfico**" à "**função**" e vice-versa, e não à "**equação**", porque uma equação nem sempre resulta em um gráfico, no sentido de que todo elemento do domínio da função tenha uma única imagem, ou seja um único valor funcional. Para isso, é suficiente considerar a equação dada por $x^2 + y^2 = a^2$ sendo, no registro gráfico, uma **curva** que não é um **gráfico**. Pois, para todo valor de x no intervalo fechado de extremidades $-a$ e a possui duas imagens. Portanto, a menção "**equação**" deve ser atribuída

> a "**curva**" no registro gráfico. Assim, é inconveniente evocar o termo **gráfico**, quando nos referimos a **equação**.

O auto acrescenta "estamos querendo mostrar que se deve estabelecer uma coerência conceitual entre as noções em pauta, inclusive as superfícies, que organizamos no [Quadro 8] para auxiliar na reflexão e aquisição de conhecimentos associados" (HENRIQUES, 2019, p. 163).

Quadro 9 - Relações conceituais, função-gráfico, equação-curva-superfície

Quando no registro algébrico tem-se uma:	No registro gráfico deve-se evocar o termo:
Função	Gráfico
Equação de duas variáveis	Curva
Equação de três variáveis	Superfície

Fonte: Henriques (2019, p. 163)

Utilizando estas relações, reescrevemos o exemplo do autor, com uma imersão no modelo praxeológico de gestão de tarefas, conforme apresentado no Quadro 10.

Quadro 10 - Imersão, do primeiro exemplo do autor sobre o cálculo de volume de sólido de revolução, no modelo praxeológico de gestão de tarefas (MPGT)

GT_1	**Considerar as equações dadas por $y=0$, $y = x^2+1$, $x = -1$ e $x = 1$, para realizar as seguintes tarefas:**	
	t1	Fornecer, no registro gráfico, a região R delimitada pelos crivos[11] restritos de curvas de equações consideradas em $\mathbf{GT_1}$.
	t2	Revolucionar a região R em torno do eixo x (reta de equação $y=0$) representando o sólido resultante no registro gráfico.
	t3	Determinar o volume do sólido obtido na realização da t2, explicando cada etapa na língua materna.

Fonte: Produzido pelos autores

Como exemplo, Swokowski (1994, p. 403) apresenta a seguinte resolução:

> Conforme a diretriz 1 [as referidas diretrizes precedem o exemplo em questão na obra], esboçamos a região e exibimos um retângulo vertical de largura *dx* (veja a Figura 6.23(i)). [Com base] na diretriz 2 esboçamos o sólido gerado por *R* e o disco gerado pelo retângulo (veja a Figura 6.23(ii)). [Com base] nas diretrizes 3 e 4 observamos o seguinte:

Espessura do disco:	dx
Raio do disco:	$x^2 + 1$
Volume do disco:	$\pi(x^2 + 1)^2 dx$

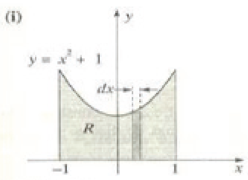


Figura 6.23

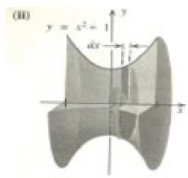


Figura 6.23

11 Ver o conceito de Crivo-Geométrico em Henriques, Nagamine e Serôdio (2020, p. 257).

Poderíamos em seguida aplicar a diretriz 5 com $\boldsymbol{x}$ com $\boldsymbol{a}$=-1 e b=1, para obter o volume V considerando $\int_{-1}^{1}$ um operador que toma um limite de [adição] de volumes de discos. O outro método consiste em utilizar a simetria da região em relação ao eixo_*y* e achar o volume aplicando $\int_0^1 \pi (x\text{^}2 + 1)^2 \mathrm{d}x$ e duplicar o resultado. Assim,

$V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \pi (x^2 + 1)^2 \mathrm{d}x$	[Estabelecimento da integral]
$= 2\displaystyle\int_{0}^{1} \pi (x^2 + 1)^2 \mathrm{d}x$	[Aplicação de simetria]
$= 2\pi\left[\dfrac{x^5}{5} + 2\left(\dfrac{x^3}{3}\right) + x\right]_0^1$	[Cálculo da primitiva do integrando e aplicação da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)]
$= 2\pi\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{3} + 1\right) = \dfrac{56}{15}\pi \cong 11{,}7$	[Desenvolvimento da aplicação do TFC e realização do tratamento numérico].

É notável que as três tarefas gerenciadas no GT_1 são contempladas pela prática do autor. Isso mostra que existem saberes necessários à consolidação da aprendizagem dos estudantes que não são transformados em tarefas nesta organização local de estudo de sólidos de revolução. Esse fato é notável em todas as organizações praxeológicas locais propostas no livro de Swokowski. Salientamos que se destacam os quatro registros de representação semiótica, evidenciados no quadro teórico, na prática do autor durante a resolução das tarefas do GT_1, que retomamos no Quadro 11:

Quadro 11 - Registros de representação notáveis na prática do autor Swokowski em CDI

1. **Língua materna**
2. **Registro algébrico**
3. **Registro gráfico**
4. **Registro numérico**

Fonte: Produzido pelos autores

O primeiro se manifesta, além do enunciado, na descrição de cada etapa de resolução. O segundo é mobilizado na representação de cada equação no gerador de tarefas, no controle da espessura, raio e volume do disco, bem como no estabelecimento da integral e no cálculo do seu valor. O terceiro é explicitado na representação da região revolucionada em torno do eixo_*x*, e o sólido resultante. O quatro registro é mobilizado na determinação do valor efetivo da integral. Ademais, os conceitos comuns entre as *aplicações de integrais definidas* e a GEOPAES que apresentamos no Quadro 8 são recorrentes em todo o ensino previsto nesta seção.

Visando fortalecer os referidos conceitos comuns, passamos a análise local de OLE previsos na segunda obra (GEOESPAÇO).

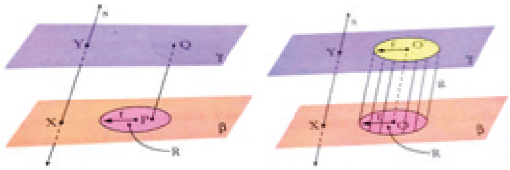
Análise local da seção 8.8 da obra PROFMAT_2º ano médio: cilindro

Como vimos no Quadro 7, o ensino do cilindro é organizado com cinco OLE. O autor inicia a apresentação deste ensino com a definição do cilindro. Porém, essa definição não é identificada com essa nomenclatura. Ou seja, não antecipa o conceito com o termo "definição". Isso acontece em toda a obra. Assim, na página 297, lê-se:

> Seja *R* um **círculo** contido num **plano** β e XY um **segmento** de uma **reta** *s* **concorrente** com β. Denominamos **cilindro** o conjunto dos segmentos **paralelos** e **congruentes** a XY que têm uma **extremidade** em *R* e que estão num mesmo **semiespaço** determinado por β.

Trata-se, portanto, de uma definição apresentada, completamente, na língua materna, e convertida, em seguida, no registro gráfico, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Visualização da descrição da definição do cilindro no registro gráfico



Fonte: PROFMAT_2o ANO MÉDIO (2005, p. 297)

Essa Figura é sucedida pelo ensino dos elementos geométricos de um cilindro, quando, na mesma página 297 da obra PROFMAT, escreve-se:

> ***Elementos do cilindro*** (OLE$_1$)
> **Bases**: são os círculos de centro **O** e **O'** e raio de medida *r*. **Geratriz**: é todo segmento paralelo a **OO'** e com extremos nas circunferências das bases; indicaremos sua medida por *g*. **Altura** (h): distância entre os planos das bases.

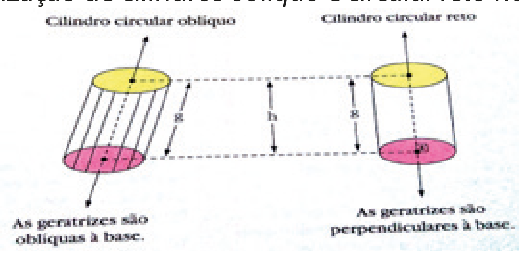
Os Cilindros são exemplos de sólidos geométricos.

Na sequência o autor apresenta a **classificação** (OLE$_2$) atribuída ao cilindro. Com esse objetivo, sem ter mencionado antes o termo *cilindro circular* nessa organização, o autor escreve:

> ***Classificação***: O *cilindro circular* pode ser classificado como *obliquo* ou *reto*, conforme a posição de uma geratriz em relação aos planos das bases.

Esta classificação é seguida da representação correspondente no registro gráfico que trazemos na Figura 5. É de notar que na sua descrição, o autor da obra PROFMAT não deu nenhuma referência a essa figura. Todavia, pela leitura do texto, conjectura-se que ele se refere à representação dos dois tipos de cilindros (oblíquo e circular reto) no registro gráfico.

Figura 5 - Visualização de cilindros *oblíquo* e *circular reto* no registro gráfico



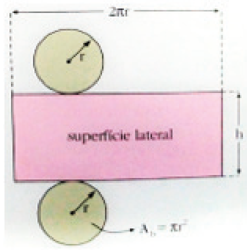
Fonte: PROFMAT_2o ANO MÉDIO (2005, p. 297)

Referindo-se ao cilindro **circular** reto, o autor mostra que este tipo de **cilindro**, também conhecido como de **revolução**, é um **sólido** gerado pela **rotação** de 360º de um **retângulo** em torno de um **eixo** que contém um de seus lados. *Tem-se aí uma relação explícita entre os saberes inerentes, discutidos no estudo de **sólidos de revolução** apresentado na análise local das aplicações de integrais simples nas IES.*

Discutem-se, na sequência, alguns conceitos particulares, tais como *seção transversal* e *seção meridiana* de um cilindro, que são também conceitos tratados nas aplicações de integrais, reforçando a cada momento as relações almejadas. Visando a realização de cálculos efetivos, o autor apresenta a primeira técnica de cálculo de medidas de áreas de regiões circulares de raios constantes, identificada que ele denomina ***área da base de um cilindro reto*** (OLE_3). Identificando a variável representante da medida da área da base do cilindro por A_b, o autor da obra PROFMAT traz, então a seguinte fórmula/técnica de cálculo: $A_b = \pi r^2$. A letra *r* representa o raio da base de um cilindro. Além desta técnica, aparece, imediatamente, a fórmula para o cálculo da medida da área da superfície lateral (Ole_4) de um cilindro reto, identificada por A_L e representada no registro algébrico por: $A_L = 2\pi rh$. Considerando a superfície total de um cilindro, o autor da obra PROFMAT acrescenta, na organização analisada, a fórmula de cálculo da medida da área total dessa superfície, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6 - Visualização da superfície total de um cilindro

$$A_T = 2.A_b + A_L$$
$$A_T = 2.(\pi r^2) + 2\pi\, r.h$$
$$A_T = 2\pi\, r.(r + h)$$



Fonte: PROFMAT_2o ANO MÉDIO (2005, p. 299)

Como é de esperar, o ensino do cálculo de medida de **volume de um cilindro** (OLE_5) também encontra o seu espaço nessa organização. Com efeito, identificando a variável representante da medida do volume do cilindro por *V*, o autor da obra PROFMAT apresenta a quarta fórmula, encontrada nesse local dada por: .

São propostos cinco exercícios do tipo **Participe das resoluções** e, doze, dos 17 exercícios propostos, denominados: **Elabore as resoluções**. Dentre estes exercícios, apresentamos no Quadro 12 um deles do primeiro tipo, extraído na página 302, identificado na obra por (Mack-SP)[12].

12 Significa que o referido exercício foi retirado do conjunto de provas da Universidade Presbiteriana Mackenzie de São Paulo.

Quadro 12 - Exercício de cilindro designado "Participe das resoluções"

(Mack-SP) O raio de um cilindro circular reto é aumentado em 25% para que o volume permaneça o mesmo, a altura do cilindro deve ser diminuída em				
(a) 25	(b) 28	(c) 30	(d) 32	(e) 36

Trata-se de um exercício no qual espera-se que o Professor que adote esta obra acompanhe as técnicas mobilizadas pelo autor. É, portanto, um exercício resolvido pelo autor da obra PROFMAT, que na mesma página 302 apresenta a seguinte resolução:

r = raio da base do cilindro
h = altura do cilindro
V = volume = $\pi r^2 . h$ (antes da alteração)
V' = volume = $\pi (1{,}25r)^2 . h \left(1 - \frac{k}{100}\right)$ (após a alteração)
Portanto: V = V'

$$\pi r^2 . h = \pi (1{,}25r)^2 . h \left(1 - \frac{k}{100}\right)$$

$$1 = (1{,}25)^2 . \left(1 - \frac{k}{100}\right) \Rightarrow k = 36$$

Fonte: PROFMAT_2o ANO MÉDIO (2005, p. 302)

Com esta análise, é suficiente vermos que as geometrias e *aplicações de integrais definidas* de funções de uma variável real guardam uma forte relação que se justifica pela mobilização de conceitos equivalentes, porém, tratados/ensinados em contextos diferentes e em distintas instituições. Mas então, quais são as práticas efetivas de estudantes das IES nos cursos de DCI diante do ensino destes conceitos? As análises subseque ntes, sendo constituintes da quarta parte prevista neste artigo, concedem-nos um espaço propício de coleta de dados e aquisição de respostas deste tipo de questionamento.

PRÁTICAS EFETIVAS DE ESTUDANTES

Entendemos por prática efetiva do estudante o fazer real do estudante, a partir dos conceitos inerentes aos objetos do saber em jogo, acessível mediante a comunicação oral, escrita, gestual etc., em diferentes ambientes de aprendizagens, tais como papel/lápis e/ou computacional, favorecendo assim a coleta de dados úteis no diagnóstico/análise desse fazer, não exclusivamente, na pesquisa como também nos próprios processos de ensino e aprendizagem.

Neste contexto, e baseados nas análises realizadas nas seções anteriores deste artigo, recorremos aos trabalhos de um Professor de cálculo diferencial integral em uma das suas turmas desta matéria ofertada em uma universidade pública do estado da Bahia (Brasil), nos cursos de ciências exatas. Trata-se, especialmente, do Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) em que os estudantes se relacionam, pela primeira vez, com as *aplicações de integrais definidas* de funções de uma variável real, esperando-se, por conseguinte, a exploração das relações possíveis deste objeto com a GEOPAES.

Em sua avaliação que contempla este objeto do saber, o Professor utiliza o modelo praxeológico de gestão de tarefas (MPGT) (HENRIQUES, 2019), do qual trazemos um recorte reproduzido no Quadro 13, contendo dois GT, gerenciando-se quatro tarefas em cada.

Quadro 13 - Reprodução de geradores de tarefas utilizado em uma avaliação de CDI I

Gerador de tarefas GT1		**Considerar a região R do plano delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x$, pelo $\text{eixo\_}x$ e pela reta de equação $x = 5$, para realizar as seguintes tarefas, explicando cada etapa de resolução passo-a-passo:**
	t1	Representar a região R no registro gráfico.
	t2	Informar o nome que a região R recebe em Geometria plana.
	t3	Representar, no registro gráfico, o sólido S obtido pela revolução da região R em torno do eixo_x, e informe o nome que este sólido recebe em Geometria Espacial.
	t4	Aplicar o método dos **discos circulares** para fornecer a medida do volume de S.

Gerador de tarefas GT2		**Considerar a região R do plano delimitada pelas curvas de equações dadas por $y = 9$, $x = 3$, pelo $\text{eixo\_}x$ e pelo $\text{eixo\_}y$, para realizar as seguintes tarefas, explicando cada etapa de resolução passo-a-passo:**
	t1	Representar a região R no registro gráfico.
	t2	Informar o nome que a região R recebe em Geometria plana.
	t3	Representar, no registro gráfico, o sólido S obtido pela revolução da região R em torno do eixo_x, e informe o nome que este sólido recebe em Geometria Espacial.
	t4	Aplicar o método das **cascas cilíndricas** para fornecer a medida do volume de S.

Fonte: Avaliação proposta por um Professor em um curso de CDI sobre integrais duplas

É notável que os geradores de tarefas (GT), assim constituídos, favorecem uma gestão e transformação de conceitos em tarefas, a exemplo de "informar o nome de um objeto do saber", sendo, portanto, um caminho propício para o acesso às práticas efetivas de estudantes. Pois, uma vez fixadas as informações no gerador, pode-se elaborar tantas tarefas quantas forem necessárias para "forçar" os estudantes a passarem em uma experiência que resgata os conceitos básicos do objeto em cena. Além disso, nota-se que os geradores convidam o estudante a descrever/explicar os seus fazeres, passo-a-passo, na Língua Materna. Ademais, a relação entre *aplicações de integrais definidas* e GEOPAES, questionada neste artigo, aparece de antemão no gerador reforçando, ainda mais, o resultado encontrado anteriormente durante a análise praxeológica.

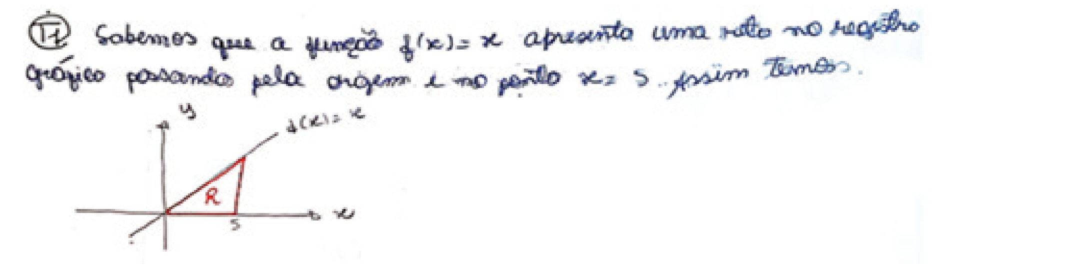
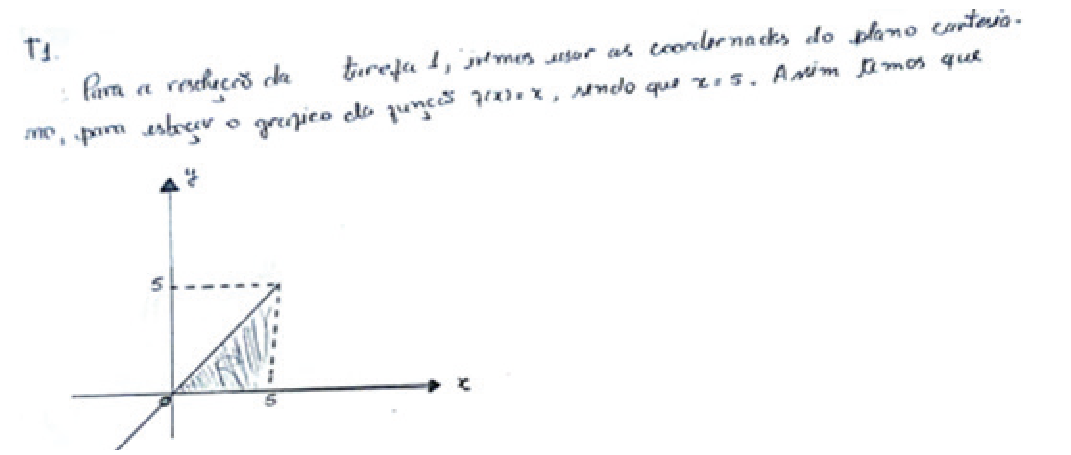
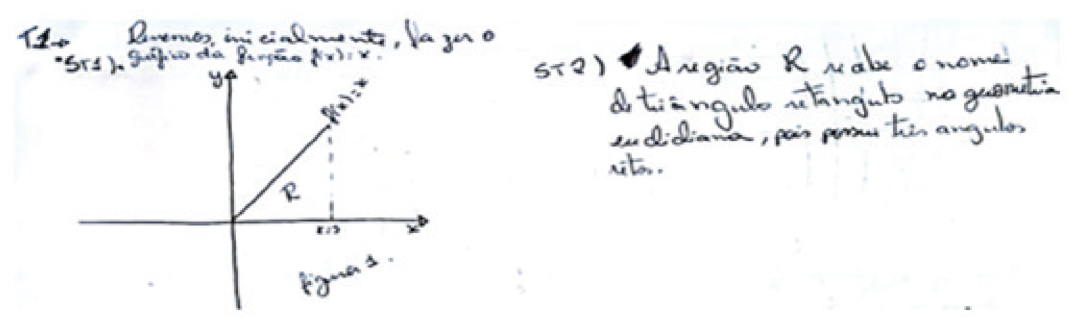
Assim, considerando os dois geradores de tarefas em questão, apresenta-se a seguir um diagnóstico das práticas efetivas dos estudantes, com referências na fase de aplicação, análise a posteriori e validação de uma sequência didática (HENRIQUES, 2019), trazendo alguns recortes de seus a fazeres reais acessíveis pela comunicação escrita.

A análise das práticas efetivas de estudantes

Como sublinhado anteriormente, os dois geradores de tarefas (GT1 e GT2) apresentados no Quadro 12 são partes de uma avaliação preparada pelo Professor e aplicada à uma turma de 31 estudantes de cursos de ciências exatas matriculados na disciplina CDI I. Dentre os dados coletados, trazemos recortes de manuscritos de três estudantes que identificamos por Estudante E1, Estudante E2 e Estudante E3.

Ressaltamos que as quatro tarefas gerenciadas nos dois geradores são exatamente as mesmas, porém, conduzidas com informações distintas fornecidas em cada GT. Essa é uma característica de tarefas emblemáticas no sentido de que elas se repetem em uma praxeologia, alimentadas por diferentes objetos do saber e diferentes técnicas/métodos de realização, a saber, "o método dos **discos circulares**" e "o método de **cascas cilíndricas**" para o caso de cálculo de medidas de volumes de sólidos. Na nossa análise, retomaremos cada tarefa seguida dos manuscritos dos estudantes e das nossas reflexões a partir das suas práticas efetivas. Para começar, vejamos no Quadro 14 as respostas dos estudantes diante da primeira tarefa.

Quadro 14 - Recortes de manuscritos de estudantes relativamente a t1.

t2	Representar a região R no registro gráfico
Estudante E1	
Estudante E2	
Estudante E3	

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que os três estudantes apresentam resultados pertinentes ao objeto esperado, mas revelam dificuldades relacionadas à produção de uma descrição plausível que explicasse o processo utilizado passo-a-passo na representação da região R no registro gráfico. Quando o Estudante E1 escreve:

> *Sabemos que a função f(x)=x apresenta uma reta no registro gráfico passando pela origem e no ponto x = 5.*

além de confundir a função com uma de suas representações, ele fornece, imediatamente, a referida região, sem mencionar as demais retas que lhe permitiram acessar tal região, o que caracteriza um vazio didático. A prática efetiva do Estudante E2 segue praticamente o mesmo procedimento do Estudante E1 quando escreve:

Para a realização da tarefa 1, iremos usar as coordenadas do plano cartesiano, para esboçar o gráfico da função f(x) = x, sendo que x = 5. Assim temos que

Ora, apesar do resultado esperado seja pertinente, este estudante valoriza apenas a função *f*, como se fosse a única informação do GT1 capaz de favorecer o resultado, pois ele omite a menção das retas de equações *y* = 0 (o eixo_*x*) e de equação *x* = 5, paralela ao eixo *y* passando no ponto (5,0).

Observando a prática do terceiro estudante (E3), somos levados a produzir uma análise equivalente, pois este também apenas escreve:

Devemos inicialmente, fazer o gráfico da função f(x) = x,

fornecendo, porém, convenientemente, a região esperada, mesmo sabendo-se que o gráfico da função *f* por si só não delimita a região em questão.

Fazemos a hipótese de que a sobrevivência do vazio didático na comunicação matemática dos estudantes é fruto da ausência, nas organizações matemáticas em LD, da transformação de conceitos matemáticos em tarefas que exigem que o estudante descreva os conceitos correspondentes na língua materna. Podemos notar, no entanto, que os estudantes mobilizaram convenientemente a conversão das informações consideradas nos geradores, do registro algébrico para o registro gráfico, mas têm dificuldades em externar, na língua materna, os saberes utilizados nessa conversão, em produção dos resultados correspondentes.

Continuando com a nossa análise a posteriori, entramos na segunda tarefa proposta na avaliação do Professor com o enunciado que retomamos pelo Quadro 15:

Quadro 15 - Recortes de manuscritos de estudantes relativamente a t2.

t2	Representar a região R no registro gráfico
E1	(t2) triângulo
E2	t2. Para a realização da tarefa 2, iremos usar ~~a realização da área, no [illegible]~~ obter que a geometria plana apresenta na tarefa 1, temos um triângulo como uma figura plana. Sendo que, a figura apresenta um triângulo retangulo.
E3	t2. A geometria plana apresentada no gráfico é um retângulo.

Fonte: Dados da pesquisa

Trata-se de uma tarefa relativamente elementar, porém, importante na consolidação da aprendizagem dos estudantes, na medida em que convida os estudantes a se manifestarem sobre nomenclaturas de objetos de saberes com base nas construções realizadas por eles próprios. Na relação usual dos estudantes com os objetos geométricos nas tarefas/exercícios propostos nos livros didáticos, o nome de cada figura geométrica é, geralmente, explicitado no enunciado, e a tarefa de representar o objeto correspondente no registro gráfico ou geométrico, também, é na maioria dos casos retirada do estudante, sendo indicada no LD ou mesmo no ensino com termos do tipo "*a figura ao lado mostra*" ou "*como mostrado na figura ao lado*", entre outros termos equivalente, retirando do estudante a possibilidade dele próprio realizar a referida representação ou nomenclatura. Ora, essa retirada ativa o fenômeno denominado por Brousseau de *efeito topázio*. Consequentemente, os estudantes não se mostram seguros em externarem o que sabem ou devem saber. Sujeitados a menção "**realizar a tarefa explicando cada etapa de resolução passo-a-passo**" no Gerador de Tarefas, alguns estudantes tentam justificar as suas respostas, como se pode ler na produção do Estudante E2, quando escreve:

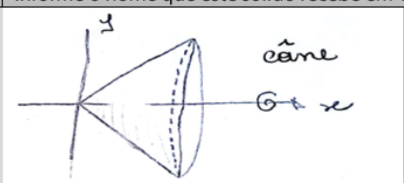
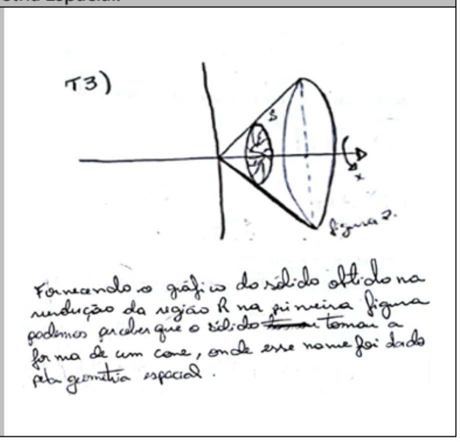
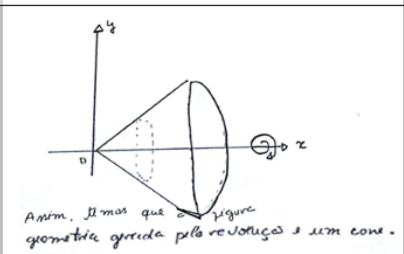
> *Para a realização da tarefa 2, iremos fazer que a geometria plana apresenta na tarefa 1, temos um triângulo como uma figura plana. sendo que, a figura apresenta um triângulo retângulo.*

No entanto, a ausência de costume/maturidade formativa para realização desse tipo de tarefas, esse estudante se vê diante de uma situação complexa. Pois, analisando a sua comunicação matemática, podemos perceber que ele tem ao seu dispor um controle da nomenclatura esperada, mas ele tem dificuldade de organizar as suas ideias com base nas regras de conformidade da *língua materna* enquanto registro representação. O mesmo acontece com E3, quando escreve:

> *A geometria plana apresentada no gráfico é um retângulo.*

Ora, além de entender, equivocadamente, o resultado que apresentou na realização da *t1* como geometria plana, o estudante estende esse equívoco ao reconhecer o nome do objeto que representou, pois, ao invés de se referir ao "*triângulo retângulo*", ele simplesmente escreve "*retângulo*". Isso pode ter sido também uma "*falta de atenção*". O terceiro estudante, por sua vez, restringe a resposta ao nome esperado, o "*triângulo*". De qualquer sorte, mesmo com a ausência de consistência na comunicação matemática dos estudantes, a relação investigada neste artigo entre as *aplicações de integrais definidas* e GEOPAES é notável nas práticas efetivas dos estudantes, como se pode observar ainda nas suas produções colhidas com base na realização da terceira tarefa do GT1, que retomamos no Quadro 16.

Quadro 16 - Recortes de manuscritos de estudantes relativamente a t3.

t3	Representar, no registro gráfico, o sólido S obtido pela revolução da região R em torno do eixo_*x*, e informe o nome que este sólido recebe em Geometria Espacial.		
Estudante E1		Estudante E2	
Estudante E2			

Fonte: Dados da pesquisa

O conceito de sólido de revolução gerado pela rotação completa (360º) de uma região plana em torno de um eixo de referência se mostrou devidamente mobilizado pelos estudantes, pois os três estudantes apresentaram o resultado esperado. Contudo, sempre que estes estudantes se veem diante de uma descrição de práticas na língua materna, revelam dificuldades de comunicação matemática capaz de externar convenientemente essa prática. De fato, quando o E2 escreve:

> *Assim, temos que a figura geométrica gerada pela revolução é um cone.*

vemos que o estudante omite, no seu discurso, o objeto revolucionado (o triângulo retângulo), revelando, assim, um vazio didático. O estudante E3, por sua vez, quando escreve:

> *Fornecendo o gráfico do sólido obtido na revolução da região R na primeira figura podemos perceber que o sólido tomou a forma de um cone, onde esse nome foi dado pela Geometria Espacial.*

revela um entendimento de que um sólido é um gráfico. Mas, conforme a discussão levantada anteriormente (ver Quadro 8), em matemática, os gráficos são produtos de funções, diferentemente do entendimento preconizado em outras áreas de conhecimentos, como a estatística, por exemplo, em que toda representação de objetos, no registro gráfico é vista como um gráfico. Além disso, a frase "*...na revolução da região R na primeira figura podemos perceber que o sólido tomou a forma de um cone*" é questionável. Ou seja, essa comunicação não transmite aquilo que o próprio estudante pensou, uma vez que o objeto que produz o sólido é uma região revolucionada em torno de um eixo, e não o sólido para o sólido (cone). Podemos, portanto, conjecturar que existe uma fragilidade muito grande na comunicação escrita dos estudantes na língua materna, que o estudante E1 vem ocultado desde a realização das tarefas anteriores, quando escreve simplesmente "*triângulo*" e "*cone*".

A quarto tarefa do GT1 foi proposta com o enunciando seguinte, favorecendo a coleta de produções de estudantes. Apresentamos no Quadro 17 as produções de E1, E2 e E3.

Quadro 17: Recortes de manuscritos de estudantes relativamente a t2.

t4	Aplicar o método dos **discos circulares** para fornecer a medida do volume de S.
Estudante E1	(t4) Dada a função $f(x)=x$ com intervalo $[0,5]$ para achar o volume do sólido pelo método dos discos circulares é necessário utilizar a formula $V_S=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$. Assim, temos: $V_S=\int_0^5 \pi[x]^2\,dx$ $\pi=\int_0^5 x^2\,dx \to \pi=\cancel{\int_0^5 \frac{x^3}{3}} \to \pi=\frac{x^3}{3}\Big]_0^5$ $\pi=\left[\frac{5^3}{3}+0\right] \to \frac{125\pi}{3}$
Estudante E2	t4. Para a resolução da subtarefa 4, vamos usar a formula de discos, sendo que $\pi\int f(x)^2\,dx$ $\pi\int_0^5 f(x)^2\,dx$ $\pi\int_0^5 f\frac{(x^3)}{3}\,dx$ $\pi.\frac{125}{3}$ $\pi\int_0^5 f(x)^2\,dx$ $\pi\,\frac{5^3}{3}-\frac{0^3}{3}\Big]_0^5$ $\frac{125\pi}{3}$
Estudante E3	T4→ Aplicando o método dos discos circulares para fornecer o volume do sólido na figura 2. $V_S=\pi\int_0^5 x^2\,dx$ $V_S=\pi\left[\frac{5^3}{3}.0\right]$ $=\left[\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]\right]_0^5$ $=\frac{125\pi}{3}$

Fonte: Dados da pesquisa

Em GEOPAES, o volume de um cone de raio da base r é calculado pela técnica $V = \frac{1}{3}\pi r^3$. Assim, sabendo-se que $r = 5$, então espera-se que $V = \frac{1}{3}\pi 5^3 = \frac{125}{3}\pi$. Este valor foi alcançado pelos três estudantes mediante a aplicação de uma integral definida, pela técnica ou método dos **discos circulares** sugerido no enunciado, verificando-se, mais uma vez, a relação entre *aplicações de integrais definidas* e a GEOPAES. Apesar do resultado ser alcançado pelos estudantes, o primeiro E1 apresentou um procedimento "estranho" quando ele escreve $\pi = \int_0^5 x^2 dx$, e finalmente $\pi = \left[\frac{5^3}{3} - 0\right] \to \frac{125}{3}\pi$. Isto mostra o quanto o processo é tão importante quanto o resultado. Ou seja, não basta considerar o resultado apresentado pelo estudante, é fundamental observar os procedimentos ou caminho percorrido pelo estudante na resolução de situações/tarefas propostas nos processos de ensino e aprendizagem.

Concluímos aqui a nossa análise de práticas efetivas dos estudantes, deixando o segundo geradores de tarefa como parte do artigo para a reflexão ou utilização do leitor em suas práticas institucionais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início deste artigo, propusemo-nos a buscar respostas para os seguintes questionamentos: Qual é a relação que as *aplicações de integrais definidas* de funções reais de uma variável real, tem com a GEOPAES? Como é que os estudantes do ensino superior lidam com essa relação na resolução de tarefas propostas?

Tanto as *aplicações de integrais definidas* quanto a GEOPAES são objetos matemáticos ensinados separadamente nas instituições de ensino superior.

O nosso interesse pela investigação da referida relação foi impulsionado pela utilização frequente dos objetos geométricos no ensino de cálculo diferencial e integral (CDI) enquanto *habitat* do primeiro objeto de estudo. Com efeito, para respondermos ao primeiro questionamento, nos apropriamos da teoria dos registros de representação semiótica de Duval e da análise praxeológica, em especial as organizações didáticas locais propostas em livros didáticos de cálculo e de geometrias. Como pudemos acompanhar neste artigo, a referida relação é atrelada aos conceitos de medidas de áreas de regiões planas e de volume de sólidos, mobilizando-se objetos do saber conhecidos pelos estudantes nas instituições anteriores ao ensino superior. Ou seja, o CDI se alimenta fortemente dos conceitos geométricos notáveis em várias situações, seja no contexto teórico construído na apresentação de cada objeto local de estudo (OLE), seja na gestão de tarefas realizadas pelos estudantes. Estes últimos, por sua vez, lidam bastante com essa relação notável no desenvolvimento das suas práticas efetivas que permeiam os diferentes registros de representação mencionados, explicitamente, nas tarefas propostas a partir das informações destacadas em cada gerador (GT), de forma a forçar os estudantes a vivenciarem esses registros na aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 1992. v. 12, n°1, p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au Savoir et Didactique des Mathematiques. Communication aux 3es Journées d'étude franco-québécoises (Université René–Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), Rapport au Savoir et Didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65. 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**, Bern: Peter Lang. 1995.

HENRIQUES, A., NAGAMINE, A., SERÔDIO, R. Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior. E**duc. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.22, n. 1, 253-275, 2020.

HENRIQUES, A. **Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica**–Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias. Via Litterarum. Ibicaraí, Bahia. Editora. 2019.

HENRIQUES, A. & ALMOULOUD, S. A., Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma Análise de Superfícies e Funções de duas Variáveis com Intervenção do Software Maple, **Revista Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez. 2012.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple**. UJF-Grenoble, Lab. Leibniz, 2006.

Histórico

Recebido: 14 de outubro de 2023.
Aceito: 12 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Noções geométricas nas aplicações de integrais definidas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024007, 2024.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024007.id594

Como citar – APA

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. (2024). Noções geométricas nas aplicações de integrais definidas. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024007. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024007.id594

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques