

Analyse praxéologique des programmes et manuels de géométrie au niveau de la transition élémentaire-collège : les paradigmes géométriques en question

Análise praxeológica de currículos e livros didáticos de geometria no nível de transição básico-universitário: os paradigmas geométricos em questão

Praxeological analysis of geometry programs and textbooks at the level of elementary-college transition: the geometric paradigms in question

Análisis praxeológico de programas y libros de texto de geometría en el nivel de transición básica-universitaria: los paradigmas geométricos en cuestión

Sounkharou Diarra¹

Moustapha Sokhna²

RÉSUMÉ

Les programmes et les manuels constituent des intrants essentiels pour le fonctionnement de nos systèmes éducatifs. Ainsi, pour déterminer le rapport institutionnel aux objets de certaines organisations mathématiques, on peut procéder à l'analyse des programmes et des manuels. Dans les programmes, l'institution définit les objets à enseigner, les compétences exigibles et les recommandations, ainsi que les finalités et les enjeux d'enseignement. Mais, selon Driss Menssouri (1994), ces programmes seuls ne permettent pas de définir complètement le rapport institutionnel à un objet. Alors, une analyse écologique et praxéologique des programmes et des manuels peut aider à mieux comprendre les difficultés liées à l'enseignement de la géométrie entre l'Élémentaire et le collège. En effet, il s'agit de voir si ces intrants offrent un environnement favorable ou non à la prise en charge de la question des paradigmes géométriques. Et, les résultats montrent que les organisations mathématiques présentes dans ces manuels et programmes sont incomplètes (en termes de type de tâche, de technique et de technologie) et ne prennent pas en compte le passage de relais entre paradigmes géométriques au niveau de la transition Élémentaire-collège.

Mots-clés: Programme; Manuel; Rapport institutionnel; Paradigme géométrique; Praxéologique.

RESUMO

Os currículos e os livros didáticos são insumos essenciais para o funcionamento de nossos sistemas educacionais. Assim, para determinar a relação institucional com os objetos de determinadas organizações matemáticas, podemos analisar os currículos e os livros didáticos. Nos currículos, a instituição define as matérias a serem ensinadas, as habilidades necessárias e as recomendações, bem como os objetivos e desafios do ensino. Entretanto, de acordo com Driss Menssouri (1994), os currículos por si só não fornecem uma definição completa da relação institucional com um objeto. Portanto, uma análise ecológica e praxeológica dos currículos e livros didáticos pode nos ajudar a entender melhor as dificuldades associadas ao ensino de geometria entre o ensino fundamental e o ensino médio. O objetivo é verificar se esses insumos proporcionam um ambiente favorável ou desfavorável para lidar com a questão dos paradigmas geométricos. E, os resultados mostram que as organizações matemáticas presentes nestes manuais e programas são incompletas (em termos de tipo de tarefa, técnica e tecnologia) e não levam em conta a transferência entre paradigmas geométricos no nível de transição.

Palavras-chave: Currículo; Livro didático; Relação institucional; Paradigma geométrico; Praxeológico.

ABSTRACT

Curricula and textbooks are essential inputs for the functioning of our education systems. Thus, to determine the institutional relationship to the objects of certain mathematical organizations, one can proceed to the analysis of programs and textbooks. In the programs, the institution defines the objects to be taught, the skills required and the recommendations, as well as the aims and challenges of teaching. But, according to Driss Menssouri (1994), these programs alone do not make it possible to completely define the institutional relationship to an object. So, an ecological and praxeological analysis of programs and textbooks can help to better understand the difficulties related to the teaching of geometry between elementary and middle school. Indeed, it's about seeing whether these inputs offer a favorable environment or not for addressing the question of geometric paradigms. And the results show that the mathematical organizations present in these manuals and programs are incomplete (in terms

¹ Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal

² Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal

of type of task, technique and technology) and do not take into account the handover between geometric paradigms at the transition level Elementary-middle school.

Keywords: Program; Manual; Institutional relationship; Geometric paradigm; Praxeological

RESUMEN

Los planes de estudio y los libros de texto son insumos esenciales para el funcionamiento de nuestros sistemas educativos. Así, para determinar la relación institucional con los objetos de ciertas organizaciones matemáticas, se puede proceder al análisis de programas y libros de texto. En los programas, la institución define los objetos a enseñar, las habilidades requeridas y las recomendaciones, así como los objetivos y desafíos de la enseñanza. Pero, según Driss Menssouri (1994), estos programas por sí solos no permiten definir completamente la relación institucional con un objeto. Entonces, un análisis ecológico y praxeológico de programas y libros de texto puede ayudar a comprender mejor las dificultades relacionadas con la enseñanza de la geometría entre la escuela primaria y secundaria. Efectivamente, es cuestión de ver si estos insumos ofrecen o no un entorno favorable para abordar la cuestión de los paradigmas geométricos. Y, los resultados muestran que las organizaciones matemáticas presentes en estos manuales y programas son incompletas (en cuanto a tipo de tarea, técnica y tecnología) y no toman en cuenta el traspaso entre paradigmas geométricos en el nivel de transición primaria-media.

Palabras clave: Programa; Manual; Relación institucional; Paradigma geométrico; Praxeológico.

INTRODUCTION

L'enseignement de la géométrie est indispensable à la formation de base de l'élève quelle que puisse être son orientation future. En effet, elle participe à une meilleure connaissance de l'environnement de l'enfant et au développement de sa capacité de raisonnement en vue de résoudre les problèmes pratiques de la vie. Ainsi, autant que science des mathématiques, elle n'a pas échappé aux plumes des grands didacticiens de ce siècle et à celles des spécialistes, qui, la plupart sont réunis en comité afin d'élaborer des documents-guide destinés aux enseignants. Ces spécialistes de la discipline ont largement contribué à son essor mais aussi à l'amélioration de la manière dont cette discipline devrait être enseignée aux enfants.

Nonobstant cet effort des spécialistes, l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire et au collège n'a pas manqué de poser un certain nombre de problèmes dont quelques-uns relatifs aux contenus d'enseignement ont été abordés par ces mêmes chercheurs (Bishop, 1983 ; Laborde, 1985). Les notions de paradigmes géométriques et d'espaces de travail géométriques comme outils didactiques ont été abordées par Houdement et Kuzniak (1999, 2006). Ces outils peuvent aider à étudier le problème de la cohérence globale de l'enseignement-apprentissage de la géométrie dans le milieu scolaire. Prenant appui sur ces travaux, l'angle du problème qui sera privilégié dans cette étude est la prise en charge de ces paradigmes géométriques dans les manuels et programmes au niveau de la transition Élémentaire-collège. Alors, notre question de recherche est : comment les programmes et les manuels prennent-ils en compte les changements de paradigmes dans l'enseignement de la géométrie au niveau de la transition Élémentaire-collège.

Il s'agira, par une approche praxéologique, d'analyser les fondements mis en jeu, dans les programmes et manuels d'enseignement-apprentissage de la géométrie notamment au CM2 et sixième secondaire (début de collège). Une telle analyse devrait permettre de comprendre l'organisation mathématique (OM) de cette discipline (géométrie) dans les programmes et manuels scolaires, en tenant compte de la question des paradigmes géométriques pour comprendre et expliquer comment les choix institutionnels d'enseignement contribuent aux difficultés d'apprentissage chez les élèves au niveau de la transition Élémentaire-collège.

Pour se faire, nous présentons d'abord quelques outils théoriques, ensuite les éléments méthodologiques et enfin les résultats obtenus et leurs interprétations.

QUELQUES OUTILS THÉORIQUES

Notre étude s'appuie sur deux principaux cadres : la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Chevallard (1997) et les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006).

L'approche anthropologique du didactique

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) situe l'activité mathématique, comme l'activité d'enseignement des mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales.

Elle se fonde sur le postulat que toute activité humaine, régulièrement accomplie, peut être décrite grâce au modèle unique de praxéologie, défini comme un quadruplet (types de tâches, techniques, technologies et théories). Ainsi pour Chevallard (1997, p. 44) :

L'une des premières tâches auxquelles s'affronte le professeur en tant que directeur d'étude d'une classe donnée, consiste à déterminer, à partir des indications du programme d'études officiel, les organisations mathématiques à étudier en précisant, pour chacune d'elle, son contenu précis et, en particulier, le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient ainsi que le degré de développement à donner aux composantes techniques, technologique, théorique.

L'auteur considère que,

toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une certaine technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ . En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation $[T/\tau/\theta/\Theta]$: le grec : praxis, qui signifie « pratique », renvoie au bloc pratico-technique (ou praxique) $[T/\tau]$, et le grec : logos, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. (Chevallard, 1998 ; p.1)

Selon Chevallard (1998 ; p. 2-3), une technique t est une certaine manière d'accomplir les tâches d'un type de tâches T donné. Cependant cette technique ne réussit pas partout ; elle n'est valable que « sur une partie $P(T)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme la portée de la technique » Ainsi, une technique peut être supérieure à une autre en fonction de leurs portées. Une autre remarque importante qu'on pourrait retenir de Chevallard (1998 ; p. 3) par rapport une technique utilisée dans l'exécution d'une tâche est que, « dans une institution donnée, à propos d'un type de tâches donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues ».

Et toute technique est toujours accompagnée d'au moins un embryon de technologie que Chevallard définit comme : « un discours ayant pour objet premier de justifier

rationnellement la technique, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type considéré ».

Chevallard (1998) distingue trois fonctions de la technologie :

- Une première fonction de justification qui consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est attendu ;
- Une deuxième fonction d'explication, de rendre intelligible, d'éclairer la technique qui consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi ;
- Une troisième fonction de production de techniques.

Dans une institution donnée, on ne rencontre que très rarement des praxéologies ponctuelles, c'est-à-dire des praxéologies intégrant un seul type de tâches. Les organisations praxéologiques contiennent le plus souvent plusieurs types de tâches et plusieurs techniques.

La TAD nous propose alors le modèle praxéologique pour décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités des sujets attendues par l'institution.

Les paradigmes géométriques

Cherchant à « comprendre l'effort qui construit la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible, Gonseth (1945-1952) a dégagé différentes synthèses dialectiques de la géométrie qui s'organisent précisément autour de trois piliers essentiels » (as cited in Houdement & Kuzniak, 2006 ; p. 179) que sont l'intuition, l'expérience et la déduction. Selon lui, ces piliers sont des modes de pensée qui sont inhérentes à la géométrie et qu'on retrouve donc dans tous les paradigmes de la géométrie enseignée.

Faisant siennes les synthèses dialectiques de la géométrie de Gonseth (1945-1952) qui s'articulent autour des trois modes de pensée (l'intuition, l'expérience et la déduction), Houdement & Kuzniak (2006) ont fait un découpage de la réalité géométrique : la « géométrie naturelle », la « géométrie axiomatique naturelle » et la « géométrie axiomatique formaliste ». Ce découpage en trois géométries au-delà du fait qu'il permet de cerner les malentendus didactiques relatifs à l'enseignement de la géométrie, il permet d'analyser les contenus des programmes et des manuels pour voir les types de géométrie qui y sont proposés.

La Géométrie I ou « géométrie naturelle »

La Géométrie I, selon la définition de Kuzniak (2006), est celle qui est utilisée en grande partie à l'élémentaire. Elle a pour source de validation la réalité, le sensible d'où son qualificatif de « géométrie naturelle ». Elle correspond à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas (Caveing, 1997), comme par exemple, les figures simples (cercles, carrés...). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel.

La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle »

Dans cette géométrie, « la source de validation se fonde sur les lois hypothéticodéductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux ». Houdement & Kuzniak (2006, p. 181).

L'axiomatisation est une formalisation qui n'est pas totale ici. C'est une géométrie qui selon Houdement et Kuzniak (1999, p. 13), « n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité ». Elle est beaucoup plus utilisée dans le collège. L'exemple ci-dessous est pour nous une illustration de la Géométrie II.

Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste »

C'est une géométrie fondée sur les axiomes et non sur le sensible. La primauté est accordée au raisonnement logique. Pour Houdement et Kuzniak (2006), la différence essentielle entre Géométrie II et Géométrie III, « porte sur la complétude du système d'axiomes : en Géométrie III, l'axiomatisation n'est plus partielle » (p. 181) comme en géométrie II, mais elle est totale. Ainsi, pour Wittgenstein (1975, p. 205), « Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité ». Selon Houdement et Kuzniak (1999), cette conception a permis d'introduire dans l'enseignement « une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire ». Ainsi Dieudonné (1964), parlant de l'algèbre linéaire et de la géométrie élémentaire, montrait qu'on peut se passer des figures géométriques en « géométrie axiomatique formaliste ». Elle est souvent utilisée dans le supérieur.

LES ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Il s'agit, en se référant à la Théorie Anthropologique du Didactique et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique de référence, d'analyser les fondements mis en jeu, dans les programmes d'enseignement-apprentissage de la géométrie notamment au CM2 et sixième secondaire (début de collège). Une praxéologie de référence étant une organisation disciplinaire de référence qui peut être modifiée pour donner des organisations didactiques. Une telle analyse devrait permettre de comprendre l'organisation mathématique (OM) de cette discipline (géométrie) dans les programmes scolaires, en tenant compte la question des paradigmes géométriques pour comprendre et expliquer comment les choix institutionnels d'enseignement contribuent dans la mise en place de difficultés d'apprentissage chez les élèves au niveau de la transition élémentaire-collège.

Comme ça était précisé par Elouardachi Abdellatif, Anouar Abdellah, et Abouhanifa Said (2018), la notion de praxéologie signifierait dans plusieurs travaux la caractérisation du rapport institutionnel, la détermination de l'organisation disciplinaire de référence et l'étude des organisations didactiques.

Du point de vue de la transposition didactique, Bosch et Chevallard (1999) avancent deux postulats :

1- On ne peut comprendre, ni expliquer l'organisation praxéologique (OM) apprise sans comprendre et expliquer les organisations praxéologiques (OP) des étapes antérieures ;

2- L'unité d'analyse des processus didactiques doit contenir une organisation didactique qui permette de mettre en place, au moins, une organisation praxéologie locale (OPL).

D'où la nécessité de l'ajout d'un modèle épistémologique « Praxéologie de référence » qui permettrait de caractériser et d'analyser des praxéologies à enseigner.

Notre recherche s'intéresse à décrire l'organisation de la discipline géométrie dans les programmes scolaires (CM2 et 6^e) et vise à identifier dans ces choix une insuffisance éventuelle et à la caractériser. Pour ce faire, nous avons construit un outil à partir des éléments du modèle d'organisation praxéologique de Chevallard (1999) et les paradigmes de la géométrie enseignée de Houdement et Kuzniack (2006).

Il s'agira par une lecture anthropologique des programmes de décrire :

- Les types de tâches préconisées par rapport aux types de paradigmes géométriques enseignés à l'Élémentaire et au collège
- Les techniques nécessaires à la réalisation des tâches en conformité ou non au découpage de la géométrie enseignée
- Par inférence aux types de tâches et aux techniques, les technologies et les théories sous-jacentes qui légitiment les types de tâches et les techniques préconisés.

PRÉSENTATION ET ANALYSE DES PROGRAMMES

Les programmes de mathématiques actuellement à l'élémentaire et au Moyen sont le produit d'ajustements successifs liés à leur nécessaire adaptation aux contextes socio-économique, culturel et pédagogique du Sénégal.

Aperçu sur le programme de l'élémentaire

Des hypothèses successives de construction ont présidé à l'élaboration des programmes, chacune étant guidée par la volonté d'améliorer la qualité des stratégies pour élaborer le curriculum selon les principes fondamentaux de l'approche par les compétences. Cette réforme curriculaire a commencé par l'élaboration d'un référentiel de compétences appelé le livret Horaires et Programme (LHP) et plus tard (après plusieurs expérimentations et corrections) à un guide du formateur qui devrait être considéré comme l'un des déterminants de l'environnement, propice au développement du curriculum.

Aujourd'hui, ce guide pédagogique constitue le seul document essentiel de l'enseignant pour ses pratiques de classe. Il joue à la fois le rôle de programme et de manuel pour le maître. En effet, il comprend deux grandes parties : une partie théorique où sont mention-

nés les informations de base relatives à L'APC et à la pédagogie de l'intégration et une partie pratique intitulée : « la planification des apprentissages ». Dans cette partie, ce sont les compétences de bases qui sont déclinées en OA, les OA en OS avec des informations didactiques pour des exemples de leçons ponctuelles. Une telle structuration reste la même pour toutes les étapes de l'Élémentaire.

La compétence de base en géométrie pour la 3^e étape est composée de sept paliers dont les quatre premiers sont pour le CM1 et les paliers 5, 6 et 7 sont pour le CM2.

Présentation d'un extrait du guide pédagogique relatif au programme de CM2

Nous présentons ci-dessous un exemple de planification des apprentissages relatifs au palier 5 (la compétence, les objectifs d'apprentissage (OA), les objectifs spécifiques (OS), les contenus, les durées de leçons) et les informations didactiques proposés par le programme. Ce palier 5 est le premier palier ou la première compétence à installer en classe de CM2.

PALIER 5 : Intégrer les notions liées aux positions relatives des droites et aux angles, les propriétés de figures planes (carré, rectangle, triangles, parallélogramme, losange, trapèze, cercle), ainsi que des techniques d'utilisation d'instruments dans des situations de résolution de problèmes de constructions géométriques.

• Apprentissages ponctuels

Tableau 1: Planification des apprentissages du palier 5

Objectifs d'apprentissages)	Objectifs spécifiques	Contenus	Durée
1. Reproduire des figures géométriques. 2. Découvrir les propriétés élémentaires de figures géométriques planes. 3. Construire des figures géométriques à l'aide d'instruments (Règle, double décimètre, équerre, compas, rapporteur).	Construire le carré et le rectangle.	Le carré et le rectangle : propriétés	1 leçon d'1 séance.
	Construire le triangle.	Les triangles : propriétés.	1 leçon d'1 séance.
	Construire le parallélogramme.	Le parallélogramme : propriétés.	1 leçon d'1 séance.
	Construire le cercle.	Le cercle : propriétés.	1 leçon d'1 séance.
	Construire le losange.	Le losange : propriétés.	1 leçon d'1 séance.

Source: Construction des auteurs

• Informations didactiques

Démarche :

1. Principes de la démarche

Comme évoqué précédemment, l'espace mathématique ne se constate pas, il se construit. C'est pourquoi la géométrie à l'école élémentaire sera pour l'essentiel un enseignement du tracé géométrique. À ce propos Louis Legrand (1980) rappelle que « Toute définition abstraite doit être la prise de conscience réfléchie d'une construction préalable. Ainsi les

propriétés des figures abstraitement énoncées ne doivent pas résulter d'une observation, mais elles doivent exprimer une règle de construction ».

En effet, la conception véritable de l'espace est liée à la compréhension et à l'utilisation habituelle d'une règle de construction. C'est l'aptitude et l'habitude du traçage et de la construction manuelle qui fondent et enrichissent le concept géométrique.

Il est en outre recommandé de mettre l'accent sur l'action propre des apprenants.

2. Étapes de la démarche

L'approche peut être la suivante :

a) Observation :

- Mettre la figure construite à la disposition des élèves ;
- Faire manipuler librement l'objet ;
- Faire reconnaître des formes identiques dans l'environnement

b) Construction libre

Manipulation par pliage, découpage, traçage etc..., constituent les activités principales des élèves dans cette phase pour résoudre librement le problème de construction qui leur est soumis.

c) Communication

Les productions individuelles et/ ou de groupes sont appréciées par toute la classe au regard du modèle. C'est l'occasion de verbaliser les découvertes (certaines propriétés.)

d) Construction dirigée

Maître (- tresse) et élèves réalisent l'objet selon des méthodes appropriées (cf notions clés).

e) Analyse /synthèse

Maître (maitresse) et élèves passent à la description des caractéristiques ou propriétés essentielles de l'objet géométrique étudié. Cette analyse débouche sur une synthèse consistant à définir la figure.

f) Contrôle

Emploi immédiat des propriétés découvertes pour construire l'objet géométrique

g) : Réinvestissement

Transfert des acquis dans d'autres situations.

3. Proposition d'activités du maître ou de la maîtresse.

Les activités à faire faire aux apprenant(e)s, sont pour l'essentiel des activités d'observation, d'identification de relations spatiales et de construction.

Selon ces informations didactiques, le type de géométrie préconisé par le programme est celui lié à l'espace intuitif et physique où les différents modes de pensée géométrique (l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif) s'exercent sur des objets matériels ou matérialisés. La construction demeure l'une des caractéristiques privilégiées de cette géo-

métrie élémentaire. Une telle géométrie correspond au type de géométrie I selon le modèle de Houdement et Kuzniak (2006).

Analyse praxéologique du programme élémentaire

L'organisation mathématique de cette compétence dénommée « palier 5 » se construit autour de trois types de tâches :

- T1 : Reproduire des figures géométriques
- T2 : Découvrir les propriétés élémentaires de figures géométriques planes.
- T3 : Construire des figures géométriques à l'aide d'instruments (Règle, double décimètre, équerre, compas, rapporteur).

Soulignons au passage que les intitulés ci-dessus des types de tâches ne sont pas nécessairement les formulations utilisées dans l'enseignement au niveau du manuel scolaire ou dans les pratiques de la classe. A chaque type de tâches T_i peut être associé une organisation ponctuelle simple ou complexe que nous présenterons ci-dessous.

Pour les décrire nous adapterons et compléterons le découpage des organisations mathématiques ponctuelles à enseigner dégagées dans l'analyse des programmes et des manuels en fonction de notre problématique de recherche. Pour les organisations mathématiques complexes nous présenterons les praxéologies ponctuelles qui peuvent être potentiellement associées au type de tâches T_i .

Soit OMPC (T_i) l'organisation mathématique ponctuelle complexe de référence relative au type de tâches T_i :

$$\text{OMPC} (T_i) = [T_i; \{\text{OMP1}(T_i), \text{OMP2}(T_i), \text{OMP3}(T_i), \dots, \text{OMP}_i(T_i)\}; \theta_{T_i}]$$

Avec :

- $i = \{(1, 2, \dots, n), n \text{ est un entier}\}$.
- $\text{OMP}_i(T_i)$ est l'organisation mathématique ponctuelle simple.
- θ_{T_i} est la technologie sous-jacente qui légitime le type de tâches T_i .

Cette organisation mathématique ponctuelle complexe OMPC(T_i) peut changer d'une institution à une autre, d'un manuel à un autre ou d'un enseignant à un autre.

Également, l'organisation ponctuelle mathématique complexe OMPC(T_i) pour le type de tâches (T_i) peut admettre plusieurs organisations ponctuelles simples $\text{OMP}_i(T_i)$ donc on peut écrire :

$$\text{OMPC} (T_i) = [T_i; \{\text{OMP1}(T_i), \text{OMP2}(T_i), \text{OPP3}(T_i)\}; \dots \theta_{T_i}]$$

La démultiplication de ces types de tâches complexes en types de tâches ponctuelles simples se fait en articulant les objectifs spécifiques (les éléments de la colonne 2 du tableau) aux éléments de contenus (éléments de la colonne 3).

Ainsi pour le type de tâche T2 : Découvrir les propriétés élémentaires des figures géométriques planes, on pourrait avoir d'autres sous-types de tâches T_{2i} de T2 (voir tableau ci-dessous)

Tableau 2: Sous-types de tâche de la tâche T2

$T_{2,1}$	Découvrir les propriétés élémentaires du carré
$T_{2,2}$	Découvrir les propriétés élémentaires du rectangle
$T_{2,3}$	Découvrir les propriétés élémentaires du triangle
$T_{2,4}$	Découvrir les propriétés élémentaires du cercle
$T_{2,5}$	Découvrir les propriétés élémentaires du parallélogramme
$T_{2,6}$	Découvrir les propriétés élémentaires du losange

Source: Construction des auteurs

L'organisation ponctuelle mathématique complexe $OMPC(T_{2,3})$ pour le type de tâches ($T_{2,3}$: Découvrir les propriétés du triangle) admet plusieurs organisations ponctuelles simples $OMPI(T_i)$ donc on peut écrire :

$$OMPC(T_{2,3}) = [T_{2,3}; \{OMP1(T_{2,3}), OPP2(T_{2,3}), \dots, OPPI(T_{2,3})\}];$$

Et la caractérisation d'une organisation ponctuelle simple $OMPI(T_{2,3})$ par exemple pourrait être décrit comme suit :

Tableau 3: Présentation de la caractérisation d'une organisation ponctuelle simple $OMPI(T_{2,3})$

$OMPI(T_{2,3}) = (T_{2,3.1}, t_{2,3.1}, \theta_{2,3}, \Theta)$	
$T_{2,3.1}$	Vérifier que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°
$t_{2,3.1}$	Découper un triangle équilatéral. Tracer la hauteur issue d'un sommet. Marquer le pied H de la hauteur. Plier les trois sommets du triangle de sorte qu'ils se rejoignent au pied de la hauteur H. Les trois angles du triangle forment alors au point H un angle plat.
$\theta_{2,3}$	La technologie expérimentale
Θ	Environnement technologico théorique (Théorie) : propriété fondamentale des angles d'un triangle

Source: Construction des auteurs

Cependant nous remarquons que le programme de l'Élémentaire (cf tableau n°1) n'arrive pas à ce niveau de planification. Cela pose souvent des problèmes aux enseignants. En effet, rappelons que l'une des difficultés évoquées par les acteurs lors de la mise à l'essai du curriculum et qui demeure toujours d'actualité est le problème de la planification. Beaucoup d'enseignants sont tentés d'organiser leurs activités de classe autour de tâches complexes qui posent souvent des difficultés aux élèves. Il s'y ajoute que le programme ne présente pas de techniques, encore moins de technologies pour les différents types de tâches proposées.

L'ensemble de ces informations nous ont permis de renseigner la grille ci-dessous que nous avons conçue à partir du modèle praxéologique de Chevallard (1999) et des paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006).

Pour chaque objectif d'apprentissage consigné dans le programme, la grille permet d'identifier (s'il en existe), les types de tâches proposées, les techniques préconisées et les technologies justifiant ces techniques. Et chacun de ces éléments constitutifs du modèle praxéologique (à savoir les types de tâches, les techniques et les technologies) est caractérisé en fonction des types de géométrie.

Tableau 4: Grille d'analyse des contenus de programmes

	Types de tâches proposées			Techniques préconisées			Technologies		
	G1	G2	G3	G1	G2	G3	G1	G2	G3
T1 : Reproduire des figures géométriques	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T2 : Découvrir les propriétés élémentaires de figures géométriques planes.	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T3 : Construire des figures géométriques à l'aide d'instruments (Règle, double décimètre, équerre, compas, rapporteur).	1	00	00	00	00	00	00	00	00

Source: Les auteurs

Il ressort de cette grille que le programme reste muet sur les techniques de résolution de problèmes et sur les technologies qui doivent accompagner ses techniques. Par conséquent, aucune forme de géométrie ne peut être notée pour les techniques et technologies. Seules les caractéristiques de la géométrie I apparaissent au niveau des informations didactiques, encore faudrait-il une bonne appropriation du document pour pouvoir lier ces informations aux types de tâches proposées.

Nous estimons qu'à l'image de l'organisation ponctuelle simple de référence (cf tableau 3), pour de telles tâches, des techniques de mises en œuvre devraient être proposées. Ces techniques peuvent être assimilées à des manipulations d'objets géométriques ou la mise en relations de propriétés qui conduisent aux résultats. Le discours technologique justifiant les techniques en question et les notions associées qui devraient intervenir dans la réalisation des tâches en question est absent. Plusieurs indices de non-rigidité et de complétude comme disaient Elouardachi (2018) sont ainsi absents des praxéologies mathématiques relatives aux tâches considérées.

Aperçu sur le programme du collège

Après une première tentative d'expérimentation « avortée » de l'approche par les compétences dans les collèges, le programme de 2006 reste de vigueur dans le Moyen-secondaire. Cependant il est en train d'être révisé et stabilisé par la commission nationale de mathématique (CNM) conformément aux orientations de l'UMOA. Cependant, nous avons choisi de porter notre analyse sur cette version 2006 parce que c'est elle qui est connue et utilisée dans les classes jusqu'à ce moment.

Ce programme du collège peut être décrit comme une compilation des programmes des différents niveaux ou classes qui le composent (6^e, 5^e, 4^e, 3^e).

Chaque programme de classe est structuré autour d'une introduction, d'une progression d'ensemble de la classe et d'une planification des apprentissages. La planification des apprentissages comprend trois rubriques (ou colonnes) : celle des contenus, celles des commentaires et celle des compétences exigibles.

L'introduction présente un bref rappel des pré-acquis de l'élève, les objectifs d'enseignement visés par le programme et quelques indications sur les outils ou objets mathématiques.

Dans la progression, existent deux domaines d'activités : Activités numériques et Activités géométriques. Et pour chaque domaine d'activités, sont déclinés dans le temps les thèmes d'étude à aborder dans les leçons.

Et enfin, la planification des apprentissages présente les contenus d'enseignement-apprentissage formulés sous forme de thèmes ou sujets, les commentaires qui donnent quelques indications sur la nature des activités à mener et les compétences exigibles.

a) Présentation d'un extrait du programme sixième

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les contenus, les commentaires et les compétences exigibles en géométrie pour la classe de sixième.

Activités géométriques

- Les activités géométriques occupent un temps équivalent à celui des activités numériques. Ces activités seront menées en même temps.

Tableau 5: Programme de géométrie sixième (6e)

Contenus	Commentaires	Compétences exigibles
III Droites perpendiculaires et droites parallèles		
1) Droites Perpendiculaires a)- Présentation, notation, codage b)- Droite perpendiculaire à une droite passant par un point donné (unicité). c)- Médiatrice d'un segment [AB]	• On pourra utiliser le double pliage pour introduire et présenter des droites perpendiculaires, en particulier en utilisant les lignes de feuilles quadrillées et pour faire constater la coïncidence avec les côtés appropriés d'une équerre. - On pourra retenir la définition suivante : La médiatrice d'un segment [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu du segment [AB].	• Construire avec la règle et l'équerre, avec la règle et le compas la droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné. • Vérifier à l'aide de la règle et de l'équerre que deux droites sont perpendiculaires. • Coder des droites perpendiculaires. • Reconnaître deux droites perpendiculaires dans des configurations géométriques. • Connaître et utiliser la notation : $\perp$ • Connaître la définition de la médiatrice d'un segment.
- Propriétés : • Tout point de la médiatrice d'un segment [AB] est à égale distance de A et B. • Tout point situé à égale distance de A et B appartient à la médiatrice de [AB]	• Par pliage ou avec l'usage du compas, on fera constater l'égalité des longueurs.	• Reconnaître dans une figure codée la médiatrice d'un segment. • Construire la médiatrice d'un segment : - à la règle graduée et à l'équerre - à la règle et au compas.

Source: Extrait programme de Mathématiques du Premier Cycle – Classe de Sixième – Année 2006, Sénégal (2006)

Ce programme, contrairement à celui de l'Élémentaire privilégie l'entrée par les contenus. Il est présenté sous formes de thèmes accompagnés parfois d'une liste de notions pour mieux préciser le champ d'étude et une série de tâches ou consignes appelées compétences exigibles. Cette présentation est trop synthétique et demande de la part de l'enseignant une très grande expérience et un temps considérable pour organiser ces contenus en leçons. Généralement, ces enseignants se contentent de suivre pas à pas le guide du professeur ou les manuels qu'ils trouvent sur le marché.

Il s'y ajoute que les éléments appelés « compétences exigibles » dans ce programme ne répondent pas aux exigences d'une compétence au sens de Rogers (2003). En effet, se

pose un certain nombre de problèmes du point de vue de la formulation mais aussi et surtout du point de vue de la complexité des tâches.

Par exemple, les compétences (entre autres) comme « Connaître la définition de la médiatrice d'un segment », « Construire la médiatrice d'un segment », « Vérifier à l'aide de la règle et de l'équerre que deux droites sont parallèles », « Coder des droites perpendiculaires » etc., ne sont pas de l'ordre d'une compétence mais plutôt d'un OS. Ces tâches ne sont pas aussi complexes pour faire l'objet d'une compétence. Alors nous proposons de changer soit le vocable de « compétences exigibles » soit de reformuler les contenus de la colonne des compétences exigibles.

b) Analyse praxéologique du programme de collège

Pour étudier comment ce programme prend en charge la question des paradigmes géométriques, nous nous sommes intéressés particulièrement, dans nos analyses, à deux aspects : les organisations praxéologiques mises en place et la rigidité de ces praxéologies dans le passage entre paradigmes.

Nous remarquons que dans la colonne des compétences exigibles, des types de tâches apparaissent des savoirs et savoir-faire qui correspondent à des types de tâches pour l'élève au terme des activités d'enseignement et d'apprentissage. En considérant par exemple le chapitre III portant sur les *droites perpendiculaires et droites parallèles*, on peut citer, comme étant attendu au terme des enseignement-apprentissages les types de tâches suivants :

- T1 : Construire avec la règle et l'équerre, avec la règle et le compas la droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné.
- T2 : Vérifier à l'aide de l'équerre que deux droites sont perpendiculaires.
- T3 : Coder des droites perpendiculaires.
- T4 : Reconnaître deux droites perpendiculaires dans des configurations géométriques.
- T4 : connaître et utiliser la notation de perpendicularité.
- T5 : Identifier deux droites parallèles.
- T6 : Connaître la notation du parallélisme.
- T7 : Utiliser la notation du parallélisme.
- T8 : Construire avec la règle et l'équerre ou avec la règle et le compas la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.
- T9 : Vérifier à l'aide de la règle et de l'équerre que deux droites sont parallèles.
- T10 : Connaître les propriétés du parallélisme
- T11 : Reconnaître deux droites parallèles dans des configurations géométriques

À chaque type de tâches T_i peut être associé une organisation ponctuelle simple ou complexe que nous présenterons ci-dessous. Comme précédemment, pour les organisations mathématiques complexes nous présenterons les praxéologies ponctuelles qui peuvent être potentiellement associées au type de tâches T_i .

Soit OMPC(Ti) l'organisation mathématique ponctuelle complexe de référence relative au type de tâches Ti :

$$\text{OMPC}(Ti) = [Ti; \{\text{OMP1}(Ti), \text{OMP2}(Ti), \text{OMP3}(Ti), \dots, \text{OMP}_i(Ti)\}; \theta_{Ti}]$$

Avec :

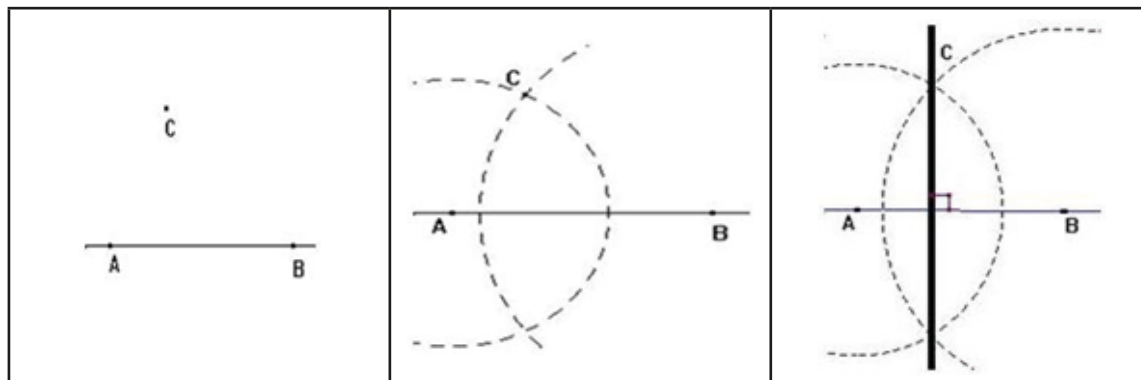
- $i = \{1, 2, \dots, n\}$, n est un entier.
- $\text{OMP}_i(Ti)$ est l'organisation mathématique ponctuelle simple.
- θ_{Ti} est la technologie sous-jacente qui légitime le type de tâches Ti.

L'organisation ponctuelle mathématique complexe OMPC(Ti) pour le type de tâches (Ti) peut admettre plusieurs organisations ponctuelles simples $\text{OMP}_i(Ti)$ donc on peut écrire:

$$\text{OMPC}(Ti) = [Ti; \{\text{OMP1}(Ti), \text{OMP2}(Ti), \text{OMP3}(Ti)\}; \dots \theta_{Ti}]$$

Un exemple d'organisation mathématique ponctuelle : activité relative aux propriétés de la médiatrice d'un segment

Perpendiculaire à une droite donnée passant par un point n'appartenant pas à cette droite.
On donne une droite (AB) et un point C n'appartenant pas à cette droite.
 Il est toujours possible de tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C.
 Pour cela on construit le symétrique du point C par rapport à la droite (AB). C'est le point d'intersection du cercle centre A et de rayon AC avec le cercle de centre B et de rayon BC



Médiatrice d'un segment

La principale construction ici est sans doute le tracé de la médiatrice d'un segment.

La médiatrice du segment [AB] est la droite Δ qui coupe perpendiculairement [AB] en son milieu I.

On remarque que la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points qui sont à égale distance de ses extrémités.

Ceci se voit aisément en remarquant que si l'on considère un point M de la médiatrice, les segments [AM] et [BM] ont la même longueur. (On peut le montrer en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AMI et IMB).

Donc, si l'on sait construire la médiatrice, on sait donc déterminer le milieu d'un segment et tracer une perpendiculaire à une droite.

Pour cela, on ouvre le compas sur une longueur supérieure à la moitié de la longueur du segment, puis on trace deux cercles avec ce rayon, l'un centré sur A, l'autre sur B (on peut se contenter de ne tracer que des arcs de cercle). L'intersection des deux cercles est constituée de deux points situés à égale distance de A et de B, et qui définissent donc bien la médiatrice

Dans cette activité, on peut identifier la tâche t « tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C ». Elle est relative au type de tâches T : « construire la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point n'appartenant pas à cette droite ».

L'accomplissement de cette tâche t , par les élèves, est guidé par des injonctions telles que « place », « trace », « construis », « vérifie » qui constituent autant de sous-tâches dans lesquelles il est nécessaire de s'engager pour accomplir t . Le canevas, support sur lequel va s'appuyer la réalisation de cet ensemble de sous-tâches, constitue la manière de faire, la technique associée à t , et qui va permettre d'accomplir t .

Cette technique ayant été décrite, il faut alors une propriété, un théorème ou une définition pour garantir que, s'engageant à suivre ce qui lui est demandé, l'élève parviendra au résultat. C'est la propriété de la médiatrice qui, tout à la fois, justifie que la mise en œuvre de la technique décrite permet d'obtenir la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C et rend compréhensible la technique engagée. La propriété de la médiatrice joue ainsi le rôle de l'élément technologique à partir duquel s'organise la verbalisation ou le discours.

Et l'élément qui justifie à son tour cette technologie constitue la théorie Θ qui peut être l'ensemble des connaissances mathématiques enseignées et nécessaires pour l'établissement de la perpendicularité d'une droite à une autre droite passant par un point précis, dans le programme.

Cependant, il faut noter que ces types d'organisations mathématiques ponctuelles restent sous-jacents dans le programme, nécessitant alors de la part de l'enseignant un effort supplémentaire pour la compréhension et la mise en œuvre des contenus d'enseignement-apprentissage. Il nous semble alors important de ne pas se limiter à une description de l'organisation mathématique ponctuelle (OMP), mais de présenter l'organisation mathématique locale (OML) qui peut regrouper plusieurs organisations mathématiques ponctuelles simples (OMP).

c) Exemple d'organisation mathématique locale (OML)

Considérons les quatre premiers types de tâches de la liste présentée dans l'exemple précédent :

- T1 : Construire avec la règle et l'équerre, avec la règle et le compas la droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné.
- T2 : Vérifier à l'aide de l'équerre que deux droites sont perpendiculaires.
- T3 : Coder des droites perpendiculaires.
- T4 : Reconnaître deux droites perpendiculaires dans des configurations géométriques.

Ces quatre types de tâches ainsi que les techniques qui leur sont associées, sont tous dépendants, pour leur mise en œuvre, de l'élément technologique : « les propriétés de la médiatrice ». L'organisation mathématique qui en découle, résultant de l'agrégation de différentes organisations mathématiques ponctuelles autour de l'élément technologique θ = «

propriétés de la médiatrice », et qui peut se noter $[Ti//i/\theta/\Theta]$ avec $i\{1,2,3\}$, est alors appelée une organisation mathématique locale autour des propriétés de la médiatrice.

C'est ce type d'organisation dont il s'agit le plus souvent dans ce programme du point de vue des types de tâches et des quelques indications données sur les technologies. On note une absence de techniques et un environnement technologique-théorique clairement défini pouvant guider et justifier l'exécution des tâches.

Quand nous appliquons notre grille d'analyse aux contenus de ce programme, nous obtenons les résultats suivants. Nous rappelons que cet outil a pour rôle de vérifier l'existence des types de tâche, des techniques et des technologies dans les organisations mathématiques d'un programme ou d'un manuel et de les caractériser par rapport aux paradigmes géométriques (G1, G2, G3). C'est-à-dire, après l'identification des éléments constitutifs d'une praxéologie (type de tâche, technique et technologie), il s'agira de les classer dans les différents paradigmes en fonction de leurs caractéristiques.

Tableau 6: Grille d'analyse des contenus du programme de collège

	Types de tâches proposées			Techniques préconisées			Technologies		
	G1	G2	G 3	G1	G2	G 3	G1	G2	G 3
T1	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T2	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T3	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T4	1	1	00	00	00	00	00	00	00
T5	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T6	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T7	1	1	00	00	00	00	00	00	00
T8	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T9	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T10	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T11	1	00	00	00	00	00	00	00	00

Source: Construction des auteurs

Les formes de géométrie qu'on devrait utiliser pour exécuter les types de tâches ne sont pas clairement définies dans le programme. Cependant, la nature des différentes tâches, les commentaires qui donnent quelques indications sur les technologies, permettent de les classer selon le modèle de Kuzniak (2006). Ainsi le tableau montre que la majorité des types de tâches est située en géométrie I (G1). Mais certains font appel à la géométrie II (G2). Prenons comme exemple le **T11 : Reconnaître deux droites parallèles dans des configurations géométriques**. Dans ce type de tâche plus ou moins complexe, on peut être amené à « montrer que deux droites sont parallèles dans une configuration géométrique donnée ». L'exécution de ce sous type de tâche engage l'application des technologies issus des propriétés du parallélisme. Ainsi, dans un tel exercice, on ne saurait accepter un travail exclusivement fait en géométrie I pour un élève de sixième qui devrait avoir appris entre autres :

1) **la définition du parallélisme** : deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont perpendiculaires à une même droite ;

2) les propriétés :

- Par un point donné, il passe une parallèle à une droite et une seule.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Deux droites perpendiculaires à deux droites parallèles sont parallèles.
- Lorsque deux droites sont perpendiculaires toute droite parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

En effet, après l'intuition, l'élève peut utiliser un ensemble de matériels géométriques (équerre, règles, compas etc..) pour tracer ou vérifier ou procéder par pliages ou découpages mais la validation doit être basée sur les propriétés apprises. On serait alors en géométrie II (G2) ou à défaut dans une autre forme de géométrie située entre la géométrie I et la géométrie II. Or, « l'omission » ou la non-précision de la technique ou technologie dans le programme, n'interdirait peut-être pas l'enseignement et l'apprentissage de méthodes permettant la réalisation de ces types de tâches, mais ces techniques ne seraient alors pas justifiées et, du point de vue des élèves, sans doute « n'y aurait-il rien à comprendre », mais simplement à croire sur parole du professeur.

En tout état de cause, au regard du tableau, le programme du Moyen (comme celui de l'Élémentaire), ne prend pas en charge la question des techniques et des technologies qui devraient accompagner les types de tâches à exécuter dans les leçons.

ANALYSE DES MANUELS AUX PROGRAMMES

Il s'agira ici, de procéder à l'analyse de quelques manuels aux programmes de l'Élémentaire et du collège. Mais avant d'en arriver à l'analyse des contenus, il semble important de rappeler les caractéristiques, les fonctions et la méthodologie d'élaboration de ces manuels en fonction des programmes.

Caractéristiques et fonctions du manuel à l'Élémentaire

Caractéristiques du manuel scolaire

Selon les *Devis techniques et pédagogiques des manuels d'essai du curriculum* (MEN, 2017), le manuel est un matériel imprimé, structuré, destiné à des apprenants pour être utilisé dans un processus d'apprentissage. Le manuel prend en charge tous les éléments d'apprentissage du programme d'études pour lequel il est produit. On retrouve dans le manuel des activités d'apprentissage et d'évaluation qui couvrent la totalité des paliers, des objectifs d'apprentissage et spécifiques et les éléments des contenus. Il propose un ordre d'apprentissage et d'évaluation correspondant à ce qui est décrit dans le programme.

Le manuel doit être conçu de sorte qu'il n'invite pas l'apprenant à y écrire ou y dessiner. Ainsi, les activités proposées à l'apprenant doivent être facilement transposables dans un cahier ou sur une ardoise, et les consignes à l'apprenant doivent l'amener à le faire.

Les principales fonctions du manuel scolaire sont les suivantes : la transmission de connaissances, le développement de capacités et de compétences, la consolidation des ac-

quis, l'évaluation des acquis, une aide à l'intégration des acquis, l'Éducation sociale et culturelle.

Méthodologie d'élaboration d'un manuel

À l'Élémentaire, selon les spécifications techniques et pédagogiques édictées par l'Institut national d'étude et d'action pour le développement de l'éducation (INEADE), la méthodologie préconisée pour l'élaboration d'un manuel devrait être fondée autant que possible sur l'Approche par les Compétences (APC), soutenue par la pédagogie de l'intégration. Tout au moins, en s'appuyant sur le vécu de l'apprenant, les activités d'apprentissage proposées devront permettre à l'enseignant de mettre en œuvre ou d'opérationnaliser des stratégies d'enseignement / apprentissage centrées sur l'apprenant.

Le manuel adoptera et mettra en pratique les grands éléments de l'APC. Cette approche devra être décrite de même que les principaux éléments qui la caractérisent. La compétence est définie comme étant « la capacité que manifeste un apprenant, en situation de classe ou ailleurs, de mobiliser et d'intégrer un ensemble, suffisant à un moment donné, de savoirs, de savoir-faire et de savoir-être pour résoudre une situation-problème nouvelle, familière et significative ».

Ainsi, les différentes phases de la démarche de l'APC seront respectées tout au long du manuel : i) la phase de préparation, correspondant à la situation de départ ou à la mise en situation, ii) la phase de réalisation, qui constitue le cœur de la situation où l'apprenant construit ses nouveaux savoirs, iii) la phase d'intégration et de réinvestissement, qui permet de revenir sur les tâches accomplies pour faire le point sur les connaissances acquises, pour les généraliser, les évaluer et les transférer dans d'autres situations.

Les situations d'apprentissage respecteront un certain nombre de caractéristiques propres à l'APC. Elles seront d'abord complexes et contextualisées, c'est-à-dire qu'elles seront constituées de situations problèmes qui nécessitent la mobilisation de plusieurs ressources : elles font appel au vécu ou aux acquis de l'apprenant. Elles contiennent des situations de départ ainsi qu'une série d'activités qui permettent de développer des compétences précises. Elles font appel à plus d'un type de connaissances (déclaratives, procédurales, conditionnelles).

Les tâches confiées à l'apprenant sont signifiantes, c'est-à-dire qu'elles s'inscrivent dans l'environnement connu de l'apprenant, elles ont un sens pour lui, elles sont concrètes, réalistes et réalisables. Enfin, les Situations significatives d'Intégration (SSI) sont présentées à la fin de chaque palier.

Le manuel propose des stratégies qui favorisent une variété de types de pédagogie prescrits par le curriculum. On y privilégie une pédagogie différenciée (présence dans les consignes de travail de tâches individualisées, adaptées à une diversité d'apprenants et à différents styles d'apprentissage), on y propose des consignes qui privilégient le travail de groupe et la résolution de problèmes concrets.

Enfin, le manuel propose des activités d'évaluation formative, des activités d'autoévaluation et des évaluations sommatives. L'évaluation sommative doit évaluer une compé-

tence ; elle mobilise une diversité de ressources (savoirs, savoir-faire et savoir-être) en rapport avec la ou les compétences.

Le manuel comporte souvent des éléments de repère destinés à faciliter le repérage et l'organisation des contenus (avant-propos lorsque pertinent, introduction présentant les options méthodologiques et formulant conseils d'utilisation, table des matières, glossaire ou index, etc.).

Aujourd'hui, plusieurs manuels produits et agréés par l'Institut national d'étude et d'action pour le développement de l'éducation (INEADE) selon les spécifications techniques et pédagogiques évoquées ci-dessus sont utilisés à l'Élémentaire.

Nous allons dans la partie qui suit analyser un exemple de manuel utilisé à l'Élémentaire.

Analyse écologique et praxéologique d'un manuel de l'Élémentaire

Nous avons choisi de travailler avec le manuel mathématique CM2 « Fermon/Éditions Hachette » pour deux raisons comme évoquées dans la méthodologie. D'abord parce qu'il fait partie des manuels agréés par l'État. Ensuite parce que, c'est le manuel qui est utilisé dans les écoles de notre zone d'investigation.

Ce manuel, destiné aux élèves de CM2, est conforme au programme établi dans le Guide pédagogique. Il propose une organisation chronologique des leçons alternant les quatre domaines des mathématiques que sont : Activités numériques, Activités géométriques, Activités de mesure, Résolution de problèmes.

La progression dans chaque domaine est structurée en paliers, chaque palier est terminé par une situation d'apprentissage de l'intégration et une situation d'évaluation. Le nombre de leçons consacrées à un palier est différent d'un palier à un autre et d'un domaine mathématique à un autre.

Une leçon du manuel peut porter sur un à plusieurs types de tâches tels que déclinés dans le programme. Mais aussi on rencontre des leçons portant sur des aspects spécifiques d'un type de tâche du programme surtout quand celui-ci paraît trop complexe pour être exécuter en une leçon.

Chaque leçon du manuel est structurée comme suit :

- un titre qui présente l'objet de la leçon
- une phase d'apprentissage (rubrique : **Mise en situation**) au cours de laquelle les élèves sont mis en situation et soumis à des activités de recherche les conduisant à la découverte plus ou moins autonome des notions nouvelles.
- Une phase d'institutionnalisation (rubrique Mes savoirs nouveaux). Un moment de synthèse qui permet de prendre conscience des démarches utilisées, de faire le point sur les résultats obtenus
- Une phase de consolidation et d'évaluation : la rubrique **je m'exerce, je consolide** propose en moyenne deux exercices dont les difficultés sont d'ordre croissant, une situation d'évaluation termine la leçon.

Ces leçons ont la même configuration et les mêmes rubriques dans le manuel : « Mise en situation », « je m'exerce, je consolide », « Évaluation » ont également la même structuration partout dans le manuel. Les types de tâches proposées dans les différentes phases d'une leçon font souvent appel à des connaissances procédurales. Ainsi, nous avons décidé d'analyser tous les exercices d'une leçon donnée (soit 4 exercices : une mise en situation, 2 exercices d'entraînements et un exercice d'évaluation. Nous avons choisi de travailler sur le triangle parce qu'il est une figure géométrique élémentaire, à l'instar du point, de la droite ou du cercle, mais aussi et surtout il constitue depuis l'Antiquité une réserve inépuisable de propriétés, d'exercices et de théorèmes mathématiques de difficultés variées.

Il s'agit alors de lister l'ensemble des tâches, les éventuelles techniques et technologies contenues dans une leçon pour ensuite leur appliquer la grille d'analyse. Ainsi, en considérant la leçon 6 page 11, nous avons les tâches suivantes.

- T_1 : construire le triangle ABC
- T_2 : Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C
- T_3 : Relier chaque sommet d'un triangle au milieu du côté opposé
- T_4 : Tracer un triangle GPL, rectangle en P, dont les côtés de l'angle droit mesurent 6,5 cm et 4,8 cm.
- T_5 : Tracer la hauteur issue de P du triangle GLP
- T_6 : Tracer un triangle AUL, isocèle et rectangle en L, dont les côtés de l'angle droit mesurent 5,5 cm.
- T_7 : Tracer la médiane issue du sommet L.
- T_8 : Construis un triangle équilatéral de 6 cm de côté dont les trois hauteurs ont été tracées.

Dans ces activités, plusieurs tâches (T_1 à T_8) peuvent être identifiées.

Considérons la tâche T_4 : **Tracer un triangle ALU, isocèle et rectangle en L, dont les côtés de l'angle droit mesurent 5,5 cm.**

L'accomplissement de cette tâche T_4 , par les élèves, peut être guidé par des consignes telles que « construis », « trace », « place », « mesure » etc. qui constituent autant de sous-tâches dans lesquelles il est nécessaire de s'engager pour accomplir T_4 . Le canevas, support sur lequel va s'appuyer la réalisation de cet ensemble de sous-tâches, constitue la manière de faire, la technique 't' associée à T_4 , et qui va permettre d'accomplir T_4 . Cependant, dans aucune des phases d'une leçon, il n'est présenté de techniques ou de technologies pour l'exécution d'une tâche. La grille appliquée à ces contenus du manuel donne les résultats suivants :

Tableau 7: Grille d'analyse d'un manuel de l'Élémentaire

	Types de tâches proposées			Techniques préconisées			Technologies		
	G1	G2	G 3	G1	G2	G 3	G1	G2	G 3
T1	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T2	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T3	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T4	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T5	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T6	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T7	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T8	1	00	00	00	00	00	00	00	00

Source: Les auteurs

Ces résultats sont à peu près similaires à ceux des programmes. Ils montrent que les manuels ne vont pas plus loin que le programme. L'interprétation qu'ils font du programme est une reproduction des types de tâches sous forme d'activités ou d'exercices structurés en des chapitres ou leçons. Les tâches proposées sont en géométrie I comme dans le programme. Presque aucune tâche ou exercice dans le manuel ne fait appel à la géométrie II (G2), alors qu'à la troisième étape, au-delà des connaissances procédurales, l'élève peut recourir à l'analyse par le raisonnement pour se faire sa propre compréhension des situations problèmes.

À partir de ce moment, avec les ressources dont il dispose, il pourra désormais établir des liens entre ces ressources pour conjecturer ou faire des déductions simples. Donc ce manuel gagnerait à faire des incursions en géométrie II en proposant des exercices ou des types de tâches qui faciliteraient à l'élève et l'enseignant le passage entre paradigmes géométriques.

Caractéristiques et fonctions du manuel au collège

A l'instar de l'Élémentaire, plusieurs manuels sont utilisés par les élèves et les enseignants dans les classes au collège. Cependant, nous avons choisi de travailler avec la collection Interafricaine de Mathématiques (CIAM 6e) dont le ratio manuel/élève est plus important dans nos établissements d'enseignement Moyen-secondaires. Il est accessible à tous les élèves et enseignants parce qu'il est donné gratuitement dans les établissements en nombre relativement suffisant. Il s'y ajoute que qu'il fait partie des manuels plus connus du fait que sa cible s'étend sur tous les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Il est en effet le fruit d'une collaboration entre États depuis 1992.

Ce manuel a pour objectifs majeurs :

- l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à disposition des élèves et des enseignants un document de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain comme support et véhicule des concepts mathématiques ;
- l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion. (CIAM 6^e, P.4).

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques sixième est structurée autour des points suivants :

- une préface
- un sommaire
- une partie pratique composée de deux sous parties intitulées respectivement : Activités géométriques et Activités numériques

Les activités géométriques sont composées de 8 chapitres (Droites ; Mesure de segments ; cercles ; Angles ; Figures symétriques par rapport à un point ; Parallélogrammes ; Figures symétriques par rapport à une droite ; Pavés et Cylindres droits).

Chaque chapitre à son tour commence par un petit rappel sur le thème d'étude faisant appel à l'histoire des mathématiques. Ensuite chaque élément ou point du chapitre fait l'objet : d'une activité ou définition, des propriétés à retenir (s'il en existe) et des exercices. À la fin de chaque chapitre, nous avons une série d'exercices d'entraînement et d'approfondissement portant sur l'ensemble du chapitre.

Cependant une lecture critique de ce document montre tout d'abord que le manuel ne couvre pas le programme. En effet beaucoup de notions comme : le repérage dans le plan ; la sphère et la boule ; le repérage sur une sphère (qui sont dans le programme) ne sont pas abordés dans le manuel. Il s'y ajoute qu'il semble être en déphasage avec le programme qui privilégie l'entrée par les compétences alors que le manuel propose une entrée par les thématiques. Ainsi, les types de tâche du programme peuvent ne pas correspondre à ceux du manuel que nous allons analyser dans le paragraphe suivant.

Analyse praxéologique du manuel de sixième

Il s'agira de voir comment les contenus géométriques y sont organisés selon le modèle praxéologique et par rapport aux différentes formes de géométrie enseignées. Nous avons choisi d'analyser deux situations problèmes : un exercice d'entraînement sur le parallélisme et la perpendicularité (exo 32 page 27) et un exercice d'approfondissement sur le triangle (exo 46 page 105). Ce choix est guidé par le fait que dans chacun des exercices, on demande à l'élève de justifier sa réponse où l'on peut espérer voir un raisonnement déductif fondé sur des lois ou propriétés. Il s'y ajoute que les notions abordées dans ces exercices sont également étudiées au CM2 sous d'autres formes selon les programmes.

Les types de tâches ou tâches qui y sont proposés (cf exercices 32 page 27 et 46, page 105) sont du genre :

T1 : Trace deux droites perpendiculaires (D_1) et (D_2)

- T2 : Construis deux droites parallèles à (D_1)
- T3 : Quelle est la position de (D_2) par rapport à ces trois droites
- T4 : Justifie ta réponse
- T5 : Construis un triangle AUL rectangle U
- T6 : Construis le point R, symétrique de L par rapport à (AU)
- T7 : Justifie la nature du triangle ALR

En appliquant la grille d'analyse à ces types de tâches, nous obtenons les résultats suivants.

Tableau 8: Grille d'analyse d'un manuel de sixième (CIAM)

	Types de tâches proposées			Techniques préconisées			Technologies		
	G1	G2	G3	G1	G2	G3	G1	G2	G3
T1 :	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T2 :	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T3 :	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T4 :	0	1	00	00	00	00	00	00	00
T5 :	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T6 :	1	00	00	00	00	00	00	00	00
T7 :	1	1	00	00	00	00	00	00	00

Source: Les auteurs

Le manuel ne précise pas les types de géométrie attendus pour l'exécution de ces tâches. Contrairement au programme de l'Élémentaire où les commentaires pouvaient donner quelques indications sur les types de géométrie attendus, le manuel reste exempt d'indices sur les formes de géométrie à utiliser. Ainsi, nous nous sommes fondés sur le modèle de Houdement et Kuzniak pour les classer. Toute tâche dont la réalisation se fait sur des objets matériels ou matérialisés (tracés, schémas, figures...) avec des expériences mécaniques et dont la validation est liée à l'expérience étant donné la vue est en géométrie I. C'est le cas pour les types de tâches T1, T2, T3, etc. Et celles dont le raisonnement ou la source de validation pourrait se fonder sur des propriétés acquises ou des lois hypothéticodéductives (comme T4 et T7) sont classées en géométrie II.

Le manuel est alors à cheval sur la géométrie I et la géométrie II. Cependant il faut noter que qu'il y a trop plus d'exercices de géométrie I que de géométrie II. Ce déséquilibre ne permet pas aux élèves et aux enseignants d'avoir assez d'occasions (situations problèmes didactiques ou d'évaluation) de travailler le passage entre paradigmes géométriques. Ce qui semble expliquer en partie que jusqu'en fin collège la majorité des élèves restent souvent en géométrie I dans l'exécution des tâches qui leur sont proposées.

La grille d'analyse montre par ailleurs que le manuel ne présente pas de techniques encore moins de technologies pour l'exécution des tâches. L'absence de techniques peut s'expliquer par le niveau taxonomique des exercices. Ce sont des manuels qui sont souvent destinés aux élèves et qui cherchent à tester toutes les connaissances requises par rapport à une notion donnée. Ce sont également des contenus qui peuvent être utilisés dans des évaluations certificatives, alors donner les techniques serait synonyme de donner des béquilles donc de biaiser l'évaluation. Cependant l'environnement technologique-théorique devrait être précisé pour que le manuel puisse jouer pleinement son rôle de support à l'évaluation formative ou à l'auto-formation. Ainsi, un tel manuel met plus l'accent sur l'évaluation (l'effet d'entraînement) que le caractère didactique.

CONCLUSION

Notre analyse des programmes officiels et des manuels nous a permis d'identifier et d'analyser les organisations mathématiques (présents dans ces documents) en termes de types de tâches, de techniques et de technologies, mais également en fonction des paradigmes géométriques.

Ainsi, pour le programme Élémentaire, nous avons des organisations praxéologiques incomplètes. Seuls les types de tâches apparaissent à travers les OS. Souvent, ce sont des types de tâches relativement complexes qui font appel à d'autres sous-types de tâches dont l'organisation mathématique reste sous-jacente.

Pour ce qui est du programme collège, les résultats d'analyse sont à l'image de ceux de l'Élémentaire. En effet, les organisations praxéologiques demeurent incomplètes. Elles apparaissent sous forme d'organisations locales avec des types de tâches plus ou moins vagues. Dans la plupart des cas des techniques ne sont pas proposées et souvent, aucune information technologique permettant d'expliquer, de justifier, de délimiter le champ d'étude n'est donnée.

S'agissant des manuels de l'Élémentaire, les organisations praxéologiques sont également incomplètes. Il n'y a pas de techniques ou de technologies autour des types de tâches. Par interprétation du programme, quasiment tous les types de tâches sont de la géométrie I. La question du choix des paradigmes ne se pose pas à l'Élémentaire même si de façon générale, les techniques et les technologies n'apparaissent pas clairement dans les organisations mathématiques. Compte tenu des pré-acquis des élèves et des contenus d'enseignement-apprentissage du programme élémentaire, la gamme des choix pour les paradigmes de la géométrie enseignée reste réduite contrairement au Moyen ou l'élève a la possibilité de rester en géométrie I ou en géométrie II.

Au collège, les manuels présentent les mêmes formes d'organisations mathématiques (OML incomplète) que le programme. Les tâches ne sont accompagnées d'aucune technique et donc d'aucune technologie pouvant justifier les techniques utilisées. Et cela peut s'expliquer par les raisons évoquées pour les manuels de l'Élémentaire. Il est possible que les élèves qui sont les principaux destinataires de ces manuels soient supposés maîtriser les techniques et technologies qui devraient accompagner les types de tâches. Une autre raison qui semble plus plausible est que ces concepteurs de manuels ne soient imprégnés des enjeux de l'enseignement-apprentissage de la géométrie donc de la question des paradigmes. En somme, ces analyses nous ont permis d'identifier des contraintes, internes aux curriculums, expliquant l'inexistence (ou le caractère non apparent) des liens entre les formes de géométrie enseignées à l'Élémentaire et au collège. L'approche écologique, qui exige l'étude d'interrelations de l'objet auquel on s'intéresse avec d'autres objets de savoir, nous a permis d'identifier que ni le programme de l'Élémentaire, ni ses manuels ne font état de la géométrie II. Ce cloisonnement ne favorise pas le passage entre paradigmes donc rend l'environnement de l'enseignement – apprentissage de la géométrie plus difficile.

L'analyse praxéologique a montré que les contenus des programmes et des manuels en matière de tâches ne prennent pas en compte (ou du moins ne sont pas explicites sur),

les techniques et les technologies à utiliser pour leur réalisation, encore moins les types de géométrie attendus. Ainsi, ces documents (programmes et manuels) constituant les supports didactiques essentiels pour l'enseignant et l'élève, ne les aident pas beaucoup à une bonne appropriation des paradigmes géométriques. Ce qui n'est pas sans conséquence sur les évaluations.

REFERENCES

BISHOP, A. [1983] Space and geometry, in Acquisition of mathematical concepts and processes, Academic Press, p. 175-203

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. Recherches en didactique des mathématiques, 19(1), 77-124.

CAVEING, M. (1997) La figure et le nombre, Septentrion, Lille.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *La Rochelle*, 4-11 juillet 1998 ; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

ELOUARDACHI, A., Anouar, A., & Said, A. (2018). Analyse d'une praxéologie de référence du concept de champ magnétique.

GONSETH F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*, Éditions du Griffon, LAUSANNE.

HOUEMENT C., & KUZNIAK A. (1998). Géométrie et paradigmes géométriques « petit x » n° 51, pp. 5 à 21, 1998 – 1999.

HOUEMENT C., & KUZNIAK A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 20(1), 89-116.

HOUEMENT C., & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales De Didactique Et De Sciences Cognitives, volume 11, p.175 – 193.

KUZNIAK, A. (2003). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Notes d'habilitation, IREM Université de Paris VII.

KUZNIAK, A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6(2), 167-187.

KUZNIAK, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. In Proceedings of the First French-Cypriot Cfence of Mathematics Education, 71-89.

LABORDE, C. (1985). Quelques problèmes d'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, JOURNAL ARTICLE Vol. 5, No. 3 (Nov., 1985), pp. 27-34.

LEGRAND, L. Psychologie appliquée à l'éducation intellectuelle, Enfants de 6 à 14 ans, Éditions Fernand Nathan, 1980.

MENSSOURI, D. (1994). Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition : le cas des relations entre droites et équations dans les classes de seconde et de première (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble.

SENEGAL. Guides révisés du CEB.

ROEGIER, X. (2003). Des situations pour intégrer les acquis scolaires. Bruxelles, Belgique : De Boeck.

WITTGENSTEIN, L. (1964) 1975 Remarques philosophiques, Gallimard.

SENEGAL. Programme d'Amélioration de la Qualité, de l'Équité et de la Transparence – Education / Formation (PAQUET – EF) 2018 -2030, Sénégal.

SENEGAL. Guide révisé 3^e étape mathématiques.

SENEGAL. Collection Inter-Africaine de Mathématiques : CIAM (6^{ème}).

SENEGAL. Devis techniques et pédagogiques des manuels d'essai du curriculum (MEN), 2017, Sénégal.

SENEGAL. Mathématiques CM2- Fermon/Éditions Hachette.

Histórico

Recebido: 08 de outubro de 2023.

Aceito: 11 de janeiro de 2024.

Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

DIARRA, Sounkharou; SOKHNA, Moustapha. Analyse praxéologique des programmes et manuels de géométrie au niveau de la transition élémentaire-collège : les paradigmes géométriques en question. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024010, 2024. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024010.id597>

Como citar – APA

DIARRA, S., & SOKHNA, M. (2024). Analyse praxéologique des programmes et manuels de géométrie au niveau de la transition élémentaire-collège : les paradigmes géométriques en question. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024010. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024010.id597>

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud  

José Messildo Viana Nunes  

Afonso Henriques  