Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024011
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024011.id598

A aventura da criatividade matemática: o princípio de variabilidade na geometria elementar

The adventure of mathematical creativity: the variability principle in elementary geometry

La aventura de la creatividad matemática: el principio de variabilidad en la geometría elemental

José Carlos Cifuentes[1]

Alessandra Hendi dos Santos[2]

RESUMO

Esta proposta visa a formação do professor de Matemática e do professor formador de professores na pesquisa matemática em nível elementar com propósitos didáticos e, para tanto, introduz um princípio metodológico inovador que chamaremos de *princípio de variabilidade* como o seu fundamento, mostrando o seu funcionamento através de exemplos representativos especialmente no campo da geometria e trigonometria elementares. A virtude dos exemplos mostrados, desenvolvidos suficientemente desde os seus inícios elementares até os seus pontos de contato com a matemática superior, reside nas suas potencialidades e estímulo para a implementação de outros exemplos de nível básico ou superior que o próprio professor em formação possa desenvolver para o aprimoramento de seu ensino. Este trabalho também mostra como no campo da descoberta e criatividade matemáticas são importantes formas de pensamento matemático que priorizem a intuição e visualização sobre a forma de um argumento como meio de acesso ao conhecimento matemático.
Palavras-chave: Formação de professores de Matemática; Descoberta e criatividade matemáticas em nível elementar; Princípio de variabilidade; Intuição e visualização sobre a forma de um argumento.

ABSTRACT

This proposal aims to offer training to mathematics teachers and to teacher trainer conducting mathematical research at the for didactic purposes at the elementary level, to achieve this, it introduces an innovative methodological principle that we will refer to as the *principle of variability* as its foundation, revealing its functioning through representative examples particularly in the field of elementary geometry and trigonometry. The strength of the showcased examples, which are thoroughly developed from their elementary basic beginnings to their intersections with higher mathematics, lies in their potential and capacity to inspire for the implementation of other examples at a basic or higher level that the teacher in training can develop for improvement of his teaching. This work also illustrates how in the field of mathematical discovery and creativity are important forms of mathematical thinking prioritizing intuition and visualization about the argumentation shape as a mean of accessing mathematical knowledge.
Keywords: Mathematics teacher training; Mathematical discovery and creativity at an elementary level; Principle of variability; Intuition and visualization about the argumentation shape.

RESUMEN

Esta propuesta tiene por finalidad la formación del profesor de matemática y del profesor formador de profesores en investigación matemática a nivel elemental con propósitos didácticos y, para eso, introduce un principio metodológico innovador que llamaremos *principio de variabilidad* como su fundamento, mostrando su funcionamiento a través de ejemplos representativos especialmente en el campo de la geometría y trigonometría elementales. La virtud de los ejemplos mostrados, desarrollados suficientemente desde sus inicios elementales hasta sus puntos de contacto con la matemática superior, reside en sus potencialidades y estímulo para la implementación de otros ejemplos de nivel básico o superior que el mismo profesor en formación pueda desarrollar para el mejoramiento de su enseñanza. Este trabajo también muestra cómo en el campo del descubrimiento y creatividad matemáticos son importantes formas de pensamiento que prioricen la intuición y la visualización sobre la forma de un argumento como medio de acceso al conocimiento matemático.
Palabras clave: Formación de profesores de matemática; Descubrimiento y creatividad matemáticos en nivel elemental; Principio de variabilidad; Intuición y visualización sobre la forma.

1 Doutor em Matemática, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor do Departamento de Matemática e do PPGECM da Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR, Brasil. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática-UFPR, Centro Politécnico-Jardim das Américas-Caixa Postal 19096-Curitiba-PR-CEP: 81531-980. E-mail: jccifa@gmail.com

2 Doutora em Educação Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora Formadora da Secretaria Municipal de Educação (SME) de Curitiba e Pós-doutoranda no PPGECM (UFPR), Curitiba, PR, Brasil. Endereço para correspondência: SME Curitiba-Av. João Gualberto, 623, Torre C 7° andar-Alto da Glória, Curitiba-PR-CEP: 80030-000. E-mail: alessandra.hendi@gmail.com

INTRODUÇÃO: A VISUALIZAÇÃO DA FORMA OU CONFIGURAÇÃO DE UM ARGUMENTO NO PENSAMENTO MATEMÁTICO

O que entendemos por *saber bem ensinar matemática?* Uma melhor interpretação desse *saber bem* desde a Educação Matemática vai nos exigir um aprimoramento das formas do pensamento matemático na formação de professores.

Este texto traz uma análise da *experiência da criatividade* em matemática em nível elementar através de exemplos, o que mostrar-nos-á que para termos essa experiência no campo da matemática devemos ter uma mudança de atitude frente à forma tradicional de abordagem dessa área do conhecimento, mudança que implica em um aprimoramento das formas do pensar matemático, como processo dinâmico, mais do que da aprendizagem dos *conteúdos matemáticos* sistematizados e cristalizados. Essa mudança é importante e urgente na formação tanto inicial quanto continuada dos professores no Ensino Superior e os diversos exemplos que possam ser desenvolvidos por esses professores na sua prática docente poderão estimulá-la nos próprios alunos na Educação Básica.

A forma tradicional a que nos referimos procura dar resposta às seguintes perguntas (CIFUENTES, 2012): *como? Para quê?* e *por quê?* Porém, uma pergunta não formulada tradicionalmente é a seguinte: *por quê* não? A esta pergunta responde-se movimentando, principalmente, as capacidades de intuição e imaginação com as suas potencialidades criativas no campo da Matemática, capacidades essenciais, segundo Poincaré (1995), não para a sistematização do conhecimento matemático, para a qual a lógica é fator predominante, e sim para a sua *descoberta* ou *construção* a partir da adequada formulação de uma questão ou de um problema.

Ao desenvolvimento e aprimoramento dessas capacidades, essenciais na prática matemática, não se lhe dá suficiente ênfase em qualquer nível de ensino. Para tal efeito, seria necessário promover principalmente os procedimentos argumentativos não lógicos, como os indutivos, analógicos, narrativos, de visualização, dentre outros, reconhecendo neles também a sua condição de formas legítimas de acesso ao conhecimento matemático (CIFUENTES e SANTOS, 2019; CIFUENTES e GUSMÃO, 2020).

Neste texto, desenvolveremos um exemplo paradigmático no campo da geometria/trigonometria elementar que mostre como é importante colocar a pergunta *por quê* não? na formação do pensamento matemático tanto dos professores quanto dos alunos, cuja profundidade, obviamente, dependerá do nível de ensino em que ela é formulada. Começaremos pondo em evidência, num exemplo algébrico introdutório, o que entendemos por *visualização da forma ou configuração de um argumento*, uma espécie de visualização da forma nos processos argumentativos lógicos ou não lógicos de acesso ao conhecimento matemático, propondo um princípio metodológico, o que chamaremos de *princípio de variabilidade*, que abrirá as portas para essa experiência da criatividade em matemática nos diversos níveis de ensino. Para a devida compreensão do exemplo proposto são necessários conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Trigonometria e Números Complexos e Álgebra Linear com ênfase na teoria dos espaços vetoriais com produto interno, conhecimentos que os alunos ou egressos da Licenciatura ou Bacharelado em Matemática tem nos seus primeiros anos de estudos. Uma versão preliminar deste trabalho foi apresentada como comunicação no XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM) em novembro de 2022 (CIFUENTES e SANTOS, 2022).

Uma metáfora, no campo da culinária, revelar-nos-á os diversos momentos de um processo criativo, desde o desafio de concretizar uma receita suficientemente detalhada e previamente dada, até a aventura de construir uma variante dela procurando elaborar uma iguaria com *novos aromas e novos sabores* para o nosso olfato e paladar.

Todo processo criativo na culinária começa com a ação de se preparar mecanicamente uma determinada receita, a que pode se constituir num pano de fundo teórico em que ela é apresentada como um passo a passo.

A criatividade coloca-se em ação ao questionarmos esse passo a passo identificando alguma variante possível que possa ser feita nessa receita. Esse questionamento pode nos sugerir, por exemplo, substituir um dos ingredientes, ou então modificar a ordem do preparo, o que nos torna capazes de fazer *variações* na receita dada para conseguir um novo sabor, um novo aroma. A escolha dos novos ingredientes e a sequência de seu preparo é consequência de um *processo de visualização* não no campo do visual, é claro, e sim no campo do olfato e do paladar, é um *outro ver* intelectual muito além do puramente sensível.

Esta metáfora nos revelará o fundo processual da criatividade dando uma resposta à pergunta *por quê* não, e é oportuna na medida em que as palavras *saber*, no campo do conhecimento, e *saborear*, no campo da culinária, têm a mesma raiz etimológica que já os matemáticos gregos antigos conheciam e exploraram.

Os conceitos que serão objeto do nosso estudo neste artigo são as relações e funções trigonométricas tradicionais dando ênfase aos seus fundamentos geométricos, notoriamente os teoremas (de proporcionalidade) de Tales e de Pitágoras, mostrando que este último é quem as mantem atreladas aos triângulos retângulos. A nossa pesquisa consistirá em redefinir essas relações e funções, ainda fundamentadas no teorema de Tales, mas descolando-as dos triângulos retângulos, e em analisar as suas consequências imediatas dentro do âmbito da matemática superior elementar, visando a sua compreensão e não a sua aplicabilidade.

O conhecimento geométrico obtido, com um forte caráter matemático-epistemológico e até metodológico, consideramos ser requisito para uma proficiência adequada em Geometria como parte da formação inicial e continuada dos professores de Matemática, formação que também deverá sustentar uma outra dimensão da prática docente baseada na pesquisa, não só em Matemática (dentro dos seus alcances elementares) senão também em Didática.

UM EXEMPLO ALGÉBRICO PRELIMINAR RUMO AO *PRINCÍPIO DE VARIABILIDADE*: O CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 3 EM BASE 10 E SUAS VARIAÇÕES

Este exemplo é elementar no campo da aritmética e da álgebra. A análise detalhada de sua justificativa mostrar-nos-á os caminhos da sua generalização a partir da identificação dos momentos argumentativos em que é possível variar os dados sem alterar a *forma da argumentação*.

Consideremos um número natural m em sua representação decimal, isto é, na base 10:

$m = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$,

com $0 \leq a_n, a_{n-1}, \; ... , a_1, a_0 \leq 9$.

Usando a identidade algébrica $b^k - c^k = (b - c)(b^{k-1} + b^{k-2}c + ... + bc^{k-2} + c^{k-1})$, para $b = 10$ e $c = 1$, obtemos, $10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + ... + 10 + 1) = 9F_k$ chamando de F_k o segundo fator.

Assim, para $k = 1, ... , n$, temos as seguintes igualdades:

$10^n - 1 = 9F_n$,

$10^{n-1} - 1 = 9F_{n-1}$,

. . .

$10^2 - 1 = 9F_2$,

$10 - 1 = 9F_1$.

Multiplicando cada uma delas pelos coeficientes a_k respectivos obtemos:

$a_n.10^n - a_n = 9a_nF_n$,

$a_{n-1}.10^{n-1} - a_{n-1} = 9a_{n-1}F_{n-1}$,

. . .

$a_2.10^2 - a_2 = 9a_2F_2$,

$a_1.10 - a_1 = 9a_1F_1$.

Efetuando a adição de todos os termos (e acrescentando o termo a_0) resulta que:

$(a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0) - (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$

$= 9(a_nF_n + a_{n-1}F_{n-1} + ... + a_1F_1)$,

isto é,

$m - (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) = 9(a_nF_n + a_{n-1}F_{n-1} + ... + a_1F_1)$.

Dai, como 3 é divisor do termo da direita, pois divide 9, podemos inferir que:

(3 é divisor de m) se e somente se (3 é divisor de $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$).

Eis o critério de divisibilidade por 3 na base 10.

Visualização da forma do argumento: um pré-requisito para a variabilidade e subsequente generalização

1) Pela forma do argumento anterior, observamos que o mesmo critério valeria substituindo 3 por 9, na base 10, isto é,

(9 é divisor de m) se e somente se (9 é divisor de $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$).

Essa substituição é a base da variabilidade e subsequente generalização na argumentação conducente ao resultado.

2) Igualmente, o anterior nos faz *ver*, ou melhor *visualizar*, que a forma do argumento (a forma abstrata do argumento) é a mesma, substituindo a base 10 por uma base b qualquer, e tomando um divisor d qualquer de $b - 1$, ao invés de 3 ou 9. Isto é, se $m = a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + ... + a_1.b + a_0$, é a representação de m na base b, com $0 \leq a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 \leq b - 1$, então, nessa base teremos o seguinte critério de divisibilidade por d:

(d será divisor de m) se e somente se (d é divisor de $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$).

3) Esse critério generalizado permite obter, por exemplo, como caso particular, o seguinte critério de divisibilidade por 2 na base 9, isto é, considerando $b = 9$ e $d = 2$ que é divisor de 8 (= 9 – 1): na base 9,

(2 é divisor de m) se e somente se (2 é divisor de $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$).

Como ilustração mostremos o seguinte fato curioso: o número $341_{(9)}$ (na base 9), isto é, $3.9^2 + 4.9^1 + 1.9^0$, é (surpreendentemente) divisível por 2, ou seja, é um número par nessa base (!!), pois 3 + 4 + 1 é divisível por 2. De fato, verifica-se que $341_{(9)} = 2x165_{(9)}$.

Exercício 1: Imite o raciocínio anterior para analisar o critério de divisibilidade por 2 ou 5 na base 10 e, explicitando a correspondente forma do argumento, generalize-o para qualquer base b.

Formulação do *princípio de variabilidade*

O *princípio de variabilidade*, que introduzimos neste artigo, é um princípio teórico--epistemológico que pode ter um caráter metodológico, pois visa estimular a criatividade em matemática em qualquer nível de ensino, especialmente no nível elementar. Como vimos no nosso exemplo introdutório, esse princípio pode ser aplicado num certo contexto teórico previamente delimitado, quando *visualizamos* a forma abstrata de um certo argumento despindo-o de seu conteúdo particular ou concreto, permitindo, assim, a variabilidade desse conteúdo e subsequente possibilidade de generalização.

No caso do critério de divisibilidade por 3 na base 10, esse momento de variabilidade ocorreu quando *percebemos* que a base $b = 10$ e os divisores de 9 (= b – 1) não são essenciais na sua concretude para a argumentação.

Um outro exemplo elementar, mas muito revelador, é o relacionado com o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos, quando este é interpretado geometricamente e não algebricamente, sendo essa interpretação, então, o contexto teórico previamente delimitado para a análise da variabilidade nesse caso.

Consideremos o triângulo retângulo de catetos *a* e *b* e de hipotenusa c (seus comprimentos). Do ponto de vista algébrico, o teorema de Pitágoras afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, mas do ponto de vista geométrico ele afirma que *a soma das medidas das* áreas d*as regiões quadradas construídas sobre cada cateto é igual à medida da área da região quadrada construída sobre a hipotenusa*.

Despir essa propriedade de sua condição geométrica particular de se referir a quadrados e às medidas das áreas das regiões que eles delimitam, a fim de visualizar a forma subjacente à proposição, permite levantar a seguinte questão: será que essa propriedade geométrica (colocada em destaque), que podemos chamar de *propriedade de Pitágoras*, é também válida se substituirmos as regiões quadradas por outro tipo de figuras como regiões delimitadas por triângulos equiláteros, polígonos (regulares) ou semicírculos, etc., montados convenientemente em cada lado do triângulo retângulo?

Uma certa intuição geométrica sugere-nos exigir, para complementar essa conjectura, que as figuras, colocadas nos lados do triângulo, sejam "semelhantes", isto é, do ponto de vista intuitivo, tenham a mesma forma. Essa propriedade abstrata é a que nos permitirá fazer variações a respeito das figuras originais e substitui-las por outras semelhantes entre si para pesquisar se ainda a propriedade de Pitágoras é válida.

De fato, a modo de exemplo verificador, o que reforça a conjectura, substituindo as regiões quadradas por regiões poligonais regulares da mesma quantidade *n* de lados, o que os torna semelhantes, podemos verificar que a propriedade ainda é válida, o que já constitui uma descoberta em matemática a partir dessa variabilidade, e o início do processo de criação de um caminho para a descoberta de uma situação ainda mais geral.

O argumento central desse caso pode ser esboçado da seguinte maneira: primeiro, deixamos o leitor verificar o seguinte:

Exercício 2: A medida da área de uma região poligonal regular de *n* lados cujo lado mede *a* é dada por $A_a = (na^2/4)\ cot\ (\pi/n)$.

Como consequência, se nos lados de um triângulo retângulo de catetos *a* e *b* e hipotenusa *c* colocamos polígonos regulares de *n* lados, onde o lado do polígono coincide com o respectivo lado do triângulo retângulo, teremos que $A_a + A_b = (na^2/4)\ cot\ (\pi/n) + (nb^2/4)\ cot\ (\pi/n) = (a^2 + b^2)(n/4)\ cot\ (\pi/n) = c^2(n/4)\ cot\ (\pi/n) = A_c$, verificando-se, então, a propriedade de Pitágoras para esse caso.

A demonstração do caso mais geral da propriedade de Pitágoras foi feita pelo matemático americano de origem húngara George Pólya (1887-1985), sendo uma de suas principais contribuições o estudo da heurística na resolução de problemas, tanto na Matemática quanto no ensino de matemática. Em meados do século XX demonstrou a seguinte versão geral do teorema de Pitágoras: *se num triângulo retângulo colocamos em cada um de seus la-*

dos figuras fechadas, simples e semelhantes entre si (isto é, obtidas umas das outras por alguma transformação geométrica de semelhança), então, a soma das medidas das **áreas das duas figuras menores é igual à** *medida da* **área da figura maior**.

Então, baseados nos exemplos desenvolvidos até aqui, vejamos uma formulação do que chamaremos de *princípio de variabilidade*, um princípio na filosofia da matemática e de seu ensino que, como mencionado, tem um certo caráter metodológico que visa promover, pedagogicamente, a criatividade no campo da matemática, em qualquer nível de ensino.

Podemos considerar que uma *situação de criatividade* é o estabelecimento e implementação de uma ideia num terreno fértil. Tal terreno fértil é um campo teórico onde essa ideia possa frutificar, o que só pode ser apreciado pelas suas consequências.

Então, o nosso *princípio de variabilidade*, no caso da matemática, em qualquer nível e numa versão pedagógica, pode ser expresso da seguinte maneira:

> Dado um referencial teórico inicial, que chamaremos de teoria, no qual explicitamos as hipóteses ou pressupostos nos que se baseia, e algumas de suas consequências, identificamos primeiro aquelas hipóteses que, pela sua forma argumentativa, admitem uma variação sem modificar essa forma. Nesse caso, é possível desenvolver uma teoria análoga alterando convenientemente essas hipóteses e adaptando as outras coerentemente para obter uma variante da teoria inicial ou, eventualmente, uma generalização daquela (CIFUENTES; SANTOS, 2022, p. 3-4).

Essa teoria de partida (que no caso da culinária, seria uma receita dada) é o terreno fértil no qual uma ideia será plantada, é o lugar da inspiração para desenvolvimentos semelhantes ou possíveis generalizações para, a partir do princípio de variabilidade, *descobrir* ou *construir* uma outra teoria (uma outra receita) que pode ser uma variação da primeira ou até uma generalização, como nos casos apresentados aqui.

Criatividade e experiência estética na matemática: um exemplo paradigmático no campo da geometria/trigonometria

Os exemplos anteriores podem ser considerados meros exercícios de criatividade nos campos da álgebra e da geometria que propiciaram as reflexões que conduziram ao nosso princípio de variabilidade. Porém, o seguinte exemplo, o mais importante e elaborado deste trabalho, mais do que um exercício matemático, será uma experiência estética no campo da matemática, pois o seu desenvolvimento mostrar-nos-á a beleza e harmonia dos conceitos envolvidos, manifestadas na sua expressão de generalidade, própria do pensamento matemático moderno.

Esse exemplo, pertencente ao campo da geometria/trigonometria elementar, visa desenvolver uma *trigonometria alternativa* em que as funções trigonométricas correspondentes não estejam atreladas aos triângulos retângulos como no caso tradicional, e será para nós extremamente revelador sobre os rumos da criatividade na matemática elementar, o que exigirá do referencial teórico de base uma boa compreensão dos seus fundamentos geométricos, especialmente os que embasam a definição e primeiras propriedades das funções trigonométricas tradicionais, isto é, das relações trigonométricas no triângulo retângulo que, como veremos, terão como hipóteses ou pressupostos, os seguintes:

a) o teorema de proporcionalidade de Tales para triângulos semelhantes, e
b) o teorema de Pitágoras, próprio dos triângulos retângulos.

O nosso assunto, então, na sua formulação e nos seus desenvolvimentos iniciais, será elementar no campo da geometria/trigonometria, apoiados por alguns argumentos de geometria euclidiana plana e de geometria analítica básicas, como veremos. No final, esboçaremos algumas interpretações dos resultados obtidos, para uma compreensão mais abrangente, usando argumentos simples provenientes da álgebra linear no plano cartesiano (COELHO; LOURENÇO, 2001).

Generalização das funções trigonométricas para triângulos não retângulos

Este exemplo será desenvolvido com a amplitude necessária traçando diversos direcionamentos para onde a pesquisa nos conduza. A sua finalidade será, primeiro, generalizar as relações trigonométricas tradicionais descolando-as do triângulo retângulo onde são definidas inicialmente, e investigar as suas consequências imediatas guiados pelas propriedades trigonométricas usuais que compõem a sua referência.

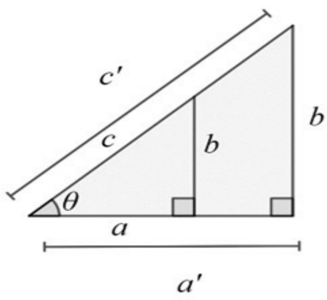
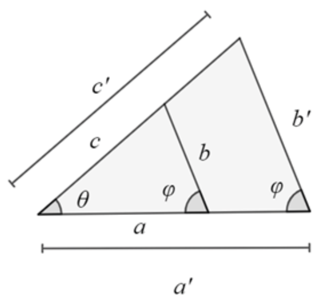
Começaremos estabelecendo o referencial teórico correspondente que consiste na definição das relações trigonométricas no triângulo retângulo, baseadas notoriamente no chamado de *teorema de Tales*.

O teorema de Tales é um resultado geométrico que estabelece a proporcionalidade dos lados correspondentes entre figuras semelhantes, onde podemos entender em forma intuitiva que duas figuras são semelhantes se tem a mesma forma, porém não tendo necessariamente o mesmo tamanho. No caso de triângulos, isso se traduz em ter ângulos homólogos de medidas iguais.

Em cada uma das Figuras 1 e 2, os triângulos apresentados, colocados convenientemente com lados paralelos para evidenciar a aplicação do teorema de Tales, são semelhantes por ter os mesmos ângulos e, neste caso, esse teorema estabelece a seguinte proporcionalidade entre os seus lados correspondentes (lados homólogos):

$a/a' = b/b' = c/c'$.

Observe que na Figura 1 os dois triângulos são retângulos, enquanto na Figura 2, o ângulo reto foi substituído por um ângulo φ qualquer que pode ser agudo ou obtuso.

Figura 1: Relações num triângulo retângulo	**Figura 2:** Relações num triângulo qualquer
	
Fonte: os autores	**Fonte:** os autores

Como uma primeira aproximação à trigonometria tradicional, podemos analisar a situação particular dos dois triângulos retângulos da Figura 1, caso que nos permite dar a definição inicial das funções trigonométricas (que chamaremos, como de praxe, de *relações trigonométricas* por se referir a ângulos restritos aos de um triângulo).

Usualmente, definem-se as relações trigonométricas num triângulo retângulo de lados *a, b e c*, como na Figura 1, da seguinte maneira:

$sen\ \theta = b/c$ e $cos\ \theta = a/c$.

Uma observação atenta dessas relações nos faz reparar que essas definições aparentemente não dependem apenas do ângulo θ e sim das medidas dos lados desse triângulo particular. Assim, no triângulo maior, de lados a', b' e c', teríamos:

$sen\ \theta = b'/c'$ e $cos\ \theta = a'/c'$,

portanto, para que essas relações independam da medida dos lados do triângulo particular, e sim apenas do ângulo θ, deveríamos ter:

$b/c = b'/c'$ e $a/c = a'/c'$,

o que é consequência imediata das proporções que o teorema de Tales nos fornece.

Essa argumentação garante a *boa definição* das relações seno e cosseno usuais. Do mesmo modo é possível definir as outras relações trigonométricas, em particular, $tan\ \theta = b/a = (b/c)/(a/c) = (sen\ \theta)/(cos\ \theta)$.

Uma segunda consequência, de extrema relevância para a compreensão da *trigonometria do triângulo retângulo*, é a determinação da chamada de *identidade fundamental*. Ela é consequência, como veremos, do teorema de Pitágoras que é uma das propriedades características desse tipo de triângulo.

No triângulo retângulo de catetos a e b e de hipotenusa c temos que $a^2 + b^2 = c^2$, donde $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, isto é,

$cos^2\ \theta + sen^2\ \theta = 1$.

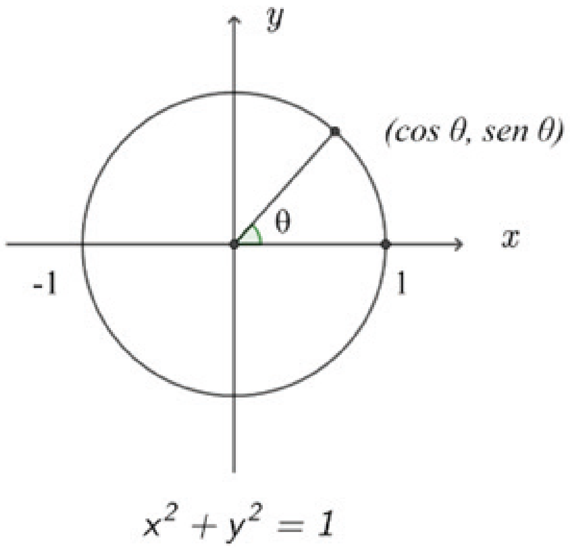
Essa identidade é chamada de *fundamental* porque também indica que as equações $x = cos\ \theta$ e $y = sen\ \theta$ são as equações paramétricas da circunferência unitária cuja equação cartesiana é dada por $x^2 + y^2 = 1$ (cf. Figura 3), também chamada de *ciclo trigonométrico* (aqui adotaremos essa denominação), o qual permite, por exemplo, estender as relações trigonométricas para outros ângulos, possibilitando o aparecimento das funções trigonométricas.

Mais ainda, por trás da equação $x^2 + y^2 = 1$ está a definição da fórmula pitagórico-euclidiana para medir a norma dos vetores (x , y) no plano cartesiano: $||(x , y)|| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ (não distinguiremos o vetor (x , y) do ponto (x , y) que é o seu extremo), o que também possibilita, através do chamado de *produto interno usual*, medir o ângulo entre vetores não nulos da seguinte maneira:

$cos\ \alpha(u, v) = \langle u, v\rangle / ||u|| . ||v||$, onde $\alpha(u, v)$ denota o ângulo entre os vetores *u* e *v*, e $\langle u, v \rangle$ denota seu produto interno.

Com isso, a equação em questão permite descrever o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a distância 1 da origem (0, 0) representando, então, uma circunferência, e as fórmulas dadas determinam a geometria subjacente do plano, neste caso a euclidiana.

Figura 3: Ciclo trigonométrico tradicional



Fonte: os autores

Variações permitidas pelo teorema de Tales e generalização das relações trigonométricas: o momento da criatividade

A ideia que guia a elaboração deste exemplo parte da observação de que toda a discussão anterior se baseia nas seguintes duas hipóteses que configuram a situação inicial analisada: o teorema de Tales e o teorema de Pitágoras, sendo que só este último está atrelado à situação de termos triângulos retângulos, isto é, onde um de seus ângulos é um ângulo reto. Além disso, para uma boa definição das relações trigonométricas só precisamos do teorema de Tales que independe de termos um ângulo reto ou não.

Essa última observação possibilita-nos pensar em fazer variações em cima da *hipótese do ângulo reto* permitindo outros ângulos em sua substituição, como mostrado na Figura 2. Então, a ideia emergente resulta do seguinte questionamento: o quê acontecerá se reproduzimos, por analogia, as argumentações anteriores, substituindo o ângulo reto por um ângulo fixo φ qualquer? Vejamos primeiro o caso em que φ é agudo.

Por razões metodológicas, os lados do triângulo que concorrem no ângulo φ (que substitui o ângulo reto) ainda serão chamados de *catetos* (ou, talvez, φ-catetos) e o terceiro lado, o oposto ao ângulo φ, de *hipotenusa* (ou φ-hipotenusa).

Com isso, baseados no teorema de Tales, podemos definir as seguintes relações que generalizam as de seno e cosseno tradicionais, as do ângulo reto:

$s_\varphi(\theta) = b/c$ e $c_\varphi(\theta) = a/c$.

Com isso teremos, como casos particulares, *sen* $\theta = s_{\pi/2}(\theta)$ e *cos* $\theta = = c_{\pi/2}(\theta)$.

O enunciado do seguinte teorema na realidade é a formulação final que expressa a síntese de um processo lógico de argumentação que busca explicitar as novas relações trigonométricas em termos das tradicionais. A demonstração apresentada é, apenas, uma reordenação sistemática dos argumentos utilizados, muitas vezes informalmente, no processo prévio. Além disso, essas fórmulas permitem estender as relações trigonométricas para todos os ângulos.

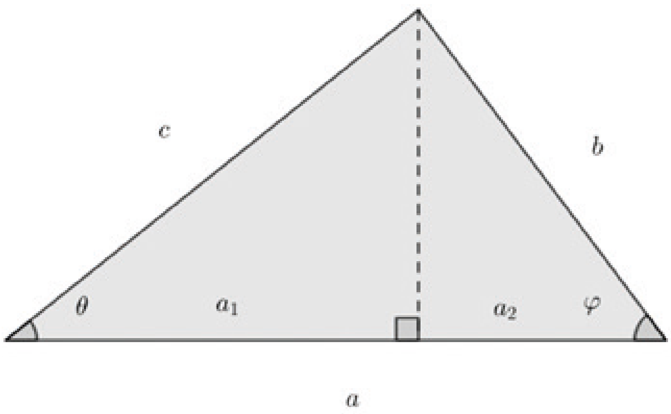
Teorema 1:

$s_\varphi(\theta) = sen\ \theta/sen\ \varphi$ e $c_\varphi(\theta) = sen\ (\theta + \varphi)/sen\ \varphi$, ou

$s_\varphi(\theta) = (cosec\ \varphi)\ sen\ \theta$ e $c_\varphi(\theta) = (cot\ \varphi)\ sen\ \theta + cos\ \theta$,

(as últimas igualdades mostram que as funções s_φ e c_φ são combinações lineares das funções *sen* e *cos* tradicionais).

Figura 4: Relações para o cálculo das funções trigonométricas generalizadas



Fonte: os autores

Demonstração: Na Figura 4 temos $d/c = sen\ \theta$ e $d/b = sen\ \varphi$, donde resulta $s_\varphi(\theta) = b/c = (d/sen\ \varphi)/(d/sen\ \theta) = sen\ \theta/sen\ \varphi$.

Por outro lado, $c_\varphi(\theta) = a/c = (a_1 + a_2)/c$, sendo que $d/a_1 = tan\ \theta$ e $d/a_2 = tan\ \varphi$. Portanto, $a_1 + a_2 = d(1/tan\ \theta + 1/tan\ \varphi)$, donde $c_\varphi(\theta) = (d/c)(1/tan\ \theta + 1/tan\ \varphi) = sen\ \theta(1/tan\ \theta + 1/tan\ \varphi) = (cos\ \theta\ sen\ \varphi + sen\ \theta\ cos\ \varphi)/sen\ \varphi = sen\ (\theta + \varphi)/sen\ \varphi$. ◊

Observa-se que, dentre os ângulos φ de um triângulo (ângulos entre 0 e π), os únicos que aparentemente apresentariam uma anomalia seriam os extremos $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, pois, nesse caso, $sen\ \varphi = 0$. É por isso que, neste trabalho de natureza elementar, eles serão desconsiderados na discussão posterior.

Como consequência obtemos, em forma natural, que a tangente generalizada adota a seguinte forma: $t_\varphi(\theta) = s_\varphi(\theta)/c_\varphi(\theta) = sen\ \theta/sen\ (\theta + \varphi)$.

Idêntico resultado obtém-se se consideramos φ um ângulo obtuso, alterando adequadamente a Figura 4.

A validade dessas funções para todos os ângulos permite analisar, dentre outras propriedades, sua paridade. Assim, deixamos o leitor conferir que:

Exercício 3: $s_\varphi(-\theta) = -s_\varphi(\theta)$ e $c_\varphi(-\theta) = c_\varphi(\theta) - 2s_\varphi(\theta) cos\,\varphi$.

Aliás, em muitas fórmulas, como veremos na sequência, aparecerá um termo contendo a expressão *cos* φ, uma espécie de termo de correção a respeito das fórmulas trigonométricas tradicionais, o que será justificado geometricamente no teorema 2.

A identidade fundamental para as novas funções trigonométricas e a construção de uma geometria subjacente para a sua visualização: primeiros passos na elaboração de uma teoria geométrica

A identidade fundamental que as novas relações trigonométricas satisfazem pode ser obtida, também, por analogia com o caso tradicional, só que observando que a relação que substitui a equação dada no teorema de Pitágoras, para o caso de um triângulo qualquer, é a conhecida *lei de cossenos* que, referida à Figura 4 é expressa por:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\,\varphi$ $(= (a - b cos\,\varphi)^2 + b^2 sen^2\,\varphi \geq 0)$.

Dessa relação obtemos $(a/c)^2 + (b/c)^2 - 2(a/c)(b/c)\, cos\,\varphi = 1$, donde,

$c_\varphi(\theta)^2 + s_\varphi(\theta)^2 - 2c_\varphi(\theta)s_\varphi(\theta)\, cos\,\varphi = 1$,

que será a nossa identidade fundamental para esta trigonometria generalizada. Ela será a base de construção de uma nova geometria no plano que nos permita *visualizar* as relações trigonométricas generalizadas com um novo olhar.

Começaremos observando que essa identidade também nos indica que $x = c_\varphi(\theta)$ e $y = s_\varphi(\theta)$ são as equações paramétricas, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, do ciclo trigonométrico generalizado

$x^2 + y^2 - 2xy\, cos\,\varphi = 1$,

o qual, no plano cartesiano *xy*, é uma cônica que poderá não ser um círculo.

Uma rotação no plano cartesiano mostrar-nos-á a forma dessa cônica em posição normal. Para tanto, fazemos a seguinte substituição de variáveis:

$x = x'\, cos\,\beta - y'\, sen\,\beta$

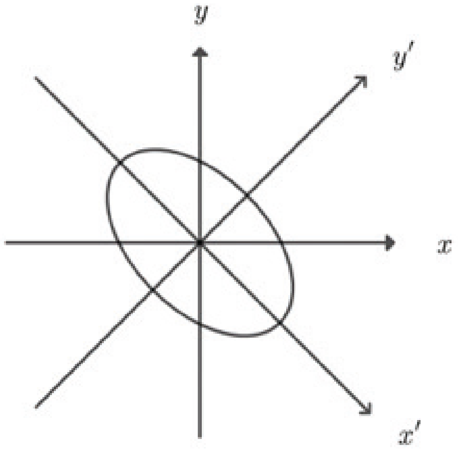
$y = x'\, sen\,\beta + y'\, cos\,\beta$,

Essa substituição representa uma rotação de ângulo β do sistema procurado $x'y'$ na direção do sistema *xy* no sentido anti-horário, ou, equivalentemente, do sistema *xy* para o novo sistema $x'y'$ no sentido horário, substituição que permitirá transformar a equação em *x* e *y* numa nova equação nas variáveis x' e y' que, para uma escolha adequada de β, não tenha o monômio misto $x'y'$. No nosso caso, resulta ser $\beta = \pi/4$ (o mesmo para qualquer valor de φ) obtendo, finalmente, a seguinte equação normalizada da cônica:

$x'^2/[1/(1 - cos\,\varphi)] + y'^2/[1/(1 + cos\,\varphi)] = 1$.

Como $0 \leq cos\ \varphi \leq 1$, por ser φ um ângulo agudo, essa cônica representa, no sistema $x'y'$, uma elipse rotada em um ângulo de $\pi/4$ no sentido horário com o eixo maior no eixo x' e o menor no eixo y', como mostra a Figura 5.

Figura 5: *Ciclo trigonométrico* generalizado



Fonte: os autores

Se considerarmos a expressão $||(x , y)||_\varphi = (x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ \varphi)^{1/2}$ como uma nova forma de medir a norma de um vetor no plano *xy*, que podemos chamar de φ-norma (a expressão entre parênteses a direita, além de ser sempre não negativa como observado, é de fato uma norma), isto é, a distância à origem, o que modificará a geometria do plano, então, a equação $x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ \varphi = 1$ representará, a respeito dessa nova geometria, o *círculo unitário* da trigonometria generalizada desenvolvida.

Criar uma nova geometria é definir uma norma, o que nos permite calcular as distâncias entre pontos e, quando possível, definir também um produto interno compatível com essa norma, o que nos permite calcular os novos ângulos nessa geometria (COELHO e LOURENÇO, 2001). As relações pertinentes são as seguintes: para $u = (x_1 , y_1)$ e $v = (x_2 , y_2)$ vetores do plano *xy*,

$$\langle u , v\rangle_\varphi = (1/4)(||u + v||_\varphi^2 - ||u - v||_\varphi^2) = (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)cos\ \varphi$$

e

$$cos\ \alpha(u , v) = \langle u , v\rangle_\varphi / ||u||_\varphi . ||v||_\varphi,$$

onde $\alpha(u , v)$ é o novo ângulo entre esses vetores.

Podemos considerar, então, do ponto de vista epistemológico, essa geometria como uma forma de visualizar a nova trigonometria pondo em evidência a *distorção do espaço* em que ela ocorre. Para os olhos euclidianos, esse *círculo* é uma elipse, porém, para os olhos da nova geometria, ele é realmente um círculo porque a distância (dada pela norma) de todos os seus pontos à origem é a mesma e igual a 1.

Verifica-se facilmente que o único ângulo φ que tem como *círculo unitário* realmente um círculo é $\varphi = \pi/2$, que é o caso tradicional. Nesse caso, também, o produto interno é o usual.

Este exemplo nos impele a concluir que: a visualização geométrica não consiste apenas em usar uma geometria previamente determinada para ver, às vezes é necessário *criar uma nova geometria para ver*.

UM CAMINHO HEURÍSTICO PARA O COSSENO E O SENO GENERALIZADOS DA SOMA DE ÂNGULOS

De um ponto de vista tradicional, poderíamos enunciar o seguinte teorema sobre as funções seno e cosseno, generalizadas da soma da soma de ângulos, cuja demonstração formal, usando as relações já encontradas de $s_\varphi(\theta) = sen\ \theta / sen\ \varphi$ e $c_\varphi(\theta) = sen\ (\theta + \varphi)/sen\ \varphi$, deixamos como exercício.

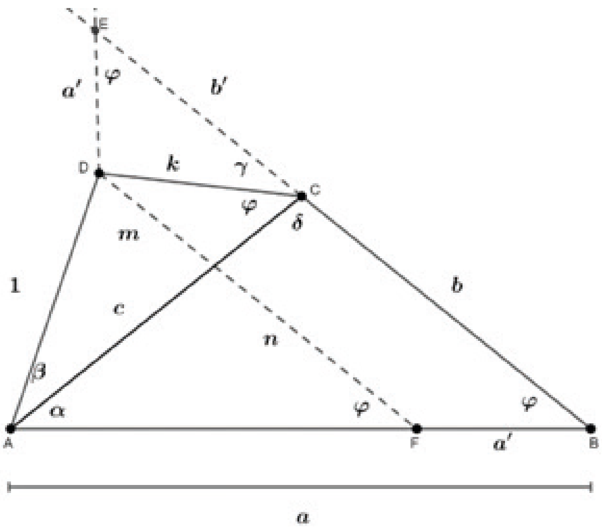
Teorema 2:

$c_\varphi(\alpha + \beta) = c_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta) - s_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta)$ e

$s_\varphi(\alpha + \beta) = s_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta) + c_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta) - 2s_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta)cos\ \varphi$.

Porém, uma prova que realmente explique essas fórmulas iluminando sua descoberta pode ser feita da seguinte maneira, imitando uma das provas mais conhecidas para o caso em que temos triângulos retângulos, isto é, quando $\varphi = \pi/2$, como veremos a seguir.

Figura 6: Relações para o cálculo das funções generalizadas da soma de ângulos



Fonte: os autores

Prova heurística do teorema 2: Consideremos a Figura 6, onde α e β são ângulos quaisquer desenhados em triângulos onde um dos ângulos é φ (nessa figura, os ângulos são tomados agudos por simplicidade).

O lado *CE* é prolongamento do lado *BC* e o lado *DE* deve ser tal que o ângulo *DEC* seja φ. O lado *DF* escolhe-se paralelo ao lado *BE* de modo que o quadrilátero *BEDF* resulta ser um trapézio simétrico (observe que, no caso de ser $\varphi = \pi/2$, teremos um retângulo). A escolha de 1 como medida do lado *AD*, o que é permitido pelo teorema de Tales, é por simplicidade, como veremos na sequência.

Do triângulo *AFD* obtemos que:

$c_\varphi(\alpha + \beta) = a - a'$ e $s_\varphi(\alpha + \beta) = n + m$.

Por outro lado, dos triângulos *ABC* e *ACD*, obtemos:

$c_\varphi(\alpha) = a/c$, $s_\varphi(\alpha) = b/c$, $c_\varphi(\beta) = c$ e $s_\varphi(\beta) = k$,

donde $a = c_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta)$ e $b = s_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta)$.

Ainda do triângulo *ABC* e do segmento *B*(*C*)*E*: $\alpha + \varphi + \delta = \pi = \gamma + \varphi + \delta$, donde $\gamma = \alpha$.

Do triângulo *CED* obtemos $c_\varphi(\alpha) = b'/k$, donde $b' = c_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta)$.

Como consequência do anterior teremos:

$c_\varphi(\alpha + \beta) = c_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta) - a'$ e

$s_\varphi(\alpha + \beta) = b + b' - 2a' \cos \varphi = s_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta) + c_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta) - 2a' \cos \varphi$,

esta última obtida do quadrilátero (um trapézio) *BEDF*.

Finalmente, do triângulo *DEC* $a'/b' = t_\varphi(\alpha) = s_\varphi(\alpha)/c_\varphi(\alpha)$, donde $a' = s_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta)$.

Podemos concluir, então, com as fórmulas "procuradas":

$c_\varphi(\alpha + \beta) = c_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta) - s_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta)$ e

$s_\varphi(\alpha + \beta) = s_\varphi(\alpha)c_\varphi(\beta) + c_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta) - 2s_\varphi(\alpha)s_\varphi(\beta) \cos \varphi$.

Observa-se que esse procedimento, onde ao invés de termos um retângulo temos um trapézio de ângulo φ na base, como mostra a figura 6, explica(!) o aparecimento desse termo de correção na fórmula do seno da soma de ângulos. ◊

Com esse resultado podemos obter as fórmulas correspondentes ao seno e cosseno generalizados do ângulo duplo, e outras similares:

Exercício 4: Demonstre que

$c_\varphi(2\theta) = c_\varphi(\theta)^2 - s_\varphi(\theta)^2$ e

$s_\varphi(2\theta) = 2s_\varphi(\theta)c_\varphi(\theta) - 2s_\varphi(\theta)^2 \cos \varphi$.

Também, podemos obter facilmente as fórmulas para o seno e o cosseno da diferença de ângulos, assim como as da tangente generalizada da soma e diferença de ângulos.

O SEGUINTE PASSO: UMA VARIANTE DOS NÚMEROS COMPLEXOS COMO SISTEMA ALGÉBRICO SUBJACENTE À NOVA TRIGONOMETRIA

Um problema matemático que aparece naturalmente na continuidade da pesquisa sobre essa trigonometria generalizada iniciada aqui, e cuja solução a fecharia teoricamente, é o de averiguar qual seria o sistema de números, possivelmente uma variante dos números complexos, subjacente a essa trigonometria, assim como os números complexos o são para a trigonometria do ângulo reto (DO CARMO, MORGADO e WAGNER, 1992). Uma breve discussão em uma direção diferente associa às funções hiperbólicas os chamados de *números perplexos* como sistema algébrico subjacente (CIFUENTES, 2012). Essa discussão faz uso extensivo da analogia, como metodologia de pesquisa, entre as funções trigonométricas tradicionais e as funções hiperbólicas, procedimento que também tentaremos aqui.

Em certa medida, os fatos sobre os números complexos que serão os nossos guias nesta procura são os seguintes:

a) no anseio de que esse sistema numérico seja também um corpo, é interessante investigar a possibilidade de haver inversos na nova estrutura de números, e

b) as discussões anteriores sugerem que esse novo sistema deve adotar como norma a fórmula que provém da lei dos cossenos, já anunciada, isto é:

$$||(x , y)||_\varphi = (x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi)^{1/2} = ((x - y \cos \varphi)^2 + y^2 sen^2 \varphi)^{1/2}.$$

Com esses pressupostos, os novos números complexos no plano, que podemos chamar, a falta de uma denominação melhor, de φ-complexos, serão expressões da forma $a + jb$, com $a , b \in \mathbf{R}$ e onde j é uma nova unidade imaginária que, para efeitos de definir uma multiplicação adequada, satisfará $j^2 = \alpha + j\beta$ onde α e β são números reais por determinar a partir dos requerimentos anteriores.

Partimos, então, procurando condições para que um tal número seja inversível a respeito dessa multiplicação. Vejamos: seja $x + jy$ um inverso de $a + jb$, então, $(a + jb)(x + jy) = 1$, o que dá origem ao seguinte sistema de equações:

$$ax + b\alpha y = 1 \text{ e } bx + (a + b\beta)y = 0,$$

cujas soluções são:

$$x = (a + b\beta)/(a^2 - b^2\alpha + ab\beta) \text{ e } y = (- b)/(a^2 - b^2\alpha + ab\beta),$$

isto é, teríamos, quando existir, que

$$(a + jb)^{-1} = ((a + b\beta) - jb)/(a^2 - b^2\alpha + ab\beta).$$

Além disso, guiados, também por analogia, pela fórmula complexa que expressa que $z^{-1} = z^*/||z||^2$, podemos naturalmente supor, por uma certa liberdade de escolha, que as seguintes serão boas definições para o conjugado e a norma de um número φ-complexo: para $z = a + jb$,

$$z^* = (a + b\beta) - jb$$

e

$$||z||^2 = a^2 - b^2\alpha + ab\beta.$$

Finalmente, exigindo que os φ-complexos da forma $c_\varphi(\theta) + js_\varphi(\theta)$, isto é, os pontos $(c_\varphi(\theta) , s_\varphi(\theta))$ que são as coordenadas dos pontos do *ciclo trigonométrico* na nova trigonometria, tenham φ-norma 1, obtemos as relações

$$c_\varphi(\theta)^2 - s_\varphi(\theta)^2\alpha + c_\varphi(\theta)s_\varphi(\theta)\beta = 1 = c_\varphi(\theta)^2 + s_\varphi(\theta)^2 - 2c_\varphi(\theta)s_\varphi(\theta) \cos \varphi,$$

donde podemos concluir que $\alpha = - 1$ e $\beta = - 2\cos \varphi$, isto é, $j^2 = - 1 - (2\cos \varphi)j$, obtendo, então, para o novo conjugado e a nova norma as seguintes expressões:

$z^* = (a - 2b\cos\varphi) - jb$

e

$||z||^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = ||z||_\varphi^2$.

Denotemos por $\mathbf{C}_\varphi$ o conjunto

$\{a + jb \,/\, a, b \in \mathbf{R}$ e $j^2 = -1 - (2\cos\varphi)j\}$,

então, a estrutura algébrica e geométrica de $\mathbf{C}_\varphi$ é a seguinte:

Exercício 5:

Para $z = a + jb$ e $w = c + jd$, a sua soma é dada por

$z + w = (a + c) + j(b + d)$

e o seu produto é dado por

$zw = (ac - bd) + j(ad + bc - 2\cos\varphi)$.

Essa multiplicação é comutativa, associativa e distributiva a respeito da soma.

$(z + w)^* = z^* + w^*$ e $(zw)^* = z^*w^*$.

Para todo z, $zz^* = ||z||_\varphi^2$.

Se $z \neq 0$, então z é inversível e o inverso de z é dado por $z^{-1} = z^*/||z||_\varphi^2$ como no caso complexo, sendo $z^* = (a - 2b\cos\varphi) - jb$ e $||z||_\varphi^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$.

$||zw||_\varphi = ||z||_\varphi \, ||w||_\varphi$.

Os resultados anteriores mostram, então, que $\mathbf{C}_\varphi$ é um corpo com uma norma que preserva o novo produto. No entanto, veremos que a álgebra de $\mathbf{C}_\varphi$, em sua concretude, é notoriamente diferente da álgebra dos números complexos.

Mas, antes disso, vejamos que, como no caso complexo, a relação íntima entre as novas funções trigonométricas e os números φ-complexos é dada por:

$z = ||z||_\varphi (c_\varphi(\theta) + js_\varphi(\theta))$

para um certo ângulo(?) θ. Com efeito, se $z = 0$, é óbvio, e se $z \neq 0$, então, $z/||z||_\varphi$ tem φ-norma 1 em $\mathbf{C}_\varphi$, portanto, z é um ponto do círculo unitário da nova trigonometria que tem como coordenadas paramétricas $(c_\varphi(\theta), s_\varphi(\theta))$ para um certo θ.

Agora, a respeito da álgebra peculiar do corpo $\mathbf{C}_\varphi$, vejamos um caso simples que será relevante na discussão posterior. Resolveremos a equação $z^2 = -1$ em $\mathbf{C}_\varphi$. Tomando $z = u + jv$, obtemos que $(u + jv)^2 = -1$, donde $(u^2 - v^2) + 2v(u - v\cos\varphi)j = -1$. Observa-se que $v \neq 0$, pois se $v = 0$ teríamos $u^2 = -1$ em $\mathbf{R}$, portanto, $u^2 - v^2 = -1$ e $u - v\cos\varphi = 0$, resultando em $u = v\cos\varphi$, donde concluímos que $u = \pm\cot\varphi$ e $v = \pm\operatorname{cosec}\varphi$. Portanto,

$z = \pm(\cot\varphi + j\operatorname{cosec}\varphi)$.

Ambas são as soluções em $\mathbf{C}_\varphi$ da equação dada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS: UM FECHAMENTO TEÓRICO

Com os desenvolvimentos anteriores poderíamos concluir a pesquisa mostrando com ela a sua forte componente didática para a formação de professores pesquisadores de Matemática e o seu ensino, especialmente em nível elementar. Mais ainda, essa discussão também mostra a sua componente epistemológica, pois ao encontrar variantes de teorias conhecidas, no nosso caso, variantes da trigonometria tradicional, com elas compreendemos melhor a estrutura teórica das teorias de partida.

Porém, ainda é possível dar um fechamento teórico a esta pesquisa, um fechamento de caráter mais matemático que didático e que, sob uma adequada interpretação, revelar-nos-á um resultado surpreendente sobre a matemática desenvolvida.

Veremos a seguir que, na realidade, e isso é o surpreendente, o corpo $\mathbf{C}_\varphi$ é isomorfo ao corpo dos números complexos $\mathbf{C}$, com uma forma de apresentação diferente dependente do ângulo φ, o que em certa medida significa que a trigonometria tradicional, isto é, a do ângulo reto, é única *a menos de uma mudança de perspectiva* (ou de geometria?), dada através do isomorfismo. Um resultado matemático e epistemológico relevante.

Seja $h : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_\varphi$ uma função e analisemos as condições para ela ser um isomorfismo entre os corpos $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}_\varphi$. Exigiremos que $h(a) = a$ para todo $a \in \mathbf{R}$ e que h preserve a soma e o produto de $\mathbf{C}$, então, se $z = a + ib$, teremos $h(z) = a + h(i)b$.

Por outro lado, $h(i)^2 = h(i^2) = h(-1) = -1$, donde, pelas considerações anteriores, $h(i) = \pm(\cot\varphi + j\,\mathrm{cosec}\,\varphi)$, o que já nos indica que há dois isomorfismos possíveis com as condições pré-estabelecidas.

Escolhendo a do sinal + obtemos, para $z = a + ib$,

$$h(z) = (a + b\cot\varphi) + j\,(b\,\mathrm{cosec}\,\varphi).$$

Claramente, h é um isomorfismo linear que preserva o produto de $\mathbf{C}$. Por outro lado, deixamos como exercício provar o seguinte:

Exercício 6: $h(z^*) = h(z)^*$, onde os conjugados são os de $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}_\varphi$ respectivamente.

Como uma consequência imediata dessa propriedade podemos deduzir, ainda, que h é também uma isometria. Com efeito, para todo $z \in \mathbf{C}$,

$$||h(z)||_\varphi^2 = h(z)h(z)^* = h(zz^*) = h(||z||^2) = ||z||^2, \text{isto é,}$$

$$||h(z)||_\varphi = ||z||.$$

REFERÊNCIAS

CIFUENTES, J. C. A matemática elementar de um ponto de vista superior: uma contribuição ao "Projeto Felix Klein" para o ensino de matemática na formação inicial de professores. In:

Formação do professor de matemática: reflexões e propostas (Helena Cury e Carlos Vianna, Orgs.). Santa Cruz do Sul: Ed. IPR, 2012, p. 145-183.

CIFUENTES, J. C e GUSMÂO, L. D. Epistemology and rationality of intuition and imagination in the field of mathematics. Pesquisa Qualitativa, vol. 8 (18), 2020, p. 503-523.

CIFUENTES, J. C e SANTOS, A. H. Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em matemática. **Educere et Educare**, vol. 14, 2019, p. 1-21.

CIFUENTES, J. C e SANTOS, A. H. A aventura da descoberta matemática em nível elementar. Anais do XVI EPREM. Foz do Iguaçu, 2022, p. 1-13.

COELHO, F. U. e LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2001.

DO CARMO, M. P.; MORGADO, A. C. e WAGNER, E. **Trigonometria, Números Complexos**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Trad. Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

Histórico

Recebido: 14 de outubro de 2023.
Aceito: 08 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

CIFUENTES, José Carlos; SANTOS, Alessandra Hendi dos. A aventura da criatividade matemática: o princípio de variabilidade na geometria elementar. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024011, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024011.id598

Como citar – APA

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. (2024). A aventura da criatividade matemática: o princípio de variabilidade na geometria elementar. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024011. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024011.id598

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques