

Geometria instrumental: a transdisciplinaridade das formas para a pesquisa e o ensino em geometria

Instrumental geometry: the transdisciplinarity of forms for research and teaching in geometry

Geometría instrumental: la transdisciplinariedad de las formas para la investigación y la enseñanza en geometría

Franck Bellemain¹  

RESUMO

Propomos, nesse texto, relançar uma reflexão sobre a pesquisa e o ensino da geometria, e isso sem colocar as tecnologias computacionais no centro dessa reflexão. Desde o início do século passado, com o programa de Erlangen e a teoria clássica dos invariantes, a geometria está perdendo espaço como domínio de pesquisa, e como consequência, apesar de continuar tendo uma importância significativa nas atividades humanas, conteúdos de geometria clássica foram retirados do ensino. Nossa proposta, esboçada no texto, consiste em discutir, apoiado em alguns exemplos, a abordagem de uma geometria instrumental como área de pesquisa transdisciplinar e nortear seu ensino em torno da noção de forma para qual propomos uma primeira caracterização. O texto é um ponto a pé inicial terminando com algumas perspectivas de continuidade da discussão.

Palavras-chave: Geometria Gráfica; Geometria Instrumental; Transdisciplinaridade; Forma.

ABSTRACT

We propose, in this text, to restart a reflection on the research and teaching of geometry, and this without placing computational technologies at the centre of this reflection. Since the beginning of the last century, with the Erlangen program and the classical theory of invariants, geometry has been losing space as a research domain, and consequently, despite continuing to have significant importance in human activities, classical geometry contents have been removed of teaching. Our proposal, outlined in the text, consists of discussing, supported by some examples, the approach of instrumental geometry as an area of transdisciplinary research and guiding its teaching around the notion of form for which we propose a first characterization. The text is a starting point, ending with some perspectives for continuing the discussion.

Keywords: Graphic Geometry; Instrumental Geometry; Transdisciplinary; Form.

RESUMEN

Proponemos, en este texto, relanzar una reflexión sobre la investigación y la enseñanza de la geometría, y esto sin colocar las tecnologías computacionales en el centro de esta reflexión. Desde principios del siglo pasado, con el programa de Erlangen y la teoría clásica de las invariantes, la geometría ha ido perdiendo espacio como dominio de investigación y, como consecuencia, a pesar de seguir teniendo una importancia significativa en las actividades humanas, los contenidos de geometría clásica han sido eliminados de la enseñanza. Nuestra propuesta, esbozada en el texto, consiste en discutir, apoyado en algunos ejemplos, el abordaje de la geometría instrumental como área de investigación transdisciplinar y orientar su enseñanza en torno a la noción de forma para la cual proponemos una primera caracterización. El texto es un punto de partida y finaliza con algunas perspectivas para continuar la discusión.

Palabras clave: Geometría Gráfica; Geometría Instrumental; Transdisciplinariedad; Forma.

¹ Doutor em didática da matemática (UJF) Professor (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua João Francisco Lisboa, 121, B102 Apt303, Várzea, Recife, PE, Brasil, CEP: 50741-100. E-mail: franck.bellemain@ufpe.br

INTRODUÇÃO

Propomos, nesse texto, relançar uma reflexão sobre a pesquisa e o ensino da geometria, e isso sem colocar as tecnologias computacionais, e particularmente a geometria dinâmica computacional² (GDC), no centro dessa reflexão. Essa proposta é a contracorrente da evolução atual do ensino, assim como das atividades profissionais, nas quais as tecnologias computacionais estão tomando um espaço maior a cada dia, ganhando uma posição quase dominadora, notadamente com a inteligência artificial substituindo de forma assustadora sua genitora natural. Pode também parecer a contracorrente da minha própria história por ter sido envolvido, e continuando sendo, na concepção e na realização de suportes informáticos ao ensino da matemática, iniciando pela GDC.

Ao contrário dessa aparência, meu envolvimento nessa concepção e realização me leva a sempre manter as tecnologias computacionais na periferia do ensino da matemática, como suporte e não como objeto de ensino, junto com outros artefatos e tecnologias. Obviamente, não tem como e não se trata de negar as contribuições dessas tecnologias ao ensino da matemática, e mais especificamente da geometria. Podemos mesmo afirmar que elas têm um pequeno papel na reaparição de conteúdos de geometria no ensino básico, assim como na introdução de novos conteúdos. Entretanto, as exigências de uma abordagem transdisciplinar (matemática, cognição, didática, design, computação, ...) das questões relativas à concepção e à integração das tecnologias computacionais para ensino da matemática, assim como várias limitações destas, sendo algumas dificilmente superáveis, levam a relativizar a onnipotência anunciada dessas tecnologias para o ensino e a aprendizagem, notadamente para a matemática. Citarei como exemplos de tais limitações, a representação interna (memorização e cálculo) dos números reais e a relativa pobreza das interfaces com as tecnologias computacionais em comparação com a riqueza das capacidades humanas (os sentidos) de captar, interpretar, articular e transformar sensações em conhecimentos, sobretudo, quando se procura abordar a questão da inclusão.

Além desse envolvimento na integração das tecnologias computacionais no ensino da matemática, estou tendo o privilégio de ser docente do departamento de *Expressão Gráfica* da UFPE (DEG-UFPE), dando aula de geometria em diversas licenciaturas: matemática, artes plásticas, expressão gráfica³, e podendo participar de reformas desses mesmos cursos. Assim, como membro do DEG-UFPE, tenho a oportunidade de ensinar “diversas geometrias” (gráfica bidimensional, projetiva, analítica, dinâmica, ...) em diversas áreas de conhecimentos (matemática, artes visuais, geometria gráfica, computação, ...) e com diversos enfoques (formação de professores, de engenheiros, ...), conseqüentemente exigindo diversas relações *institucionais*⁴ com os conteúdos de geometria. Nessa jornada, pude descobrir pessoalmente a extensão da geometria, suas relações complexas com diversas áreas de conhecimento,

2 Acredito importante acrescentar a palavra computacionais desde que a ideia de geometria dinâmica pode ser encontrada em vários textos, alguns com objetivos didáticos como Clairaut (1741), anteriores à existência mesma do computador.

3 A licenciatura em expressão gráfica prepara professores para ensinar a geometria e suas aplicações (engenharias, arquitetura, artes, design e computação). As LDBs da educação eliminaram há muito tempo o componente curricular de desenho (geométrico, técnico, artístico e normativo) da educação básica e mantiveram alguns conteúdos de geometria nos componentes curriculares de matemática e artes visuais. Entretanto, a necessidade de ensinar mais geometria (e mais geometria aplicada) que aquela prevista em matemática e artes visuais existe notadamente através de muitas disciplinas do ensino integrado, assim como em diversas escolas e faculdades.

4 Cada curso tem expectativas (noções, abordagem etc.) diferentes relativamente aos conteúdos de geometria ensinados. Uma mesma disciplina, “geometria gráfica” por exemplo, com a mesma ementa em diferentes cursos era abordada diferentemente em cada curso (mais ou menos teórica, prática, critérios de avaliação etc.).

e sua versatilidade na abordagem e na resolução de problemas em diversas ciências, tecnologias e artes, assim como na vida cotidiana (visão do espaço, deslocamento, leitura e interpretação de formas do ponto de vista geométrico, cultural, estético, psicológico etc.). Tenho também a oportunidade de ver ou rever, apoiados em figuras, muitos resultados, frequentemente esquecidos, de geometria clássica, e testar aportes e limites, assim como a robustez, dos softwares de geometria dinâmica, testes que, regularmente, geram frustrações, e, logo, novos desafios.

Em contrapartida, como as e os que ensinam a geometria no ensino superior, particularmente meus colegas do DEG-UFPE (VALENTINA DE FREITAS LOPES *et al.*, 2019), essa jornada me deixou um pouco desorientado e levou a questionamentos epistemológicos sobre a geometria como domínio de conhecimento para pesquisa e ensino, construindo respostas um pouco diferentes das e dos professores-geômetras, colegas com outros perfis (arquitetas, designers, artistas etc.) que o meu. Aproveito esse texto para contribuir com algumas reflexões sobre esses questionamentos. Trata-se de um primeiro texto, inicial e parcial, levantando questões e pistas mais que respostas e propostas, considerando a riqueza e extensão do domínio da geometria, e, conseqüentemente, a complexidade desses questionamentos. Mas são reflexões articuladas ao longo dos anos com estudos, reforçadas através de pesquisas (BELLEMAIN, 1992; BELLEMAIN, 2004; SIQUEIRA, 2009; FERREIRA, 2011; NEVES JÚNIOR, 2018; SILVA, 2023) e pela necessidade de articulações, exigidas pela educação matemática, e frequentemente instrumentadas pela geometria, com outras áreas de conhecimentos.

O “Norte” que procuram os geômetras de expressão gráfica diz respeito a um reconhecimento científico, sobretudo no nível institucional, das atividades de pesquisa e ensino que realizam em geometria:

Apesar da sua notável importância, a Geometria Gráfica não existe como área de conhecimento específica para os órgãos de fomento à pesquisa, como por exemplo o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Tal fato demonstra que não sabemos quem somos. Melhor dizendo, tal fato demonstra que apesar da inegável importância que o aprendizado desses conhecimentos pode ter na vida das pessoas, não somos reconhecidos como ciência. (VALENTINA DE FREITAS LOPES *et al.*, 2019, p. 14)

De fato, são duas questões principais levantadas pelos autores:

- A existência e a importância, inclusive para o ensino básico, de uma área de conhecimento de geometria específica: a *geometria gráfica*,
- E apesar do estatuto de ciência dessa geometria, a ausência de seu reconhecimento institucional como área de pesquisa (CNPq) e ensino em nível superior (CAPES).

Não pretendo discutir a questão institucional, mesmo sendo fundamental porque essa ausência de um reconhecimento como área de pesquisa e ensino da *Geometria Gráfica* pelas instituições de fomento gera um déficit de visibilidade e suporte das atividades, assim como de presença em decisões de natureza mais política (noosfera) (CHEVALLARD, 1991) dos cientistas dessa área. De fato, antes de reivindicar um tal reconhecimento, é imprescindível precisar o que é essa área, esse “Norte”, representado pela *Geometria Gráfica*, e em que

ela é uma ciência específica e, questão mais importante ainda para seu reconhecimento como área de pesquisa, em que ela é uma ciência **viva**. Com efeito, além do fato que o reconhecimento institucional não é necessário, nem suficiente para que um conjunto coerente de conhecimentos seja uma ciência, o fato que um tal conjunto seja considerado como ciência não é suficiente para que ele gere pesquisas. Para ser viva, essa ciência precisa produzir novos conhecimentos.

O fato que uma ciência seja viva ou adormecida não interfere diretamente sobre a importância que seus saberes podem ter para as atividades humanas⁵. Entretanto, a ideia de importância nesse contexto é relativa a quem a julga e a ausência nas esferas de decisão (noosfera) de geômetras gráficos leva a um descompasso entre a importância que a geometria representa no ensino e sua importância nas atividades humanas. Basta lembrar da reforma da “matemática moderna” que eliminou do ensino da matemática muitos conteúdos de geometria elementar (e gráfica) por, entre outras razões, não serem mais objetos de pesquisa dos matemáticos do grupo Bourbaki, para entender que o adormecimento, o enfraquecimento, dessa ciência pode influenciar o entendimento da importância dos seus saberes para as atividades humanas. A aplicação dessa reforma terminou mostrando o oposto pela reação provocada para seus inúmeros usuários, pelo menos naquela época, à decisão de reduzir a geometria nos currículos de matemática: uma ciência pode ser adormecida sem deixar de ser importante. Por representar um conjunto de saberes úteis, a geometria elementar (e gráfica), pelo menos, **sobreviva**. Existem uma sociedade científica (ABEG⁶) que agrupa geômetras de várias áreas como matemáticos, engenheiros, informatas, arquitetas, designers, artistas etc., existem também revistas especializadas (RBEG⁷, RGG⁸, ...), e cursos nos quais a geometria representa uma parte importante dos conteúdos do currículo (Licenciatura na UFPE e Bacharelado na UFPR em Expressão Gráfica, ...).

Que um conjunto de conhecimentos seja importante ou não, que ele seja considerado como ciência ou não, que essa ciência seja viva ou adormecida parecem ser questões relativamente independentes. Relativamente porque obviamente isso tudo merece uma discussão bem maior, discussão que vou instigar por uma provocação, que converge para a inquietação de VALENTINA DE FREITAS LOPES *et al.* (2019): Será que uma ciência adormecida pode ser ainda considerada como ciência? Essa discussão porta, por parte, sobre a relação que os que praticam a geometria têm com essa ciência: afinal, hoje, a geometria é uma ciência pura ou aplicada? Essa questão é notadamente abordada pelos autores citados (*ibid.*) quando procuram um nome mais apropriado para identificar as atividades dos membros do DEG-UFPE, sugerindo notadamente que “geometria gráfica” seria mais apropriado que “expressão gráfica”. Eles não abordam necessariamente a questão em termo das relações institucionais da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1992), mas estão trazendo umas reflexões que podem alimentar a construção da reposta que a TAD permitiria. Interessante observar um paralelo a essa discussão no CIn⁹ da UFPE que está oferecendo,

5 Não limito a noção de atividades humanas a aquelas que são profissionais ou produtivas, considerando de forma mais global aquelas relativas ao trabalho, à obra e à ação como consideradas por Arendt (1958).

6 Associação Brasileira de Expressão Gráfica

7 Revista Brasileira de Expressão Gráfica

8 Revista de Geometria Gráfica

9 Centro de Informática

em forma de resposta sobre as relações dos informatas com a informática, dois cursos¹⁰: ciência da computação e engenharia da computação, distinção conduzido, por analogia, a considerar que, talvez, existem cientistas da geometria e engenheiros da geometria (*expressão gráfica?*).

Utilizar a TAD para abordar a questão da relação que os que praticam a geometria (geômetra) têm com a geometria traga uma contribuição importante a toda essa discussão. Essa utilização foi iniciada em alguns trabalhos do EDUMATEC-UFPE (FERREIRA, 2011; NEVES JÚNIOR, 2018) que investigaram a atuação dos membros do DEG-UFPE que justamente, através dos cursos onde ensinam e das pesquisas que praticam, tem diversas relações *personais* com a geometria. Não estou trazendo esses trabalhos nesse texto, outros estudos mais aprofundados estão em andamento.

Entretanto, a investigação, mesmo inicial, da relação geômetra-geometria, com o suporte da TAD, me leva à convicção que o ensino, e mais ainda a reflexão sobre o ensino, sobretudo quando fundamentada pela didática das disciplinas, constitui um espaço de vida para a ciência ensinada. Existe um certo desprezo, das disciplinas em relação com a didática delas, entretanto, no caso da geometria pelo menos, as pesquisas relativas à didática dessa ciência constituem para esta, um espaço de vida essencial. Penso, obviamente, à análise epistemológica, um dos fundamentos da didática das ciências, que, pelas suas diversas dimensões (histórica, filosófica, ...), revisita o saber e sua evolução a partir de olhar enriquecido dos conhecimentos de hoje, permitindo uma compreensão renovada da construção dos conhecimentos. Penso também na transposição didática, e sua declinação da transposição didático-informática (BELLEMAIN, 2022), que, nutrida, entre outra, pela abordagem epistemológica, pode levar ao desenvolvimento de novas tecnológicas, novas técnicas e investigar novos problemas para o ensino, e eventualmente construir novos conhecimentos. Discutiremos essa questão mais para frente no texto, mas acredito que a geometria descritiva de Gaspard Monge que, importante lembrar, nasceu através de um ensino, ilustra aportes possíveis da transposição à evolução, e, finalmente, à vida, de uma ciência. A exemplo das “leçons de géométrie descriptive” de Monge, a história da geometria é rica em livros com fins didáticos e novos conhecimentos. Hoje, a GDC que para seu desenvolvimento formula novas questões, e novas respostas, de computação gráfica, ofereceu novas abordagens das figuras geométricas, e através delas, novas compreensões e respostas para antigos e novos problemas. Dois destaques, de muitos, a respeito de possíveis aportes da didática da geometria à ciência geométrica.

Nessa perspectiva, pretendo discutir algumas questões epistemológicas a respeito da geometria caracterizada como gráfica que, espero, traga contribuições para a pesquisa assim como para o ensino de geometria.

DA GEOMETRIA GRÁFICA

O que é a *Geometria Gráfica*? Segundo Valentina de Freitas Lopes *et al.* (2019), a *geometria gráfica (GG)* interessa-se ao “estudo das formas e da apreensão do espaço”. Assim,

¹⁰ De fato, são três cursos, o CIn está propondo também um curso de Sistemas de Informação.

encontramos (ibid., p.15), apoiada em textos de Chaput¹¹ (1954) e Costa e al (1996), autores de referência da área, a seguinte caracterização, que, de fato, diz respeito à geometria em geral, e não especificamente à GG:

O primeiro afirma que, "A Geometria é a ciência da extensão. O espaço é extenso sem interrupção e sem limite" (Chaput, 1954, p. 3). Já Costa nos diz que "Um objeto possui FORMA, FUNÇÃO e CONSTITUIÇÃO MATERIAL. A GEOMETRIA estuda apenas a FORMA do objeto, desvinculada dos outros dois fatores" (COSTA *et al.*, 1996, p.14).

Definir a *geometria gráfica* a partir de uma caracterização geral da geometria coloca em evidência que a especificação "*gráfica*" não diz respeito a seus objetos de estudos. De fato, todas as geometrias (clássica, topológica, diferencial, algébrica, ...) interessam-se ao "estudo das formas e da apreensão do espaço"¹². Mais precisamente, elas estudam diversas relações (de incidência, de concordância, de grandezas, transformações, topológicas, diferencial, algébricas etc.) entre elementos. Entendemos que o diferencial da GG em relação a outras geometrias diz respeito às propriedades exploradas e às ferramentas e métodos, que são **gráficos**. Nesse sentido, ela foca no estudo dos objetos (pontos, linhas, superfícies e volumes) e relações que podem ser representados e investigados graficamente. Historicamente, e pelo fato que o estudo gráfico depende dos instrumentos de traçado, a GG funda-se sobre a extensa *geometria clássica* (euclidiana, afim, projetiva, não-euclidiana, ...) e a *geometria sintética* (também chamada de geometria pura) notadamente pelos nomes dos seus geômetras de referência como Monge, Brianchon ou Poncelet. Resumidamente, a geometria gráfica estuda, por abordagens empírica (heurística) e teórica (axiomática), as figuras do plano e do espaço que podem ser representadas graficamente.

Com o desenvolvimento das tecnologias, particularmente as computacionais, a gama de formas e situações graficamente (e digitalmente) representáveis e exploráveis aumentou significativamente, notadamente pela utilização de softwares (GD, CAO, DAO, ...), de algoritmos (gramática da forma), de cálculos etc. De fato, para representar e explorar, os geômetras gráficos não se restringem ao uso da régua e do compasso, assim como não negam a utilização das ferramentas e dos métodos analíticos como o fazia os geômetras-sintéticos no século 19. Representar graficamente as mais diversas formas é, acredito, um dos principais desafios dos geômetras gráficos. Afinal, o que funda a *geometria gráfica* é a geometria no seu entendimento mais amplo. Nesse ponto, não é nem pertinente restringir hoje esses fundamentos da GG à geometria cujos elementos podem ser representados graficamente, já que nada impede de descobrir representações gráficas de formas novas...

Nesse contexto, os fundamentos teóricos, os modelos, da geometria gráfica ficam distribuídos entre geometrias (topológica, diferencial, algébrica, ...), área de pesquisa, nas quais os geômetras gráficos não se encontram e uma geometria clássica que não produz mais conhecimentos como o afirmam VALENTINA DE FREITAS LOPES *et al.* (ibid., p. 7):

11 Precisando aqui que Chaput (1954) é conhecido com o "F.I.C." e faz referência à tradução em português da primeira edição no nome de Frère Ignace Chaput do livro "éléments de géométrie" da autoria de Frère Gabriel Marie (F. G.-M.) (QUARANTA NETO, 2014, p.189). Acrescenta, que existe talvez um equívoco nesse extrato desde que a publicação no nome de F. I.-C. de 1877 se refere à Frère IRLIDE – Jean-Pierre CAZENEUVE (nome civil) – frada superior de 1875 a 1884.

12 No sentido comum, histórico e ficando num nível geral. Mesmo do ponto de vista dos objetos estudados, pode também ficar difícil encontrar uma unidade para as geometrias. Nesse sentido, a unificação das geometrias tem provavelmente mais a ver, hoje, com princípios, abordagens e compreensão de problemas e situações que relativamente aos objetos estudados neles.

Tomando como ponto de partida o cenário geral da Geometria Gráfica é possível afirmar que ela, como ciência, ao longo de sua história, chegou a um estado de adormecimento. Há muitos anos não se formulam novas teorias, postulados, axiomas e teoremas, ficando difícil, portanto, traçar sua história sem remontar a um passado muito distante e já bastante explorado pela literatura. O seu desenvolvimento mais moderno se limitou às práticas ligadas ao seu Ensino.

Vetores, coordenadas, grupos de transformações (programa de Erlangen de Felix Klein), teoria dos invariantes (Arthur Cayley), ... convertem o estudo pela geometria gráfica das propriedades das formas em cálculos. O que Bourbaki (2007) também tinha destacado para, entre outro, justificar a retirada de conteúdos de geometria das figuras (gráfica), na elaboração do que é conhecido hoje como a reforma da matemática moderna:

Mas a situação torna-se muito mais clara com o progresso da teoria dos invariantes que finalmente consegue formular métodos gerais que permitem, em princípio, escrever todas as covariantes algébricas e todas as suas "sízias" de uma forma puramente automática; uma vitória que, ao mesmo tempo, marca a morte, como campo de pesquisa, da própria teoria clássica dos invariantes e da geometria "elementar", que se tornou praticamente um simples dicionário. Sem dúvida, nada nos permite prever a priori, entre a infinidade de teoremas que assim podemos acumular à vontade, quais serão aqueles cujo enunciado, numa linguagem geométrica apropriada, terá uma simplicidade e elegância comparáveis aos resultados clássicos, e este continua a ser um campo restrito onde muitos amadores continuam a praticar alegremente (geometria do triângulo, do tetraedro, curvas e superfícies algébricas de baixo grau etc.). Mas para o matemático profissional, a mina secou...¹³ (tradução nossa) (ibid., p. 171)

Afinal, retomando parte do posicionamento de Bourbaki, as atividades de *geometria gráfica*, hoje, ficam:

- Por um lado, como passatempo de matemáticas e matemáticos "amadores" com saudade de um tempo, bastante remoto, de um ensino da matemática com muita geometria clássica ou procurando nutrir a alma com belas figuras e demonstrações. Nesse sentido, lembramos da criação do "cercle des géomètres disparus" animado por Michel Guillerault¹⁴ no início dos anos 1990, no laboratório LSD2¹⁵ onde nasceu Cabri-géomètre, que dava a oportunidade de resgatar, organizar e apresentar, com belas construções de GDC, resultados esquecidos de geometria clássica.
- Por outro lado, como sistema de representação e método de investigação, com suporte tecnológico, em diversas ciências, tecnologias e artes (matemática, química, física, engenharias, arquitetura, artes visuais etc.).

13 Versão original: Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi d'enrouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

14 As atividades do "cercle des géomètres disparus" deixaram poucos rastros mas ainda encontramos online a versão "textos e figuras" de uma conferência de Michel Guillerault (Guillerault, 1996) disponível em (acesso 28/09/2023): (<http://www.cabri.net/abracadabri/Coniques/Guillerault/ConfGuillerault.html>)

15 Laboratoire de structures discrètes et didactique, Université Joseph Fourier, Grenoble

Os atores da geometria gráfica, considerando a classificação de Pirsig (2022), ficam divididos entre os “românticos”, incarnados por matemáticas e matemáticos, e os “clássicos”, incarnados pelos engenheiros, arquitetos e outros cientistas¹⁶. Embora provocativo, esse comentário ilustra a tensão permanente, provocadora da construção de conhecimentos, específica, por exemplo, no caso das ciências entre ciência pura e ciência aplicada, e vivenciada, de forma mais geral, pelos indivíduos, assim como pelos coletivos, entre a imanência e transcendência¹⁷.

Esse comentário ilustra, sobretudo, o dilema do geômetra gráfico, levado a investir numa geometria instrumental das figuras, essencialmente tecnológica, e às vezes pouca geométrica dependendo do tamanho dos “tijolos” (bibliotecas gráficas) que as tecnologias computacionais oferecem, por encontrar nas disciplinas que ainda precisam dessa geometria instrumental, o reconhecimento institucional que não conseguem enquanto ciência autônoma. Valentina de Freitas Lopes *et al.* (2019) vão ainda mais longe nessa questão do reconhecimento institucional, considerando que a instrumentação da GG pelas tecnologias computacionais deve permitir à geometria gráfica de chegar a ser considerada como uma ciência autônoma e área de pesquisa reconhecida (*ciência da forma*):

Acreditamos, que a exemplo desse curso, que fez uma opção em se desassociar das artes e se associar às tecnologias computacionais, a Geometria Gráfica tem a possibilidade de avançar e se desenvolver mais plenamente ao criar mais possibilidades de discussão do seu papel na produção de conhecimento e na sua própria construção como Ciência da Forma. (p. 12)

Novamente, não duvido dos aportes das tecnologias computacionais, mas continuo as considerando como instrumento e não como sendo o centro da produção de conhecimentos geométricos como sugerido pelos autores. Vejo, nessa aliança entre a geometria e as tecnologias computacionais, um paralelo com o cálculo instrumental (frequentemente instrumentado pelo computador) que é um suporte imprescindível em muitas áreas de conhecimento, porém sendo absorvido por essas áreas, sem que exista uma área de conhecimento específica e autônoma. Será que a geometria gráfica não poderia ser, da mesma forma, uma geometria instrumental, embutida nas áreas que ela instrumenta?

A utilização da expressão “geometria instrumental” não procura introduzir uma nova geometria ou nova forma de fazer geometria, ou mesmo substituir a geometria gráfica. Trata-se simplesmente de destacar o papel instrumental da geometria, papel que ela sempre teve e continua tendo. Simplificando, a geometria começou pelos instrumentos, a régua e o compasso, que associam as bases da geometria de Euclides ao traçado das figuras, apoio para as proposições e suas provas. A problemática das construções à régua e compasso está na origem dos três grandes problemas da antiguidade (quadratura da circunferência, duplicação do cubo e trissecção do ângulo) e a longa resolução teórica desses problemas encontrou seus fundamentos na geometria algébrica. Mesmo se, em termo de sofisticação, as

¹⁶ “A compreensão clássica vê o mundo acima de tudo como a própria forma subjacente. A compreensão romântica o vê, antes de mais nada, em termos de aparências imediatas” (p.74). Um comentário, “en passant”: O título original do livro de Pirsig “Zen and the Art of Motorcycle Maintenance” destaca a necessidade de transcendência (art of...) na imanência da manutenção das motocicletas...

¹⁷ Admito que estou correndo o risco de ser mal interpretado com a introdução do termo transcendência, sobretudo num texto com pretensão científica que deveria se aproximar mais da tese naturalista. Entretanto, sem chegar a supor a existência de causas sobrenatural ou supranatural, existem muitos fenômenos psicológicos e cognitivos que ainda “transcendem” o que as ciências naturais são capazes de explicar de forma satisfatória. Talvez possamos colocar a transcendência na dimensão holística da tese naturalista.

tecnologias computacionais aumentam a eficiência dos instrumentos, não tenho certeza de que elas mudam os princípios teórico-metodológicos relativos ao uso de instrumentos em geometria gráfica. Em todo caso, acredito que essa questão deve ser levantada. Uma resposta espontânea e intuitiva é que vejo efetivamente a geometria dando suporte à invenção de novas tecnologias computacionais (articulada com a computação gráfica, por exemplo), e para que essas tecnologias sirvam para a invenção de novos conhecimentos geométricos, elas devem focar nas construções geométricas.

Na imagem do cálculo instrumental, olhar e defender a geometria como instrumento, pode ser considerado por alguns como equivalente a assinar a sentença de morte da geometria gráfica, como área de pesquisa autônoma, está ficando definitivamente nas ciências que ela instrumenta. Acredito que essa posição não pode ser tão definitiva e depende sobretudo do entendimento, do sentido, dessa geometria instrumental e da relação *pessoal* que o “geômetra instrumental” estabelece com a geometria. Para exemplificar essa questão podemos considerar os dois livros de *geometria descritiva* de Gaspard Monge (1799) e Frère Gabriel Marie (F.G.M., conhecido no Brasil como F.I.C, 1989) que mostram duas relações diferentes com a mesma geometria instrumental: *racional e técnica* (p.121). As considerações a seguir foram tiradas do trabalho de Gani (2004). Não vou comparar os contextos políticos, econômicos, sociais, os públicos destinatários dos dois livros que, por serem diferentes, sem dúvida, levam às diferenças de abordagem da geometria descritiva proposta nos textos. Reproduzo aqui um dos resultados de Gani que acredito é edificante no que diz respeito às relações pessoais dos geômetras instrumentais com a geometria, e as consequências “científicas” dessas relações:

É notório que, nas mãos dos matemáticos, a Geometria descritiva serviu ao desenvolvimento da Geometria espacial ao estabelecer uma sólida relação entre a figura tridimensional e sua projeção em uma superfície de duas dimensões. Essa consideração foi determinante na concepção da Geometria projetiva em que Poncelet definiu as propriedades de uma figura que são mantidas na projeção. A partir dessas “propriedades projetivas”, diversos teoremas da Geometria sintética puderam ser demonstrados, sem recorrer à análise.

Na qualidade de ciência aplicada, porém, nossas pesquisas indicam que os profissionais das áreas técnicas focalizaram suas atenções nas práticas resultantes, dispensando, progressivamente, o conhecimento teórico.

A Geometria descritiva encontra-se, portanto, no tronco principal dessas duas ramificações – Geometria projetiva / Ciência aplicada –. Enquanto a primeira se desenvolveu como ciência, expandindo o conteúdo da Geometria descritiva, no sentido de levar às novas descobertas matemáticas, a segunda proporcionou uma evolução, bem diferente, da disciplina. Houve, nesse caso, uma tendência ao atrofiamento do conteúdo, incorrendo em um retorno aos manuais práticos. (ibid., p.121)

Empregando uma terminologia da TAD, o livro de Monge diz mais respeito às *tecnologias*¹⁸ da geometria descritiva enquanto aquele de F.G.M. diz mais respeito às *técnicas* da geometria descritiva. Gani (ibid.) ainda destaca que, apesar do livro de geometria descritiva de Monge ter sua origem no ensino que ele lecionou nas “écoles normales” (formação de professores), foi o F.I.C. que foi traduzido em português e:

¹⁸ Numa praxeologia, a tecnologia pertence ao bloco “logos” e, associada à teoria, constitui o discurso que justifica as técnicas. A técnica pertence ao bloco “práxis” e diz respeito ao processo executado para resolver uma tarefa.

... adotado nas escolas brasileiras por mais de cinquenta anos. Portanto, foi o livro que serviu de ensinamento aos autores de livros posteriores, funcionando como um elemento intermediário e relevante entre a concepção da Geometria descritiva e a sua abordagem atual (ibid., p. 16).

Essa escolha do livro “técnico” do F.I.C. como livro didático pode explicar, por parte, que:

A Geometria (Desenho ou ainda Desenho Geométrico), ainda persistiu como disciplina obrigatória dos cursos de nível Fundamental II e Médio (antigo “ginasial” e “científico”) nas décadas de 1950 e 1960, mas foi, cada vez mais, reduzida à simples memorização de receitas de traçado (VALENTINA DE FREITAS LOPES *et al.*, 2019, p.11).

... levando irremediavelmente a uma desvalorização da ciência geométrica nos currículos de ensino básico no Brasil. Uma hipótese é que a escolha, para o ensino, do livro do F.I.C no lugar do livro de Monge seria conforme a uma visão da educação orientada para a formação de técnicos preparados para a produção que para a formação de cidadãos com uma visão mais ampla e humanística. Essa hipótese é coerente com a época evocada, depois da segunda guerra (anos dourados) e a visão de um desenvolvimento econômico sem limite e considerando uma disponibilidade ilimitada de recursos.

O paralelo entre o cálculo instrumental e a geometria instrumental que serviu de provocação para as reflexões anteriores podia ser cortado pela raiz pelo simples fato que os registros de representação que utilizam são distintos: simbólico e gráfico. As representações gráficas utilizadas pela geometria instrumental por serem multifuncionais (DUVAL, 2001) oferecem possibilidades de olhares variados nas abordagens sintética e analítica. Voltando para o exemplo da geometria descritiva, o método das projeções de Monge foi explorado para o desenvolvimento da geometria projetiva, notadamente por Poncelet, desenvolvimento que permitiu novas interpretações e demonstrações sintéticas (GANI, 2004, p.121).

A aproximação da geometria gráfica com as tecnologias computacionais oferece a possibilidade à geometria de ter um “*papel na produção de conhecimento*”? Provavelmente, mas acho que somente na condição de considerar que as tecnologias são geométricas e não computacionais, e que as tecnologias computacionais são técnicas computacionais de representação gráfica-digitais para evitar que a *memorização das receitas de traçado* seja somente deslocada da mente do técnico de geometria para o computador... Mais uma questão levantada para ser discutida!

Esses comentários a respeito das possíveis relações pessoais com a geometria através da geometria descritiva e das tensões entre geometria pura e geometria aplicada me levam a ver a geometria gráfica como domínio de pesquisa mais através dos estudos e desenvolvimentos de metodologias, de representações e investigações, que do desenvolvimento de um conjunto de conhecimentos e técnicas relativos ao estudo gráfico das formas e do espaço, entendimento que me leva à visão de Heinzmann (2005, p.209) a destacar a importância da geometria como linguagem:

À primeira vista, pode-se acreditar que desde o início do século XX já não há necessidade de procurar a natureza da relação entre geometria e realidade, porque esta relação está quebrada. A “Realidade” é substituída pela álgebra e pela análise, que buscam, uma em geometria algébrica e outra em geometria diferencial, o rigor dos aspectos

geométricos. Mas não há apenas a algebrização da geometria, há também o movimento oposto: por exemplo, na teoria das probabilidades, diz-nos Maurice Fréchet, o cálculo de integrais múltiplas era longo e penoso até que “tivemos a ideia de considerar as n variáveis como as coordenadas de um ponto no espaço n -dimensional e estas integrais como volumes e massas neste espaço”. O que resta, de forma mais geral, é por um lado um movimento em direção a espaços abstratos (algébricos, topológicos etc.) e, por outro lado, uma utilização de termos e conteúdos geométricos como, por exemplo, “pontos”, “distância” ou “dimensão” como enquadramento linguístico nos mais diversos campos...¹⁹ (tradução nossa)

Essa compreensão de um papel da geometria gráfica nas ciências, me conduz a defender o aspecto transdisciplinar da geometria como área de pesquisa e ensino, defesa para qual vou apresentar alguns argumentos em forma de exemplo no próximo parágrafo. Vou voltar a utilizar a expressão “geometria instrumental” para evitar possíveis equívocos com o entendimento que a comunidade de EG tem da geometria gráfica, pelo menos nesse texto, e para não reduzir a instrumentação oferecida pela geometria à única dimensão gráfica (visual).

Aproveito para destacar que utilizo do termo “instrumental” nesse texto num sentido comum e não no sentido da noção de gênese instrumental de Rabardel (1995). Essa escolha é conforme à abordagem da geometria instrumental que proponho inicialmente nesse texto, mais generalista e menos em termo de psicologia cognitiva, entretanto, tenho convicção que a proposta de Rabardel (ibid.) pode ter aportes significativos para a aprendizagem da geometria pelo estudo da gênese instrumental dos objetos geométricos.

DA TRANSDISCIPLINARIDADE DA GEOMETRIA INSTRUMENTAL

Pretendo abordar essa questão com muita modéstia, mais como um projeto que como um relatório de pesquisa. A modéstia é imposta pelo tamanho do desafio, pela amplitude dos saberes que devem ser articulados e pelas questões filosóficas (as correntes de pensamento), e conseqüentemente políticas, envolvidas. Nesse sentido, pretendo sobretudo evocar alguns exemplos que alimentaram a intuição, iniciando com umas falas que norteiam a direção de reflexão na perspectiva do reconhecimento da geometria instrumental como área de pesquisa, esperando que as questões e reflexões alimentem outras discussões.

Nesse sentido, iniciando com Heinzmann (ibid., p. 210):

Quine desafiou esta posição clássica²⁰ no seu famoso artigo “Dois Dogmas do Empirismo”. Portanto, a distinção entre descrição e significado, representação e interpretação ou sintético e analítico é suspeita. Isto tem uma dupla consequência:

19 Versão original: À première vue, on pourrait croire que depuis le début du XXe siècle, il n’y a plus à chercher la nature du rapport de la géométrie à la réalité, parce que ce rapport est brisé. La « réalité » est remplacée par l’algèbre et l’analyse qui procurent l’une dans la géométrie algébrique et l’autre dans la géométrie différentielle la rigueur des aspects géométriques. Mais il n’y a pas seulement l’algébrisation de la géométrie, il y a également le mouvement inverse : par exemple, en théorie des probabilités, nous dit Maurice Fréchet, le calcul des intégrales multiples était long et pénible jusqu’à ce que l’on « ait eu l’idée de considérer les n variables comme les coordonnées d’un point dans l’espace à n dimensions et ces intégrales comme volumes et masses dans cet espace ». Ce qui reste, d’une manière plus générale est d’une part un mouvement vers des espaces abstraits (algébriques, topologiques, etc.) et, d’autre part, un usage de termes et de contenus géométriques comme, par exemple, « points », « distance » ou « dimension » en tant que cadre langagier dans les domaines les plus divers...

20 Quine opôs-se a « uma proposição científica é aceita como verdadeira não relativamente a uma descrição do mundo, mas relativamente à significação da proposição.

- A diferença entre o papel da linguagem e o papel do mundo na determinação da verdade de uma frase não é tão abrupta e não desempenha um papel tão importante como se pensava anteriormente (embora continue a ser o caso claro da lógica).

- Se a matemática perde o seu estatuto puramente analítico (o fracasso técnico de uma redução tem sido claro desde Russell), o progresso na matemática torna-se uma noção problemática porque já não é independente da experiência futura. Não podemos mais simplesmente manter a visão cumulativa do progresso matemático²¹ (tradução nossa) (ibid., p. 210)

Defendo a geometria instrumental como meio de esquematização, modelagem, interpretação e interlocução entre áreas de saber, intervindo como *logos* de articulação entre descrição e significação, representação e interpretação, abordagem sintética e abordagem analítica. Reforço essa ideia da geometria como linguagem de modelização e reificação, ainda com Heinzmann (ibid., p. 211) resumindo a reflexão de Ferdinand Gonseth²²:

O conhecimento geométrico deve ser concebido como uma “construção esquemática”. Nesta construção, a estrutura formal da geometria e das geometrias é alcançada através de um “processo de abstração” multinível. Cada um deles se caracteriza pela existência de um equilíbrio entre aspectos pragmáticos, empíricos e teóricos²³ (tradução nossa)

Existem inúmeros exemplos ilustrando tais aportes de uma geometria instrumental, de uma tecnologia geométrica, à evolução das ciências. Muitos pertencem a um passado remoto e servem como argumento para também colocar no passado a geometria utilizada, que fica como simples dicionário ou enciclopédia de resultados, assim como Bourbaki (2007, p.171) descreve a geometria elementar. Efetivamente, o que é possível de construir com a régua e o compasso, assim como os três problemas clássicos da antiguidade, foram esclarecidos através de uma abordagem analítica. Entretanto, acredito importante destacar que essas soluções só fazem sentido porque o problema de efetivamente realizar as construções existe. De fato, uma das questões importantes nesse caso, vem talvez mais do fato de a geometria permitir a esquematização sintética da “descrição do mundo” com a régua e o compasso, no caso, para encaminhar a construção de uma solução analítica de que efetuar (ou não) os traçados. Em retorno, a abordagem analítica mostra como, acrescentando novas ferramentas, novos pontos podem ser construídos graficamente, a exemplo da construção dos polígonos regulares de 7 e 9 lados, acrescentando as cônicas, às retas e circunferências (BAINVILLE; GENEVES, 2000).

Da mesma forma, como já evocado anteriormente, o método geométrico de representação de objetos tridimensionais de Monge foi tão importante, de um ponto de vista

21 Versão original: Quine a mis en difficulté cette position classique dans son célèbre article « deux dogmes de l'empirisme ». Dès lors, la distinction entre description e signification, représentation et interprétation ou synthétique et analytique est suspecte. Il en suit une double conséquence :

- La différence entre le rôle du langage et le rôle du monde dans la détermination de la vérité d'une phrase n'est pas si abrupte et ne joue pas un rôle si important que l'on croyait (bien qu'il subsiste le cas tranché de la logique).

- Si les mathématiques perdent leur statut purement analytique (l'échec technique d'une réduction est clair depuis Russell), le progrès en mathématiques devient une notion problématique parce qu'il n'est plus indépendant de l'expérience future. On ne peut plus simplement maintenir la vue cumulative du progrès mathématique.

22 F. Gonseth, La géométrie et le problème de l'espace, vol. I-VI, Neuchâtel : Griffon, (1945/55) e Les fondements des mathématiques, de la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionnisme, (1926).

23 Versão original: La connaissance géométrique doit être conçue comme « construction schématique ». Dans cette construction, la structure formelle de la géométrie et des géométries est obtenue grâce à un « processus d'abstraction » à plusieurs niveaux. Chacun d'entre eux est caractérisé par l'existence d'un équilibre entre les aspects pragmatiques, empiriques et théoriques.

científico, por servir para o desenvolvimento da geometria projetiva, quanto para permitir a descrição precisa desses objetos para a produção deles. Na mesma ideia, podemos também destacar o papel da geometria na resolução de problemas algébricos (equação quadrática) antes da disponibilidade de métodos algébricos próprios, o que Guimaraes e Bellemain (2014) evocam (p.1):

For many centuries, geometry and algebra have been deeply linked. In fact, until the development of a functional symbolism, geometry served for a long time as computational tool to solve all types of problems. From the Babylonians to Descartes, first quadratic and then cubic problems were solved by geometrical methods, and even if the Persian mathematician Omar Al Khayyam (1048-1131) in his Algebra was convinced of the possibility of solving cubic equations with algebra...

A convicção de Al Khayyam vem provavelmente da intuição de um paralelismo entre o método geométrico e o método algébrico, paralelismo finalmente que inspirou Tartaglia (Niccolò Fontana, 1499-1557) na resolução de equações do terceiro grau, e foi institucionalizado por Descartes no apêndice sobre a geometria do discurso do método. Ainda podemos lembrar como a geometria pode guiar a procura de soluções algébricas “puras” como no caso do problema de Alhazen (reflexão num espelho circular) no qual a resolução algébrica levaria teoricamente a 6 pontos possíveis de reflexão como interseções de uma curva do segundo grau (espelho) com uma do terceiro grau pelo teorema de Bezout, mas a geometria mostra como a cúbica pode ser transformada (inversão em torno do espelho) numa hipérbole equilátera (segundo grau) que reduz o número de soluções possíveis a 4 (solução de Christian Huygens).

O fato de restringir a geometria a um dicionário de construções, provas, e algoritmo de traçado leva irremediavelmente à sua extinção como ciência viva. Defendo que a contribuição da geometria foi, e ainda é, em termos de métodos e tecnologias geométricas como Heinzmann (ibid., p. 213) expressa:

A lição que proponho tirar da filosofia de Gonseth equivale a dizer que a observação de uma ruptura absoluta é na verdade a observação de uma atitude que ignora o problema dos fundamentos, ignorando a história e a evolução do pensamento abstracto. Não há apenas uma evolução do conteúdo matemático, mas ao mesmo tempo uma evolução dos meios de conhecimento que permite inventar novas sínteses em relação às quais não existe ruptura: não há abandono do aspecto intuitivo porque o quadro intuitivo de a referência não é o quadro de referência inicial (realidade). É assim que devemos interpretar a extensão do espaço e a geometrização dos conteúdos.²⁴ (tradução nossa)

A proposta pode ainda ficar pouco convincente pelos exemplos (pré-)históricos escolhidos e porque a geometria ilustrada pertence à área da matemática, minando nesse sentido a proposta da geometria instrumental ser uma área transdisciplinar. Entretanto, acredito que esses exemplos servem para ilustrar, traduzindo Heinzmann, a “*geometrização dos conteúdos*” e a “*evolução dos meios de conhecimento permitindo a invenção de novas sín-*

²⁴ Versão original: L'enseignement que je propose de tirer de la philosophie de Gonseth revient à dire que le constat d'une coupure absolue est en fait le constat d'une attitude qui méconnaît le problème des fondements en faisant l'économie de l'histoire et de l'évolution de la pensée abstraite. Il n'y a pas seulement une évolution des contenus mathématiques mais en même temps une évolution des moyens de la connaissance permettant d'inventer des synthèses nouvelles par rapport auxquelles la coupure n'existe pas : il n'y a pas abandon de l'aspect intuitif parce que le référentiel intuitif n'est pas le référentiel (la réalité) initial(e). C'est de cette manière qu'il faut interpréter l'extension de l'espace et la géométrisation des contenus.

teses". Para estender o entendimento dos aportes da geometria através da "geometrização dos conteúdos" e a "invenção de novas sínteses" a outras áreas além da matemática, o próprio exemplo já citado do problema de Alhazen que, mesmo podendo ser formulado e solucionado completamente na matemática, pertence também ao domínio da ótica geométrica (física). Nesta ciência, a geometrização permite, traduzindo novamente Heinzmann, "um uso de termos e conteúdos geométricos enquanto quadro linguístico" em diversos domínios como a oftalmologia, a medicina, a astrofísica, a astronomia, e, obviamente, as artes (perspectiva e anamorfose, fotografia etc.), entre outros.

Continuando no domínio das artes plásticas, historicamente, a geometria instrumental foi uma ponte tecnológica de mão dupla entre matemática, artes e engenharias. O exemplo provavelmente mais citado para ilustrar essa ponte é a utilização e o desenvolvimento de projeções e representação em perspectiva que participaram, do lado matemático, do desenvolvimento da geometria projetiva, e do lado das artes e engenharias, à efervescência e criatividade do *quattrocento* italiano que marcou o início do renascimento com suas consequências nos movimentos artísticos, e tecnológicas (arte gótico, estereotomia, arquitetura e construções etc.). Essa ponte foi regularmente percorrida por Monge (1799, p.4) com a geometria descritiva:

Entre as diferentes aplicações que se podem fazer do método das projeções, há duas que se destacam, tanto pela sua generalidade, como pelo que são engenhosas: são as construções da perspectiva e a determinação rigorosa das sombras nos desenhos. Estas duas partes podem ser consideradas o complemento da arte de descrever objetos. Ali serão formados esses cidadãos, pois estando destinados a um dia ensinar os procedimentos da geometria descritiva, é necessário que conheçam todos os recursos. A seguir aplicaremos o método das projeções às construções gráficas, necessárias ao maior número de artes, como as linhas de lapidação de pedra, as de carpintaria, etc.²⁵

Relativamente aos aportes da geometria às artes e reciprocamente, queria ainda destacar uma outra ponte construída através de geometrizações entre artes e psicologia com os trabalhos em arteterapia de Nise da Silveira (SILVEIRA, 2015). A psiquiatra, inspirada em C. G. Jung (1921), Prinzhorn (1922) e Worringer (1907), observa abstração, geometrismos e configurações (*gestaltung*) nas pinturas dos pacientes do centro psiquiátrico Pedro II no Rio de Janeiro, e utiliza essas observações para interpretar os estados de angústia dos pacientes e a evolução desses estados com o enriquecimento das pinturas com elementos orgânicos. Junto com o reconhecimento da qualidade artística das produções²⁶, a geometria (os geometrismos) militou a favor de um reconhecimento da coerência das produções que, lentamente e apesar de muitas dificuldades e atritos, levou a um acolhimento mais humano e inclusivo das pessoas em estado de angústia extrema. A coerência, a "normalidade", dos geometrismos utilizados pelos pacientes tem suas raízes nos arquétipos armazenados no inconsciente coletivo e intervém na percepção e moldagem dos comportamentos humanos.

25 Versão original: Parmi les différentes applications que l'on peut faire de la méthode des projections, il y en a deux qui sont remarquables, et par leur généralité, et par ce qu'elles ont d'ingénieux : ce sont les constructions de la perspective, et la détermination rigoureuse des ombres dans les dessins. Ces deux parties peuvent être considérées comme le complément de l'art de décrire les objets. On y exercera ces citoyens, parce qu'étant destinés à enseigner un jour les procédés de la géométrie descriptive, il est nécessaire qu'ils en connaissent toutes les ressources. Ensuite on appliquera la méthode des projections aux constructions graphiques, nécessaires au plus grand nombre des arts, tels que les traits de la coupe des pierres, ceux de la charpenterie, etc.

26 Fora da área da psiquiatria é que se desenvolveu o movimento contrário à discriminação das expressões de arte não condicionadas por cânones culturais. Este movimento, liderado por Jean Dubuffet, inclui a arte de habitantes dos hospitais psiquiátricos, presidiários, solidários, inadaptados, marginais de toda espécie. Com o objetivo de reunir e proteger as obras desses marginais, Jean Dubuffet fundou em 1945 a Companhia da Arte Bruta. (SILVEIRA, 2015, p.17)

Considero a dificuldade encontrada por Nise da Silveira em ter seu trabalho reconhecido pela própria área da psiquiatria²⁷ como sintomática da abordagem reducionista da ciência em termo de áreas, subáreas etc. das instituições brasileiras de pesquisa e ensino e, acredito, da ciência no nível internacional. Não se trata de negar a importância da avaliação por pares da pertinência e importância dos trabalhos produzidos, mas em contrapartida, se deve reconhecer que o sistema favorece uns funcionamentos pouco propícios ao avanço da ciência (avaliação quantitativa, corporativismos, sectarismos, ...). Nesse sentido, acredito que a dificuldade de um reconhecimento da geometria gráfica como área de pesquisa esbarra, entre outras razões, nesse reducionismo das áreas de conhecimentos, o que me leva a entender a abordagem naturalista e holística, e finalmente mais humanista, da geometria instrumental como domínio *transdisciplinar* de conhecimentos da estruturação atual da ciência em disciplinas.

Inspirado pela militância antimanicomial iniciado por Nise da Silveira com a abordagem arte-terapêutica, vejo uma dimensão política num papel linguístico e instrumental da geometria: humanística e inclusiva. O que me leva a esse entendimento, são as três situações seguintes correspondendo a momentos-chaves da história, coincidindo com momentos-chaves da presença de conteúdo de geometria no ensino. Não se trata de dizer que para salvar a humanidade, precisa salvar a geometria, mas tendo a considerar que a redução da geometria a uma visão tecnicista é sintoma de uma evolução da sociedade orientada quase exclusivamente pela produção e o consumo consequente:

- No período pós-revolução francesa, Monge, progressista, utilizou suas responsabilidades políticas para introduzir a geometria descritiva no ensino, utilizando, entre outro, uma justificativa social:

É, antes de mais, familiarizando com o uso da geometria descritiva todos os jovens que têm inteligência, bem como aqueles que adquiriram riqueza, para que um dia estejam em condições de fazer do seu capital um emprego mais útil tanto para si e para a nação do que mesmo aqueles que não têm outra fortuna senão a sua educação, para que possam um dia dar maior valor ao seu trabalho²⁸ (p. 2, tradução nossa)

- No período pós golpe de 1964, que coincidiu com a reforma da matemática moderna, o discurso (escrito, mas que não pude pronunciar por questões políticas) de paraninfo de Antônio Bezerra Baltar, abraçando a tese naturalista, na formatura, 27/12/1964, dos engenheiros da escola de engenharia da Universidade do Recife no qual ele considera, obviamente na contramão dos dirigentes na época, que as dimensões da profissão de engenheiro são filosóficas, científicas, técnicas, artísticas e humanistas. (BALTAR, 2022)
- O que sobrou dessa visão holística da engenharia? Latour e Schultze (2002), na nossa época de colapso ambiental e humanista, respondem: *Este é também o caso dos engenheiros e inventores, cujo desejo de inovação é quebrado pelas estreitas restrições da produção*²⁹ (tradução nossa) (ibid., p. 59), e ainda completa, destacando a visão reducionista

27 Aliás, no mundo inteiro, os psiquiatras em sua grande maioria recusam a aceitação do valor artístico das pinturas e desenhos dos doentes mentais. Mantem-se irredutíveis, repetindo sempre os velhos chavões "arte psicótica", "arte psicopatológica", arraigados a conceitos pré-formados da psiquiatria, insistentes em procurar nessas pinturas somente reflexos de sintomas e de ruína psíquica. (Silveira, 1981, p.16)

28 Versão original: C'est, d'abord, en familiarisant avec l'usage de la géométrie descriptive tous les jeunes gens qui ont de l'intelligence, tant ceux qui ont une fortune acquise, afin qu'un jour ils soient en état de faire de leurs capitaux un emploi plus utile et pour eux et pour la nation que ceux même qui n'ont d'autre fortune que leur éducation, afin qu'ils puissent un jour donner un plus grand prix à leur travail.

29 Versão original: C'est aussi le cas des ingénieurs, des inventeurs, brisés dans leur désir d'innovation par les étroites contraintes de la production

que visa a privilegiar, ou reduzir, a ciência à dimensão técnica na perspectiva única da produção:

Todas as profissões intelectuais e acadêmicas estão prontas a opor a sua racionalidade à economia do conhecimento e à “avaliação racional” do seu trabalho. Despojámos os inovadores da sua capacidade de invenção, mas também dos académicos tudo o que lhes permitia prosseguir a sua investigação. Entre a investigação, a engenharia e as práticas de geração, existem milhares de ligações que foram quebradas e que muitos “trabalhadores da prova” estariam prontos a reconectar³⁰ (tradução nossa) (ibid., p. 59-60)

Não pretendo prolongar essa discussão nesse texto, mas não é por isso que não a considero como importante e vejo uma conexão entre a defesa da geometria instrumental como área de pesquisa e ensino e a construção de uma sociedade científica menos “tecnicista” e mais “humanista”.

Para terminar com essa reflexão sobre a geometria instrumental como domínio de conhecimentos transdisciplinares, queria trazer ainda dois exemplos mais recentes. O primeiro diz respeito a um trabalho de Mollard e Payan (1990). Os dois pesquisadores procuraram otimizar o comprimento dos lados do menor quadrado contendo 10 discos de mesmo raio, estendendo a otimização obtida nos casos de 11, 13 e 14 discos. O problema é de natureza geométrica, mas a solução sendo numérica, a resolução é analítica, entretanto, os pesquisadores encontraram a configuração que otimiza o comprimento dos lados do quadrado através da expressão e exploração gráfica do problema, com auxílio de um software de geometria dinâmica. De uma certa forma, a tecnologia utilizada para encontrar essa otimização foi geométrica e a técnica para calcular o valor foi analítica.

O outro exemplo diz respeito a um trabalho em andamento de computação gráfica no qual procuro representar graficamente e digitalmente cônicas utilizando aproximações por curvas de Bezier por serem disponíveis (até ordem 3) na maioria das bibliotecas gráficas computacionais. Por ser um problema de computação gráfica, cálculos numéricos são necessários, mas a geometria é instrumentada para permitir a determinação de forma bastante enxuta da natureza das cônicas e outras informações geométricas (centros, eixos, ...) que permite um traçado “digital” mais eficiente de cônicas.

Nesses dois exemplos, a geometria não somente é loco de representação dos problemas, mas ela também tem um papel importante na resolução dos mesmos pela heurística que ela permite.

GEOMETRIA INSTRUMENTAL E ENSINO

Abordar a questão do ensino de um domínio de conhecimento consiste, resumidamente, em responder as questões clássicas do porquê? o quê? e como? desse ensino. Obviamente, as respostas a essas questões não são universais, entretanto, na perspectiva instrumental da geometria e da transdisciplinaridade, parece interessante explorar uma certa “universalidade” da linguagem geométrica.

³⁰ Versão original: Tous les métiers intellectuels et savants sont prêts à opposer leur rationalité à l'économie de la connaissance et à l'« évaluation rationnelle » de leur travail. On a dépossédé les innovateurs de leurs capacités d'invention, mais aussi les universitaires de tout ce qui leur permettait de poursuivre leurs recherches. Entre la recherche, l'ingénierie et les pratiques d'engendrement, il y a pourtant mille liens qui ont été rompus et que de nombreux « travailleurs de la preuve » seraient prêts à renouer.

Antes de refletir mais especificamente sobre o ensino da geometria na perspectiva instrumental, queria rapidamente falar do curso de licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE, considerado como uma das únicas formações de professores de geometria gráfica (e elementar) do Brasil. Não se trata aqui de desprezar os conhecimentos de geometria dos licenciados em matemática, mas não se trata também de considerar como “automaticamente” equivalentes, as preparações para ensinar a geometria, pelo menos no papel, dos licenciados em matemática e licenciados em expressão gráfica.

De fato, a licenciatura em expressão gráfica da UFPE, objetiva preparar professores para ensinar a geometria no ensino básico (incluindo o ensino integrado), e geômetras gráficos do DEG-UFPE, até recentemente, foram regularmente chamados para propor disciplinas de geometria gráfica em outras licenciaturas (matemática, artes visuais, ...). Obviamente, a ausência de um reconhecimento institucional da *geometria gráfica*, seja como área de pesquisa, seja como conteúdo curricular importante do ensino básico, exige que esses espaços sejam constantemente (re)conquistados e defendidos.

Os saberes ensinados na licenciatura em expressão gráfica não se limitam à geometria elementar desde que se procura preparar os licenciandos para ensinar no ensino integrado (ensino básico e formação técnica). Além disso, no intuito de aumentar a empregabilidade dos egressos em outras escolas e faculdades que aquelas do ensino básico (como engenharia, arquitetura, design etc.), os licenciandos estudam a produção de material didático físico ou digital, a utilização e integração das tecnologias computacionais (software de geometria dinâmica, de desenho, de modelagem etc.). De fato, os egressos da licenciatura em expressão gráfica parecem bem-preparados para ensinar a geometria elementar, inclusive no componente curricular de matemática.

Com a pandemia e o investimento no ensino a distância, e o aumento das necessidades de uso de tecnologias computacionais nas áreas de aplicação da geometria gráfica como arquitetura (uso da tecnologia BIM), prototipagem (uso de software de modelagem) para muitas áreas (da saúde às artes, passando pelas engenharias), etc. a parte de ensino-aprendizagem de competências técnicas digitais (geometria gráfica digital) aumentou bastante. Destacando esse aumento da importância do domínio e uso de softwares de modelagem diversos na LEG, não se trata de diminuir aqui o preparo dos licenciados em expressão gráfica para ensinar a geometria, sobretudo sem uma investigação aprofundada. Entretanto, esse destaque abre a discussão, respaldado pela discussão anterior sobre a geometria instrumental como área de pesquisa, a respeito da articulação entre *logos* (geometria) e *práxis* (técnicas de representação) na formação dos professores em expressão gráfica. Nesse sentido, queria trazer alguns elementos de reflexão para o ensino de geometria inspiradas da perspectiva transdisciplinar da geometria instrumental.

O porquê? e o quê? do ensino da geometria foi evocado rapidamente no parágrafo anterior e sugiro, para completar, a leitura do “*Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*” de Perrin (2002b). Apesar de ser um texto considerado como antigo³¹, ele apresenta argumentos convincentes para que a geometria continue sendo ensinada e propõe

31 Nos critérios atuais de avaliação dos textos científicos, mas não tão antigo considerando a longa história da geometria e seu ensino, sobretudo, considerando que o texto está apresentando orientações e não propostas detalhadas para o ensino da geometria.

orientações que a comissão Kahane acha importantes para esse ensino. Não vou resumir as propostas, me limitando a destacar alguns elementos que reforçam reflexões do parágrafo anterior. Nesse sentido, trago uma fala do próprio Perrin (2002a) comentando o relatório³² e na qual ele evoca a geometria, sem a apresentar explicitamente como tal, como meio de pensamento “*transdisciplinar*”:

A conclusão essencial do relatório de progresso é a necessidade de manter o ensino de geometria no ensino médio e ainda mais na faculdade. Vários argumentos são desenvolvidos em favor deste ensino. A sua utilidade e importância cultural são discutidas em particular. Neste texto, destacarei antes dois outros aspectos que são, a meu ver, objetivos essenciais do ensino de geometria:

- visão geométrica como ferramenta de pensamento (em matemática e em outros lugares),
- a geometria como lugar privilegiado para aprender o raciocínio³³ (tradução nossa) (ibid., p.1)

Para atingir esses objetivos, ele considera essencial que os alunos adquiram as “boas” ferramentas (tecnologias) nas quais ele cita (ibid., p. 2): os invariantes (comprimentos, ângulos, áreas), os casos de congruência e semelhança, o cálculo, as transformações.

Invariantes, congruência e semelhança de triângulos, transformações (e seus invariantes) levam a dar um destaque particular à noção de forma no ensino da geometria. Esse destaque é coerente com a importância que os geométricos gráficos estão dando ao estudo da forma (VALENTINA DE FREITAS LOPES *et al.*, 2019) que notadamente levou alguns membros históricos do DEG-UFPE a evocar a possibilidade de denominar a geometria gráfica de *morfologia*. Mesmo se uma tal denominação era utópica, morfologia é um termo que pertence a várias outras ciências, ela coloca em evidência a transdisciplinaridade da noção de forma, que pode ser diversamente interpretada nas áreas de conhecimento, e igualmente articulada entre essas áreas.

Não vou arriscar uma definição genérica da noção de forma, cada ciência provavelmente define essa noção de acordo com seu estudo da forma (morfologia) e vou tentar uma caracterização pelo menos no contexto da matemática. Em geral, matemáticos associam a forma à noção de semelhança, ou seja, eles consideram que dois objetos têm a mesma forma se são semelhantes (no sentido da transformação geométrica “semelhança”). Entendo que essa definição não contempla a maioria das formas “elementares” estudadas em geometria e matemática (DOSSIER POUR LA SCIENCE, 2016).

Nesse sentido, vou arriscar uma definição mais geral, mantendo a coerência com a caracterização das geometrias dada por Felix Klein e os invariantes, ou seja, das geometrias

32 Comissão de reflexão sobre o ensino da matemática A comissão, presidida por J.-P. Kahane, realizou o seu trabalho de 1999 a 2003. A pedido de um grupo de associações, o ministério francês da educação confiou a Jean-Pierre Kahane, em Abril de 1999, a missão de reunir um grupo de professores e investigadores para liderar, à frente dos programas nacionais do Conselho e do grupo de especialistas responsáveis pelo desenvolvimento de programas de matemática para o ensino secundário, uma reflexão global e de longo prazo sobre o ensino da matemática desde o ensino básico até à universidade.

33 Versão original: La conclusion essentielle du rapport d'étape c'est la nécessité de conserver un enseignement de géométrie au lycée et plus en core au collège. On y développe plusieurs arguments en faveur de cet enseignement. Il y est notamment question de son utilité et de son importance culturelle. Dans ce texte, je mettrai plutôt en avant deux autres aspects qui sont à mes yeux des objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie :
• la vision géométrique comme outil de pensée (en mathématiques et ailleurs),
• la géométrie comme lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement.

dizem respeito ao estudo das propriedades invariantes por grupos de transformações. Nesse sentido, queria definir a noção de forma em associação a um grupo de transformação como classe de objetos tal que dois objetos pertencem a mesma classe se existe uma transformação do grupo que transforma um no outro. Por essa caracterização, temos o conjunto das classes (formas) dos objetos congruentes associado às isometrias, o conjunto das formas semelhantes associadas às semelhanças, o conjunto das formas projetivas (exemplo das cônicas) associadas às transformações projetivas. Etc. Considero estender essa caracterização das formas pelos grupos de transformações as gramáticas da forma, caracterização na qual dois objetos são da mesma classe se existe um algoritmo da gramática que permite passar de um para outro. Vejo os aportes dessa extensão às gramáticas das formas como enriquecimento das possibilidades de “descrição e interpretação do mundo” pela geometria.

Mesmo necessária, não vou entrar em detalhes e rigor dessa caracterização de forma nesse texto, considerando esse primeiro esboço como suficiente para evocar algumas pistas de reflexão. Com a noção de forma, não se trata de substituir os invariantes citados por Perrin (ibid.) como importantes para o ensino da geometria por um outro invariante. Trata-se ao contrário de considerar mais um invariante (a forma), talvez mais intuitivo que os demais, permitindo articular, no processo de *abstração em vários níveis* (HEINZMANN, 2005, p.211), a percepção global (da forma, justamente) e a percepção local (comprimento, área, ângulo, e demais invariantes). Além desse foco na matemática, e voltando para a perspectiva transdisciplinar, acredito que a noção de forma permite articular a percepção global da forma com diversas percepções locais: os invariantes citados da geometria “matemática” ou, por exemplo, geometrismos da arte dos pacientes de Nisa da Silveira (2015).

Preciso ainda que a noção de forma tal que definida acima não diz respeito somente a formas gráficas. Foi nesse sentido que optei, pelo menos nesse texto, pela geometria instrumental no lugar da geometria gráfica para abrir a interpretação geométrica “do mundo”, numa perspectiva de inclusão, a outros sentidos que simplesmente a visão, notadamente o tato. Nesse ponto de vista, não resiste à vontade de compartilhar a beleza dessa citação de Focillon (1934, p.9-10):

A posse do mundo requer uma espécie de olfato tátil. A vista desliza ao longo do universo. A mão sabe que o objeto é habitado pelo peso, que é liso ou áspero, que não está soldado ao fundo do céu ou da terra com o qual parece ser um. A ação da mão define o vazio do espaço e a plenitude das coisas que o ocupam. Superfície, volume, densidade, gravidade não são fenômenos ópticos. Foi entre os dedos, foi nas palmas das mãos que o homem os conheceu pela primeira vez. Ele mede o espaço, não com o olhar, mas com a mão e o passo. O toque enche a natureza de forças misteriosas. Sem ele permanecia como as deliciosas paisagens da câmara escura, claras, planas e quiméricas³⁴ (tradução nossa)

34 Versão original: La possession du monde exige une sorte de flair tactile. La vue glisse le long de l'univers. La main sait que l'objet est habité par le poids, qu'il est lisse ou rugueux, qu'il n'est pas soudé au fond de ciel ou de terre avec lequel il semble faire corps. L'action de la main définit le creux de l'espace et le plein des choses qui l'occupent. Surface, volume, densité, pesanteur ne sont pas des phénomènes optiques. C'est entre les doigts, c'est au creux des paumes que l'homme les connut d'abord. L'espace, il le mesure, non du regard, mais de sa main et de son pas. Le toucher emplit la nature de forces mystérieuses. Sans lui elle restait pareille aux délicieux paysages de la chambre noire, légers, plats et chimériques.

PROXIMOS PASSOS

A discussão anterior, mesmo se já começou a brotar há tempo com meus primeiros passos de pesquisador (DEA, tese), só faz abrir uma trilha. Como evocado ao longo do texto, a TAD fornece os princípios teórico-metodológicos para avançar nessa trilha e, no caminho, acredito que DUVAL (1988), com seu trabalho, pouco referenciado em comparação com seus textos apresentando a TRRS³⁵, sobre as diversas apreensões de figuras (perceptiva, descritiva e sequencial) é um guia importante. Não é por acaso considerando a obra de Duval, mas vejo seu trabalho sobre as apreensões como complementar do seu trabalho sobre os registros de representação no sentido que o primeiro fundamenta o reconhecimento e a descrição das formas e o segundo fundamenta a articulação entre formas de registros de representação diferentes. Duval não faz explicitamente essa leitura através da ideia de forma das articulações (conversão) entre registros de representação, entretanto, ela me parece implícita no seu trabalho notadamente quando se refere na discussão sobre a apreensão perceptiva aos trabalhos sobre a *Gestalt* estruturando o reconhecimento de formas através dos sentidos. Essa compreensão do trabalho de Duval fundamenta, a meu ver, a concepção de micromundo para o ensino da matemática, e de geometria dinâmica, no sentido que a realização de interface a manipulação direta pode ser justificada através da noção de covariação entre unidades significativas (ou conjunto de unidades: forma) dos diversos registros de representação articulados pelo micromundo (BELLEMAIN, 2022).

Além das investigações evocadas acima, acredito que um trabalho específico sobre as apreensões discursiva e sequencial das formas a partir das diversas áreas de conhecimento explorando “uma descrição geométrica do mundo” é um meio de investigar a natureza transdisciplinar da geometria: articulação entre apreensões discursivas das diversas áreas e entre apreensões sequenciais dos diversos registros de representação.

REFERÊNCIAS

ARENDRT, Hannah. The human condition. Chicago: University of Chicago, 1958.

BAINVILLE, E., GENEVES, B. . Constructions using conics. **The Mathematical Intelligencer**, Summer 2000, 60-72, 2000

BALTAR, L. A. de A., **Antônio Bezerra Baltar, meu pai**, Recife: FASA, 2022. 132p.

BELLEMAIN, F. ÉLÉMENTS D'INGENIERIE DE LOGICIELS EDUCATIFS, LE CAS DES MICROMONDES POUR LES MATHEMATIQUES : DIMENSIONS EPISTEMOLOGIQUE, COGNITIVE ET DIDACTIQUE. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 25, p. 80–105, 2022. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7017>. Acesso em: 31 out. 2023.

BELLEMAIN, F. **Reconhecimento de formas algébricas no ensino**. II HTEM. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2004.

35 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

BELLEMAIN, F. **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, Cabri-géomètre**. 1992. Tese (Doutorado em Didáticas das Matemáticas)–Université Joseph Fourier, Grenoble, 1992.

GUIMARÃES, L. C. ; BELLEMAIN, F. . REFLECTIONS ON THE PROBLEMA ALHAZENI. In: The 10th International Congress on Mathematical Education, 2004, Copenagen. **Proceedings of The 10th International Congress on Mathematical Education**, 2004.

BOURBAKI, N. . **Eléments d'histoire des mathématiques**, Springer Berlin Heidelberg, 2007
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-33981-6>

CHAPUT, F. I. **Elementos de geometria**: contendo noções sobre as curvas usuais. Rio de Janeiro: F. Briguiet e Cia, 1954.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique** : du savoir savant au savoir au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. In **Recherches en Didactique des Mathématiques** 12(1). Grenoble: La Pensée Sauvage. 1992. P.73-111.

CLAIRAUT Alexis. **Elements de géométrie**, Lambert et Durand, Paris, 1741

COSTA, M. D. e COSTA, A. P. de A. V. . **Geometria gráfica tridimensional**: sistemas de representação. vol. 1. 3ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996.

COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES (2000), Rapport d'étape sur le calcul (<http://www.eduscol.education.fr>)

DOSSIER POUR LA SCIENCE, **QUAND LES MATHS PRENNENT FORMES**, N° 91, AVRIL, 2016.

DUVAL, Raymond : Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres. In : **Actes de la journée en hommage à R. Douady**, IREM, Université Paris 7, pp.83-105. 2001

Disponível em: <http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/LME/betrancourt/Duval2001.pdf>. Acesso em: 31 out. 2023.

DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence. **Annales de didactique et de Sciences Cognitives**. Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, v. 1, p. 57-74, 1988.

FERREIRA, B. L. **Resolução de Problemas de Geometria Gráfica em Ambiente Computacional: o caso da interseção entre planos**. 2011. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

FRÈRE GABRIEL MARIE (Edmond Brunhes). 1877. **Géométrie descriptive–éléments**. 5e éd., 1893 Paris: Jacques Gabay, 1986.

FOCILLON, H. . 1934. **L'éloge de la main**, Paris : Editions la Découverte, 2022.

GANI, D C. **As lições de Gaspard Monge e o ensino subsequente da geometria descritiva**. 2004. 155 f. Dissertação (Mestrado em História da Ciências e das Técnicas e Epistemologia)– Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

HEINZMANN, G. . La géométrie et le principe d'idonéité : une relecture de Ferdinand Gonseth à partir d'une position naturaliste", in J. Kouneiher/D. Flament/Ph. Nabonnand/J.-J. Szczeciniarz (éds.), **Géométrie au vingtième siècle**. Histoire et horizons, Paris : Hermann, 209-215, 2005

JUNG, C. G. *Psychologische Typen*, Zurich : Rascher & Cie, 1921.

LATOUR, B.; SCHULTZ, N. **Mémo sur la nouvelle classe écologique**. Paris : La Découverte. 2022. 96p.

MOLLARD, M.; PAYAN, C. Some progress in the packing of equal circles in a square, **Discrete Mathematics**, Volume 84, Issue 3, Pages 303-307, 1990. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(90\)90135-5](https://doi.org/10.1016/0012-365X(90)90135-5).

MONGE, G. . 1799, **Géométrie Descriptive**. Leçons données aux Ecoles normales, an VII, Paris, Baudouin. Paris: Jacques Gabay, 1989.

NEVES JÚNIOR, C. A. **Equações quadráticas: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc**. 2018. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

PERRIN, D. DES OUTILS POUR LA GÉOMÉTRIE À L'ÂGE DU COLLÈGE : INVARIANTS, CAS D'ISOMÉTRIE ET DE SIMILITUDE, TRANSFORMATIONS, Bordeaux : IREM, 2002a.

PERRIN, D. Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement in KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Paris : Odile Jacob, 2002a.

PIRSIG, Robert M. **Zen e a arte da manutenção de motocicletas**: uma investigação sobre os valores. São Paulo: Martins Fontes, 4ª edição, 2022.

PRINZHORN, H. **Bildneri der Geisteskranken**: ein Beitrag zur Psychologie und Psychopathologie der Gestaltung, Berlin : Springer, 1922. 361p.

QUARANTA NETO, F. . **Tradução Comentada da Obra Novos Elementos das Seções Cônicas**. 1. ed. Natal: EDITORA FRN, 2014. v. 1. 224p.

RABARDEL, P. **Les Hommes et les Technologies**: Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin Editeur. 1995.

SILVA, A. R. **A articulação entre a abordagem documental do didático com um processo de design: aplicação na idealização de uma plataforma direcionada ao planejamento docente no ensino de geometria**. 2023. 272 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

SILVEIRA, N. 1981, *Imagens do inconsciente*, Petrópolis: Editora Vozes; 1ª edição, 2015.

SIQUEIRA, J. E. de Melo. **Equações quadráticas: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc**. 2009. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2009.

VALENTINA DE FREITAS LOPES, A.; BUARQUE RIBEIRO DE GUSMÃO, M. .; W. CARNEIRO DA CUNHA, M. . QUEM SOMOS? O QUE FAZEMOS? PARA ONDE VAMOS? UMA REFLEXÃO EPISTEMOLÓGICA SOBRE A GEOMETRIA GRÁFICA. **Revista Brasileira de Expressão Gráfica**, [S. l.], v. 7, n. 2, 2019. Disponível em: <http://www.rbeg.net/index.php/rbeg/article/view/81>. Acesso em: 31 out. 2023.

WORRINGER, W. **Abstraktion und Einfühlung**. Dissertation 1907; Piper, München 1908.

Histórico

Recebido: 17 de outubro de 2023.

Aceito: 12 de janeiro de 2024.

Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

Como citar – ABNT

BELLEMAIN, Franck. Geometria instrumental: a transdisciplinaridade das formas para a pesquisa e o ensino em geometria. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024013, 2024. <https://doi.org/10.37084/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024013.id600>

Como citar – APA

BELLEMAIN, F. (2024). Geometria instrumental: a transdisciplinaridade das formas para a pesquisa e o ensino em geometria. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024013. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024013.id600>

Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud  

José Messildo Viana Nunes  

Afonso Henriques  