

# Géométrie et modélisation intra-mathématique : le cas des vecteurs et du théorème de Thalès

Geometry and intra-mathematical modelling:  
the case of vectors and Thales's theorem

Geometría y modelización intramatemática:  
el caso de los vectores y el teorema de Tales

Pierre Job<sup>1</sup> 

Kevin Balhan<sup>2</sup> 

Ludovic Simonis<sup>3</sup> 

## RÉSUMÉ

Découper la modélisation mathématique en modélisations extra-mathématique et intra-mathématique permet, du point de vue didactique, de mettre en évidence une emphase excessive au niveau secondaire sur la composante extra-mathématique, au détriment de la composante intra-mathématique et partant offre des clefs de compréhension des difficultés d'appréhension des concepts mathématiques lorsqu'on tente par ignorance et/ou idéologie de les forcer dans un moule extra-mathématique alors même que leur raison d'être profonde est de nature intra-mathématique. La géométrie ne fait pas exception à ce schéma général. Dans cet article nous nous proposons d'exposer un parcours théorique explicitant comme il serait envisageable d'introduire les prémisses de la notion de vecteur dans une perspective de modélisation intra-mathématique, en montrant comment cette notion peut être construite comme outil permettant d'augmenter l'instrumentalité du théorème de Thalès, formulé de manière métrique, s'agissant de construire les équations cartésiennes de droites du plan.

**Mots-clés :** Vecteur ; Thalès ; Modélisation ; Intra-mathématique ; Praxéologie.

## ABSTRACT

From a didactic point of view, dividing mathematical modelling into extra-mathematical and intra-mathematical modelling makes it possible to highlight an excessive emphasis at secondary level on the extra-mathematical component, to the detriment of the intra-mathematical component, and thus offers keys to understanding the difficulties in grasping mathematical concepts when we try, through ignorance and/or ideology, to force them into an extra-mathematical mould, even though their deepest reason d'être is intra-mathematical in nature. Geometry is no exception to this general pattern. In this article, we set out to explain how it would be possible to introduce the premises of the notion of vector into a perspective of intramathematical modelling, by showing how this notion can be constructed as a tool for increasing the instrumentality of Thales' theorem, formulated in a metric way, when it comes to constructing the Cartesian equations of lines in the plane.

**Keywords:** Vector; Thales; Modelling; Intra-mathematical; Praxeology.

## RESUMEN

Desde un punto de vista didáctico, la división de la modelización matemática en modelización extramatemática e intramatemática permite poner de relieve un énfasis excesivo en el nivel secundario en el componente extramatemático, en detrimento del componente intramatemático, y ofrece así claves para comprender las dificultades de comprensión de los conceptos matemáticos cuando intentamos, por ignorancia y/o ideología, forzarlos a un molde extramatemático, aunque su razón de ser más profunda sea de naturaleza intramatemática. La geometría no es una excepción a este patrón general. En este artículo, nos proponemos trazar un camino teórico que explique cómo sería posible introducir las premisas de la noción de vector en una perspectiva de modelización intramatemática, mostrando cómo esta noción puede construirse como herramienta para aumentar la instrumentalidad del teorema de Tales, formulado de forma métrica, a la hora de construir las ecuaciones cartesianas de rectas en el plano.

**Palabras clave:** Vector; Tales; Modelización; Intramatemáticas; Praxeología.

1 Docteur en Sciences de l'Université de Liège (ULg). Chargé de cours à l'ICHEC Brussels Management School, Bruxelles, Belgique. Boulevard Brand Whitlock, 4, Bruxelles, Belgique CEP: 1150. E-mail: pierre.job@ichec.be.

2 Docteur en Sciences de l'Université de Liège (ULiège). Chargé de cours à l'ULiège, Liège, Belgique. Quartier Polytech 1 – Bâtiment B37, Allée de la Découverte, 12, Liège 1, Belgique. E-mail: kevin.balhan@uliege.be .

3 Doctorant en Sciences à l'Université de Liège (ULiège). Enseignant au collège Saint-François Xavier 1, Verviers, Belgique. Quartier Polytech 1 – Bâtiment B37, Allée de la Découverte, 12, Liège 1, Belgique. E-mail: kevin.balhan@uliege.be .

## INTRODUCTION

La plupart des acteurs de l'enseignement des mathématiques s'accordent aujourd'hui sur l'importance d'activités de "modélisation" dans l'enseignement des mathématiques. Toutefois, les approches divergent lorsqu'il s'agit d'envisager l'apprentissage de cette facette de l'activité mathématique. On peut *a minima* les catégoriser en deux grandes tendances : la modélisation extra-mathématique et la modélisation intra-mathématique, bien que ces deux types de modélisations entretiennent des liens de proximité plus ou moins importants selon les périodes et les disciplines dans lesquelles elles s'inscrivent. La modélisation extra-mathématique consiste en la production de modèles mathématiques de systèmes non-mathématiques, les modèles mathématiques des phénomènes physiques étant un exemple paradigmatique. La modélisation intra-mathématique quant à elle consiste en la production de modèles mathématiques des mathématiques elles-mêmes.

De nos jours, la conception dominante de l'activité de modélisation se limite à celle de phénomènes issus du "monde réel", et rejette dès lors d'entrée de jeu la modélisation de phénomènes intra-mathématiques. Or, "toute discipline, y compris les mathématiques elles-mêmes, peut devenir le milieu de modélisations" (BROUSSEAU, 2003, p. 26) et nombreux sont les concepts mathématiques qui émergent d'une activité de modélisation intra-mathématique. Aussi, vouloir à tout prix ancrer leur apprentissage dans des situations issues du "monde réel" est susceptible de les priver de leurs raisons d'être (CHEVALLARD, 1999).

L'enseignement en Belgique francophone ne fait pas exception, la dimension intra-mathématique de la "modélisation" y est le plus souvent absente dans les pratiques des professeurs de terrain et cela, sans doute, en raison d'une réforme dite "des compétences" qui a donné pour mission aux enseignants en 1997 et 1999 de faire de leurs élèves de futurs "citoyens responsables". Le levier principal pour atteindre les enjeux de ce slogan idéologique fut de polariser l'enseignement sur la résolution de problèmes à caractères "inédit" et "complexe". Cette polarisation sur l'aspect "citoyens" oriente l'enseignement en Belgique francophone vers la "modélisation" de phénomènes extra-mathématiques dans une visée utilitariste, sans pour autant par ailleurs que les programmes scolaires ne s'expliquent sur ce qu'ils entendent par "modélisation" ni sur les moyens d'apprentissage de cette compétence par les élèves. Cette focalisation de l'enseignement sur la résolution de tels problèmes est toujours d'actualité, et fait même partie des compétences transversales fondamentales à développer et à évaluer à l'école, malgré les critiques qui ont suivi et une nouvelle réforme de l'enseignement en 2015.

Mais si la dimension intra-mathématique de la modélisation reste le parent pauvre de l'enseignement, c'est sans doute également en raison du fait que les enseignants n'ont pas été formés à cette facette de la modélisation mathématique.

## CADRAGE THÉORIQUE

Dans cette perspective, Schneider (2008) conçoit une articulation entre deux types d'organisations mathématiques ordonnées qu'elle nomme: praxéologies "modélisation" et "déduction", comme modélisation didactique permettant de rendre compte de l'activité de

modélisation du mathématicien, aussi bien dans sa dimension extra-mathématique qu'intra-mathématique.

Le concept de "praxéologie" est introduit par Chevallard (1999) dans sa Théorie Anthropologique du Didactique pour modéliser toute activité humaine, y compris l'activité mathématique. Etymologiquement, le mot "praxéologie" renvoie à la pratique: la "praxis", et au discours sur cette pratique : le "logos". Le regard "praxologique" consiste donc d'une part à étudier les mathématiques à travers l'usage que l'être humain en fait, autrement dit les techniques qu'il construit et utilise pour répondre à ses besoins et accomplir certaines tâches qu'il se donne et, d'autre part, à étudier le discours qui justifie ces techniques en regard des tâches données ainsi que ce qui rend intelligible ces techniques. Le regard praxéologique met également à l'avant-plan la "dimension ostensive de l'activité mathématique" (BOSCH et CHEVALLARD, 1999) sans laquelle celle-ci ne peut s'accomplir. Les praxéologies sont à étudier à la lumière d'une dialectique entre ostensifs et non-ostensifs. Les premiers sont des objets qui possèdent une certaine "matérialité", en ce sens qu'ils peuvent être appréhendés à travers nos sens: symboles, et graphiques, entre autres. Les seconds sont associés aux premiers qui sont les concepts mathématiques eux-mêmes.

Partant de ce modèle, Schneider (2008 et 2011) distingue et ordonne deux niveaux praxéologiques : le niveau « modélisation », qui est premier, et le niveau « déduction » qui est second. Le premier niveau constitue un modèle de la "modélisation mathématique" lorsqu'elle s'applique à des objets qui n'ont pas encore été entièrement formalisés par le biais d'une définition faisant partie d'une certaine axiomatique. Ce niveau de modélisation permet de rendre compte à la fois de la dimension intra-mathématique et extra-mathématique:

Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes intra ou extra-mathématiques constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991) [...] lesquels peuvent constituer des objets mentaux au sens de Freudenthal (1973). [...] En analyse, il s'agira de déterminer des objets préconstruits tels que des aires, des volumes, des vitesses variables, des tangentes en des points d'une courbe. [...] Les techniques sont les modes de détermination ou de modélisation « standard » de tels objets : [...] le calcul des limites dans une phase embryonnaire [...], ou encore, le calcul plus performant des dérivées et des primitives. [...] Comme ces objets n'existent pas encore comme objets d'une théorie et que le but est précisément de les constituer comme tels, le discours qui justifie ces techniques et les rend intelligibles eu égard à la tâche visée ne peut être théorique, au sens où l'entendraient des mathématiciens [...]. Dans nos exemples, il s'agira de justifier qu'un calcul de limite fournit bien la valeur exacte d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée, contrairement à l'intuition « commune » qui se constitue en obstacle épistémologique. [...] Au terme de telles praxéologies, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées [...] (SCHNEIDER, 2011, p. 190-191).

À l'issue de ce premier niveau, des organisations mathématiques déductives, plus usuelles, au sens où pourrait l'entendre un mathématicien professionnel peuvent alors prendre appui dessus :

Entrent en jeu alors les praxéologies de type "déduction" dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies "modélisation". Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des "proof-generated concept" au sens de Lakatos, l'exemple typique éta-

nt celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités et inspirant un modèle de preuve faisant officiellement abstraction de toute considération géométrique ou cinématique [...]. (SCHNEIDER, 2011, p. 191)

Ce couple praxéologique ordonné est un modèle didactique du cycle de modélisation mathématique qui envisage la constitution d'un modèle théorique déductif intra-mathématique au départ de modèles constitués de manière plus pragmatique à partir de problèmes intra ou extra-mathématiques.

Mais l'articulation de ces deux types de praxéologies constitue également un modèle de modélisation intra-mathématique, à condition que le premier niveau s'ancre sur des tâches de cette dimension-là, car des niveaux de rationalité différents peuvent être adoptés dans la modélisation intra-mathématique. En effet, la validation première de la construction d'un modèle mathématique des mathématiques elles-mêmes peut s'engager à un niveau pragmatique. Ensuite, il s'agit de faire éprouver aux élèves les limites du pragmatique, lui-même ne pouvant faire l'économie d'un questionnement sur les ressorts internes qui le constitue, jusqu'à la construction d'un modèle autonome dans la direction d'une axiomatisation.

Dans la section suivante, nous proposons une situation de modélisation des vecteurs et du théorème de Thalès qui s'inscrit dans cette sphère intra-mathématique. Celle-ci doit encore être mise à l'épreuve sur le terrain, elle reste donc d'ordre spéculatif pour l'instant.

## UN EXEMPLE DE MODÉLISATION INTRA-MATHÉMATIQUE DANS LE CONTEXTE DE LA GÉOMÉTRIE

L'enjeu du parcours est de construire un modèle algébrique des droites du plan euclidien. Plus précisément, il s'agit de démontrer le résultat suivant. Plaçons-nous dans le plan euclidien et considérons des points  $P, Q, X \in \pi$  tels que  $P \neq Q$ . Dans un repère<sup>4</sup>, on a

$$X \in d_{PQ} \Leftrightarrow (q_2 - p_2)(x - p_1) - (q_1 - p_1)(y - p_2) = 0$$

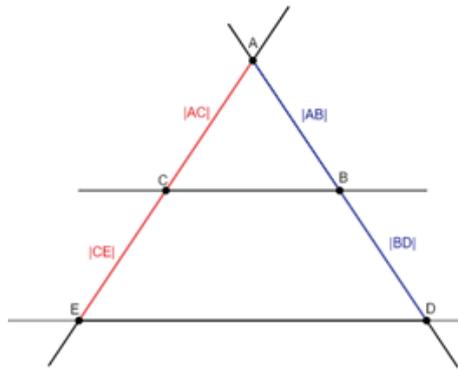
### Une première version du théorème de Thalès

L'outil fondamental pour nous permettre de développer ce modèle algébrique est le théorème de Thalès. Ce résultat est initialement un résultat de géométrie euclidienne synthétique et présente différentes formulations. Une version élémentaire (Figure 1) du théorème de Thalès se rencontre typiquement dans l'enseignement secondaire en Belgique francophone et s'énonce comme suit.

Théorème de Thalès (version 1): Plaçons-nous dans le plan euclidien. Considérons un triangle et deux points et respectivement sur la droite  $d_{AB}$  et la droite  $d_{AC}$  de sorte que  $d_{BC} \parallel d_{DE}$  pour former un triangle ADE. Alors,

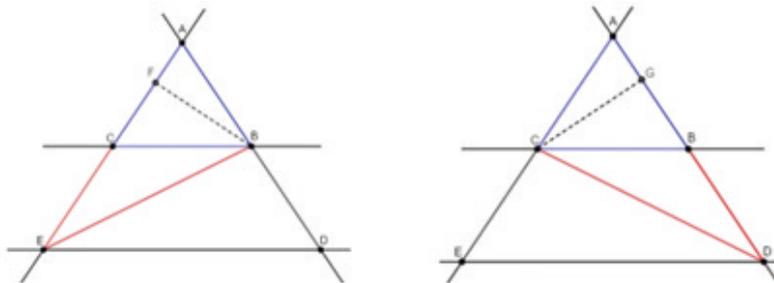
$$\frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

<sup>4</sup> Le résultat est valable dans un repère affín. En Belgique francophone, la culture est telle que ce sont le plus souvent des repères orthogonaux voire orthonormés qui sont mis à contribution, sans qu'ils fassent l'objet d'un questionnement. Nous suivons cette ligne de force dans ce qui suit et ferons usage de repères orthogonaux.

**Figure 1** – Configuration de Thalès

La notation  $|AC|$  désigne la longueur du segment  $[AC]$ . Comme il s'agit d'une longueur, on peut aussi la noter  $|CA|$ . Autrement dit,  $|AC|=|CA|$ . Cette remarque aura toute son importance pour la suite. En effet, nous présenterons une autre version du théorème de Thalès (Thalès version 2) basée sur les vecteurs. Dans ce cadre, la notation  $\overrightarrow{AC}$  n'aura pas la même signification que la notation  $\overrightarrow{CA}$ .

La démonstration de cette première version du théorème de Thalès nous permettra, par contraste, de mettre en lumière l'économie de pensée que permet une formulation vectorielle du théorème de Thalès. Pour le démontrer, une première "découpe" (figure 2) de cette configuration par la droite BE fait apparaître les triangles ABC et BCE, sur lesquels on s'appuie pour déduire l'égalité du rapport de leurs aires et du rapport des longueurs de leurs côtés  $|AC|$  et  $|CE|$ .

**Figures 2 et 3** – Première et seconde "découpes"

Ces deux triangles ont même hauteur, désignons-la par la droite BF, où  $F=BF \cap AE$ , où nous obtenons que

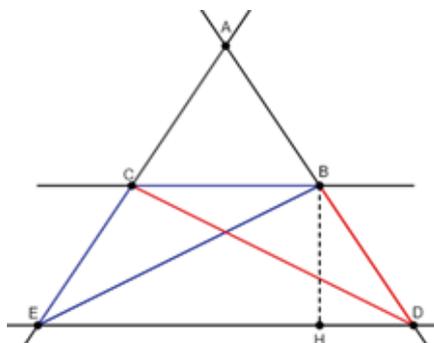
$$\frac{\text{aire}(BCE)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{\frac{|CE| \cdot |BF|}{2}}{\frac{|AC| \cdot |BF|}{2}} = \frac{|CE|}{|AC|}$$

Une seconde "découpe" (figure 3) par la droite CD, fait apparaître les triangles ABC et BCD. Ces deux triangles ont même hauteur, désignons-la par CG où  $G=CG \cap AD$ . Nous obtenons alors que

$$\frac{\text{aire}(BCD)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{\frac{|BD| \cdot |CG|}{2}}{\frac{|AB| \cdot |CG|}{2}} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

Le théorème découle alors de ces deux résultats intermédiaires. En effet, les triangles BCE et BCD (figure 4) ont même aire, puisque ces deux triangles ont même base [BC] et même hauteur [BH] où  $H = BH \cap DE$ .

Figure 4 – Même hauteur



On en tire notre conclusion:

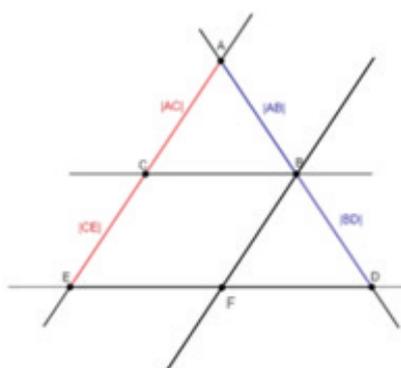
$$\frac{|CE|}{|AC|} = \frac{\text{aire}(BCE)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{\text{aire}(BCD)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

À partir de cette version du théorème de Thalès, nous pouvons en déduire que:

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

C'est ce résultat que nous utiliserons tout au long de notre parcours. Démonstrons-le. On trace la parallèle à passant par . Cette droite coupe en un point que l'on nommera (figure 5). On applique alors Thalès pour en déduire que  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|EF|}{|FD|}$ , et donc que  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|FD|}$ , puisque est un parallélogramme.

Figure 5 – Tracé de la parallèle à AE passant par B.



Or, on sait aussi que  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$ , donc :  $\frac{|BC|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|CE|}$ . De plus, on a:

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AC| + |CE|}{|AC|} = 1 + \frac{|CE|}{|AC|}$$

et

$$\frac{|DE|}{|CB|} = \frac{|DF| + |FE|}{|CB|} = 1 + \frac{|DF|}{|CB|}$$

Ainsi, puisque  $\frac{|BC|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|CE|}$ , on en déduit le résultat annoncé :  $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$ .

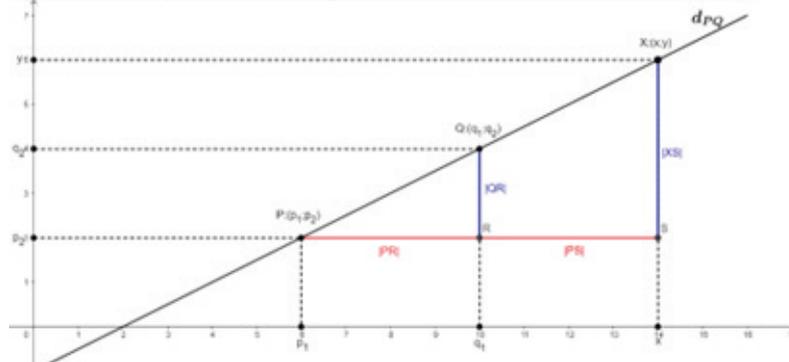
Ce théorème de Thalès peut être mis à profit pour obtenir notre modèle algébrique des droites du plan. Plusieurs cas de figure sont à considérer, selon les positions relatives des points X, P, Q. Nous n'en considérons ici que quelques-uns afin de faire sentir la nécessité de traiter ces différents cas et les limitations dont souffre la version actuelle de Thalès mise à contribution.

### UN PREMIER CAS DE FIGURE...

Considérons deux points P et Q appartenant au plan  $\pi$  tels que  $P \neq Q$ . Il existe donc une unique droite passant par ces deux points (figure 6). Notons-la  $d_{PQ}$ ;  $P \in d_{PQ}$  et  $Q \in d_{PQ}$ . Considérons également un point X de cette droite et munissons le plan euclidien  $\pi$  d'un repère. Dans ce repère, nous pouvons attribuer des coordonnées à ces points. On a

$$P:(p_1; p_2), Q:(q_1; q_2) \text{ et } X:(x; y).$$

**Figure 6** – Représentation géométrique du premier cas considéré.



La question que l'on se pose est la suivante : quelles contraintes sur x et y devons-nous imposer pour que  $X \in d_{PQ}$ ? Dans cette configuration, on peut identifier les triangles PQR et PXS. On applique alors Thalès (version 1) et on obtient

$$\frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|}$$

En développant cette égalité de rapports grâce aux coordonnées des différents points. On a

$$\begin{aligned} \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|} &\Leftrightarrow \frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2} \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) = (q_2 - p_2)(x - p_1) \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors une condition nécessaire (théorème 1) pour l'appartenance d'un point sur une droite : soient des points P, Q,  $X \in \pi$  tels que  $P \neq Q$ . Si  $X \in d_{PQ}$  alors

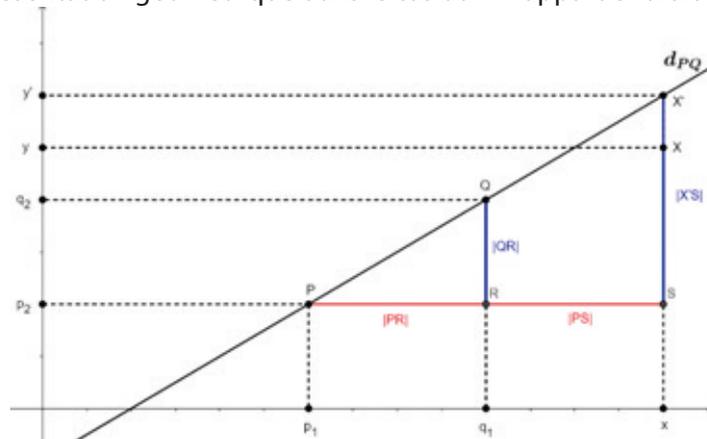
$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0.$$

Mais cette condition est-elle suffisante ? En d'autres termes, est-il possible que les coordonnées d'un point X vérifient l'égalité

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0.$$

et que ce point X n'appartienne pas à la droite  $d_{PQ}$  (figure 7)?

**Figure 7** – Représentation géométrique dans le cas où X n'appartiendrait pas à la droite PQ.



Considérons un point  $X \in \pi$  qui vérifie

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

Par ce qui précède, nous savons que

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|}$$

Supposons que  $X \notin d_{PQ}$  et considérons le point d'intersection, appelons-le  $X'$ , de la droite  $d_{PQ}$  avec la droite  $d_{XS}$ . On a  $X' = d_{PQ} \cap d_{XS}$ . Désignons par  $(x'; y')$  les coordonnées du point  $X'$ . Comme  $X \in d_{XS}$ , cela nous assure que  $x = x'$ . L'application de Thalès (version 1) aux triangles  $PQR$  et  $PX'S$ , nous conduit à l'égalité des rapports suivante :

$$\frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|X'S|}{|QR|}$$

Donc, nous obtenons que

$$\frac{|XS|}{|QR|} = \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|X'S|}{|QR|}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{|XS|}{|QR|} = \frac{|X'S|}{|QR|} &\Leftrightarrow |XS| = |X'S| \\ &\Leftrightarrow y - p_2 = y' - p_2 \\ &\Leftrightarrow y = y' \end{aligned}$$

On en tire que  $X' = X$ . Or,  $X' \in d_{PQ}$  et donc  $X \in d_{PQ}$ . Ainsi, il n'est pas possible que  $X \notin d_{PQ}$ . Nous obtenons dès lors le résultat suivant: soient des points  $P, Q, X \in \pi$  tels que  $P \neq Q$ . Si

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

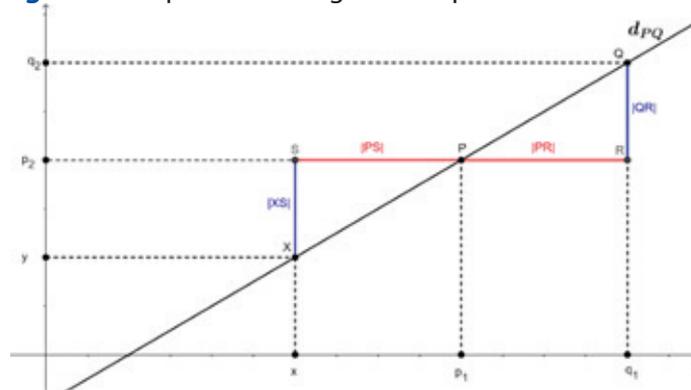
alors  $X \in d_{PQ}$  (Théorème 2, condition suffisante). En rassemblant les théorèmes 1 et 2, nous obtenons le théorème 3 suivant : considérons des points  $P, Q, X \in \pi$  tels que  $P \neq Q$ . Alors,

$$X \in d_{PQ} \Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

### Un deuxième cas de figure...

Dans ce cas-ci (figure 8), le point  $X$  n'est pas situé de la même manière par rapport aux points  $P$  et  $Q$  que dans le cas de figure précédent. Dès lors, nous devons absolument nous assurer que le raisonnement tenu à partir du premier cas de figure reste valable.

**Figure 8** – Représentation géométrique du deuxième cas.



Dans ce nouveau cas, nous pouvons toujours appliquer Thalès (version 1) et affirmer que

$$\frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|}$$

Cependant, le calcul de  $|PS|$  et  $|XS|$  à l'aide des coordonnées des points ne donnent pas les mêmes résultats que précédemment puisque

$$|PS| = p_1 - x \text{ et } |XS| = p_2 - y$$

On constate alors que le calcul des longueurs n'est pas le même pour tous les segments. Il n'est donc a priori pas évident que des cas de figure différents conduisent à un *même modèle* algébrique. Il faut s'en assurer. La "boîte de Pandore" est ouverte : il faudrait discuter tous les cas.

Voyons l'impact que cela a sur le calcul du rapport :

$$\begin{aligned} \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|} &\Leftrightarrow \frac{p_1 - x}{q_1 - p_1} = \frac{p_2 - y}{q_2 - p_2} \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(p_2 - y) = (q_2 - p_2)(p_1 - x) \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par  $(-1)$  nous obtenons que:

$$\begin{aligned} \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|} &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) = (q_2 - p_2)(x - p_1) \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0 \end{aligned}$$



Cependant, le calcul de  $|PS|$  et  $|QR|$  à l'aide des coordonnées des points ne donnent pas les mêmes résultats que dans les deux cas de figure précédents puisque

$$|PS| = p_1 - x \text{ et } |QR| = p_2 - q_2.$$

On constate alors que le calcul des longueurs n'est pas le même pour tous les segments. Voyons l'impact que cela a sur le calcul du rapport

$$\begin{aligned} \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|} &\Leftrightarrow \frac{p_1 - x}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{p_2 - q_2} \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) = (p_2 - q_2)(p_1 - x) \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) = (p_2 - q_2)(-1)(p_1 - x)(-1) \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) = (q_2 - p_2)(x - p_1) \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0. \end{aligned}$$

Le théorème 1 est donc également valide dans ce troisième cas de figure. Quid de la réciproque (théorème 2)? Lorsque l'égalité

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

est vérifiée,  $X$  appartient-il à  $d_{PQ}$ ? Considérons un point  $X(x; y) \in \pi$  vérifiant

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

Par ce qui précède, nous savons que

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|}$$

Supposons que  $X \notin d_{PQ}$  et considérons le point d'intersection, appelons-le  $X'$ , de la droite  $d_{PQ}$  avec la droite  $d_{XS}$ . On a  $X' = d_{PQ} \cap d_{XS}$ . Désignons par  $(x'; y')$  les coordonnées du point  $X'$ . Comme  $X \in d_{XS'}$ , il est clair que  $x = x'$ . Par Thalès (version 1) aux triangles  $PQR$  et  $PX'S$ . Nous obtenons que

$$\frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|X'S|}{|QR|}$$

Donc, nous obtenons que

$$\frac{|XS|}{|QR|} = \frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|X'S|}{|QR|}$$

Donc,

$$\frac{|XS|}{|QR|} = \frac{|X'S|}{|QR|} \Leftrightarrow |XS| = |X'S|$$

$$\Leftrightarrow p_2 - y = p_2 - y'$$

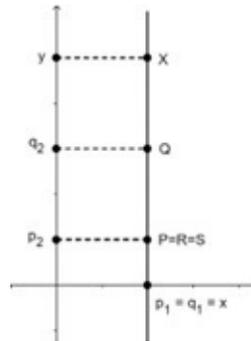
$$\Leftrightarrow y = y'.$$

On en tire que  $X' = X$ . Or,  $X' \in d_{PQ}$  donc  $X \in d_{PQ}$ . Ainsi, il n'est pas possible que  $X \notin d_{PQ}$ . À nouveau, nous pouvons continuer à affirmer que le théorème 2 est valide dans ce troisième cas de figure. Par conséquent, le théorème 3 est également encore valable.

### Un cas de figure plus particulier : la droite PQ est parallèle à l'axe des ordonnées...

Dans ce cas de figure (figure 10), le théorème de Thalès n'est pas applicable. En effet, comme  $P = R = S$ , on a  $|PR| = 0$ . Par conséquent, le rapport  $\frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|}$  n'a pas de sens.

**Figure 10** – Représentation géométrique de ce quatrième cas.



Malgré cela, notre modèle algébrique reste d'application, lui! En effet, si  $X \in d_{PQ}$  alors  $x = p_1 = q_1$ . Donc

$$\begin{aligned}(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) &= (p_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(p_1 - p_1) \\ &= 0 \cdot (y - p_2) - (q_2 - p_2) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

En ce sens, la portée du modèle algébrique construit dépasse celle du théorème de Thalès initialement employé. Ainsi, dans ce cas de figure, le théorème 1 est toujours valide. Et la réciproque (théorème 2)? Si l'égalité

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

est vérifiée, alors X appartient-il à  $d_{PQ}$ ? Considérons un point  $X(x; y) \in \pi$  qui vérifie

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

et on suppose que  $X \notin d_{PQ}$ . Soit  $d$  la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point  $X$ . Notons  $X'$  le point d'intersection de la droite  $d$  avec la droite  $d_{PQ}$ . On a  $X' \in d_{PQ} \cap d$ . Désignons par  $(x'; y')$  les coordonnées du point  $X'$ . Comme  $X \in d$ , il est clair que  $y = y'$ . Donc, on a

$$(q_1 - p_1)(y' - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0$$

Or,  $q_1 = x' = p_1$  car  $X' \in d_{PQ}$ . Par conséquent, l'égalité précédente est équivalente à

$$\begin{aligned}(x' - x')(y' - p_2) - (q_2 - p_2)(x - x') &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 \cdot (y' - p_2) - (q_2 - p_2)(x - x') &= 0 \\ \Leftrightarrow (q_2 - p_2)(x - x') &= 0.\end{aligned}$$

Comme  $q_2 \neq p_2$  puisque  $P \neq Q$ , on en tire que  $x = x'$ . Donc,  $X' = X$ . Or,  $X' \in d_{PQ}$  donc  $X \in d_{PQ}$ . Ainsi, il n'est pas possible que  $X \notin d_{PQ}$ . Nous pouvons donc encore une fois continuer

à affirmer que le théorème 2 est valide dans ce quatrième cas de figure. Par conséquent, le théorème 3 est également encore valable.

Combien de cas de figure doit-on encore envisager ? Comment être certain de ne pas en avoir oublié ? Ces questions sont d'une importance capitale, car il faut s'assurer que notre modèle algébrique est valide en toutes circonstances. De plus, en supposant que l'on considère tous les cas sans en oublier un seul, notre parcours jusqu'ici nous laisse déjà entrevoir à quel point il serait laborieux de les passer tous en revue. En outre, on pourrait encore rencontrer des cas où le théorème de Thalès (version 1) n'est pas applicable.

Face à ce genre de problèmes, une attitude typique du mathématicien est d'examiner de près les différences entre les cas de figure et d'identifier d'où elles viennent. Il se donne alors comme tâche : la construction d'un nouvel outil, valable quel que soit le cas de figure considéré. Cela relève d'une volonté de créer des notions générales et unificatrices qui permettent de réaliser une économie de pensée et d'action.

### Vers une version vectorielle du théorème de Thalès...

Dans les trois premiers cas de figure envisagés précédemment, nous avons appliqué le théorème de Thalès (version 1) et nous avons obtenu l'égalité

$$\frac{|PS|}{|PR|} = \frac{|XS|}{|QR|}$$

Selon les cas de figure, cette égalité se particularise de différentes façons comme nous avons pu le constater avec les quatre cas présentés antérieurement. Malgré leurs différences, tous les cas considérés aboutissent au même modèle algébrique. En effet, après analyse des différentes égalités rencontrées, que nous rappelons ici :

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}, \quad \frac{p_1 - x}{q_1 - p_1} = \frac{p_2 - y}{q_2 - p_2}, \quad \frac{p_1 - x}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{p_2 - q_2},$$

nous nous rendons compte qu'elles sont toutes équivalentes

Cette analyse suggère l'idée suivante : reformuler le théorème de Thalès pour obtenir directement l'égalité

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}$$

Si cela est possible, on pourrait alors obtenir notre modèle algébrique des droites en une seule fois sans devoir considérer une multitude de cas de figure. Pour ce faire, nous allons commencer par réécrire cette dernière égalité sous une autre forme. En effet, écrire cette égalité revient à dire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \alpha \text{ et } \frac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \alpha.$$

Autrement dit, cela est équivalent à dire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$x - p_1 = \alpha \cdot (q_1 - p_1) \text{ et } y - p_2 = \alpha \cdot (q_2 - p_2)$$

Ces deux égalités peuvent s'interpréter comme manifestations de deux égalités vectorielles. L'égalité  $x - p_1 = \alpha \cdot (q_1 - p_1)$  s'interprète vectoriellement de la manière suivante  $\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PR}$ .

De même, l'égalité  $y - p_2 = \alpha \cdot (q_2 - p_2)$  s'interprète vectoriellement comme étant  $\overrightarrow{XS} = \alpha \cdot \overrightarrow{QR}$ .

Nous sommes donc tentés de reformuler Thalès (version 1) à l'aide de la notion de vecteurs (version 2): Considérons un triangle ABC et deux points D et E respectivement sur la droite  $d_{AB}$  et la droite  $d_{AC}$  de sorte que  $d_{BC} \parallel d_{DE}$ . Alors, il existe un nombre  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \alpha \cdot \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} &= \alpha \cdot \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{BC} &= \alpha \cdot \overrightarrow{DE}.\end{aligned}$$

Le raisonnement qui conduit à cette nouvelle version du théorème de Thalès constitue un travail de modélisation à part entière localisé à un niveau proprement intra-mathématique. Il s'agit de raffiner un modèle existant en analysant ses limites préalables. On peut considérer qu'il s'agit d'un travail dans un esprit proof-generated à la Lakatos (1976).

Toutefois, avoir reformulé le théorème de Thalès de façon vectorielle ne signifie pas pour autant que cette nouvelle formulation soit vraie. Nous allons donc la démontrer. Vu nos hypothèses,

- Les points A, B et D sont alignés donc il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD},$$

- les points A, C et E sont alignés donc il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AE},$$

De plus, toujours en utilisant nos hypothèses, nous savons que  $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$  donc il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$\overrightarrow{BC} = \gamma \cdot \overrightarrow{DE}.$$

Par la relation de Chasles, nous pouvons décomposer le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  de deux façons différentes. D'une part,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

et en utilisant nos hypothèses, nous obtenons que

$$\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD} + \gamma \cdot \overrightarrow{DE}.$$

D'autre part, nous savons également que

$$\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AE}.$$

On a donc, par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE},$$

D'où l'on tire que

$$\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AD} + \beta \cdot \overrightarrow{DE}.$$

On peut donc en conclure que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AD} + \gamma \cdot \overrightarrow{DE} = \beta \cdot \overrightarrow{AD} + \beta \cdot \overrightarrow{DE}.$$

Cela est équivalent à

$$(\alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{AD} = (\beta - \gamma) \cdot \overrightarrow{DE}.$$

Or, les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{DE}$  ne sont pas parallèles. Donc,

$$\alpha - \beta = 0 \text{ et } \beta - \gamma = 0.$$

Cela revient à dire que

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Nous venons donc de montrer que

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AE} = \alpha \cdot \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{BC} = \gamma \cdot \overrightarrow{DE} = \alpha \cdot \overrightarrow{DE}.$$

Autrement dit, Thalès (version 2) est donc démontré.

Les vecteurs sont bien des outils de modélisation et de démonstration efficaces. Ils nous évitent de devoir penser à des découpages astucieux en triangles pour faire la démonstration du théorème de Thalès (version 1). Tout peut se faire en quelques lignes de calcul et cela nous offre par la même occasion une économie substantielle de pensée et d'action. Il y a cependant une condition pour pouvoir apprécier cette économie de pensée : il faut avoir fait le travail de compréhension au sens évoqué précédemment.

Le théorème de Thalès (version 2) peut alors être mis à profit pour obtenir un modèle algébrique des droites du plan. Par Thalès 2, on a

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PR} \Leftrightarrow x - p_1 = \alpha \cdot (q_1 - p_1)$$

$$\overrightarrow{SX} = \alpha \cdot \overrightarrow{RQ} \Leftrightarrow y - p_2 = \alpha \cdot (q_2 - p_2).$$

Donc,

$$(q_2 - p_2)(x - p_1) = \alpha \cdot (q_1 - p_1)(y - p_2)$$

et

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) = \alpha \cdot (q_1 - p_1)(y - p_2).$$

Par transitivité de l'égalité, nous obtenons que

$$(q_2 - p_2)(x - p_1) = (q_1 - p_1)(y - p_2)$$

ce qui est équivalent à

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0.$$

On a alors démontré qu'en considérant des points  $P, Q, X \in \pi$  tels que  $P \neq Q$ , si  $X \in d_{PQ}$ ,

alors

$$(q_1 - p_1)(y - p_2) - (q_2 - p_2)(x - p_1) = 0.$$

On mesure alors l'intérêt de Thalès (version 2) pour construire un modèle algébrique des droites. L'utilisation des vecteurs nous a permis d'éviter le traitement d'une multitude de cas différents comme dans la première version du théorème de Thalès. Dans sa version

vectorielle, une seule démonstration suffit pour couvrir tous les cas de figure et consiste en quelques lignes de calculs. En ce sens, l'économie de pensée et d'action est substantielle tant le contraste avec sa première version est important.

## CONSIDÉRATIONS FINALES

L'activité détaillée dans la section précédente nous semble exemplifier de manière prototypique ce que nous entendons par dimension intra-mathématique de la modélisation. Un théorème, sa démonstration et les objets sur lesquels portent ce théorème (ainsi que leurs définitions associées) évoluent de concert et de manière itérative afin de réaliser une plus grande économie de pensée.

Dans notre cas cette économie de pensée est réalisée à différents niveaux. Premièrement au niveau de la démonstration du théorème lui-même dont la combinatoire initiale s'en trouve simplifiée : au lieu de devoir considérer une multitude de cas différents dont des cas "limites", une seule démonstration est possible "couvrant tous les cas de figure" dans le contexte renouvelé des vecteurs. Deuxièmement, au niveau de la mise à contribution du théorème lui-même : son utilisation s'en trouve également simplifiée en évitant similairement une certaine explosion combinatoire, lui conférant ainsi une plus grande instrumentalité : les équations cartésiennes de n'importe quelle droite peuvent être dérivées "simultanément" en une seule application de la nouvelle version vectorielle du théorème. Cette double économie n'est évidemment pas le fruit d'un "heureux hasard" mais constitue l'expression même de l'instrumentalité de la notion de vecteur à encapsuler certaines symétries, à isoler/mettre en évidence ce qu'il y a de commun dans une variété de cas que l'oeil "nu" du profane aurait tôt fait de considérer comme irrémédiablement distincts, justifiant par là même la nécessité, aux yeux de ce profane, de devoir considérer différents cas de figure. Nous voyons ainsi dans cet exemple des vecteurs la signature d'une caractéristique forte de la géométrie contemporaine qui se dote et construit de nouveaux objets géométriques susceptibles d'exprimer les traits communs d'objets initialement considérés comme étrangers les uns aux autres. Un exemple particulièrement marquant est certainement celui des droites parallèles et sécantes. Dans la géométrie d'Euclide, seules les droites sécantes peuvent avoir un point en commun. Avec la géométrie projective, toutes les droites distinctes ont toujours un unique point en commun, qu'elles soient ou non parallèles. Cette nouvelle géométrie ouvre tout un pan de perspectives jusqu'alors impensables avec la seule géométrie d'Euclide, perspectives qui ne sont d'ailleurs pas sans liens avec les vecteurs et la possibilité de modéliser les espaces projectifs à l'aide d'espaces vectoriels... Ce contraste entre géométrie d'Euclide et géométrie projective nous semble bien montrer à quel point la géométrie contemporaine, même si elle a et continue à s'inspirer du monde sensible n'a que faire de ce monde sensible lorsqu'il est porteur de limitations qui freinent précisément le développement d'outils mathématiques efficaces.

Effectivement, dans ce type d'activité de modélisation intra-mathématique, les articulations avec le monde sensible ne sont évidemment pas proscrites mais s'effacent néanmoins devant la volonté de constituer l'ensemble évoqué afin d'en faire un outil efficace, quitte à assumer une distanciation plus ou moins importante avec le monde sensible et à faire le deuil de la possibilité d'interpréter les nouveaux objets ainsi constitués comme

étant des copies plus ou moins conformes d'objets de ce monde sensible. Il se crée ainsi un éloignement, et même une rupture qu'on peut, en certaines occasions, à la suite de Bachelard (1980) qualifier d'épistémologique, avec la pensée commune ; pensée commune qui ne manquera pas de s'ériger en obstacle (BROUSSEAU, 1998) en certaines occasions.

Cette notion d'obstacle épistémologique nous permet d'effectuer le commentaire suivant. Aux yeux du profane, l'activité de modélisation proposée pourrait rapidement être enterrée vivante au motif même que les objets constitués sont "dénudés de sens", qu'ils ne peuvent justement pas être mis en correspondance interprétative plus ou moins immédiate avec les objets du monde sensible. Ce point de vue profane est bien évidemment en contradiction profonde avec la nature même de l'activité intra-mathématique. Cela nous permet de souligner que dans la notion d'obstacle épistémologique, ce n'est pas forcément le mathématique en soi qui fait obstacle mais plutôt le rapport que les divers sujets institutionnels impliqués entretiennent à la nature de l'activité mathématique elle-même, sujets qui portent sur cette activité un regard pour le moins déviant qui tente de la forcer dans le moule d'une sensibilité qui n'est pas la sienne. Cette remarque nous semble fondamentale pour comprendre et localiser la nature des difficultés d'enseignement des mathématiques dont la géométrie. Trop souvent nous avons rencontrés des collègues qui mettaient d'emblée à mort toute activité mathématique pourtant authentique en réduisant ce qui était possible au niveau secondaire (et même au-delà) à une applicationisme plus ou moins sommaire en projetant sur les apprenants leurs propres limitations à saisir et à faire vivre les mathématiques avec un tant soit peu de dignité épistémologique, comme si "faire des maths" devait nécessairement se réduire à des mathématiques dites "citoyennes" dont le dénominateur commun semble plus tenir à la capacité à "former" des personnes dociles au monde de l'entreprise et à la société bien pensante.

Comme nous l'avons précisé, l'activité de modélisation intra-mathématique développée à la section précédente n'a pas encore été expérimentée dans les classes. De telles expérimentations constituent la suite logique de ce travail. Une question centrale est bien entendu celle de l'étude du rapport des élèves à cette activité. À la suite du commentaire du paragraphe précédent, une question tout aussi importante est celle du rapport des enseignants eux-mêmes à cette activité. Dans la perspective de la TSD, nous envisageons effectivement cette activité comme une ingénierie et donc de manière phénoménotechique comme un outil d'étude des rapports entretenus par des sujets (élève et professeurs notamment) aux vecteurs et à la composante interne de l'activité mathématique. Ce rapport des enseignants constitue bien une des contraintes a priori majeures à la viabilité d'une telle activité dans les classes.

## RÉFÉRENCES

BACHELARD, G. **La formation de l'esprit Scientifique**. J. Vrin, Paris, 1980.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Objet d'étude et problématique*. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.19 (1), p. 77-123, 1999.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990**. Grenoble, France. La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G; Raoult, J.-P. (coord.). Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique. **La modélisation**. Comité Scientifique des IREM. Paris: IREM de Paris 7, 2003.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique (2e ed.)**. Grenoble. La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.19 (2), p. 221–265, 1999.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht, Pays-Bas: D. Reidel, 1973.

SCHNEIDER, M. **Traité de didactique des mathématiques**. Liège, Belgique. Les Editions de l'Université de Liège : 2008.

SCHNEIDER, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? In **En amont et en aval des ingénieries didactiques : XVe école d'Été de Didactique des Mathématiques**. C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger et P. Gibel (dir.). Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 175-206, 2011.

### Histórico

Recebido: 05 de outubro de 2023.

Aceito: 10 de janeiro de 2024.

Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

### Como citar – ABNT

JOB, Pierre; BALHAN, Kevin; SIMONIS, Ludovic. Géométrie et modélisation intra-mathématique : le cas des vecteurs et du théorème de Thalès. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024014, 2024.  
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024014.id601>

### Como citar – APA

JOB, P., BALHAN, K., & SIMONIS, L. (2024). Géométrie et modélisation intra-mathématique : le cas des vecteurs et du théorème de Thalès. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024014.  
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024014.id601>

### Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud  

José Messildo Viana Nunes  

Afonso Henriques  