Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 48, e2024015
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024015.id603

# La Geometría Euclidiana y su transposición didáctica

## Didactic transposition of Euclidean Geometry

## Transposição didática da geometria euclidiana

Francisco Ugarte[1]

Cecilia Gaita[2]

## RESUMEN

En el siguiente trabajo, se ejemplifica cómo la noción de transposición didáctica puede utilizarse para explicar la génesis de un sistema de conceptos matemáticos, como la geometría euclidiana. El estudio considera también los niveles de codeterminación, el contexto histórico-cultural y el desarrollo de las sociedades, la ciencia y la tecnología. El resultado muestra una evolución constante de las praxeologías, pero sobre todo la dependencia del bloque práctico-técnico de la evolución del bloque tecnológico-teórico. Los autores concluimos que una transposición didáctica requiere la construcción previa de un bloque tecnológico-teórico que consista además en un tejido de organizaciones matemáticas de complejidad creciente.

**Palabras clave:** Transposición didáctica; Geometría Euclidiana; Niveles de codeterminación; Organizaciones matemáticas; praxeologías

## ABSTRACT

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

**Keywords:** Didactic transposition; Euclidean geometry; Codetermination levels; Mathematical organizations; praxeologies.

## RESUMO

O artigo a seguir exemplifica como a noção de transposição didática pode ser usada para explicar a gênese de um sistema de conceitos matemáticos, como a geometria euclidiana. O estudo também considera os níveis de codeterminação, o contexto histórico-cultural e o desenvolvimento das sociedades, da ciência e da tecnologia. O resultado mostra uma evolução constante das praxeologias, mas sobretudo a dependência do bloco prático-técnico da evolução do bloco tecnológico-teórico. Os autores concluem que uma transposição didática requer a construção prévia de um bloco tecnológico-teórico que também consiste em um tecido de organizações matemáticas de complexidade crescente.

**Palavras-chave:** Transposição didática; Geometria euclidiana; Níveis de codeterminação; Organizações matemáticas; Praxeologias.

1 Doutor em Matemáticas pela Universidade de Valladolid (UVa), España. Professor da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av.Universitaria, 1801,Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. E-mail: fugarte@pucp.edu.pe.

2 Doutora em Didáctica de la Matemática pela Universidade de Valladolid (UVa), España. Professora da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av. U niversitaria, 1801,Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. E-mail: cgaita@pucp.edu.pe.

## INTRODUCIÓN

En el desarrollo de la geometría como saber sabio pueden identificarse distintas etapas, tales como proto geometría, geometría cuasi empírica, pre euclidiana, geometría racionalista, empirista, euclidiana, analítica y geometrías no euclidianas, según indican Gonzales, Herrero y Moreno (2016). Asimismo, en los sistemas educativos pueden reconocerse cambios importantes respecto a la enseñanza de esta disciplina, dando origen a estudios transpositivos (GONZALES ET AL, 2016).

Cada una de las geometrías, en particular la geometría euclidiana como saber a enseñar en la escuela, ha sufrido transformaciones que han sido reportadas en diversos trabajos. Dichos cambios tienen como base posturas epistemológicas respecto a cómo se concibe a la geometría; ello da origen a distintas propuestas de su enseñanza, como resultado de una transposición didáctica.

Al hablar de la dimensión epistemológica de la enseñanza de la geometría, nos referimos a la identificación de la evolución de las convicciones acerca cómo se aprende, enseña y se organiza la enseñanza de la geometría. Claramente en el proceso de enseñanza, los maestros toman decisiones en el aula, a partir de sus propias epistemologías (BROUSSEAU, 2006), esto es, a partir de sus propias convicciones de cómo se aprende un determinado saber. Este bagaje epistemológico, construido de forma empírica, plantea procesos didácticos que son compartidos y documentados, al menos parcialmente, en los libros de texto.

Es bien conocido que el origen de la geometría se remonta a civilizaciones antiguas, como la egipcia o babilónica. De hecho, la tradición geométrica de estas culturas, puesta de manifiesto en el cálculo de áreas de terrenos rectangulares y triangulares, en la numeración sexagesimal para la medida de ángulos y su uso en la construcción de monumentos, entre otros aportes, fue transmitida de generación en generación a través de civilizaciones.

En ese contexto, el libro Los Elementos de Euclides se constituye en la síntesis de esta tradición geométrica, así como El Almagesto de Ptolomeo es la síntesis de la tradición de lo que hoy llamamos la geometría esférica, tomando como base los trabajos de Euclides, Hiparco y Eratóstenes.

Los Elementos es el libro con más ediciones en la historia, con más de 1500 ediciones en más de 100 idiomas, según O'Connor y Robertson (2003). Euclides utiliza, por primera vez, el razonamiento deductivo para la construcción de una geometría axiomática; dicho trabajo le valió ser considerado como el primer matemático en el sentido actual (LINDBERG & NUMBERS, 2003).

Por ello, Los Elementos será considerado como punto de partida para estudiar la epistemología de la enseñanza de la geometría de Euclides, en adelante geometría euclidiana, ya que afirmamos ha sido a base para la enseñanza de la geometría durante siglos en las escuelas y universidades de todo el mundo. No estudiaremos la geometría esférica ni otras geometrías; haremos mención a ellas sólo cuando influyan en la enseñanza de la geometría euclidiana.

Además de considerar un tratamiento lógico-formal para permitir el progreso de la deducción, también será indispensable identificar las actividades originales que encerraron los conceptos fundamentales. Si no se tuvieran en cuenta el qué y el cómo de los materiales precientíficos, la geometría sería una tradición vacía de sentido, tal como señala Husserl, citado en Rizo-Patrón y Arce (2000).

Esta dicotomía entre una concepción formal y práctica de la geometría ha persistido a lo largo de la historia y se ha reflejado en los libros utilizados en su enseñanza. Sin embargo, algunos trabajos (ROJAS y SIERRA, 2022) reportan que actualmente la razón de los saberes geométricos propuesta en los currículos ha desaparecido. Llegan a esta conclusión luego de hacer un estudio de textos didácticos españoles, en el que se encontró que los saberes geométricos de cálculo de áreas y volúmenes se mostraban desconectados del estudio de las funciones, acompañado de un tratamiento básicamente aritmético de dichas fórmulas. Además, señalan que las tareas propuestas suelen ser tareas directas y cerradas; mostrando esto un debilitamiento de la actividad de modelización en el ámbito de la geometría.

### Problema de investigación

Se plantea como problema de investigación estudiar la génesis de una transposición didáctica de la enseñanza de la geometría euclidiana desde Los Elementos hasta el siglo XX, mostrando además cómo las concepciones formales y prácticas han convivido. Ello permitirá también justificar por qué sería viable proponer que la enseñanza de la geometría euclidiana cumpla un rol formativo, en cuanto al desarrollo del pensamiento deductivo, sin dejar de lado la resolución de problemas y la modelización matemática.

## REFERENCIAL TEÓRICO

Un principio fundamental de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) es el concepto de transposición didáctica;

> Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El 'trabajo' que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica. (CHEVALLARD, 1985, p. 39)

El estudio de la transposición didáctica implica el análisis de las condiciones y restricciones en las cuales esta se lleva a cabo.

De la misma manera, un saber a enseñar sufrirá transformaciones y una de las razones por las que esto ocurrirá se asocia a las posturas epistemológicas que se tengan respecto a la matemática y al quehacer matemático. Así, es posible articular la razón de ser de las obras matemáticas con su razón de ser desde el punto de vista didáctico (CHEVALLARD, 1998).

Para la TAD el adoptar un modelo epistemológico de referencia es inherente al trabajo didáctico-matemático, aunque sea implícitamente; sin embargo, no existe un sistema de referencia privilegiado a partir del cual se observe, analice y juzgue el mundo de los saberes (GASCÓN, 2011, P.208).

En el caso de la geometría euclidiana, consideramos como modelo epistemológico de referencia para su enseñanza justamente la dicotomía entre un tratamiento formal, axiomático, lógico deductivo pero que no deja de lado el estudio del espacio a través de diferentes situaciones problema.

Brousseau (2000) advierte que imponer a la demostración como modelo de pensamiento, e incluso de actividad matemática, es una de las consecuencias más peligrosas de la optimización espontánea de la enseñanza. No se debe olvidar que el modelo de construcción deductiva adaptado a la geometría se constituyó es un obstáculo histórico para el progreso del pensamiento algebraico. Señala también que se suele justificar la enseñanza de la geometría señalando que es la ciencia del espacio, el escenario esencial de todas nuestras acciones y la matriz de todas nuestras concepciones. Sin embargo, cuestiona si el estudio del espacio es sinónimo del estudio de la geometría o si existe diferencia entre ellos. Formula las siguientes preguntas: ¿En qué circunstancias necesita un individuo conocimientos espaciales? ¿Tienen estas circunstancias un patrón general? (BROUSSEAU, 2000).

En esa línea, desde la TAD, la actividad matemática se identifica con la actividad de modelización, entendiéndose por ello que aprender matemáticas se debe identificar con el proceso de construcción de conocimientos matemáticos relativos a un sistema, el cual puede ser matemático o extramatemático (GASCÓN, 2002). Según esa perspectiva, "aprender geometría" debe relacionarse con la modelización geométrica en cualquiera de los dos sistemas: matemático o extramatemático.

Por ello, en el estudio transpositivo será fundamental identificar los momentos en los que los problemas propios de la geometría euclidiana contribuyeron al desarrollo de otras disciplinas, en particular, el álgebra. Se analizará cuáles fueron las tareas de generalización y búsqueda de patrones en el contexto de la geometría euclidiana, que posteriormente se convertirían en la razón de ser de objetos algebraicos.

Esto permite reconocer otra característica del modelo epistemológico de referencia para la geometría euclidiana: la búsqueda de la generalización de problemas y su posterior modelización a través del álgebra.

Un estudio epistemológico del desarrollo de la geometría euclidiana, como saber a enseñar, permitirá dar respuesta a dichas cuestiones.

## METODOLOGIA

Para el desarrollo de este trabajo se ha empleado el método de análisis de información, el cual se caracteriza por centrarse en el análisis de contenido en un contexto específico. Permite remitir directamente al autor, así como producir información para la toma de decisiones a partir de los datos derivados del análisis y la síntesis de la información evaluada. Su aplicación está condicionada por la calificación, conocimiento y creatividad del analista (DULZAIDES Y MOLINA, 2004).

Dado que en este trabajo se discute el impacto de la geometría euclidiana en el desarrollo de la matemática y en su enseñanza, se han considerado como documentos de análisis textos históricos sobre geometría euclidiana y artículos en donde se discute el impacto que ha tenido la geometría euclidiana en los sistemas de enseñanza desde el libro Los Elementos (siglo IV a.C.) hasta el desarrollo de la Didáctica de la Matemática a fines del siglo XX.

Para cada documento se detalla la fecha precisa o aproximada en a la que fue elaborado, la situación o circunstancias históricas, el autor y el público objetivo. A partir de ello, se llevan a cabo procesos de interpretación y análisis de los documentos seleccionados.

Se consideran tres periodos: mundo antiguo, moderno y la nueva geometría.

## HITOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

A continuación, se hace un recuento de las principales obras matemáticas relacionadas con la geometría euclidiana de Los Elementos y su influencia y relación con otras obras diseñadas como parte de distintos programas de enseñanza

### Los Elementos de Euclides

El libro escrito por Euclides entre los años 330 y 320 AC, Los Elementos, ha merecido la admiración de la humanidad durante más de 2000 años y ha establecido un modelo de demostración rigurosa de gran repercusión en la matemática moderna. Se denominó así porque de esa manera se llamaba a las proposiciones que desempeñaban un papel fundamental en la obtención o en la organización deductiva de otros resultados, según señala Proclo (EUCLIDES, 1991, p.21).

En la versión de los Elementos de Euclides (1991), hay un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 452 proposiciones distribuidas en trece libros o capítulos. Aunque suele identificarse esta obra básicamente con la geometría, en realidad comprende diversos campos temáticos como la geometría plana, la geometría del espacio, la teoría generalizada de la proporción, la aritmética y la teoría de la inconmensurabilidad.

Un aspecto central identificado en el libro I de los Elementos es que la existencia de un objeto geométrico está garantizada a través de su construcción. Así, la definición de geometría euclídea que adoptaremos en este trabajo será la de la geometría sintética, en particular aquella que emplea la regla y el compás de manera exacta y los problemas de lugares geométricos. En ella se aplicarán los axiomas, definiciones y teoremas de la geometría euclídea (GAITA, 2015).

Como consecuencia, en las construcciones exactas los puntos serán obtenidos de tres maneras: como intersecciones de dos rectas, de dos circunferencias o de una recta y una circunferencia.

La verdadera grandeza de la obra de Euclides es que en ella logra ordenar la geometría de su tiempo en un sistema deductivo, empleando unas pocas propiedades geométricas y demostrando las restantes como consecuencia lógica de ellas. Los Elementos fijaron un estándar metodológico en lo referente al rigor que debía tener una prueba en matemáticas.

En realidad, la axiomatización geométrica sirvió de modelo para sentar las bases del análisis matemático moderno.

Sin embargo, no toda la obra de Euclides está acorde con la concepción axiomática moderna. Si bien hay partes de este trabajo, como los libros V y VI, que sirvieron de modelo en el desarrollo de las matemáticas modernas, hay otras con una estructura deductiva débil. Kline (1972) afirma que mientras que se suponía que la geometría euclídea ofrecía pruebas rigurosas de teoremas sugeridos intuitivamente por las figuras, en realidad, ofrecía demostraciones intuitivas a partir de figuras dibujadas rigurosamente. Un ejemplo de ello es que en muchos casos los teoremas generales se probaban para casos especiales o posiciones especiales de los datos propuestos. Otro defecto señalado es que utilizaban suposiciones que no se explicitaban, como por ejemplo en la proposición 1 del libro I donde se supone que dos circunferencias tienen siempre un punto en común.

## Influencia de Los Elementos en el mundo antiguo

Los libros de Herón (siglo I d.C.), cinco siglos después de Los Elementos, presentan una geometría práctica, que incluye reglas y fórmulas geométricas, muchas de ellas recopiladas de trabajos anteriores, con ejemplos de cómo resolver problemas. Estos textos fueron utilizados para enseñar a artesanos y constructores.

Los Elementos y los libros de Herón eran parte de la educación griega y romana. Es importante recordar que el griego era el idioma de la cultura en la antigua Roma. Por lo tanto, la traducción al latín de Los Elementos realizada por Cicerón en el siglo I a.C. no se difundió. No fue hasta el siglo XVI que apareció una traducción al latín de Los Elementos basada en una traducción al árabe.

En el siglo XIII, Fibonacci publica Practica Geometriae en latín, varios capítulos de este libro, tal como afirma Hugues (2008), se fundamentan en los Elementos, pero es mucho más, pues contiene los avances matemáticos del islam medieval, probablemente provenientes de los libros estudiados por él mismo.

Durante toda la Edad Media, los clérigos y los estudiantes universitarios estudiaron geometría euclidiana como parte del quadrivium, utilizando como textos Los Elementos, Practica Geometriae, entre otros. Cabe señalar que lo que hoy conocemos como ecuaciones cuadráticas y cúbicas, representaban problemas de áreas y volúmenes, respectivamente. Es decir, se trataba de problemas geométricos: Euclides, plantea un método geométrico para resolver ecuaciones cuadráticas y Omar Khayyam (1040-1123 d.C.) lo extiende para ecuaciones cúbicas, tal como explica Struik (1958).

## Influenciade Los Elementos en el mundo moderno

Con la fundación de los colegios jesuitas durante el S. XVI, se tiene el primer modelo educativo, en un sentido moderno: El Ratio Studiorum. Según Contreras Gutiérrez (2017), la Ratio es una compilación de las experiencias pedagógicas reunidas por la Orden jesuita desde su primera escuela. Su primera versión se escribió entre 1551 y 1552 por el Padre Nadal a la que denominó Ordo Studiorum, pero la versión definitiva se aprueba y promulga en 1599, bajo el nombre de Ratio atque Institutio Studiorum y se mantuvo vigente hasta 1773. Según la Ratio, los estudios de matemáticas se encontraban en el segundo año y consistían en los Elementos de Euclides y de la esfera celeste

El jesuita Christopher Clavius (1518-1612), uno de los matemáticos más importantes del renacimiento, escribió los Elementos latinos, una traducción del libro de Euclides. Tal como como señala Price (2017), Clavius incluyó una introducción donde definía los términos y conceptos básicos de la geometría euclidiana, notas aclaratorias, tablas y diagramas para ayudar a los estudiantes a comprender los Elementos, pues claramente su texto tenía un objetivo pedagógico. En paralelo, otras dos versiones contemporáneas de los Elementos de Euclides, una debida a Commandino (1572), quien afirmaba que no era necesario añadir ni quitar nada al texto original de Euclides, la otra debida Billingley (1570), comerciante londinense, quien pretendía que las matemáticas de los Elementos fueran útiles a los emprendedores de la época.

Podríamos decir que mientras el libro de Clavius es un ejemplo de transposición didáctica, los libros de Commandino y Billingley solo se distinguen de los Elementos, por la distinción que le otorgan a la teoría y tecnología sobre la técnica, o en el segundo caso, al privilegio de la técnica sobre la tecnología. Una comparación detallada del capítulo I de la versión de los Elementos de los tres autores puede encontrarse en Price (2017)

Descartes, quien había sido educado entre 1606 y 1614 en un colegio jesuita donde según él mismo estudió "la lógica aristotélica, el análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos", Descartes (2019, p. 23), refiriéndose al análisis geométrico de Pappus y al Álgebra de Clavius (1608), publica en 1637 su obra Geometría, como uno de los tres ensayos que le siguen a su Discurso del método. En ella utiliza el álgebra para resolver problemas geométricos, es decir, muestra cómo encontrar la construcción geométrica (con regla y compás) a partir la solución algebraica del problema geométrico.

En su Geometría, Descartes no sólo ejemplifica el uso de su método para resolver el problema de las tres y las cuatro rectas que estudiaron y resolvieron parcialmente Euclides, Apolonio y Pappus (ver Libro I), sino que generaliza el problema a cualquier número de rectas, desprendiéndose de la limitación de la regla y el compás. Incluso Descartes (1987), va más allá al afirmar:

> Todos los problemas de la Geometría pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos, sino conocer la longitud de algunas líneas. (p. 280)

La Geometría de Descartes no es un libro pensado para enseñar Geometría Euclidiana, pues como el mismo advierte antes del inicio ese tratado no podrá ser leído sino por aquellos que ya tienen conocimiento de lo que se expone en los estudios de Geometría. Sin embargo, su aparición influirá notablemente en la enseñanza de la Geometría Euclidiana, pues aunque el álgebra ya se utilizaba, Descartes es quien muestra su potencia como generalizadora, no solo de problemas, como ya explicamos, sino también del ambiente, es decir, ya no existe la limitación del plano o del espacio, pues los polinomios de grado mayor a 3 nos lo permitirán, también se rompe con la limitación de la construcción con regla y compás y de la noción de líneas (curvas) mecánicas o geométricas.

En 1667 Antoine Arnauld, influenciado por espíritu cartesiano, publicó Les Nouveaux Éléments de Géométrie, introduciendo cambios en la forma en que hasta entonces se enseñaba la geometría: comenzaba con los conceptos más básicos y avanzaba gradualmente a los más complejos, proporcionando nuevas demostraciones para muchos de los teoremas de la geometría euclidiana; demostraciones más concisas, convirtiéndose en el texto estándar de geometría en Francia durante el S.XVIII

Según Barbin (2019), Arnauld incorporó en su libro Los nuevos Elementos de Geometría, dos cambios sustanciales, provenientes del pensamiento de Descartes: las operaciones aritméticas para las magnitudes geométricas y el orden natural (orden cartesiano), que significa ir de los objetos más simples a los más complejos.

En el prefacio de su libro Arnaud (1667) escribe:

> "Siempre le preocupó el hecho de que los Elementos de Euclides fueran tan confusos y desordenados, que lejos de poder dar a la mente la idea y el gusto del verdadero orden, sólo podían acostumbrarla al desorden y la confusión" prefacio.

El libro de Arnauld abandona la deducción aristótelica, ya criticada por Descartes e introduce un "nuevo orden" que bien podríamos llamar la deducción cartesiana, esto es, cambiar el orden lógico de las proposiciones por un orden de simplicidad. Debemos resaltar que aún hoy es común encontrar presente este enfoque en la enseñanza de la geometría, según el cual se debe partir de lo más elemental para avanzar a lo más complejo. Así también la TAD se plantea que el tejido de las organizaciones matemáticas debe ir en un orden creciente de complejidad.

Descartes criticó la ciencia de Aristóteles basada en silogismos, porque pueden concluir con certeza, pero destierra la obviedad (Regla X) y escribió en la Regla XII "No podemos comprender nada más allá de estas naturalezas simples y de una cierta mezcla o composición de ellas entre sí" (DESCARTES, 1998, p. 155), citado por Barbin (2019).

Además, en su libro Los nuevos Elementos de Geometría, Arnauld utiliza el álgebra, tal como propone Descartes. En el prefacio Arnauld (1667) advierte:

> "Sólo pensamos que debemos advertir al mundo que puede haber puede haber algunas personas que encuentren los primeros IV. Libros un poco difíciles, porque usan demostraciones de Álgebra, a las que al principio es difícil acostumbrarse"

Un siglo después de la aparición del libro de Arnauld, el matemático Lacroix, citado por Balacheff (2023) escribió:

> "Esta obra, es, creo, la primera en la que el orden de las proposiciones de la Geometría concuerda con el de las abstracciones, considerando primero las propiedades de las líneas, luego las de las superficies y después las de los cuerpos. " (Lacroix, 1799, p. xix).

Según Barbin (2021) Condorcet en su plan nacional de educación, pos revolución francesa, plantea redactar nuevos libros para enseñar las bases de las ciencias, libros que deberían ilustrar antes que convencer (distinción entre análisis y síntesis, ver Descartes (Euvres, tomo VII, p155-156), el objetivo no es convencer sino interesar al lector. A esta tarea de reunir y ordenar los saberes científicos elementales se le denominó "elementación" pero además estos textos, dirigido a los estudiantes, planteaba la necesidad de libros para los profesores:

> *"No puede haber un buen método de enseñanza de los elementos sin un libro al alcance de los niños, al que siempre puedan recurrir; pero tampoco puede haberlo sin otro libro que enseñe a los maestros los medios de suplir lo que el primero no puede contener."* Condorcet, citado por Barbin (2021) p.99

Estos textos de geometría tuvieron sus detractores. Por ejemplo, como menciona Barbin (2013), en Oxford, Lewis Carroll escribió el libro Euclid and his modern rivals (1879), donde refutaba a los libros que pretendían sustituir a los de Euclides. No es casualidad que los Elementos de Euclides perdurara, como libro de texto estándar en las escuelas y universidades inglesas, hasta inicios del siglo XX, esto a pesar que a finales de 1860, ya se contaban con varios informes sobre la insatisfacción de los profesores de matemáticas y su cuestionamiento al uso de los Elementos de Euclides como libro de texto de geometría. Los profesores afirmaban que, al no comprender Los Elementos, los alumnos apelaban más a la memoria que a su inteligencia.

A este respecto, Menghini (2006) señala que en la primera sesión de la Asociación para la Mejora de la Enseñanza de la Geometría (1871), Thomas A. Hirst, critica y se opone a la adopción de los Elementos de Euclides en Inglaterra afirmando que incluso Cremona reconocía la necesidad de una geometría diferente, como la propuesta en el libro de Balzer y que se utilizaba en la mayoría de los Institutos Técnicos italianos.

En 1741 Alexis Claude Clairaut publicó sus Elements de Géométrie y en el prefacio señala el problema de utilizar como texto Los Elementos de Euclides; señala que es frecuente que los principiantes se cansen y se desanimen antes de tener una idea clara de lo que se les quiere enseñar. Atendiendo a ello, se propone un libro que reuniera dos ventajas: interesar e ilustrar a los principiantes. Un análisis de la propuesta pedagógica del libro de Clairaut, se encuentra en el artículo Glaeser (1983).

Entre los textos de Geometría que aparecieron en este contexto, destaca Los Elementos de Geometría de Legendre (1794), que según Swetz (2011) llegó a tener más de 20 ediciones, siendo traducido al inglés en 1819, al italiano, al alemán, español, etc.

Balacheff (2023), afirma que Lacroix, Legendre, Clairaut y Dechalles conforman el primer periodo de la historia de la enseñanza de la Geometría, con lo cual no estamos de acuerdo, pues como hemos mostrado este proceso inicia con Euclides, lo que sí es verdad es que a partir del S.XIX el proceso de transposición está dirigido a un conjunto más grande de la sociedad, pues la educación se democratiza. Además, durante este siglo la geometría descriptiva, la proyectiva y la trigonometría esférica irrumpen en las recientemente creadas Escuelas Politécnicas (Francia) y en centros similares en Alemania, Italia y Estados Unidos de América y la geometría euclidiana pierde hegemonía.

Recién a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX cuando, como se señala en el libro de Smogorzhevski (1981), se estudió por completo el conjunto de problemas que se resuelven con las herramientas clásicas, la regla y el compás. Este desarrolló requirió del progreso del álgebra.

Por otro lado, durante el S.XIX la geometría descriptiva, la proyectiva y la trigonometría esférica irrumpen en las recientemente creadas Escuelas Politécnicas (Francia) y en centros similares en Alemania, Italia y Estados Unidos de América y la geometría euclidiana no solo pierde su hegemonía en un sistema educativo en expansión sino que además los cuestionamientos a los Elementos de Euclides concluyen con una revisión de sus fundamentos.

Por un lado, Euclides no enuncia todos sus postulados al inicio sino que los presenta conforme desarrolla el texto, sino que los va presentando, algunas de sus demostraciones se basan en las figuras y no en postulados o proposiciones ya demostradas, algunas pruebas contienen errores, alguno fáciles de corregir otros que requirieron nuevas pruebas. Además la verdad de los postulados se aceptaba como evidente o bien se comprobaba a partir de confrontar las proposiciones que se deducen de ellos con la realidad, basándose en un principio Aristotélico que aún hoy rige a la Física. Una discusión más detallada la puede encontrar en Lassalle (2015)

## Los Fundamentos de la nueva geometría de Hilbert

En 1899 Hilbert publica la primera edición de Los fundamentos de la Geometría, donde a partir de axiomas y principios fundamentales, logra reconstruir la totalidad de la geometría euclidiana, siguiendo la línea de lo que había hecho Peano con la aritmética en su artículo

de 1889 "Nuevo método de exposición de los principios de la aritmética" Es decir, el sustento de los axiomas no será más la intuición, como en Euclides, sino las implicaciones obtenidas, es decir, por las relaciones que se establecen entre sus axiomas, de allí la necesidad de garantizar la independencia y consistencia de los axiomas

> .He estado diciendo exactamente lo contrario: si los axiomas arbitrariamente dados no se contradicen entre sí con todas sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Este es para mí el criterio de la verdad y la existencia (Gabriel 1980, pp.39–40. Carta de Hilbert a Frege del 29 de diciembre de 1899).

Para una discusión más detallada sobre el programa de Hilbert, puede verse Lopez-Orellana (2019)

> Ya no era la expresión idealizada de la realidad sensible como pensaba Aristóteles (Meta física, libros M y N) ni la construcción de las leyes formales de nuestra percepción del mundo, como sostenía Kant (Crítica de la razón pura , Estética trascendental) ni, como aseguraba Riemann (sobre las hipótesis que sirven de base a la geometría , publicado postumamente en 1867), el conjunto de hipótesis previas a nuestro conocimiento de la realidad, sobre cuyo estatus epistemológico no se dice nada, ni siquiera los hechos que sirven de base a la geometría, como pensaba Helmholtz (1868)" Sinaceur, H.(1981)

Llegamos al siglo XX con una nueva fundamentación de la geometría, distintas geometrías y modelos y diferentes posibilidades de construirlas y estudiarlas. Un mundo en la que gran parte de las sociedades cuenta con una escolaridad gratuita y obligatoria, con avances en la ciencia y tecnología a velocidad creciente y que exige una transposición didáctica de estos saberes hacia la escuela. Quedaba claro que era necesario contar con un sistema axiomático que (con postulados independientes y consistentes) que permitiera reconstruir la geometría euclidiana ya corregida, pero esta vez considerando a quien iba dirigida.

En 1932 Birkhoff publica un artículo en los Annals of Mathematics donde plantea cuatro axiomas que permiten reconstruir la Geometría Plana, basada en la recta y el transportador.

Diez años más tarde, junto con Beatley, publica un libro titulado Geometría Básica para la enseñanza secundaria, junto con un manual para maestros. Él mismo plantea en el prefacio del manual para maestros, que el objetivo del libro es ejemplificar el método lógico de la argumentación tanto en situaciones matemáticas como no matemáticas y mostrar un sistema de geometría que sirva de modelo de un sistema lógico abstracto. Asegura que el planteamiento es mucho más simple y compacto que los Elementos de Euclides o de cualquier otra geometría desde Euclides.

Birkhoff asume construido el conjunto de números reales, con los que puede definir una métrica basada en la medición de segmentos y ángulos utilizando una regla marcada y un transportador. La propuesta de Birkhoff es también adoptada por el School Mathematics Study Group (SMSG) alrededor de 1960. La SMSG estuvo dirigida por Edward G. Begle y fue financiada por la National Science Foundation, con el objetivo de diseñar e implementar planes de estudios de matemáticas para primaria y secundaria. Este grupo trabajó hasta 1977 y publicó una serie de libros de matemáticas, en particular de geometría, los que tuvieron gran influencia en América, pues además fueron traducidos al español y portugués.

Como consecuencia del fenómeno denominado Matemática Moderna, en la década de los años 60, la geometría fue sometida al Álgebra Lineal (Gonzales, Herrero y Moreno, 2016).

Posteriormente, con el desarrollo de la Didáctica de la matemática como disciplina científica, la visión de la geometría cambió radicalmente. Así por ejemplo, Freudenthal describía la geometría como "aprehender el espacio…ese espacio en el que vive, respira y se mueve el niño. El espacio en el que el niño debe aprender a conocer, explorar, conquistar, para poder vivir, respirar y moverse mejor en él". (FREUDENTHAL, en NTCM (1991:115)).

De acuerdo con Gonzales, Herrero y Moreno (2016, p. 279),

> ahora se destaca la importancia de la enseñanza de la Geometría como área independiente por formar parte de nuestro lenguaje cotidiano, por sus aplicaciones en tareas de la vida cotidiana y en todas las ramas de las Matemáticas, por ser base para comprender conceptos avanzados de Matemáticas y otras disciplinas, por ser medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización, como modelo de disciplina organizada lógicamente, por su valor estético y cultural, por ser ciencia del espacio y por suponer un punto de encuentro entre las Matemáticas como teoría y las Matemáticas como modelo.

En esa línea, en el trabajo de Rubio-Pizzorno y Montiel (2017) señalan que la geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos al respecto. Como dice Meserve (1983), la geometría es el "estudio de propiedades del espacio físico en el cual vivimos".

## RESULTADOS

Del estudio realizado se concluye que la dicotomía entre una concepción formal y práctica de la geometría ha persistido a lo largo de la historia y se ha reflejado en los libros utilizados en su enseñanza.

Un análisis de la transposición didáctica requiere tanto del análisis epistemológico del objeto matemático como de los niveles de codeterminación. En el caso de la geometría euclidiana, un análisis de la transposición didáctica de la geometría vigente, tiene como punto de partida la propuesta de axiomática de Birkhoff: transposición interna y externa.

## CONSIDERACIONES FINALES

El enfoque geométrico de Euclides ha sido la base de la enseñanza de la geometría durante siglos, a pesar de que el fundamento de su modelo no estaba completo y debió ser revisado siglos después, tal como se ha justificado en el trabajo.

A partir de la fundamentación de la geometría de Hilbert y de la propuesta del modelo axiomático de Birkhoff, queda pendiente establecer qué relación existió entre las diferentes posturas epistemológicas asociadas a la geometría euclidiana y la forma en la que esta fue incorporada en los sistemas educativos en los países de América.

Proponemos como cuestión abierta el estudiar si efectivamente la propuesta de las posturas actuales que plantean que la enseñanza de la geometría debe caracterizarse por la resolución de problemas relacionados con el espacio físico y su posterior generalización, está siendo efectivamente implementada.

## AGRADECIMENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto CAP PI1029, denominado “Razonamiento algebraico elemental generalizado para el desarrollo de las competencias matemáticas del currículo en Educación Secundaria”, financiado por la Pontificia Universidad Católica del Perú.

## REFERÊNCIAS

ARNAULD, A. **Nouveaux éléments de géométrie**. Paris: Savreux, 1667.

BALACHEFF, N. Notes for a study of the didactic transposition of mathematical proof. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, inPress, 2023.

BARBIN, E., MENGHINI, M. & MOKTEFI, A.. Les dernières batailles d’Euclide: Sur l’usage des Éléments pour l’enseignement de la géométrie au XIXe siècle. In E. Barbin & M. Moyon (Eds.), **Les Ouvrages de Mathématiques dans l’Histoire**. Limoges, France: Presses Universitaires de Limoges, p .55-70, 2013

BARBIN, E. « On French Heritage of Cartesian Geometry in Elements from Arnauld, Lamy and Lacroix », dans Bjarnadottir Kristin, Furinghetti Fulvia, Krüger Jenneke, Prytz Johan, Smid Harm Jan, Schubring Gert (éds.), **Dig where you stand 5. Proceedings of the fifth**

**International Conference on the History of Mathematics Education**, Utrecht, University of Utrecht, p. 11-30, 2019.

BARBIN, E. L'écriture de manuels de géométrie pour les Écoles de la Révolution : ordre des connaissances ou « élémentation ». In Le Goff, A., & Demeulenaere-Douyère, C. (Eds.), **Enseignants et enseignements au cœur de la transmission des savoirs. Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques,** 2021.

BIRKHOFF, G. D. A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractors), **Annals of Mathematics**, 33, 1932

BROUSSEAU, G. Les proprietés didactiques de la géometrie élémentaire; l'étude de l'espace et de la géometrie. **Actes du 2e colloquede didactique des mathématiques.** Université de Crete, p. 67-83, 2000.

BROUSSEAU, G. Epistemologia e didattica della matematica**. La matematica e la sua didattica.** 4, p. 621-655, 2006.

CHEVALLARD Y. **La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné**, Paris, La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado**. AIQUE Grupo Editor. Tercera edición 1998.

http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5Cchevallard.pdf.

CLAVIUS, C. **Algebra**. Rome: Bartholomaeum Zannetum, 1608.

CONTRERAS GUTIERREZ, A. La Ratio Studiorum de la compañía de Jesús: Su aporte al desarrollo pedagógico y cultural del Chile colonial. **REXE**, 16(32), 137-148. p. 140, 2017.

DESCARTES, R. **Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría**. Alfaguara. Madrid, España, 1987.

DESCARTES, R. **Rules for the direction of the natural intelligence** (trad. G. Heffernan). Amsterdam-Atlanta: Rodopi, 1998.

DESCARTES, R. **Discurso del método**. Penguin Random house Grupo editorial, 2019.

DULZAIDES IGLESIAS, M. y MOLINA, E. y GOMEZ, A. Análisis documental y de información: dos componentes de un mismo proceso. **ACIMED**, Ciudad de La Habana, v. 12, n. 2, p. 1, abr. 2004.

Disponible en <http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352004000200011&lng=es&nrm=iso>

EUCLIDES. **Los Elementos. Libros I-IV**. Madrid: Gredos. (Col. Biblioteca Clásica Gredos #155). Traducción del griego al español de Ma. Luisa Puertas Castaños, 1991.

GABRIEL, G.; HERMES, H.; KAMBARTEL, F.; THIEL, C.; VERAART, A.; MCGUINNESS, B.; KAAL, H. (eds.) 1980. **Gottlob Frege. Philosophical and Mathematical Correspondence.** Oxford: Basil Blackwell.

GAITA, C. **El paso de la geometría sintética a la geometría analítica.** Tesis doctoral Universidad de Valladolid, Programa de doctorado en ciencias experimentales, sociales y matemática, 2015.

Disponible en https://uvadoc.uva.es/handle/10324/10135

GASCÓN, J. Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **Suma,** Badalona, v. 39, n. 1, p. 13-25, feb. 2002.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME**, 14(2), p. 203-231, 2011.

GLAESER, G. **A propos de la pédagogie de Clairaut**: vers une nouvelle orientation dans l'histoire de l'éducation. Revue d'histoire des sciences, 25(1), p. 13-27, 1972

GONZÁLEZ, J.R., HERRERO, M.H. & MORENO, M.M.MG. Análisis transpositivo de la enseñanza de la geometría desde 1953 hasta 2016. In Democracia y Educación en el siglo XXI. La obra de John Dewey 100 años después. Libro de actas del **XVI Congreso Nacional y VII Congreso Iberoamericano de Pedagogía.** Sociedad Española de Pedagogía, p. 279-280, 2016.

HUGHES, B. **Fibonacci's De Practica Geometrie** (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). Springer-Verlag, 2008.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Oxford University Press, Oxford, 1972.

LASSALLE CASANAVE, Abel; PANZA, Marco. Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides. **Rev. latinoam. filos.**, Ciudad Autónoma de Buenos Aires , v. 41, n. 2, p. 147-170, nov. 2015.

LINDBERG, D. C., & NUMBERS, R. L. **The Cambridge history of science**. Volume 2: Medieval science and technology. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003.

LOPEZ-ORELLANA, RODRIGO**.** El enfoque epistemológico de David Hilbert: el a priori del conocimiento y el papel de la lógica en la fundamentación de la ciencia. **Principia: An International Journal of Epistemology**, 23(2), 279-308, 2019

MARAVALL CASESNOVES, D. **La utilidad de las matemáticas en el progreso material e intelectual del hombre.** Conferencia pronunciada a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid el 2000. http://racefyn.insde.es/Promoci%c3%B3n%20Cultura/confmat4.htm.

MENGHINI, M. The Role of Projective Geometry in Italian Education and Institutions at the End of the 19th Century. **International Journal for the History of Mathematics Education**, vol. 1; p. 35-55 [[A historical description ofthe teaching of projective geometry in technical instruction], 2006.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMTICS, **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.** Lisboa: APM & IIE. 1991.

O'CONNOR, J. J., & ROBERTSON, E. F. **The Oxford companion to the history of mathematics**. Oxford, UK: Oxford University Press, 2003.

PRICE, A. **Pure and applied: Christopher Clavius's unifying approach to Jesuit mathematics pedagogy.** Doctoral dissertation, University of California, Los Angeles, 2017

Disponible en: https://escholarship.org/uc/item/55c5t4m7

RIZO-PATRÓN, R., & ARCE, J. Edmund Husserl. El origen de la geometría. **Estudios De Filosofía**, *4*, p. 33-54, 2000.

https://doi.org/10.18800/estudiosdefilosofia.200001.004

ROJAS, A. Y SIERRA, T. A reference epistemological model regarding the determination and construction of solids for compulsory secondary education. **Acta Sci.**(Canoas), 24(8), p. 437-475, 2022.

https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7185

RUBIO-PIZZORNO, S. Y MONTIEL, G. Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (Ed.), **23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones**, p. 143–148, 2017.

SINACEUR, H., & BOURGUIGNON, J.-P.**.** David Hilbert, rigor y simplicidad**. Mundo Científico Extra El Universo De Los Numeros,** 5, 32-40, 1981

SMOGORZHEVSKI, A. S. **La regla en construcciones geométricas**. Moscú : Mir, 1981.

STRUIK, D. J. Omar Khayyam, mathematician**. The Mathematics Teacher**, 51(4), p.280-285, 1958.

SWETZ, F. J., & KATZ, V. J. Mathematical Treasures–**Legendre's Elements of Geometry. Convergence,** 8(1), 2011.

### Histórico

Recebido: 15 de outubro de 2023.
Aceito: 12 de janeiro de 2024.
Publicado: 09 de fevereiro de 2024.

### Como citar – ABNT

UGARTE, Francisco; GAITA, Cecilia. La Geometría Euclidiana y su transposición didáctica . **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 48, e2024015, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024015.id603

### Como citar – APA

UGARTE, F., GAITA, C. (2024). La Geometría Euclidiana y su transposición didáctica . *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (48), e2024015. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024015.id603

### Número temático organizado por

Saddo Ag Almouloud
José Messildo Viana Nunes
Afonso Henriques