

Processos de Ensino e de Aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura

Teaching and Learning Processes of Double Integrals:
a literature review

Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Integrales Dobles:
una revisión de la literatura

Galvina Maria de Souza¹  

Gabriel Loureiro de Lima²  

RESUMO

Este artigo, recorte de uma investigação de doutorado, tem o objetivo de apresentar uma síntese comentada dos estudos que tratam de processos de ensino e de aprendizagem de integrais duplas. Foram registrados os objetivos, sujeitos, teorias utilizadas, principais resultados observados e um diálogo entre eles. Constatamos que essas integrais são discutidas no contexto do cálculo de medidas de áreas e volumes e foram desenvolvidas tendo como alvo o seu ensino ou aprendizagem em alguma habilitação em Engenharia. Os resultados sinalizam a necessidade da realização de pesquisas priorizando a abordagem dessas integrais, nas salas de aula de Engenharia, por meio de estratégias elaboradas a partir de questões constantes no eixo específico dessa graduação, as quais serviriam de ponto de partida para a elaboração de atividades contextualizadas na prática do Engenheiro e que, possivelmente, ao serem trabalhadas poderiam despertar o interesse dos estudantes e possibilitar-lhes a efetiva construção de conhecimentos acerca desse objeto matemático.

Palavras-chave: Revisão de Literatura; Educação Matemática; Integrais Duplas.

ABSTRACT

This article, an excerpt from a doctoral investigation, aims to present a commented synthesis of studies that deal with teaching and learning processes of double integrals. The objectives, subjects, theories used, main results observed and a dialogue were recorded among them. We found that these integrals are discussed in the context of calculating measurements of areas and volumes and were developed with the aim of teaching or learning them in some Engineering qualification. The results indicate the need to carry out research prioritizing the approach to these integrals, in Engineering classrooms, through strategies elaborated based on questions contained in the specific axis of this degree, which would serve as a starting point for the elaboration of activities contextualized in the Engineer's practice and which, possibly, when worked on, could awaken students' interest and enable them to effectively build knowledge about this mathematical object.

Keywords: Literature Review; Mathematics Education; Double Integrals.

RESUMEN

Este artículo, parte de una investigación de doctorado, tiene como objetivo presentar una síntesis comentada de los estudios que tratan sobre procesos de enseñanza y aprendizaje de integrales dobles. Se registraron los objetivos, sujetos, teorías utilizadas, principales resultados observados y un diálogo entre ellos. Constatamos que estas integrales se discuten en el contexto del cálculo de medidas de áreas y volúmenes y fueron desarrolladas teniendo como objetivo su enseñanza o aprendizaje en alguna habilitación en Ingeniería. Los resultados señalan la necesidad de realizar investigaciones priorizando el abordaje de estas integrales en las aulas de Ingeniería, mediante estrategias elaboradas a partir de preguntas constantes en el eje específico de esta carrera, las cuales servirían como punto de partida para la elaboración de actividades contextualizadas en la práctica del Ingeniero y que, posiblemente, al ser trabajadas podrían despertar el interés de los estudiantes y posibilitarles la construcción efectiva de conocimientos acerca de este objeto matemático.

Palabras clave: Revisión de Literatura; Educación Matemática; Integrales Dobles.

1 Doutora em Educação Matemática pelo Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas (DCET) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na mesma instituição (PROFIMAT/UESB), Vitória da Conquista, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Polônia, 104, Ibituruna, Montes Claros, MG, Brasil, CEP: 39100-298. E-mail: galvina.souza@uesb.edu.br.

2 Doutor em Educação Matemática pelo Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professor da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FCET) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e Assistente Especializado da Pró-Reitoria de Graduação na mesma Universidade, São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, São Paulo, SP, Brasil, CEP: 01303-050. E-mail: gllima@pucsp.br.

INTRODUÇÃO

O presente artigo é um recorte da investigação de doutorado em Educação Matemática da primeira autora (SOUZA, 2022), na qual assumindo a articulação da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências com a Teoria Antropológica do Didático como uma Praxeologia de Investigação Didática³, elaborou-se, por meio de uma atividade interdisciplinar, com o propósito de favorecer o diálogo entre a Matemática e a Engenharia, um Modelo Alternativo para o ensino de integrais duplas para graduandos em Engenharia Civil.

Nas primeiras leituras realizadas durante a investigação, constatamos que há um desinteresse dos estudantes de Engenharia quanto às disciplinas de Cálculo e que parte das dificuldades enfrentadas por eles são, muitas vezes, consequência do fato de os professores não optarem pela vinculação entre os conceitos das disciplinas específicas e profissionalizantes presentes na matriz curricular desses cursos e os conceitos de Cálculo (BIANCHINI; LIMA; GOMES, 2017). Constatamos também, que, em 2018, havia uma escassez de investigações científicas contemplando processos de ensino e de aprendizagem de temas de Cálculo relacionados às funções reais de várias variáveis reais, entre eles integrais duplas (BIANCHINI; LIMA; GOMES, 2018).

Assim, aprofundamos e refinamos essas leituras iniciais fazendo uma revisão de literatura, adotando como foco investigações versando sobre os processos de ensino e de aprendizagem envolvendo as integrais duplas nos cursos de Engenharia buscando evidenciar e compreender o que já havia sido produzido a respeito desses processos e, especialmente, de identificar lacunas que justificassem um novo estudo com essa temática. Além disso, buscamos elaborar reflexões entre essas produções, objetivando relacioná-las a esse novo estudo a ser desenvolvido cujo objeto matemático seria essas integrais. Dessa forma, a revisão de literatura realizada no início do processo de desenvolvimento da tese nos permitiu recorrer a resultados já obtidos incorporando-os à nossa base de conhecimentos para que pudéssemos contribuir para o avanço das reflexões da Educação Matemática na Engenharia.

Neste artigo o objetivo é apresentar uma síntese comentada dos estudos que encontramos na literatura (entre 2000 e 2021) que tratam de processos de ensino e de aprendizagem de integrais duplas.

Como será evidenciado no decorrer do artigo, constatamos que a maioria dos estudos encontrados discutem as integrais duplas no contexto do cálculo de medidas de áreas e de volumes e foram desenvolvidas tendo como alvo o ensino ou a aprendizagem dessas integrais em alguma habilitação em Engenharia, embora algumas delas tenham envolvido estudantes de Licenciatura em Matemática e de doutorado em Educação Matemática. Algumas das investigações sinalizaram a necessidade da realização de pesquisas priorizando a abordagem dessas integrais nas salas de aula de Engenharia, por meio de estratégias de ensino e de aprendizagem elaboradas a partir de questões constantes no eixo específico dessa graduação.

3 Segundo Gascón e Nicolás (2021, p. 12), uma *Praxeologia de Investigação Didática* é “um instrumento para descrever a estrutura e funcionamento da atividade científica, para unificar a linguagem e para moldar o diálogo entre diferentes enfoques de investigação didática”.

Quanto a estrutura, além desta introdução, neste artigo apresentam-se: a metodologia que empregamos durante a revisão de literatura, bem como aquela utilizada na construção deste artigo; a síntese das investigações encontradas; uma discussão dos dados abordando as relações constituídas entre as investigações analisadas, os principais resultados encontrados seguidos das convergências e especificidades desses resultados e as principais dificuldades relacionadas aos estudantes observadas pelos autores durante o desenvolvimento de seus estudos; as considerações finais depreendidas da revisão realizada, bem como as referências utilizadas na elaboração desse artigo.

Isso posto, na seção seguinte detalhamos a metodologia citada.

METODOLOGIA

Do ponto de vista metodológico, a pesquisa apresentada neste artigo é de natureza qualitativa. A revisão de literatura, objeto deste artigo, vem evidenciar e compartilhar os resultados das outras investigações que julgamos estar estreitamente relacionadas à tese que, quando a revisão foi executada, estava sendo produzida, conforme recomendado por Creswell (2010). Foi feita por meio de buscas sistemáticas de produções acadêmicas que tratassem dos processos de ensino e de aprendizagem de integrais duplas em cursos de Engenharia.

Nesse sentido, o objetivo deste artigo é apresentar, uma síntese comentada do que encontramos nessa revisão, principalmente com a identificação de objetivos de investigação, dos sujeitos de pesquisa, dos pressupostos teórico utilizados na organização, produção e análise dos dados das pesquisas, principais resultados observados, principais dificuldades dos estudantes observadas pelos pesquisadores em relação ao estudo, além da apresentação e discussão dos resultados das pesquisas, sempre apontando convergências entre elas e especificidades de cada uma.

Assim, considerando a crescente disponibilidade de dados e a rápida profusão de artigos científicos, optamos por privilegiar para a obtenção das pesquisas o Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e o *Google Acadêmico*. A primeira exploração dessas bases possibilitou a identificação de seis teses, sete dissertações e vinte e seis artigos. Foi realizada a partir dos termos de busca: *Integrais Duplas*; *Integrais Múltiplas*; *Integrais Triplas*; *Funções de Várias Variáveis* e *Ensino de Integrais Múltiplas*, também traduzidas para o inglês e espanhol, e refinada às áreas de conhecimento *Ensino e Educação*, e áreas de concentração *Educação Matemática*, *Ensino de Ciências e Matemática* e *Ensino de Engenharia e Matemática*. Como recorte cronológico, consideramos que as teses e dissertações deveriam ter sido defendidas no período de 2000 a 2021 e os artigos deveriam ter sido publicados de 2010 a 2021. Optamos também por selecionar apenas artigos disponíveis na íntegra para acesso *on-line*. Essa disparidade entre o marco temporal para a busca das teses e dissertações e dos artigos se justificou pela escassez de teses e dissertações encontradas no período de 2010 a 2021, relativas à temática de interesse na tese.

Para a seleção, fizemos, inicialmente, a leitura dos títulos e se fossem reconhecidos termos relacionados aos processos de ensino ou de aprendizagem das integrais duplas ou

múltiplas fazíamos a leitura dos resumos a fim de verificar se eles apresentavam alguma relação com esses processos em alguma habilitação em Engenharia; se tinham alguma ligação com os interesses da tese em questão; se os artigos decorriam ou não de teses e dissertações já selecionadas, pois esses seriam descartados; e se havia ou não permissão para acesso ao texto completo. Dos textos selecionados respeitando esses parâmetros, fazíamos a leitura preliminar. Ao final do processo restaram para análise três teses, cinco dissertações e três artigos, os demais foram descartados. No Quadro 1 apresentamos a relação das investigações selecionadas.

Quadro 1 – Relação das investigações selecionadas para análise

Título	Ano de Publicação	Tipo	Autores
Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de Integral Dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de Engenharias e de licenciatura em Matemática.	2021	Tese	Ana Karine Dias Caires Brandão
Esculturas Matemáticas: atividades para o estudo da Integral Dupla.	2018	Tese	Gina Magali Horvath Miranda
O ensino e aprendizagem de integrais múltiplas: análise didática com preocupações sobre o uso do <i>software Maple</i> .	2006	Tese	Afonso Henriques
Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais.	2019	Dissertação	Luiz Felipe Tatsch Schmidt
Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no cálculo de várias variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem.	2018	Dissertação	Márcio Antônio Cometti
Uma sequência de ensino para o estudo de Integrais Duplas.	2016	Dissertação	Leandro Ribeiro Fontoura
Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de Integrais Duplas e Triplas.	2016	Dissertação	Sheila Aline dos Santos Silva Marques
Ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos de História da Matemática e da Resolução de Problemas.	2010	Dissertação	Marcos Vinícius Ribeiro
Aplicação da Integral na determinação de características geométricas de sessões planas de estruturas em barras.	2014	Artigo	Rogério Simões Ivanete Zuchi Siple Elizandra Bar de Figueiredo
Um olhar à aplicação das Integrais Múltiplas: da projeção gráfica à maquete.	2013	Artigo	Ivanete Zuchi Siple Elizandra Bar de Figueiredo
Leitura e escrita em Cálculo.	2011	Artigo	Maria Clara Frota

Fonte: Elaboração pelos autores

Para apresentar a síntese das investigações, inicialmente elaboramos o Quadro 2 na qual destacamos os sujeitos das pesquisas. A partir dos Quadros 3 a 13 sintetizamos como tais investigações foram conduzidas a partir dos objetivos propostos e subsídios teóricos que foram mobilizadas no seu desenvolvimento, na produção e na análise dos dados obtidos pelos pesquisadores.

Para a discussão dos dados observados, construímos uma seção em que abordamos, inicialmente, as relações constituídas entre as investigações. Posteriormente elaboramos o Quadro 14 contendo os principais resultados por investigação explorada e, por meio dela, buscamos e apresentamos convergências e especificidades nos resultados observados. E, por fim, a partir da elaboração do Quadro 15, destacamos as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes que foram relatadas pelos autores. A apresentação deste quadro foi seguida de um breve comentário destacando dificuldades presentes em mais de uma pesquisa.

Para encerrar o artigo, expusemos as considerações finais enriquecidas de algumas indicações de pesquisas futuras observadas a partir das investigações exploradas.

Na próxima seção explicitamos a síntese das investigações.

SÍNTESE DAS INVESTIGAÇÕES

Nessa seção apresentamos e discutimos as investigações encontradas. Cabe ressaltar que todas as investigações são de natureza qualitativa. Embora Schimidt (2019) caracterize a sua investigação como quali-quantitativa, não identificamos uma análise inferencial dos dados na pesquisa. Somente Siple e Figueiredo (2013) coletaram dados repetidamente durante um período de dez anos, fazendo uma pesquisa longitudinal.

Quadro 2 – Sujeitos de Pesquisa

Autor(res) - Ano	Sujeitos de Pesquisa
Brandão (2021)	Doze estudantes matriculados na Licenciatura em Matemática e graduação em Engenharias, de duas universidades distintas, que já haviam cursado Cálculo Diferencial e Integral III
Miranda (2018)	Doutorandos e estudantes de um curso de Engenharia de Produção em uma situação de curso de extensão ⁴
Henriques (2006)	Estudantes da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e das classes preparatórias tecnológicas francesas
Schmidt (2019)	Estudantes de Engenharia Mecânica
Cometti	Estudantes da graduação em Engenharia Elétrica que cursavam Cálculo de funções de várias variáveis em uma universidade particular da região metropolitana de Belo Horizonte
Fontoura (2016)	Cinco estudantes de Licenciatura em Matemática matriculados em Cálculo IV no Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), em Santa Maria, no Rio Grande do Sul
Marques (2016)	Estudantes do curso de Engenharia de Produção dessa universidade
Ribeiro (2010)	Estudantes dos cursos de Engenharia da Computação, Civil e Elétrica da Faculdade de Engenharia de Sorocaba
Siple	Estudantes dos últimos dez anos que cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, nos cursos de Engenharia e na Licenciatura em Matemática, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina
Simões;	Professores de Cálculo e de disciplinas específicas do curso de Engenharia de uma universidade pública, em Santa Catarina

⁴ Os estudantes foram convidados pela autora para fazer o curso fora do programa de doutorado, o que foi denominado por ela de *situação de um curso de extensão*.

Frota (2011)	Estudantes de Engenharia de uma faculdade particular da região metropolitana de Belo Horizonte
--------------	--

Fonte: Elaboração pelos autores

Considerando os sujeitos de pesquisa destacados no Quadro 2 podemos afirmar que a maioria das investigações foi realizada com estudantes de graduação em alguma habilitação em Engenharia. No entanto, Brandão (2021), Miranda (2018), Henriques (2006), Simões, Siple e Figueiredo (2014), Siple; Figueiredo (2013), respectivamente, analisaram atividades aplicadas a alunos da Engenharia e da Licenciatura em Matemática; doutorandos em Educação Matemática e alunos de Engenharia; alunos da Licenciatura em Matemática e alunos das classes preparatórias tecnológicas francesas (classes que preparavam os estudantes para cursos superiores de tecnologia na França); professores dos cursos de Engenharia e; alunos de cursos de Engenharia e de licenciatura em Matemática.

Quanto ao fato de alguns dos sujeitos dessas pesquisas pertencerem a estudantes de cursos distintos (Engenharia e Licenciatura por exemplo), era intenção dos autores estabelecer algum tipo de comparação em relação ao ensino e à aprendizagem de integrais para diferentes públicos no decorrer de sua investigação.

Conforme explicitado na metodologia, elaboramos quadros destacando os objetivos e fundamentação teórica por autor e tecemos nossas considerações a partir dos dados desses quadros a respeito de como os autores desenvolveram suas investigações a partir dessa fundamentação a fim de conquistar o objetivo proposto. O Quadro 3 se refere aos objetivos e fundamentação utilizada na pesquisa de Brandão (2021).

Quadro 3 – Brandão (2021): Objetivos e fundamentação teórica

Brandão (2021)	
Objetivos	Analisar os significados e as praxeologias mobilizados por estudantes de cursos de Engenharia e de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um <i>Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)</i> para o ensino e a aprendizagem da integral dupla
Fundamentação Teórica	Teoria Antropológica do Didático (TAD) (BOSCH; GASCÓN, 2010); Semiótica (CHARLES SANDERS PEIRCE, 2005)

Fonte: Elaboração pelos autores

As hipóteses de pesquisa identificadas na tese da autora são as seguintes:

[...] a dimensão da linguagem envolta nos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais Duplas para o cálculo da medida de uma Superfície Quádrica, quando aplicadas em um PEP, proporciona *raciocínios abduativos*⁵ capazes de desenvolver a autonomia dos estudantes na construção dos conceitos inerentes ao objeto matemático em estudo e, [...] que existem diferenças nos significados, nas interpretações e nas praxeologias mobilizados por estudantes dos cursos das Engenharias e da Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um PEP (BRANDÃO, 2021, p. 42)

Foram tais hipóteses que a levaram à construção do objetivo explicitado no Quadro 3. A autora, ancorada na Semiótica Peirciana e na TAD realizou o estudo dos documentos ofi-

⁵ O *raciocínio abduativo* é visto sob três vertentes: a epistemológica, a lógica e a ontossemântica. Na perspectiva lógica – epistemológica, a abdução, segundo Peirce (2005), é caracterizada por ser capaz de gerar novas ideias e, no campo científico, são hipóteses, inferências originadas pela percepção de fenômenos reais despontados como *insights*. A diferença entre este e os raciocínios dedutivos e indutivos é que eles estão livres de impor julgamentos sem a preocupação de serem válidos ou não. No que tange à perspectiva ontossemântica, ela é explicada, segundo Moscoso (2019), no nível semântico em que mostra o sentido e a função da linguagem e da elaboração de conhecimentos e no nível ontológico em que a abdução tem origem na dúvida das crenças.

ciais de duas instituições distintas, para esclarecer como a integral dupla estava organizada do ponto de vista das praxeologias matemáticas e didáticas no sentido de Chevallard (1992). A partir daí elaborou o PEP para o ensino dessas integrais. Cabe esclarecer que um PEP é uma metodologia no âmbito da TAD que proporcionou, nesta investigação, à elaboração e fundamentação de uma forma particular de organização do processo de estudo de integrais duplas a partir da importação de saberes de outras áreas das ciências que não a Matemática.

Por meio do PEP, a autora planejou e elaborou uma sequência didática que depois de aplicada foi analisada segundo as matrizes da Linguagem e da Diversidade⁶, matrizes que possibilitaram a síntese das informações e formulação de argumentos para as hipóteses do estudo. Cabe explicitar que a base da sequência eram problemas envolvendo o cálculo de medidas de área e de volume delimitados em quádras que requeriam as integrais duplas na sua solução.

No Quadro 4 apontamos os objetivos da investigação de Miranda (2018), bem como o referencial empregado.

Quadro 4 – Miranda (2018): Objetivos e fundamentação teórica

Miranda (2018)	
Objetivos	Identificar e analisar as concepções de estudantes de Engenharia quanto às Integrais Duplas a partir de tarefas que envolvem a tecnologia e a representação figural (sólidos construídos por meio de uma impressora 3D) dos sólidos limitados por funções de duas variáveis, por meio das esculturas matemáticas
Fundamentação Teórica	Teoria da Cognição Corporificada ((LAKOFF; JOHNSON, 2012); (FAUCONNIER; TUNNER, 2000; 2002); (BARSALOU, 2008))

Fonte: Elaboração pelos autores

Essa investigação foi fundamentada por meio da articulação de diferentes abordagens da Teoria da Cognição Corporificada; Lakoff e Johnson (2012) respaldaram as questões relacionadas às metáforas conceituais; Fauconnier e Tunner (2000; 2002) as questões relacionadas a estruturação dos conceitos; Barsalou (2008) a construção das atividades elaboradas e aplicadas aos sujeitos pesquisados e; para o uso da linguagem na análise dos discursos foram utilizados preceitos do Modelo da Estratégia Argumentativa de Castro e Frank (2011).

Utilizando a metodologia Design Experimental (COBB *et al*, 2003) e com foco no cálculo de medidas de área e volumes de sólidos utilizando integrais duplas, a autora fez sua pesquisa organizada em dois momentos. No primeiro, após a revisão de literatura evidenciar as lacunas que justificaram a sua investigação, foram elaboradas as tarefas a serem desenvolvidas pelos sujeitos principalmente por meio de *applets* construídos; foi feita a programação dos sólidos para impressora 3D e a suas impressões (esculturas matemáticas), além da construção de Contexto Interativo de Aprendizagem (CIA) a partir da organização dos *applets* como um *e-book* e das esculturas matemáticas. No segundo momento, foi implementado o ambiente CIA com a aplicação e análise da proposta para o ensino e para a aprendizagem da integral dupla.

⁶ Segundo Brandão (2021), para a constituição da primeira matriz (a da Linguagem), foram eleitos seis elementos de análise, a saber: as empregadas, os raciocínios mobilizados; as semioses produzidas; a as dialéticas propostas por Chevallard (2012), acrescentando-lhes, a dialética pessoa e situação, abduzidos pelos autores, as funções didáticas e o tipo de linguagem. Para a segunda matriz (a da Diversidade), foram selecionados os significados, as interpretações e as atitudes como fundamentos para o estudo dos resultados obtidos frente as tarefas propostas, os diálogos gravados e a avaliação realizada.

Quadro 5 – Henriques (2006): Objetivos e fundamentação teórica

Henriques (2006)	
Objetivos	Compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes durante os processos de ensino e de aprendizagem das integrais múltiplas utilizadas em problemas que envolvem o cálculo de medidas de áreas e volumes de sólidos, além de estudar de que forma a utilização do software Maple pode ajudá-los a superar essas dificuldades
Fundamentação Teórica	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1993); Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999); Teoria da Instrumentação (RABARDEL, 1995)

Fonte: Elaboração pelos autores

Conforme apresentado no Quadro 5, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica fundamentou a pesquisa do autor nas questões relacionadas a diferentes formas de representações de sólidos, na interpretação dessas representações e nas interações entre elas utilizando o *Software Maple*; a TAD fundamentou, principalmente, o estudo da dimensão institucional e; a Teoria da Instrumentação subsidiou o estudo da dimensão instrumental da aprendizagem em ambientes computacionais.

A pesquisa foi organizada em dois grupos. No primeiro, foram analisados documentos oficiais das duas instituições estudadas, visando entender como está organizada a Matemática quando o objeto em estudo são as integrais múltiplas e como esses conteúdos são abordados nesses documentos; além de evidenciar as práticas realizadas com a utilização do *Maple* para esse objeto matemático e compreender como as representações gráficas e algébricas dos sólidos são apresentadas e, a forma como essas representações interagem em situações de cálculo de medidas de áreas e de volumes de sólidos geométricos.

No segundo grupo, por meio do *Maple* tendo como foco a resolução de problemas de cálculo de medidas de áreas e volume de sólidos, o autor elaborou sequências de operações no *Maple* abordando as integrais múltiplas para obter representações gráficas de sólidos delimitados por superfícies estabelecendo relações entre essas representações e representações algébricas dessas integrais associadas aos sólidos. Essa sequência foi denominada pelo autor de *crivo geométrico*, entendido como “a definição geométrica do contorno de um sólido” (HENRIQUES, 2004, p. 13, tradução nossa). O objetivo explícito dessa sequência é obter uma representação gráfica de qualquer sólido isolado ou crivado, descrito por várias superfícies.

Na investigação também foi elaborado o *Modelo para Análise de Tarefas em Torno de Cálculos de Integrais Múltiplas (MATIM)*, que “vincula a análise da resolução de um problema de cálculo de medidas de volume por integrais à representação gráfica do sólido a ele associado” (HENRIQUES, 2006, p. 219, tradução nossa). Posteriormente, o autor elaborou uma nova sequência de atividades—que privilegiaram construções com o uso de lápis e papel e o ambiente informatizado—para serem analisadas de acordo com o MATIM. No entanto, durante seu doutorado essa sequência não foi aplicada aos sujeitos do estudo.

No Quadro 6 são apontados os objetivos e a Fundamentação teórica da investigação de Schmidt (2019).

Quadro 6 – Schmidt (2019): Objetivos e fundamentação teórica

Schmidt (2019)	
Objetivos	Elaborar, implementar e avaliar uma <i>Unidade de Ensino Potencialmente Significativa</i> (UEPS), direcionada aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de integrais múltiplas, quando está aplicado ao cálculo da medida de volume, massa e centro de massa de peças hipotéticas
Fundamentação Teórica	Teoria da Aprendizagem Significativa (DAVID AUSUBEL, 1990); Performances Matemáticas Digitais (PMD) (SCUCUGLIA, 2012)

Fonte: Elaboração pelos autores

Partindo do pressuposto que uma UEPS tem como princípio fundamental o conhecimento prévio, uma vez que ele engloba as perspectivas, sentimentos e comportamentos integrados ao estudante que aprende como fator que mais gera influência na aprendizagem significativa e; que são os organizadores prévios cognitivos que evidenciam a relação entre um novo saber e aquilo que já está consolidado na estrutura cognitiva do estudante; o autor elaborou, implementou e avaliou uma UEPS, direcionada aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de integrais múltiplas aplicado ao cálculo da medida de volume, massa e centro de massa de peças mecânicas hipotéticas, fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa. A análise da UEPS no que se refere aos vídeos abordando as integrais múltiplas que foram elaborados pelos estudantes foi sustentada pela PMD, considerando que ela determina um mecanismo de análise que fundamenta os meios de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos por intermédio de artes e recursos digitais.

Quanto à organização, apresenta-se no trabalho a elaboração e a aplicação de testes diagnósticos aos sujeitos para verificar quais os subsunçores⁷ que esses estudantes evidenciaram que pudessem esclarecer o conhecimento prévio em relação às integrais indefinidas, definidas, cálculo de medidas de área e regras de integração; o conhecimento prévio em relação aos conceitos básicos da disciplina necessários ao estudo das integrais múltiplas; e a forma como os estudantes mobilizavam as integrais em situações aplicadas relacionados à Engenharia Mecânica. Apresenta ainda, a elaboração, aplicação e análise da atividade exploratória, pensada com a intenção de verificar indícios de uma aprendizagem significativa quanto ao saber que as integrais múltiplas detêm; abordou o cálculo da medida do volume, massa e centro de massa de um sólido, sendo essas integrais aplicadas à construção e representação gráfica de uma peça mecânica, para a qual os estudantes fizeram o uso dos *softwares* GeoGebra, AutoCad ou SolidWorks. Contou, ainda, com a construção de vídeos elaborados pelos estudantes.

Quadro 7 – Cometti (2018): Objetivos e fundamentação teórica

Cometti (2018)	
Objetivos	Investigar as possíveis contribuições de sequências didáticas, utilizando o GeoGebra 3D no processo de ensino das integrais múltiplas
Fundamentação Teórica	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1993)

Fonte: Elaboração pelos autores

Cometti (2018) elaborou e aplicou uma sequência didática, composta de atividades exploratórias (termo usado pelo autor), priorizando as operações de conversão e informa-

⁷ Segundo Ausubel (1990), *subsunçores* são aquilo que o estudante já sabe e está relacionado com um novo conhecimento a ser construído.

ções contidas nos *registros de representação semiótica*⁸, fundamentado por aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, conforme apontado no Quadro 7. Na sequência foi abordada a construção de representações das superfícies quádricas no GeoGebra e de regiões de integração de integrais duplas e triplas a fim de calcular medidas de áreas e de volumes de sólidos, com ênfase nas relações entre as representações algébricas e geométricas.

Nas análises realizadas pelo autor, não identificamos uma metodologia ou forma de categorização dos dados.

Quadro 8 – Fontoura (2016): Objetivos e fundamentação teórica

Fontoura (2016)	
Objetivos	Investigar quais as contribuições da elaboração e aplicação de uma sequência didática fundamentada nos procedimentos da Engenharia Didática, com a utilização do <i>software Maple</i> , para o ensino e aprendizagem de integrais duplas para estudantes da disciplina de Cálculo IV, da Licenciatura em Matemática
Fundamentação Teórica	Conceito Imagem e Conceito Definição (DAVID TALL; SHLOMO VINNER, 1981); Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996)

Fonte: Elaboração pelos autores

Em busca do objetivo pontuado no Quadro 8, Fontoura (2016) utilizou as ideias de David Tall e Shlomo Vinner (1981) na classificação dos sujeitos quanto ao seu *conceito imagem*⁹ – conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental e conceito imagem relacional e, para as análises apoiou na Engenharia Didática.

Para tanto organizou seus estudos de forma a aplicar um teste diagnóstico para identificar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito do cálculo de medida de área utilizando integrais múltiplas, e analisar os livros didáticos de Cálculo no que se refere a forma como o ensino dessas integrais está proposto nesses livros. Com os resultados do teste e dessas análises em mãos, elaborou e aplicou uma sequência didática aos estudantes, construída fazendo uso de um aplicativo computacional programado com o *software Maple*. Vale ressaltar que as atividades foram construídas considerando o contexto de medida de áreas e de volumes de sólidos.

8 Segundo Duval (1993) um *registro de representação semiótica*, ou simplesmente *registro*, é um sistema semiótico que cumpre as operações cognitivas de formação, tratamento e conversão. Existem quatro grandes registros criados para comportar as representações semióticas, o registro figural ou geométrico; o registro gráfico; o registro da língua natural e o registro da língua formal ou algébrica. O tratamento ocorre no interior do registro ou do sistema semiótico, consiste na transformação de uma representação em outra, obedecendo as regras próprias do sistema. A conversão ocorre entre registros distintos quando a representação do objeto pertencente a um dado registro é transformada em outra representação pertencente a outro registro, modificando a maneira como um objeto é representado.

9 Para Vinner (1991), um *conceito imagem* é aquele construído pelo sujeito, é a concepção que o sujeito constrói de um conceito constituído na comunidade em geral. É constituído na estrutura cognitiva do sujeito associado a um conceito. Essa associação contém representações mentais, tais como imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades, elaboradas pelo indivíduo por meio de processos de pensamento. Um *conceito definição* é a especificação do conceito que o sujeito expressa por meio de palavras, pode ser apreendido pelo sujeito na escola ou relacionando-se com um conceito constituído na sociedade. Da mesma forma que o *conceito imagem* é formado na estrutura cognitiva do sujeito.

Quadro 9 – Marques (2016): Objetivos e fundamentação teórica

Marques (2016)	
Objetivos	Investigar e elaborar <i>Projetos de Construção de Objetos Concretos</i> (PCOC) ¹⁰ acessíveis por meio de prototipagem construída em impressora 3D, “podendo servir de instrumentos auxiliares na resolução de problemas propostos em praxeologias envolvendo integrais duplas e triplas que requerem a visualização no registro gráfico como estratégia de realização” (MARQUES, 2016, p. 22)
Fundamentação Teórica	Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995); Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1996); Teoria de Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 1993); Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996)

Fonte: Elaboração pelos autores

Marques (2016) utilizou preceitos da Abordagem Instrumental e da TAD como suporte para a realização, principalmente, da análise institucional e descrição das praxeologias didáticas e matemáticas envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem das integrais múltiplas na instituição na qual a pesquisa foi realizada. Além disso, aspectos da TAD, da Abordagem Instrumental e da Teoria de Registros de Representações Semióticas foram suporte para propor o percurso metodológico da modelagem e prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D e desenvolver modelos de PCOC utilizando este percurso; além da elaboração e aplicação da sequência didática composta por dois dispositivos experimentais (cone truncado e galpão), utilizando os dois modelos de PCOC desenvolvidos, indo ao encontro aos objetivos propostos no Quadro 9. As análises foram subsidiadas, também, pela Engenharia Didática.

Quadro 10 – Ribeiro (2010): Objetivos e fundamentação teórica

Ribeiro (2010)	
Objetivos	Construir um projeto de ensino e de aprendizagem destinado a trabalhar integrais com estudantes de um curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, com recursos oriundos da História da Matemática
Fundamentação Teórica	Metodologia de Romberg (1982); Resolução de Problemas ((ONUCHIC; ALLEVATO, 2009); (VAN DE WALLE, 2001))

Fonte: Elaboração pelos autores

Subsidiada na Metodologia de Romberg (1982) e Resolução de Problemas e orientada pelo objetivo apontado no Quadro 10, encontramos na investigação de Ribeiro (2010) um o modelo de investigação apresentando um estudo histórico com ênfase na origem do conceito de integrais de funções reais de uma variável real até a sua formalização por Riemann, destacando problemas que abordaram essas integrais. Encontramos, também, um estudo sobre a metodologia de Resolução de Problemas aplicada em processos de ensino e de aprendizagem de Matemática a fim de identificar os diferentes campos teóricos que pudessem contribuir para “entender e saber trabalhar a sala de aula, de uma forma alternativa” (RIBEIRO, 2010, p. 108), nos contextos dos cursos de Engenharia e Matemática, em situações de ensino e de aprendizagem de Cálculo.

¹⁰ “Um PCOC é um modelo matemático descritivo idealizado a partir de análise de uma situação-problema, tarefa, exercício ou um exemplo institucional que resulta em um objeto construído com materiais concretos ou com auxílio de um ambiente computacional de aprendizagem” (HENRIQUES, 2014, p. 220).

Encontramos ainda, uma sequência didática elaborada a partir de problemas relacionados ao cálculo de medidas de área e de volume, identificados ou não no estudo histórico realizado na investigação, com a intenção de levar os sujeitos a construir o conceito de funções, de derivadas parciais e de integrais duplas.

Quadro 11 – Siple e Figueiredo (2013): Objetivos e fundamentação teórica

Siple e Figueiredo (2013)	
Objetivos	Ultrapassar o entrave apresentado pelos estudantes na visualização tridimensional imediata no ambiente lápis/papel que, segundo os autores, os impedia de representar graficamente regiões e sólidos geométricos, bem como de estabelecer relações entre a representação gráfica e algébrica quando essas regiões ou sólidos mobilizavam as integrais duplas
Fundamentação Teórica	Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003)

Fonte: Elaboração pelos autores

Conforme já acentuamos neste texto, a investigação de Siple e Figueiredo (2013), cujo objetivo encontra-se destacado no Quadro 11, foi o único estudo longitudinal encontrado nesta revisão. As autoras elaboraram, aplicaram e analisaram uma atividade tendo o *software Winplot* como recurso computacional, abordando as integrais duplas no cálculo da medida do volume de um determinado sólido, contemplando suas diferentes representações e as relações entre elas.

A atividade foi aplicada em três etapas. Na primeira, no ambiente lápis/papel, os sujeitos deveriam utilizar Geometria Analítica para identificar as superfícies, suas curvas de interseção e suas projeções nos planos coordenados utilizando lápis e papel, e utilizando o *software Winplot* eles construíam as representações gráficas bidimensionais e tridimensionais do sólido. Na segunda etapa, construíam a maquete do sólido identificado na primeira etapa e utilizaram as integrais duplas para o cálculo da medida de volume desse sólido, para, na última etapa, socializar os resultados encontrados.

Quadro 12 – Simões, Siple e Figueiredo (2014): Objetivos e fundamentação teórica

Simões, Siple e Figueiredo (2014)	
Objetivos	Entender qual Matemática deve ser ensinada a estudantes de Engenharia e quais ferramentas do Cálculo os professores mobilizam em suas disciplinas. Estreitar a relação entre teoria e prática, desenvolvendo atividades de aplicações das integrais de funções reais de uma variável real além da integral dupla em problemas que permitiam visualizar características geométricas dos elementos estruturais em forma de barras que compõem um edifício ou uma máquina.
Fundamentação Teórica	Preceitos da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1990)

Fonte: Elaboração pelos autores

No artigo, não observamos uma teoria ou metodologia explícita para a categorização e análise dos dados produzidos, no entanto, conforme Quadro 12, identificamos preceitos da Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel (1990), na medida em que autores usam o termo *Aprendizagem Significativa* e promovem reflexões nas quais aparecem inferências implícitas dessa teoria. Também se referem a Modelagem Matemática durante a construção dos problemas em que aplicam as integrais de funções reais de uma variável real e a integral dupla para visualizar características geométricas de elementos estruturais

em forma de barras que compõem um edifício ou uma máquina, mas não atribuem essa modelagem a uma abordagem específica.

Quadro 13 – Frota (2011): Objetivos e fundamentação teórica

Frota (2011)	
Objetivos	Caracterizar os processos de leitura e de escrita em Cálculo por meio de textos matemáticos que se fazem presentes no cotidiano da sala de aula
Fundamentação Teórica	Concepção de Letramento (SOARES, 2000); Concepção de competência como competência em ação (WIENERT, 1999)

Fonte: Elaboração pelos autores

Conforme explicitado no Quadro 13, a investigação de Frota (2011) está relacionada às *competências de leitura e escrita em Cálculo na perspectiva do letramento, entendido por Soares (2000) citada por Frota (2011, p. 39) como “resultado da ação de ensinar e aprender as práticas sociais de leitura e escrita; o estado ou condição que adquire um grupo social ou um indivíduo como consequência de ter-se apropriado da escrita e de suas práticas sociais”*. Nesse sentido a autora entende o letramento matemático como o desenvolvimento, pelo sujeito, de competências de utilizar a Matemática em contextos não matemáticos, que o permitam tratar de situações de domínio científico e do cotidiano.

A partir desse entendimento a autora propôs reflexões sobre o texto escrito de duas situações abordando as integrais duplas, contextualizadas na Matemática, às quais foram aplicadas aos sujeitos com o intuito de buscar compreender o processo de leitura e escrita desses sujeitos no que se refere a:

ler a informação na linguagem veiculada, natural ou simbólica, na forma de tabelas ou gráficos, reconhecendo códigos, expressões, notações próprias das várias formas de representação em Matemática;

ler dentro da informação, operando com essa a informação, seja por meio de conversão da forma de registro, seja através de transformações dentro de um mesmo tipo de registro, conforme visto em Duval (2003), e acionando conhecimentos anteriores de forma a relacioná-los com a nova informação;

ler além da informação, realizando novas operações mais complexas de conversão da forma de registro, para otimizar soluções, para interpretar a informação dentro do próprio contexto da Matemática e, além desse contexto, em conexão com outras ciências e situações aplicadas (FROTA, 2011, p. 493 *apud* SOUZA, 2022).

Tendo apresentado, nesta seção, os 11 trabalhos que compuseram a revisão de literatura realizada, com destaque para os sujeitos da pesquisa, os objetivos e as fundamentações teóricas, além de comentários pontuais acerca de procedimentos metodológicos empregados pelos autores, na seção seguinte apresentamos a discussão dos dados explorados.

DISCUSSÃO DOS DADOS¹¹

Por meio das leituras realizadas para esta investigação, constatamos que Henriques (2006), Marques (2016) e Brandão (2021) analisaram documentos institucionais referentes aos cursos que sediaram as suas investigações, dos quais destacamos os programas institu-

¹¹ Esta seção reproduz a discussão acerca da revisão de literatura presente na tese de doutorado da primeira autora (Souza, 2022) que foi desenvolvida sob a orientação do segundo autor.

cionais, manuais de referência, matrizes curriculares e projetos político-pedagógicos, com o propósito de compreender como as integrais duplas ou múltiplas são abordadas nesses documentos, com qual objetivo e de que maneira são mobilizadas nas disciplinas do eixo específico desses cursos, bem como nas disciplinas da área de Matemática. Por meio das análises, esses autores evidenciaram o lugar ocupado por essas integrais para propor uma sequência de atividades, ainda que não aplicada na investigação de Henriques (2006), que contrastasse com a forma como o ensino era realizado nos cursos que sediaram suas investigações.

A análise dos livros didáticos adotados na disciplina de Cálculo foi um ponto concomitante nas investigações de Henriques (2006), Marques (2016), Fontoura (2016) e Brandão (2021). Essas análises tiveram o intuito de compreender como o objeto em estudo se apresentava do ponto de vista didático e, também, matemático. O estudo foi utilizado nessas investigações como construção de um referencial institucional e posto em xeque quanto a um outro referencial construído por meio de um estudo epistemológico-histórico do objeto matemático.

Henriques (2006), embora tenha considerado importante a aplicações das integrais múltiplas em contextos não matemáticos (como no estudo de massa, densidade, momentos de inércia e centros de massa) assim como Marques (2016), Miranda (2018), Cometti (2018), Fontoura (2016) e Frota (2011) não estendeu seus estudos além de contextos próprios da Matemática.

Nas investigações de Miranda (2018), Henriques (2006) e Cometti (2018), a ênfase na importância da interação entre os estudantes durante situações didáticas propostas por professores em sala de aula foi ressaltada como uma contribuição positiva para a construção do conhecimento de um objeto matemático pelo estudante.

A aplicação de testes diagnósticos a estudantes foi uma ação presente nos estudos de Henriques (2006), Miranda (2018), Fontoura (2016) e Schmidt (2019). Por meio desses testes esses autores buscaram evidenciar os conhecimentos prévios, necessários à compreensão das integrais duplas e/ou triplas. Os conhecimentos prévios – ou a falta deles – foram considerados na elaboração das atividades propostas durante as investigações.

Diferentemente de Henriques (2006), não identificamos em Miranda (2018) apontamentos que indicassem como foi realizado o processo de construção da sequência de atividades e que revelasse ao leitor uma técnica ou método para a construção dos *applets*, bem como dos projetos de programação desenvolvidos para impressão 3D dos sólidos gerados a partir de superfícies dadas pelas integrais. Marques (2016) também não sinaliza sobre o processo de construção dos projetos de programação desenvolvidos para impressão 3D.

Frota (2011), apesar de destacar a importância de uma prática de ensino que propicie ao estudante obter letramento matemático, considerando que tal letramento possibilita a mobilização da Matemática em questões científicas de diferentes domínios e do cotidiano, fez opção pela abordagem da integral dupla contextualizada somente na Matemática, conforme observado nas atividades elaboradas em sua investigação.

Além de ressaltar a importância da interação dos estudantes e o fato de sua investigação ter surgido por meio de um problema docente percebido em sala de aula, a atividade apresentada em Frota (2011) traz uma discussão expressiva sobre o que o professor deve explorar em relação a integral dupla, além de salientar a complexidade envolvida nos processos de ensino e de aprendizagem dessas integrais, tanto do ponto de vista do professor quanto do estudante. A autora ressalta que essas integrais não devem ser vistas pelos professores como um saber científico evidente e fácil de ser construído pelo estudante, por envolver o letramento matemático, a associação entre as diferentes representações, além da complexidade da compreensão cognitiva da noção de infinito e infinitésimos imposta pela epistemologia dessas integrais.

Simões, Siple e Figueiredo (2014) apresentaram procedimentos para definir qual Matemática deve ser ministrada para estudantes de Engenharia, pautados no diálogo entre a disciplina de Cálculo e aquelas do eixo específico da graduação em Engenharia. Para isso, analisaram materiais didáticos de professores para associar o ensino de integrais a problemas de cálculo de centroide e momentos de inércia em uma situação de um projeto arquitetônico, propondo atividades interdisciplinares e contextualizadas, construídas a partir de um trabalho integrado com os professores de Física dessa graduação.

Schmidt (2019) conduziu sua investigação partindo da elaboração de um problema no contexto do estudo de massa e centro de massa de peças mecânicas hipotéticas, aplicada a estudantes de Engenharia para desencadear o processo de ensino de integrais.

As investigações de Simões, Siple e Figueiredo (2014) e Schmidt (2019) se apresentam diferenciadas das demais no sentido de proporem um estudo que resultou na elaboração e aplicação de atividades contextualizadas na Engenharia.

Quadro 14 – Principais resultados explicitados nas investigações analisadas

Autor(es) Ano	Principais Resultados
Brandão (2021)	Revelaram que os estudantes conseguiram aplicar os conceitos dos objetos matemáticos escolhidos de forma coerente e autônoma ao construírem e resolverem situações-problemas envolvendo conhecimentos dos cursos dos quais são egressos e do Cálculo Diferencial e Integral; que os estudantes associaram os objetos matemáticos a uma linguagem estética, ao pragmatismo e ao desenvolvimento de raciocínios abduativos que permitiram alinhar o uso deles em diferentes situações; que os significados, as interpretações e as praxeologias se diferenciaram quanto ao emprego dos conhecimentos matemáticos nas duas graduações e na interpretação das tarefas propostas, mas convergiram nas praxeologias matemáticas aplicadas
Miranda (2018)	Apontaram para a importância da exploração de atividades que possibilitam a interação entre os estudantes, pois essa interação favoreceu a construção dos conceitos iniciais de funções reais de uma e duas variáveis reais principalmente por meio do estabelecimento de comparações entre as suas representações algébrica e gráfica. Mostraram que a presença das esculturas matemáticas como uma nova representação para os objetos matemáticos construídas em conjunto com os estudantes contribuiu para que eles percebessem mais facilmente as propriedades matemáticas envolvidas nas representações do espaço. Mostraram também que as tarefas que envolvem a tecnologia e a representação figural dos sólidos limitados por funções de duas variáveis, por meio das esculturas matemáticas, podem contribuir para o ensino e a para a aprendizagem da integral dupla.

Henriques (2006)	Descortinaram aspectos positivos quanto a utilização do software na resolução de problemas que envolvem cálculo de medidas de áreas e volumes com o uso de integrais múltiplas nos processos de ensino e de aprendizagem dessas integrais. Mostraram que proporcionando a visualização dos elementos gráficos envolvidos na construção dos sólidos e a compreensão dos significados relacionados pode favorecer o ensino e a aprendizagem dessas integrais. Por fim, o autor concluiu que a construção das representações gráficas é fundamental para fazer com que o estudante interprete, compreenda e busque soluções para problemas relacionados ao cálculo de medidas de áreas e volumes, a partir de integrais múltiplas.
Schmidt (2019)	Mostraram que a proposta contribuiu para dar significado, aos estudantes, quanto ao conceito de integrais múltiplas; além de proporcionar a eles a percepção de que as integrais múltiplas apresentam interfaces diretas com a Engenharia Mecânica, que podem e devem ser exploradas nos processos de ensino e de aprendizagem dessas integrais. O autor concluiu que a implementação de uma atividade fundamentada pelo uso das tecnologias digitais pode favorecer o ensino e a aprendizagem das integrais múltiplas.
Cometti (2018)	Evidenciaram que a visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D no estudos de integrais múltiplas relacionadas ao cálculo de medidas de áreas e de volumes de sólidos pode ser considerada um importante componente para os processos de construção do conhecimento a cerca dessas integrais, além de “apontar para a possibilidade de aliar o uso desse <i>software</i> à construção de representação semiótica, principalmente representações gráficas usadas no estudo dessas integrais, destacando o uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto no âmbito gráfico” (Cometti, 2018, pp. 164-165)
Fontoura (2016)	Mostraram que “a utilização do <i>software Maple</i> viabilizou melhor aprendizagem por auxiliar a construção dos conhecimentos antes vistos de uma forma meramente expositiva” (Fontoura, 2016, p. 128); e que a sequência didática, construída com o emprego de um aplicativo computacional programado com o software Maple, facilitou a formação de conceitos imagem sobre integrais múltiplas, bem como auxiliou os estudantes no cálculo de medidas de volume de sólidos geométricos, por meio dessas integrais.
Marques (2016)	Evidenciaram que a utilização de PCOC na realização de tarefas, cujo objeto em estudo são as integrais duplas e triplas na praxeologia modelada, permite a compreensão do conhecimento relacionados a essas integrais como objetos institucionais participantes na formação de recursos humanos; que há possibilidade de manipulação de um PCOC à mão livre, sem a necessidade de produzir a representação do objeto no registro gráfico; que a visualização permitiu identificar as superfícies cujos crivos as delimitam; que facilita a reprodução do objeto no espaço tridimensional por meio da observação do objeto concreto. No entanto foram apontados como pontos negativos as dificuldades de os estudantes encontrarem as equações de superfícies e a necessidade que eles apresentam de utilizar ferramentas de manuseio à mão livre para realizar as medidas convenientes que possam permitir a conversão de cada superfície do registro gráfico para o registro algébrico.
Ribeiro (2010)	Revelaram que a metodologia proposta na Resolução de Problemas foi eficiente para o trabalho em sala de aula na medida em que permitiu, dentre outros, a construção do conceito de integrais duplas pelos sujeitos pesquisados; que a História da Matemática foi fundamental nesse processo uma vez que o estudo histórico desvendou o modo como as ideias em relação a essas integrais surgiram ao longo do tempo e proporcionou a incorporação dessas ideias na sequência construída.
Siple; Figueiredo (2013)	Evidenciaram que o ambiente lápis e papel associado ao ambiente computacional pode potencializar a aprendizagem de integrais duplas; que a atividade proposta possibilitou aos sujeitos pesquisados o desenvolvimento da habilidade necessária às transformações de tratamentos e de conversão possibilitando a aprendizagem dos conceitos propostos; que o uso de uma maquete para explorar registros das representações gráficas bidimensionais e tridimensionais do sólido ameniza as dificuldades existentes no ensino dessas integrais; que a atividade possibilitou a exploração das relações do Cálculo com a Geometria Analítica e o Cálculo Vetorial; que as possibilidades que o ambiente computacional oferece para o ensino de Cálculo necessitam de um engajamento significativo entre os professores em ações de trabalhos colaborativos

Simões; Siple; Figueiredo (2014)	Desvendaram que existe a necessidade de os estudantes ter um conhecimento das aplicações de objetos matemáticos em disciplinas do eixo específico da Engenharia, para que possam dar significado ao Cálculo por meio de problemas físicos; que, para que isso ocorra, o trabalho colaborativo entre os professores de Cálculo e professores de disciplinas do eixo específico da Engenharia é fundamental; e, ainda, observaram uma mobilização expressiva da integral dupla em outros problemas de disciplinas do eixo específico das engenharias, quando relacionados a interpretação geométrica da integral dupla.
Frota (2011)	Expuseram que planejar uma disciplina por meio da perspectiva do letramento matemático pode favorecer o desenvolvimento integrado das três competências em ação, necessárias à leitura e escrita compreensiva em Cálculo; que o trabalho de ler e escrever, respondendo a um texto matemático, é um processo em que o estudante precisa internalizar informações sobre o conteúdo e sobre si, e precisa desenvolver essas competências por meio de um conjunto de experiências vivenciadas de ler e escrever para aprender as integrais duplas.

Fonte: Elaboração pelos autores

Com base no que pudemos inferir, explicitamos no Quadro 14 as contribuições das investigações realizadas em consonância aos objetivos por elas propostos, para, a seguir descrever as concomitâncias entre elas.

A principal contribuição advinda da investigação de Miranda (2018), foi a reafirmação da constatação de que estratégias de ensino e de aprendizagem quando o objeto em estudo são as integrais duplas, apoiadas por tecnologias, podem trazer resultados positivos no aprendizado dos estudantes, além de apontar aos professores caminhos para buscar subsídios para a construção de representações figurais associadas ao ensino dessas integrais. Essa constatação, exceto quanto aos elementos figurais, foi uma contribuição das investigações de Cometti (2018), Henriques (2006), Marques (2016), Schmidt (2019) e Fontoura (2016).

Cometti (2018) e Henriques (2006) trazem o apontamento para a necessidade da construção das representações gráficas associadas às algébricas no sentido de contribuir para que os estudantes interpretem, compreendam e busquem soluções para os problemas que envolvem o cálculo de medidas de áreas e volumes abordando integrais múltiplas.

Marques (2016) mostrou que a utilização de PCOC na realização de tarefas que abordam as integrais duplas permitiu a manipulação de um ostensivo concreto pelo estudante e a consequente construção do conhecimento em torno dessas integrais. Esta foi a única investigação que recorreu a um PCOC.

Quanto às contribuições trazidas pela investigação de Henriques (2006) destacamos a elaboração do método para obter uma representação gráfica de qualquer sólido isolado ou crivado, descrito por várias superfícies, além da construção do Modelo para Análise de Tarefas que tenham as integrais duplas e triplas como objeto matemático envolvido. Esse modelo está aberto para a utilização por professores como uma opção de estratégia de ensino que, segundo o autor, permite melhor compreensão e interpretação de problemas de cálculo de medidas de áreas e volumes que mobilizam essas integrais, visto que consolidam a coordenação entre as representações gráfica e algébrica a elas inerente.

A investigação de Frota (2011), foi a única entre as demais que evidenciou a necessidade de prática de ensino desenvolvida na perspectiva de letramentos matemáticos como instrumento que pode favorecer o desenvolvimento integrado das competências em ação,

necessárias para a leitura e escrita compreensiva em Cálculo propiciando o seu ensino e a sua aprendizagem.

As contribuições trazidas pela investigação de Schmidt (2019) apresentam interfaces com os subsídios vistos nos estudos de Simões, Siple e Figueiredo (2014) uma vez que permitiu a construção do significado dos conceitos das integrais duplas pelos estudantes por meio de atividades contextualizadas na Engenharia.

Um destaque importante visto como resultado de quase todas as investigações analisadas na revisão de literatura foi o despertar do olhar dos professores de Cálculo para a necessidade da elaboração de atividades para o ensino de objetos de Cálculo, por meio de tecnologias digitais.

Quadro 15 – Principais dificuldades dos estudantes

Brandão (2021)	O rigor próprio da Matemática causou dificuldades para a compreensão da integral dupla, bem como, a elaboração de modelos matemáticos para a descrição das situações abordadas, às técnicas de integração e o estabelecimento do limite de integração durante o cálculo de algumas integrais abordadas nas atividades.
Henriques (2006)	Os estudantes mostram entraves em modelar e interpretar as expressões que eles manipulavam vinculadas a esboços das regiões que constroem, principalmente no ambiente lápis e papel, além de dificuldades relacionadas ao estabelecimento de relações entre a representação gráfica e algébrica das integrais duplas e triplas.
Miranda (2018)	As dificuldades estavam relacionadas, principalmente, à interpretação das questões, a conceitos geométricos não especificados nas questões; às interações com os applets que, às vezes, não permitiam a resolução das integrais; em associar notações gráficas e algébricas de algumas integrais; a não percepção das relações e propriedades que existem entre a representação gráfica das funções reais de uma e de duas variáveis reais; bem como a não construção dos significados de conhecimentos de alguns dos conteúdos abordados.
Simões, Siple e Figueiredo (2014)	Não relataram dificuldades dos estudantes.
Schmidt (2019)	Os estudantes tiveram dificuldade em esboçar o gráfico das figuras espaciais (três dimensões) e em técnicas de integração principalmente por substituição trigonométrica.
Cometti (2018)	As dificuldades dos estudantes estavam centradas em estabelecer relações entre as representações algébricas e as representações gráficas das regiões ou sólidos construídos
Fontoura (2016)	Os estudantes apresentaram dificuldades no processo de construção do significado da integral quando essa se aplica ao cálculo de medidas de áreas e volumes, na compreensão do conceito de área, em técnicas e métodos analíticos para o cálculo de medida de área de figuras planas e de cálculo de medida de volume e, ainda, quanto à habilidade de fazer representações gráficas de curvas, tendo como recursos didáticos apenas o lápis e papel.
Marques (2016)	Os estudantes apresentaram dificuldades para encontrar as equações das superfícies; para definir e utilizar ferramentas de manuseio à mão livre para realizar as medidas convenientes que podiam permitir a conversão de representações de cada superfície envolvida no PCOC em questão, do registro gráfico para o registro algébrico.
Frota (2011)	Os estudantes realizaram confusão no traçado de gráficos de curvas e superfícies em ambientes de lápis e papel, podendo ser decorrente de duas dificuldades distintas: associar uma representação algébrica a uma superfície, resultante da falta de conhecimento declarativo ou procedimental do estudante que o prejudica ao atribuir significados às expressões matemáticas ou da dificuldade em visualizar uma imagem criada do sólido, envolvendo o desenvolvimento da competência visual-espacial.

Siple e Figueiredo (2013)	A investigação desses autores foi construída em torno da dificuldade apresentada pelos estudantes na visualização tridimensional no ambiente lápis/papel que os impede de representar graficamente regiões e sólidos geométricos, bem como de estabelecer relações entre a representação gráfica e algébrica quando essas regiões ou sólidos são estabelecidas por integrais duplas ou triplas.
Ribeiro (2010)	As dificuldades foram advindas de uma formação de matemática elementar dos estudantes precária; da interpretação do contexto do vocabulário presente no enunciado das atividades e no contexto dos problemas; da passagem da linguagem vernácula para linguagem matemática; de conceitos do Cálculo e técnicas operatórias algébrica ainda não construídos pelos estudantes; da implementação do próprio método de resolução de problemas, devido às inter-relações que o estudante precisava estabelecer entre os recursos matemáticos (conceitos, conhecimento de fatos e de procedimentos) utilizados, ordem heurística; do controle dos mecanismos necessários à coordenação de recursos e processos.

Fonte: Elaboração pelos autores

As principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes, sujeitos das pesquisas analisadas, foram apontadas no Quadro 15. A dificuldade deles em estabelecer relações entre a representação gráfica e algébricas de sólidos foi comum em Henriques (2006), Cometti (2018), Siple e Figueiredo (2013), Frota (2011) e Miranda (2018). Já a dificuldade com as técnicas de integração apareceu em Brandão (2021), Schmidt (2019), Fontoura (2016), Frota (2011) e Ribeiro (2010). Dificuldades vinculadas a esboços das regiões construídas, principalmente, no ambiente lápis e papel esteve presente em Henriques (2006), Fontoura (2016), Marques (2016), Frota (2011), Siple e Figueiredo (2013), Schmidt (2019). A dificuldade em visualizar uma imagem criada do sólido, envolvendo o desenvolvimento da competência visual-espacial esteve presente nos estudos de Siple e Figueiredo (2013) e Frota (2011). Quanto às dificuldades geradas a partir da interpretação de contextos do vocabulário presente nos enunciados das questões, essas estiveram presentes nos trabalhos de Ribeiro (2010), Marques (2016), Miranda (2018), Henriques (2006) e Brandão (2021). As demais dificuldades evidenciadas foram pontuais em cada estudo.

Na próxima seção apresentamos as considerações finais deste artigo enriquecidas com caminhos para novas investigações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio dessa revisão da literatura, constatamos que a maioria dos trabalhos analisados abordam as integrais duplas no contexto do cálculo de medidas de áreas e de volumes, tendo como alvo o ensino ou a aprendizagem dessas integrais em alguma habilitação em Engenharia.

Entre as dificuldades observadas pelos autores, as apresentadas ao modelar e interpretar as expressões vinculadas a esboços das regiões no ambiente lápis e papel e o estabelecimento de relações entre a representação gráfica e algébrica das integrais duplas foi, praticamente, comum a todos os trabalhos analisados.

Algumas das investigações sinalizaram a necessidade da realização de investigações priorizando a abordagem dessas integrais nas salas de aula de Engenharia, por meio de estratégias de ensino e de aprendizagem elaboradas a partir de questões constantes no eixo específico da graduação em Engenharia, que poderiam culminar na elaboração de atividades de ensino contextualizadas na prática do Engenheiro e que, possivelmente, ao serem

trabalhadas em sala de aula, poderiam despertar o interesse dos estudantes e possibilitar-lhes a construção de conhecimento acerca desse objeto matemático.

Entre os caminhos para novas investigações que observamos nas pesquisas destacamos a necessidade de compreender os avanços no ensino de integrais duplas e de outros temas do Cálculo Diferencial Integral quando são discutidos a partir de um projeto integrador com as demais componentes curriculares de diferentes habilitações em Engenharia. Destacamos também, a necessidade de avaliar o ensino de modelos matemáticos construídos pelos professores do ensino superior, com outras temáticas de Cálculo de Funções de Várias Variáveis Reais a luz das teorias da didática francesa.

REFERÊNCIAS

- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p.193-217.
- AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D., HANESIAN, H. **Psicologia educativa, un punto de vista cognoscitivo**. México, D. F.: Editorial Trillas. 1990.
- BARSALOU, L. W. Grounded Cognition. *Rev. Psychol*, nº 59, p. 617-645, 2008.
- BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L., GOMES, E. Cálculo, Análise e Álgebra Linear: indicações para novas pesquisas a partir das investigações do GT04. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII–Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, **Anais...** Foz do Iguaçu, Brasil, p.1-11, 2018.
- BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. DE; GOMES, E. Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 49-79, 2017.
- BOSCH, M; GÁSCON, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación. **Anais** do II Congresso Internacional da Teoria Antropológica do Didático, 2010.
- BRANDÃO, A. K. D. C. **Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de integral dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de engenharias e de licenciatura em matemática**. 2021. 438 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.
- CASTRO, M.R.; FRANT, J. B. **Modelo da Estratégia Argumentativa**: análise da fala e de outros registros em contexto interativos de aprendizagem. Curitiba: Ed Da UFPR, 2011. 179 p.
- CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v.12.1, p. 73-112, 1992.
- CHEVALLARD, Y. Les outils sémiotiques du travail mathématiques. **Petit x**. n.42, 1995- 1996, pp. 33-57. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/42x5_1568729887442-pdf. Acesso: 23/06/2021.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**, v.19, n. 2, pp.221-26, 1999.

CHEVALLARD, Y. Éléments de didactique du développement durable. Leçon1. Enquête codisciplinaire & EDD. (2012). Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em 20 de setembro de 2023.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. **Educational Researcher**, v. 32, n.1, p. 9-13, 2003.

COMETTI, A. M. **Discutindo o ensino de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem**. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2010.

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 5, Estrasburgo, 1993.

FAUCONNIER, G.; TURNER, M. Compression and Global Insight. *Cognitive Linguistics*, v.11, n. 3-4, p. 283-304, jan. 2000. Disponível em: SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1419544> . Acesso em: 17 abr. 2021.

FAUCONNIER, G.; TURNER, M. B. **The way we think: conceptual blending and the mind's hidden complexities**. New York: Perseus Books Group, 2002. 454 p.

FONTOURA, L. R. **Uma sequência de ensino para o estudo de integrais duplas**. 2016. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)–Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2016.

FROTA, M. C. Leitura e escrita em Cálculo. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n.3, pp. 489-508, 2011.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradignas didácticos sobre La investigación didáctica y La práctica docente. **Educación Matemática**, v. 33, n. 1, abril de 2021. DOI: 10.24844/EM3301.01.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: Analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Université Joseph Fourier, Grenoble, Alpes, França, 2006.

HENRIQUES, A. Investigação de Práticas Institucionais do Licenciando nas Relações entre os Saberes Matemático das IES e das IEBA, XVII ENDIPE, Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, Universidade Estadual do Ceará – UECE, 2014.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metáforas de La Vida Ceditiana**. Traducción de Carmen Gonzáles Marin, Madrid: Cátedra, 9ª edição, 2012.

MARQUES, S. A. S. S. **Prototipagem rápida de PCOC na impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia, 2016.

MIRANDA, G. M. H. **Esculturas matemáticas: a atividade para o estudo da Integral Dupla**. 2018. 321 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Anhanguera, São Paulo, 2018.

MOSCOSO, J. N. Razonamiento abductivo: una contribución a la creación del conocimiento em educación. **Cadernos Pesquisa**. São Paulo. v. 49. n. 171. p. 308-328. Jan./mar. 2019.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Trabalhando Volume de Cilindros através da Resolução de Problemas, 2009 (mimeo).

PEIRCE, C.S. **Semiótica**. Tradução de: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005 – (Estudos; 46/ dirigida por J. Guinsburg).

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995.

RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da Matemática e da resolução de problemas**. 2010. 327 f. Dissertação (Mestrado) –Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ROMBERG, T.A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução de ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**. Rio Claro: UNESP, n. 27, 93-139, 2007.

SCUCUGLIA, R. R. S. On the nature of students' digital mathematical performances: When elementary school students produce mathematical multimodal artistic narratives. Germany: Verlag – LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

SOARES, M. Letramento: um tema em três gêneros. Belo Horizonte: Autêntica. 2000.

SOUZA, G. M. **Integrais Duplas: um estudo a luz de uma articulação entre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria A Matemática no Contexto das Ciências**. 2022. 392 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, São Paulo capital, 2022.

SCHMIDT, L.F.T. **Investigando a eficiência de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o ensino de Integrais Múltiplas mediadas por Tecnologias Digitais**. 2019. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

SIMÕES, R., SIPLE, I. Z. FIGUEIREDO, E. B. Aplicação da Integral na determinação de características geométricas de seções planas de estruturas em barras. IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa/PR, novembro, 2014. **Anais...**, 2014.

SIPLE, I. Z; FIGUEIREDO, E. B. Um olhar à aplicação das Integrais Múltiplas: da projeção gráfica à Maquete. **Actas del VII CIBEM**. Montevideo, Uruguay, 2013.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In **Elementary and Middle School Mathematics**. New York, Longman, 2001.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: Tall D. O. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991. p. 65-81.

WEINERT, F. E. Concepts of Competence. DeSeCo Expert Report. Swiss Federal Statistical Office, 1999.

Histórico

Recebido: 22 de fevereiro de 2024.

Aceito: 13 de julho de 2024.

Publicado: 07 de agosto de 2024.

Como citar – ABNT

SOUZA; Galvina Maria de; LIMA, Gabriel Loureiro de. Processos de Ensino e de Aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 47, e2024031, 2024.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024031.id605>

Como citar – APA

Souza, G. M. de; Lima, G. L. de. (2024). Processos de Ensino e de Aprendizagem das Integrais Duplas: uma revisão de literatura. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, (47), e2024031.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024031.id605>