Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 47, e2024022
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024022.id626

Aprendizagem Interdisciplinar por meio da construção de Padrões Fractais com Tecnologias Digitais

Interdisciplinary Learning through the construction of Fractal Patterns with Digital Technologies

Aprendizaje Interdisciplinar a través de la construcción de Patrones Fractales con Tecnologías Digitales

Tatiana Machado Resende Guedes[1]

Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria[2]

RESUMO

Este artigo objetiva investigar como o estudo de padrões fractais, conectado às tecnologias digitais, pode contribuir para aprendizagem interdisciplinar. A proposta metodológica é de cunho qualitativo e os dados foram produzidos com alunos do Ensino Médio. Os dados foram analisados a partir dos registros feitos pelos alunos nas folhas de atividades e no aplicativo GeoGebra para smartphone, triangulados com o referencial teórico. Nossas conclusões apontam que a abordagem interdisciplinar dos padrões fractais, englobando informática, artes e matemática, estimulou a capacidade de análise estética e enriqueceu a construção de conhecimentos. Quanto às tecnologias digitais, o smartphone contribuiu para apresentar uma visualização impactante, interativa e dinâmica dos padrões fractais. O GeoGebra, especificamente, possibilitou a criação e exploração dos fractais de modo detalhado, em alta resolução, em diferentes escalas e ângulos capazes de expandir horizontes de maneiras criativa e interativa, permitindo que os alunos descobrissem detalhes envolvendo as propriedades complexidade infinita e autossimilaridade.
Palavras-chave: Interdisciplinaridade; Ensino Médio; Smartphone; GeoGebra.

ABSTRACT

This objective article investigates how the study of fractal patterns, connected to digital technologies, can contribute to interdisciplinary learning. The methodological proposal is qualitative in nature and the data was produced with high school students. The data was analyzed based on the records made by the students on the activity sheets and in the GeoGebra smartphone application, triangulated with the theoretical framework. Our considerations indicate that the interdisciplinary approach of fractal patterns, encompassing IT, Arts and Mathematics, stimulated the capacity for aesthetic analysis and enriched the construction of knowledge. As for digital technologies, the smartphone contributed to presenting an impactful, interactive and dynamic visualization of fractal patterns. GeoGebra, specifically, enabled the creation and exploration of fractals in a detailed way, in high resolution, at different scales and perspectives capable of expanding horizons in creative and interactive ways, allowing students to discover details involved in the properties infinite complexity and self-similarity.
Keywords: Interdisciplinarity; High School; Smartphone; GeoGebra.

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo investigar cómo el estudio de patrones fractales, conectados a las tecnologías digitales, puede contribuir al aprendizaje interdisciplinario. La propuesta metodológica es de carácter cualitativo y los datos fueron producidos con estudiantes de secundaria. Los datos fueron analizados a partir de los registros realizados por los estudiantes en las hojas de actividades y en la aplicación para teléfonos inteligentes GeoGebra, triangulados con el marco teórico. Nuestras conclusiones indican que el enfoque interdisciplinario de los patrones fractales, que abarca la informática, las artes y las matemáticas, estimuló la capacidad de análisis estético y enriqueció la construcción de conocimiento. En cuanto a las tecnologías digitales, el teléfono inteligente contribuyó a presentar una visualización impactante, interactiva y dinámica de patrones fractales. GeoGebra, específicamente, permitió la creación y exploración de fractales de manera detallada, en alta resolución, en diferentes escalas y ángulos capaces de expandir horizontes de manera creativa e interactiva, permitiendo a los estudiantes descubrir detalles que involucran propiedades de infinita complejidad y autosemejanza.
Palabras clave: Interdisciplinariedad; Escuela secundaria; Teléfono inteligente; GeoGebra.

1 Mestre em Educação pela Universidade Federal de Viçosa (UFV). Professora do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais (IF Sudeste – MG), Muriaé, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Cel. Monteiro de Castro, 550 - Barra, Muriaé - MG, Brasil, CEP: 36884-036. E-mail: tatiana.guedes@ifsudestemg.edu.br.

2 Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Viçosa (UFV), Viçosa, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Peter Henry Rolfs, s/n. Campus Universitário, Viçosa – MG, Brasil, CEP: 36570-900. E-mail: rejane.faria@ufv.br.

INTRODUÇÃO

O Ensino Médio no Brasil apresenta desafios complexos que impactam tanto a qualidade educacional quanto o futuro dos alunos. Esta etapa de ensino carece de uma abordagem prática e aplicada capaz de preparar os alunos para enfrentar os desafios da vida real. Nesse sentido, argumentamos sobre a necessidade de reformular e repensar conceitos já estabelecidos e, ao mesmo tempo, inovar na produção de conhecimentos em uma sociedade que já tem incorporada no cotidiano as tecnologias digitais (FARIA; MALTEMPI, 2020). Entendemos ser necessário explorar conteúdos escolares que não apenas proporcionem aprendizado, mas também integrem e dinamizem a experiência educacional em uma perspectiva interdisciplinar que estimule o engajamento dos alunos e os inspire a construir o conhecimento de maneira mais profunda e criativa. Nesse sentido, a interdisciplinaridade, a investigação com materiais manipuláveis e as tecnologias digitais atuam para que ocorra uma comunicação fluída entre professores e alunos, visando aprendizagem dos conteúdos escolares. Concordamos que:

> [...] a abordagem interdisciplinar deve partir da necessidade das escolas, em especial do corpo docente e discente, que buscam explicação, compreensão, intervenção e mudança de uma situação com a qual uma disciplina não consegue lidar e que precisa atrair o olhar de uma outra área de conhecimento. (Silva *et al.*, 2023, p. 2).

Nessa perspectiva, o objetivo deste artigo consiste em investigar como o estudo de padrões fractais com tecnologias digitais podem contribuir para a aprendizagem interdisciplinar. A proposta metodológica é de cunho qualitativo e os dados foram produzidos com alunos do Ensino Médio integrado ao curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus* Muriaé, que compôs o cenário de pesquisa de mestrado ao qual este artigo é parte integradora.

Buscamos apresentar conexões entre as disciplinas de informática, artes e matemática em uma abordagem interdisciplinar por meio de atividades investigativas de exploração estética dos padrões fractais. Cavalcante, Silva e Mendes (2020) recomendam que aspectos artísticos e matemáticos sejam trabalhados de modo articulado, visando uma aprendizagem eficiente. Na pesquisa realizada, mais precisamente, os padrões fractais Tetra Círculo e Triângulo de Sierpinski foram investigados dando ênfase às propriedades de autossimilaridade e de complexidade infinita que permitiram desenvolver a fruição e a análise estética. Por meio das atividades realizadas, também foi possível contribuir para o desenvolvimento da criatividade dos alunos que construíram conhecimento interdisciplinar entre as disciplinas envolvidas utilizando tecnologias digitais.

Com o intuito de atingir o objetivo proposto nesse artigo, discutimos, inicialmente, a abordagem interdisciplinar com enfoque na aprendizagem. Na sequência, apresentamos a relevância das tecnologias digitais no ambiente escolar. Na seção seguinte, os padrões fractais são abordados. Dando continuidade, é exposta a metodologia. Na análise, triangulamos os dados com o referencial teórico a partir da descrição das respostas dos alunos e das nossas percepções enquanto professoras e pesquisadoras. Finalizamos o artigo com considerações e conclusões.

INTERDISCIPLINARIDADE E APRENDIZAGEM

De acordo com Caldas, Holzer e Popi (2017), a interdisciplinaridade é fundamental para que os alunos possam construir saberes gerais, permeando o saber específico de uma disciplina com as demais do currículo escolar e construindo ideias articuladas. Ela contribui para que os alunos sejam capazes de atuar na sociedade com senso crítico, opiniões fundamentadas, e ações que consideram o saber construído de forma flexível e abrangente.

Essa abordagem atua como ponte entre as disciplinas que, historicamente, têm sido estudadas isoladamente no contexto do ensino tradicional na Educação Básica brasileira. O construto obtido por meio das informações processadas e conhecimentos gerados tende a repercutir em uma postura que estabelece uma conexão com a realidade, edificando entendimentos plurais e transformando-os em suas próprias reflexões (THIESEN, 2008).

Para que isso ocorra, as atividades escolares devem privilegiar formas diversificadas de expressão, diferentes visões de mundo, possibilidades plurais de dar forma à imaginação, além de explorações que permitam desenvolver o saber estético, criativo e artístico dos alunos. É preciso difundir a ideia de que é possível construir conhecimentos que agucem a percepção e a imaginação de uma forma abrangente e não restrita a uma disciplina (CALDAS; HOLZER; POPI, 2017).

As atividades interdisciplinares podem proporcionar inúmeras experiências para os alunos. Reconhecendo as conexões entre as diferentes disciplinas, é possível desenvolver o pensamento crítico e construir conhecimento de modo amplo e flexível no contexto escolar. Com uma visão global, a interdisciplinaridade favorece a construção da conscientização social, criando um ambiente colaborativo e interativo entre as disciplinas escolares. Nesse sentido,

> [...] a interdisciplinaridade é uma chamada para a complexidade, a restabelecer as interdependências e inter-relações entre processos de diferentes ordens de materialidade e racionalidade, a internalizar as externalidades (condicionamentos, determinações) dos processos excluídos dos núcleos de racionalidade que organizam os objetos de conhecimento das ciências (de certos processos ônticos e objetivos). Nesse sentido, a interdisciplinaridade é uma busca de "retotalização" do conhecimento, de "completude" não alcançada por um projeto de cientificidade que, na busca de unidade do conhecimento, da objetividade e do controle da natureza, terminou fraturando o corpo do saber e submetendo a natureza a seus desígnios dominantes; exterminando a complexidade e subjugando os saberes "não científicos", saberes não ajustáveis às normas paradigmáticas da ciência moderna (LEFF, 2000, p. 22).

Deste modo, uma das vantagens de trabalhar na perspectiva interdisciplinar, é conduzir a aula de modo a possibilitar que o aluno busque o desenvolvimento do raciocínio logico e do pensamento crítico ao longo do processo em que as atividades estão sendo realizadas. Trata-se de momentos propícios para formulação de ideias que enriquecem os conteúdos e contribuem para que a aprendizagem ocorra na escola (MULLER, 2005).

A interdisciplinaridade é fundamentada em uma perspectiva de trabalho dinâmica e somatória que consegue agregar valores de acordo com o conhecimento de um objeto estruturado em um projeto que envolve busca e um plano de interferência colaborativo. A sua aplicabilidade consegue auxiliar no processo de compreensão dos conteúdos de forma prática e construtiva, demonstrando a importância de cada disciplina e dos seus respectivos conteúdos e valores.

Essa abordagem articulada enriquece a construção do conhecimento que ocorre em sua completude. Deste modo, é possível ensinar os mais diversos conteúdos escolares contemplando a complexidade que a dinâmica de ideias e conceitos requer. Por meio do ensino interdisciplinar, os alunos conseguem entender que um tema pode ser estudado de várias formas, construindo uma opinião crítica ao invés de aceitar qualquer ensinamento como verdadeiro (MIRANDA; GALVÃO-FILHO, 2012).

É importante ressaltar que a interdisciplinaridade tem o potencial de instigar as capacidades e desenvolturas imprescindíveis para uma formação de cidadãos críticos, capazes de contribuir para a sociedade em que vivem. Nesta visão, os alunos conseguem captar e interagir entre eles de forma dinâmica e criativa, levando o professor a ressaltar argumentos que agucem as discussões em sala de aula e instiguem os alunos a buscar respostas através da exploração de ideias, conceitos e materiais (MULLER, 2005).

De acordo com Faria e Maltempi (2020), trabalhar com o ensino de modo restrito ao ambiente da sala de aula pode resultar em desmotivação dos alunos devido a um foco excessivo na teoria e no acúmulo de conteúdo, como é comum no modelo de ensino tradicional. Como alternativa, os autores propõem o ensino apoiado pelas tecnologias digitais em uma perspectiva capaz de desenvolver uma sala criativa que propicie oportunidades de aprendizagem diversificadas.

A interdisciplinaridade promove a colaboração entre as disciplinas escolares e, atrelada ao uso da tecnologia digital, permite que os alunos aprendam de modo interativo e abrangente. Assim, aliar tecnologias digitais e interdisciplinaridade é um dos meios capazes de tornar as aulas dinâmicas e criativas, colaborando para que o aluno aprenda a utilizar o celular a fim de aprender com mais flexibilidade os conteúdos propostos no currículo escolar (DIAS; CAVALCANTE, 2016).

Por concordarmos com essa perspectiva, na pesquisa realizada, propomos atividades explorando padrões fractais em uma abordagem interdisciplinar. Na seção seguinte, passamos a abordar a temática das tecnologias digitais na escola.

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO ESCOLAR

A visão de um trabalho eficiente no contexto escolar deve incluir atividades que prezem pela interdisciplinaridade, principalmente na escola contemporânea. Para trabalhar nessa perspectiva, é necessário buscar abordagens metodológicas que favoreçam as ações e contribuam para uma aprendizagem significativa (FAZENDA, 1993).

Segundo Barbosa (2005), as tecnologias digitais para a exploração de fractais transformaram a geração e a repetição de imagens. É nesse sentido que Santos e Kripka (2020) afirmam que, com os recursos tecnológicos atuais, é possível gerar padrões fractais a partir de figuras planas e sólidos geométricos esteticamente bonitos devido à autossimilaridade e à complexidade infinita que podem ser observadas nas partes em relação ao todo, propriedades que trataremos adiante.

As tecnologias digitais apareceram no século XX e inovaram a indústria, a economia e a sociedade. Formas de armazenamento e de difusão de informação foram modificadas, produzindo discussões sobre a relação da humanidade com seu passado, seu presente e seu futuro. Segundo Ribeiro (2014), com a tecnologia digital foi possível descentralizar a informação, aumentar a segurança de uma série de dados fundamentais e criar muitas outras tecnologias. Na atualidade, nossos telefones empregam tecnologias digitais, assim como as agências bancárias das quais somos correntistas, como grande parte do painel de nossos carros, com as urnas em que votamos nas eleições de nosso país, como grande parte da informação que lemos e suas plataformas, entre muitos outros eventos.

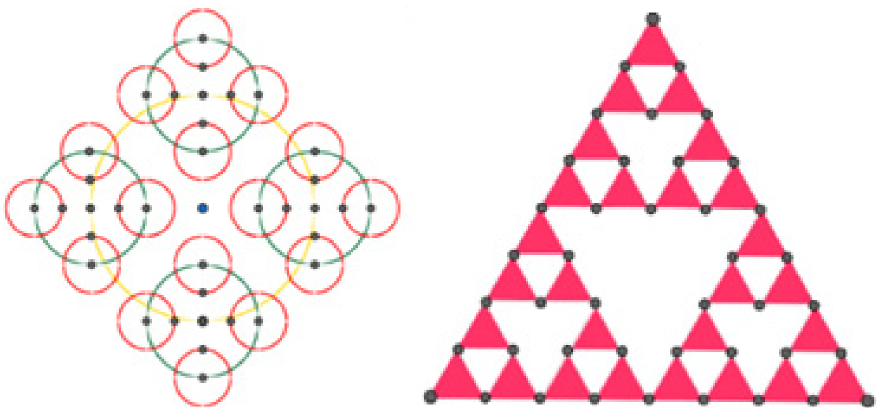
Nesse contexto, as crianças, mesmo as bem pequenas, já convivem com esses sistemas, operando com tecnologias digitais que permitem internalizar os procedimentos necessários para utilizá-los e para serem inseridos em uma cultura digital. A utilização de aplicativos educacionais nos celulares permite que o aluno esteja com os recursos sempre à mão, facilita a busca e o compartilhamento de dados, além de complementar os conteúdos do currículo escolar (COSTA, 2023).

Na pesquisa realizada, elaboramos e desenvolvemos, em parceria com professores das outras disciplinas envolvidas, atividades utilizando o *smartphone* com o intuito de promover a interdisciplinaridade empregando as tecnologias digitais. Através dele, os alunos utilizaram o aplicativo GeoGebra Geometria nas aulas de matemática, o que proporcionou a manipulação e a exploração de construções geométricas, contribuindo para investigação e autonomia dos alunos. A escolha pelo GeoGebra é justificada por se tratar de um aplicativo capaz de proporcionar processos investigativos matemáticos de maneira criativa e envolvente (2021). Com esses recursos, exploramos, ao longo das atividades, os padrões fractais, tema que passamos a tratar na próxima seção.

PADRÕES FRACTAIS

“Os padrões fractais estão relacionados ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente" (FARIA, MALTEMPI, 2012, p. 42). Nas atividades com o aplicativo GeoGebra, foram explorados os fractais Tetra Círculo e Triângulo de Sierpinski (figura 1).

Figura 1 - Fractais Tetra Círculo (direita) e Triângulo de Sierpinski (esquerda) construídos pelas autoras no app GeoGebra



Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Os fractais possuem as características de autossimilaridade e de complexidade infinita. Essas propriedades tornam os fractais distintos e interessantes uma vez que revelam padrões complexos e detalhados em várias escalas (BARBOSA, 2005; FARIA, 2012).

A autossimilaridade está relacionada à estrutura do fractal que faz com que as partes menores se assemelhem ao todo, o que significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte. É essa propriedade que faz com que, quando observado de perto, o fractal exiba padrões semelhantes ao todo. No aplicativo GeoGebra para *smartphone*, se ampliarmos uma parte desses fractais utilizando a ferramenta zoom, será possível observar que ele contém padrões semelhantes à estrutura geral da figura (BARBOSA, 2005).

A complexidade infinita, por sua vez, "está associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente" (FARIA 2012, p. 40). Deste modo, a quantidade de detalhes e a estrutura recursiva aumentam indefinidamente à medida que se amplia a escala, criando a sensação de que não importa o quão profundamente se investigue um fractal, sempre haverá mais detalhes para explorar. Assim, a recursão dos fractais resulta em padrões que se repetem em diferentes níveis de ampliação. Esse processo de exploração e descoberta em diferentes escalas, confere aos fractais padrões semelhantes, criando uma sensação de complexidade infinita.

DESVENDANDO O PROCESSO: METODOLOGIA E RECURSOS

A pesquisa realizada é de cunho qualitativo. Trabalhos dessa natureza podem ser elaborados com diferentes finalidades que, em geral, consistem em buscar respostas para um problema ou para uma pergunta que direciona o pesquisador ao tema escolhido. Segundo Bicudo (2006), o significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito, de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências.

Nesse sentido, caracterizamos a metodologia deste trabalho como qualitativa. Por meio de uma abordagem interdisciplinar, propomos atividades investigativas de exploração estética dos padrões fractais envolvendo as disciplinas de artes, matemática e informática para alunos do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao curso técnico de informática do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, *Campus* Muriaé. A escolha por essa instituição ocorreu, pois nela atuo (primeira autora deste artigo) como professora da disciplina de artes desde o ano de 2011.

Esclarecemos que este artigo traz um recorte de uma pesquisa de mestrado[3] em que os dados foram produzidos em duas etapas: a primeira com professores atuantes nas disciplinas de artes, informática e matemática da turma e a segunda com alunos do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao curso Técnico de informática. Os dados produzidos na segunda etapa nos permitiram discutir o potencial da exploração interdisciplinar dos padrões fractais com Tecnologias Digitais e com Materiais Manipuláveis. Nesse artigo, analisamos a

3 Pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa (CAAE 58898822.0.0000.5153). O termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) foi entregue, lido e assinado por todos os professores participantes da pesquisa. Do mesmo modo, os termos de assentimento livre e esclarecido (TALE) destinado aos alunos com idade inferior a 18 anos foram assinados por eles e por seus responsáveis. Deste modo, foi autorizada a divulgação científica dos dados produzidos.

etapa da produção de dados na qual trabalhamos com tecnologias digitais. A fase em que exploramos os materiais manipuláveis é abordada em outro artigo, também disponível na dissertação de mestrado.

Levamos para os encontros atividades planejadas para reconhecer e investigar as propriedades dos padrões fractais, a saber: Reconhecimento do App[4] GeoGebra Geometria; Desenvolvendo o seu cartão fractal; e Criando padrões fractais no GeoGebra para *Smartphone*. As atividades foram elaboradas pelas autoras desse artigo e contou com a colaboração da aluna de iniciação científica voluntária, Renata Dourado Roque, do curso de Licenciatura em matemática da Universidade Federal de Viçosa, também sob orientação da Professora Rejane Faria. Além disso, as atividades foram previamente realizadas com os professores atuantes nas disciplinas envolvidas e passaram por um processo de refinamento de acordo com as sugestões que ocorreram nos encontros com os docentes.

Os instrumentos utilizados para a realização da pesquisa foram as filmagens dos encontros e os registros no caderno de campo. Ao trazer os registros dos alunos participantes, optamos por não divulgar seus nomes, a fim de resguardar suas identidades. Trinta e seis alunos colaboraram com este estudo, mas optamos por analisar apenas uma resposta nas questões que apresentam tabelas e três respostas por item nas demais, podendo analisar respostas de um mesmo aluno em questões diferentes, triangulando-os com autores referência nas áreas de estudo.

ENCONTROS COM OS ALUNOS: ANÁLISES E RESULTADOS

Após apresentar o tema fractais e construir alguns cartões do tipo origami arquitetônico nos encontros anteriores, iniciamos este momento apresentando aos alunos uma atividade de reconhecimento do aplicativo GeoGebra. Explicamos as ferramentas que utilizaríamos na construção dos fractais Triângulo de Sierpinski e Tetra Círculo (figura 2).

Figura 2 - Alunos construindo o padrão fractal Triângulo de Sierpinski com o app GeoGebra.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Logo após essa apresentação, iniciamos a construção do padrão fractal Triângulo de Sierpinski no aplicativo, seguindo os passos descritos no quadro 1. O Triângulo de Sierpinski é construído a partir de um triângulo equilátero. Nele, deve-se

> [...] marcar os pontos médios de cada um dos lados do triângulo; em seguida, os pontos médios são unidos por três segmentos de reta, que dividem o triângulo inicial em quatro novos triângulos menores e congruentes. Deste ponto em diante, o triângulo central é retirado e o mesmo procedimento é realizado nos triângulos menores para iteração dos níveis seguintes (FARIA, 2012, p. 41).

4 Como resultado da pesquisa de Iniciação Científica, foi criado o GeoGebraBook "fractais: Uma experiência com a Matemática e a Arte", espaço em que foram disponibilizadas as atividades elaboradas (ROQUE, 2023).

Quadro 1 - Primeira questão da atividade Triângulo de Sierpinski.

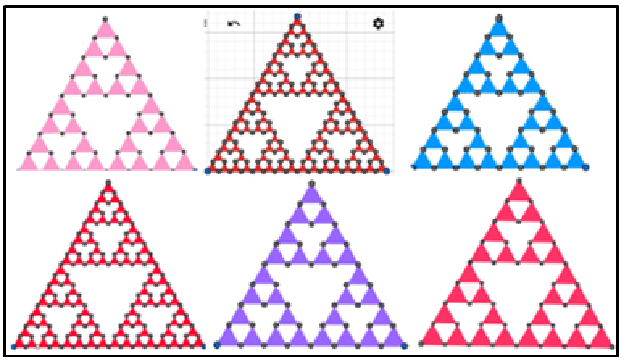
Questão 1: CONSTRUA O PADRÃO FRACTAL NO APP. a) Abra o aplicativo GeoGebra no seu smartphone. b) Selecione em configurações -> geral -> rotular -> menos para os objetos novos. c) Volte para a tela principal. d) Construa, com a ferramenta polígono regular, um triângulo equilátero. e) Use a cor que preferir para personalizar o triângulo criado e retire a transparência da cor para que o triângulo apareça totalmente preenchido (nível 0). f) Marque os pontos médios dos três lados do triângulo. g) Construa um novo triângulo com a ferramenta polígono, unindo os pontos médios criados no item anterior. h) Preencha o triângulo central de branco para que seja possível visualizar o Triângulo de Sierpinski vazado, formando o primeiro nível do padrão fractal (nível 1). i) Construa, em uma escala menor, o nível dois, seguindo os passos do e ao g. Para isso, os novos triângulos gerados no nível anterior devem servir como ponto de partida. j) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível. Se necessário, dê zoom (faça o movimento de pinça) em partes do fractal.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Na construção desse fractal, alguns alunos tiveram dúvidas. Ao longo da atividade, fomos elucidando as imprecisões ao mesmo tempo em que os próprios alunos esclareciam os questionamentos dos colegas próximos. Na realização da pesquisa, a colaboração entre os alunos contribuiu para que a aprendizagem ocorresse de forma coletiva. As discussões em equipe estimularam a troca de ideias e a construção conjunta do conhecimento, promovendo habilidades sociais como comunicação e cooperação, ao mesmo tempo em que reforçavam os conceitos aprendidos. Assim como recomendam Alrø e Skovsmose (2006), a produção do conhecimento foi favorecida no trabalho em equipe englobando a investigação.

A realização da questão 1 resultou na construção do padrão fractal Triângulo de Sierpinski pelos alunos em diferentes níveis e cores. A beleza encantadora deste fractal, já construída por eles em três dimensões com materiais manipuláveis em encontros anteriores, motivou e envolveu os alunos no decorrer da atividade (figura 3).

Figura 3 - Padrão fractal Triângulo de Sierpinski construído por alunos com o app GeoGebra.

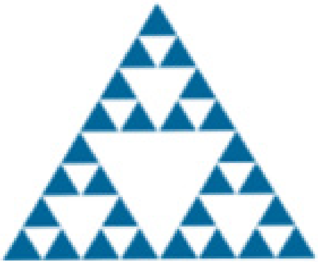


Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

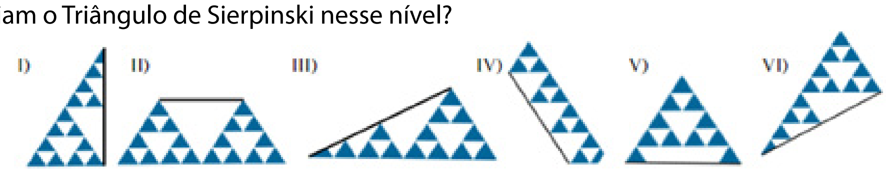
Na segunda questão dessa atividade, foi solicitado que os alunos observassem o Triângulo de Sierpinski no nível 3 e respondessem os itens a e b da questão (quadro 2). O item a tem por enunciado: Se utilizarmos a transformação geométrica simetria a partir do eixo marcado nas figuras abaixo, quais delas formariam o Triângulo de Sierpinski nesse nível?. Os alunos responderam sem dificuldades e de forma unânime que as alternativas corretas eram I, III e VI.

Quadro 2 - Segunda questão da atividade Triângulo de Sierpinski.

Questão 2: O padrão fractal Triângulo de Sierpinski está representado abaixo, no nível 3.



a) Se utilizarmos a transformação geométrica simetria a partir do eixo marcado nas figuras abaixo, quais delas formariam o Triângulo de Sierpinski nesse nível?



b) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do triângulo de Sierpinski? Comente sobre os pontos positivos e negativos (caso haja) de construir esse padrão fractal com o papel e com o aplicativo GeoGebra.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

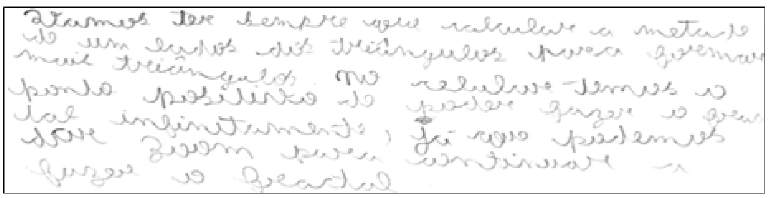
Também destacamos que, nesta questão, os alunos tiveram facilidade com a resposta, pois todos já compreenderam que

> Uma composição simétrica é aquela em que cada elemento tem seu correspondente, ou seja, cada elemento ou conjunto se associa a outro idêntico. Essa correspondência pode ser no tamanho, na forma ou na posição de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano ou, ainda, de formas que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo (PERAZZO; VALENÇA, 1997, p. 86).

No item b foi solicitado que os alunos identificassem uma sequência lógica na construção do Triângulo de Sierpinski e que comentassem sobre os pontos positivos e negativos de construir esse padrão fractal com materiais manipuláveis e com o aplicativo.

Como apresentado na figura 4, um aluno percebeu que, para avançar nos níveis, seria preciso calcular sempre a metade dos lados dos novos triângulos que iam surgindo, se referindo à marcação do ponto médio do lado de cada triângulo. Para o aluno, fazer o fractal utilizando o *smartphone* tem uma vantagem que é a possibilidade de criar novos e infinitos níveis utilizando a ferramenta *zoom* para aproximar alguma área específica da figura. Outro aluno achou divertido realizar a construção no *smartphone* e destacou que, ao construir o fractal usando o aplicativo, os erros podem ser corrigidos de forma rápida e fácil se comparado ao papel onde qualquer erro cometido impõe um recomeço. Outro aluno ressaltou que a utilização do aplicativo permitiu criar o fractal com quantos níveis se queira, em um processo que pode ser repetido infinitamente, o que não é possível em uma folha de papel.

Figura 4 - Respostas do item b da segunda questão da atividade Triângulo de Sierpinski



Sim; Um fonto fositivo de constrir o fractal e a diversão e Um negativo e que quando estamos construindo o fractal com papel qualquer erro fode levar a ter que começar tudo denovo, enquanto no aplicativo e so arrumar.

Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhe teoricamente infinito, coisa que as limitações do papel não permitem.

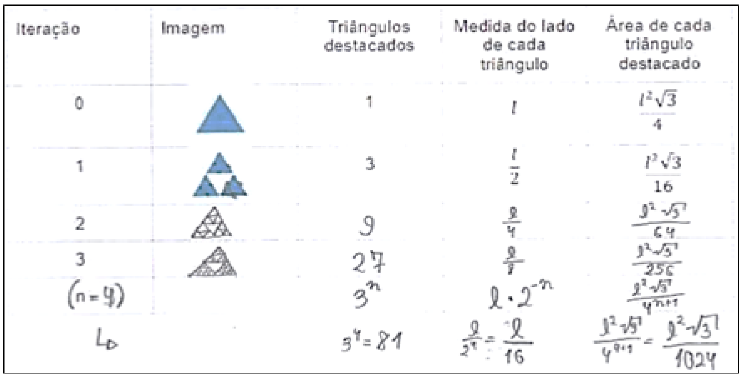
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA
I. Vamos ter sempre que calcular a metade de um dos lados dos triângulos para formar mais triângulos. No celular, temos um ponto positivo de poder fazer um fractal infinitamente, já que podemos dar um zoom para continuar a fazer o fractal.
II. Sim. Um ponto positivo de construir um fractal é a diversão e um negativo é que quando estamos construindo o fractal com papel qualquer erro pode levar a começar tudo de novo, enquanto no aplicativo é só arrumar.
III. Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito, coisa que as limitações do papel não permitem.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Construir o mesmo padrão fractal com materiais manipuláveis e com tecnologias digitais contribuiu para que os alunos percebessem a relevância do aplicativo para que a construção geométrica ocorresse de forma mais prática e complexa. Os alunos destacaram que, no aplicativo, em caso de erro, bastava desfazer o equívoco e prosseguir. O mesmo não ocorre no papel, pois um corte errado ou um vinco mal feito comprometia a construção, não deixando outra alternativa a não ser recomeçar. Além disso, os alunos destacaram que, no aplicativo, é mais prático ampliar a construção e continuar a construir níveis, aproximando de um determinado trecho construído. Essas observações ressaltaram a utilidade do GeoGebra e do *smartphone* na construção e na exploração das propriedades dos fractais.

A questão seguinte teve por enunciado: Preencha a tabela, observando a construção do Triângulo Sierpinski que realizamos. A maioria dos alunos analisou o número de triângulos e a relação com os lados e a área correspondente em cada nível. Essa quantidade seguia uma progressão geométrica representada pela sequência {1, 3, 9, 27, ..., 3^n}, sendo *n* o nível de interação do fractal (coluna 3 da tabela representada na figura 5). O lado do triângulo, por sua vez, diminuía ao longo dos níveis de modo que o lado do triângulo de cada novo nível correspondia à metade do lado do triângulo do nível anterior, podendo ser escrito como $\frac{l}{2^n}$ ou $l.2^{-n}$, onde l representava o lado do triângulo no nível n. Por fim, na tabela, era representado que a área, reduzida a um quarto da anterior em cada nível, era representada por $\frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$. A maior parte dos alunos conseguiu identificar os valores correspondentes para novos triângulos para a medida do lado de cada triângulo e para a área de cada triângulo destacado até o nível 3. Contudo, os alunos tiveram dificuldades para preencher todas as células da tabela de forma generalizada e encontrar as respostas para o nível n que representa um nível qualquer. Ainda assim, alguns preencheram corretamente de forma idêntica ou parecida com a realizada pelo aluno, conforme registro na figura 5.

Figura 5 - Resposta de um aluno na terceira questão da atividade Triângulo de Sierpinski.



Iteração	Imagem	Triângulos destacados	Medida do lado de cada triângulo	Área de cada triângulo destacado
0		1	l	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
1		3	$\frac{l}{2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$
2		9	$\frac{l}{4}$	$\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{64}$
3		27	$\frac{l}{8}$	$\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{256}$
(n=4)		3^n	$l\cdot 2^{-n}$	$\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4^{n+1}}$
$\hookrightarrow$		$3^4=81$	$\frac{l}{2^4}=\frac{l}{16}$	$\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4^{4+1}}=\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{1024}$

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

A forma generalizada de escrita matemática de padrões pode não revelar dificuldades de entendimento do padrão propriamente dito. Essas dificuldades, muitas vezes, são oriundas de dúvidas que os alunos apresentavam sobre a linguagem ou sobre cálculos matemáticos em geral. Por isso, Zazkis e Liljedahl (2002) destacam que é importante apresentar aos alunos abordagens de padronização provenientes da observação e da verbalização das generalizações, com a finalidade de registrá-las matematicamente.

Nessa atividade, o aplicativo viabilizou a exploração das características de um nível particular, bem como sua comparação aos estágios anteriores e posteriores, abrindo caminho para a representação matemática dos diversos níveis envolvidos, especificidades relativas à propriedade de autossimilaridade. Além disso, a versatilidade do GeoGebra em relação à visualização, construção e manipulação de fractais em vários níveis, favorecido pelo dinamismo desse aplicativo, permitiu que os alunos interagissem com a propriedade que levam o fractal a repetir infinitamente sua estrutura original ao longo das iterações: a complexidade infinita.

No encontro seguinte, passamos a construir o padrão fractal Tetra Círculo no aplicativo GeoGebra (figura 6) seguindo os passos descritos no quadro 3.

Quadro 3 - Primeira questão da atividade Tetra Círculo.

Questão 1: CONSTRUA O PADRÃO FRACTAL NO APP. a) Limpe a construção anterior e selecione em configurações -> geral -> rotular -> menos para os objetos novos. b) Crie um círculo de raio qualquer com a ferramenta Círculo dados centro e um de seus pontos (nível 0). c) Crie uma reta passando pelo centro e pelo ponto marcado na circunferência. d) Construa uma reta perpendicular à reta anterior passando pelo centro da circunferência. e) Com a ferramenta de interseção de dois objetos, marque os pontos de interseção das retas com a circunferência. f) Use a ferramenta ponto médio para marcar os pontos médios de cada raio. g) Construa 4 circunferências cujo o centro seja a interseção marcada no item "e" e o raio seja a metade do raio da circunferência do nível anterior. h) Com os passos anteriores, construímos o nível 1 do Padrão fractal Tetra Círculo. Para construir os próximos níveis, repita os passos do e ao g em cada uma das circunferências criadas. i) Para obter mais níveis, repita o processo enquanto for possível. Se necessário, dê zoom (faça o movimento de pinça) em partes do fractal. j) Para melhor visualização, esconda os objetos que não fazem parte do fractal. Para destacar os níveis formados, mude a cor das circunferências de acordo com sua preferência de modo que as novas circunferências de cada nível fiquem com a mesma cor.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

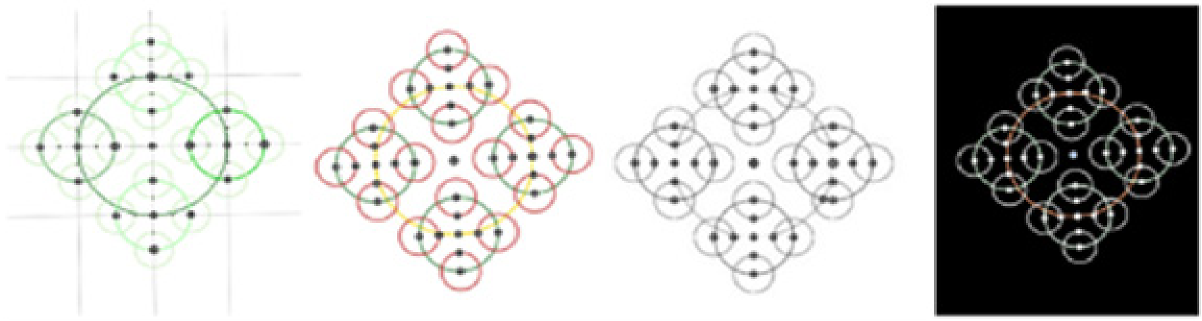
O padrão fractal Tetra Círculo “[...] é formado a partir de uma circunferência. Nela são marcados quatro pontos que a dividem em quatro arcos congruentes e que são centros de quatro novas circunferências de raios iguais a metade do raio das circunferências formadas no nível anterior” (FARIA, 2012, p. 38).

Figura 6 - Alunos construindo o padrão fractal Tetra Círculo com o app GeoGebra.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Os alunos construíram esse fractal apresentando poucas dificuldades. As dúvidas estavam restritas apenas à localização de algumas ferramentas no GeoGebra (figura 7).

Figura 7 - Padrão fractal Tetra Círculo construído por alunos com o app GeoGebra.

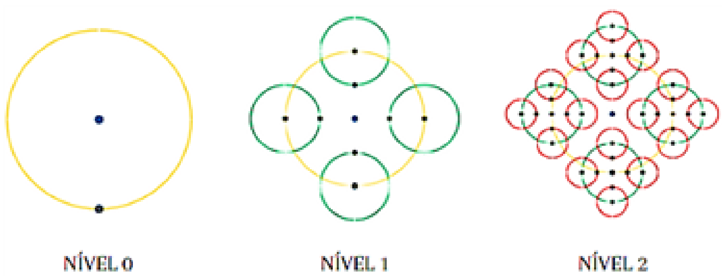


Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Dando continuidade, na segunda questão foi solicitado que observassem o Tetra Círculo e descrevessem o seu processo de construção (quadro 4).

Quadro 4 - Primeira questão da atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 2: Observe o Tetra Círculo representado em 3 níveis. Como você descreveria o processo de construção deste padrão fractal?



Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Como apresentado na figura 8, um aluno notou que o Tetra Círculo é uma figura simétrica. Um segundo caracterizou o processo de construção como dinâmico e divertido e um terceiro aluno percebeu que, para cada círculo, surgiam mais quatro ao longo das iterações.

Figura 8 - Respostas da segunda questão da atividade Tetra Círculo.

Simétrico
Um processo dinâmico e divertido
A cada 1 círculo surgem 4
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA I. Simétrico. II. Um processo dinâmico e divertido. III. A cada um círculo surgem 4.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Na terceira questão, foi solicitado aos alunos que registrassem os elementos presentes nas artes e na matemática no processo de criação do padrão fractal Tetra Círculo (quadro 5).

Quadro 5 - Terceira questão da atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 3. Quais elementos presentes na arte e na matemática você consegue identificar no processo de criação desse padrão fractal?

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Um aluno identificou os padrões e as formas geométricas na matemática. Já nas artes, registrou a estilização e as cores. Dentre os elementos destacados por esse aluno, a estilização ainda não havia sido citada. Nas artes, estilizar está relacionado à criação de um estilo próprio, singular e original capaz de atribuir detalhes a uma figura ou a uma peça. Esse processo foi realizado com os fractais construídos (MOREIRA, 2018), uma vez que cada aluno teve autonomia para atribuir a medida desejada, além de escolher a espessura e as cores, características que contribuíram para criar figuras únicas.

Outro aluno citou alguns dos conceitos matemáticos utilizados na construção do fractal como ponto médio, retas, retas perpendiculares, círculos e proporção. Nas artes, destacou as cores utilizadas para criar diferentes efeitos visuais e combinações, o tom relacionado à maior ou menor quantidade de luz presente na cor, a forma que indica se um objeto é tridimensional no espaço e o ponto que é a unidade básica da identidade visual. Um terceiro aluno destacou que, para elaborar o fractal, utilizou conceitos geométricos e cores diferentes (quadro 6).

Quadro 6 - Respostas da terceira questão da atividade Tetra Círculo.

Na matemática temos os padrões e as formas geométricas, e na arte temos a estilização e as cores.
na matemática: ponto médio, retas, retas perpendiculares, círculos e propor[illegible] na arte: cores, tom, forma e ponto
O fractal se utiliza de conceitos da geometria no caso d[illegible] matemática. Na arte temos as cores diferentes.

DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA
I. Simétrico.
II. Um processo dinâmico e divertido.
III. A cada um círculo surgem 4.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Assim como os três alunos cujas respostas foram descritas no quadro 6, diversos alunos pontuaram sobre as cores. A cor se destaca nas artes, pois é utilizada nas mais variadas circunstâncias e pode ser entendida como "[...] a sensação provocada pela ação da luz sobre o órgão da visão. As cores só existem se pelo menos três componentes estiverem presentes: observador (visão), objeto e luz" (COSTA, 2015, p. 12).

Na quarta questão foi solicitado que os alunos descrevessem o processo de iteração do padrão fractal analisado, utilizando, nessa descrição, os elementos listados no item anterior (quadro 7).

Quadro 7 - Quarta questão da atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 4. De que maneira poderíamos descrever o processo de iteração desse Padrão fractal, utilizando nessa descrição os elementos listados no item anterior?

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Um aluno afirmou que, a partir do círculo inicial, foi possível criar outros, mas acrescentou que esse processo deve ser feito utilizando outras construções geométricas como suporte. Um segundo aluno registrou que era preciso criar circunferências utilizando retas e pontos para auxiliar na construção que são conceitos geométricos. Destacou, ainda, que é necessário utilizar cores diferentes para distinguir e identificar os níveis. Um terceiro aluno afirmou que foi preciso criar circunferências que, em cada novo nível, apresentavam raio com metade da medida do raio das circunferências do nível anterior. Também destacou que essas novas circunferências eram feitas sobre os cantos de uma circunferência maior do nível anterior. Esclarecemos que, ao mencionar os cantos da circunferência, o aluno está se referindo aos quatro pontos equidistantes marcados, afinal, uma circunferência não é um polígono e, portanto, não tem vértices ou cantos (quadro 8). Destacamos, ainda, que mesmo de forma implícita, houve contribuição para a disciplina de informática na construção deste padrão fractal. Por meio das ferramentas do aplicativo, as potencialidades das tecnologias digitais foram evidenciadas. A representação gráfica do fractal Tetra Círculo foi otimizada pela informática, se mostrando capaz de exibir soluções precisas e esteticamente belas.

Quadro 8 - Respostas da quarta questão da atividade Tetra Círculo.

um circulo gera outro, mas nesessita de suporte das retas para isso, que por sua vez presisão de pontos
No campo da geometria temos a utilização de circunferências, de retas ~~e~~ de pontos. Na arte, a utilização de cores diferentes em cada nível nos ajudam indentifica-los como mais clareza.

Circunferências com metade do raio dispostas sobre os quatros cantos de uma circunferência maior do nível anterior.
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA I. Um círculo gera outro, mas necessita de um suporte das retas para isso, que por sua vez precisão de pontos. II. No campo da geometria, temos a utilização de circunferências, de retas e de pontos. Na arte, a utilização de cores diferentes em cada nível nos ajuda a identificá-los com mais clareza. III. Circunferência com metade do raio dispostas sobre os quatros cantos de uma circunferência maior do nível anterior.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Dificuldades como essa demonstram que, para os alunos, manifestar-se matematicamente pode não ser simples. As dificuldades em geometria são frequentemente influenciadas por fatores individuais e de aprendizado. Por ser uma área da matemática que se baseia em conceitos fundamentais, caso não haja uma compreensão sólida desses conceitos, pode ser difícil apresentar domínio com relação à visualização, à representação e à linguagem geométrica (ROGENSKI; PEDROSO, 2009).

Sobre o Tetra Círculo criado no GeoGebra, no item a da quinta questão foi solicitado que os alunos descrevessem a sensação de criar esse padrão fractal (quadro 9).

Quadro 9 - Quinta questão da atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 5. Sobre o Padrão fractal Tetra Círculo criado no GeoGebra: a) Descreva a sensação que a criação dele te traz b) Após pronto, ao contemplar a figura criada, quais sensações você descreveria?

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Um aluno registrou que se sentiu satisfeito e relaxado. Podemos perceber que a atividade atendeu suas expectativas e houve um contentamento de ter concluído a atividade. Outro aluno também adjetivou a atividade como relaxante e um terceiro achou o processo simples e, ao seguir cada etapa, sentiu-se satisfeito, pois o resultado era proporcional ao seu esforço (quadro 10).

Quadro 10 - Respostas do item a da quinta questão da atividade Tetra Círculo.

Satisfatório, relaxante
Diria que foi bem relaxante.
É um processo simples que causa uma satisfação proporcional quado conseguino seguir o passos
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA I. Satisfatório e Relaxante. II. Diria que foi bem relaxante. III. É um processo simples que causa uma satisfação proporcional quando conseguindo seguir os passos.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

No item b da quinta questão, ao contemplar a construção do padrão fractal Tetra Circulo, foi solicitado que registrassem as sensações experimentadas durante a observação.

Um aluno destacou a sensação de conquista proveniente da conclusão de um objetivo. Outro aluno registrou admiração pela construção realizada. Um terceiro aluno descreveu que sentiu uma satisfação proporcional à dificuldade de realizar a atividade (quadro 11).

Quadro 11 - Respostas do item b da quinta questão da atividade Tetra Círculo.

Conquistá, uma meta concluída e um objetivo alcançado
Um sentimento de admiração pelo que foi criado
satisfação proporcional a dificuldade do trabalho
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA I. Conquista, uma meta concluída e um objetivo alcançado. II. Um sentimento de admiração pelo que foi criado. III. Satisfação proporcional as dificuldades do trabalho.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

As respostas dos alunos revelaram que, construir o padrão fractal no aplicativo GeoGebra foi desafiador e, ao mesmo tempo, prazeroso. Eles afirmaram que, apesar da complexidade, realizar a construção foi relaxante e trouxe as sensações de conquista, admiração e satisfação, despertando emoções de prazer e bem-estar.

Ao longo da realização dessa questão, foi possível observar vários alunos retornando à construção realizada no aplicativo. A visualização favorecida pelo GeoGebra permitiu que, de maneira muito próxima, o aluno construísse e interagisse com a construção finalizada, observando detalhes e características que tornam o padrão fractal singular.

Na questão 6 que finaliza a atividade, foi pedido aos alunos que, observando a construção do Tetra Círculo, preenchessem a tabela (quadro 12).

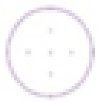
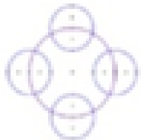
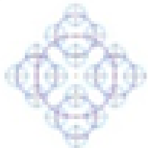
Quadro 12 - Sexta questão da atividade Tetra Círculo.

QUESTÃO 6. Preencha a tabela observando a construção do Tetra Círculo que realizamos. a) De acordo com a tabela, podemos identificar um padrão para a quantidade de circunferências ao avançar dos níveis? b) E para as medidas dos raios das novas circunferências construídas em cada item? c) Você consegue identificar uma sequência lógica na construção do Tetra Círculo Comente sobre pontos positivos e negativos (caso haja), de construir esse padrão fractal no aplicativo GeoGebra?

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Diferentemente do que ocorreu na atividade realizada com o padrão fractal Triângulo de Sierpinski, n todos os alunos conseguiram preencher corretamente a tabela do padrão fractal Tetra Círculo. Eles perceberam que cada círculo possuía raio com a metade da medida das circunferências geradas no nível anterior. Registraram ainda que, a cada interação, quatro novos círculos eram gerados em cada um dos criados no nível anterior (figura 9).

Figura 9 - Tabela da sexta questão da atividade Tetra Círculo preenchida por um aluno.

Interação	imagem	Quantidade de circunferências	Medida do Raio
0		1	r
1		5	r/2
2		24	r/4

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

A partir da tabela preenchida no item a da sexta questão, foi solicitado que os alunos respondessem os demais itens. No a, um aluno registrou que havia um padrão e outro que não havia. A maior parte dos alunos reconheceu o padrão e registrou como o primeiro aluno. Poucos alunos não perceberam que havia um padrão. De forma generalizada, apenas um aluno respondeu que existia um padrão que poderia ser escrito como $\sum_{l=1}^{n}(4^l) = f(n)$. De fato, a quantidade de circunferências é: 1 no nível 0 (nível inicial), 5 no nível 2, 21 no nível 3 e assim por diante. Essa sequência {1, 5, 21, ...} pode ser escrita como $\{4^0, 4^0+4^1, 4^0+4^1+4^2, ...\}$ e definida como o somatório apontado pelo aluno (figura 10).

Figura 10 - Respostas do item a da sexta questão da atividade Tetra Círculo.

Sim.
nao tem um padrão.
Sim. $\sum_{l=0}^{n}(4^l)=f(n)$
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA I. Sim. II. Não tem um padrão. III. Sim. $\sum_{l=1}^{n}(4^l)=f(n)$

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

No item b dessa questão, foi solicitado aos alunos as medidas dos raios das novas circunferências construídas em cada item. Todos os alunos perceberam que existia um padrão e que o raio das novas circunferências era a metade do raio da circunferência do nível anterior (quadro 13).

Quadro 13 - Respostas do item b da sexta questão da atividade Tetra Círculo.

Temos um padrão, o raio é dividido pelo metade do anterior
Sim. É sempre a metade do valor da anterior
Sim; É sempre a metade do valor anterior
DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA I. Temos um padrão, o raio é dividido pela metade do anterior. II. Sim. É sempre a metade do valor anterior. III. Sim. É sempre a metade do valor anterior.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

No item c dessa questão, foi solicitado aos alunos que identificassem uma sequência lógica na construção do Tetra Círculo e comentassem sobre pontos positivos e negativos de construir esse padrão fractal no aplicativo GeoGebra. Um aluno registrou que uma vantagem é poder criar padrões repetidas vezes. Outro aluno mencionou que é mais fácil montar o fractal usando o aplicativo GeoGebra graças às ferramentas que este aplicativo oferece. Nos chamou a atenção essa colocação, pois o aluno estava comparando a construção no aplicativo às construções com materiais manipuláveis. No entanto, esse fractal não foi construído com materiais manipuláveis nos encontros anteriores, como fizemos com o Triângulo de Sierpinski. O aluno afirmou, ainda, que "é uma pena não poder expor ele depois", apontando uma desvantagem no uso do *smartphone*. Segundo este estudante, a utilização do papel facilita a exposição para os demais colegas da turma. Um terceiro aluno afirmou que a utilização do aplicativo GeoGebra é considerado mais viável, pois permite fazer quantos níveis desejar, transmitindo a sensação de infinito e favorecendo a compreensão de alguns conceitos de geometria. A expressão "mais viável" também é comparativa, sendo entendida como "trabalhar com *smartphone* é mais viável do que trabalhar com materiais manipuláveis" (quadro 14).

Quadro 14 - Respostas do item c da sexta questão da atividade Tetra Círculo.

O padrão fractal construído no aplicativo tem como vantagem poder fazer quantas vezes quisermos.
Sim. É bem mais fácil montar fractais pelo GeoGebra graças as ferramentas dele mas é uma pena não poder expor ele depois
Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples, e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito. Além de permitir entender mais a matemática e geometria por trás.

DESCRIÇÃO DAS RESPOSTAS COM CORREÇÃO ORTOGRÁFICA
I. O padrão fractal construído no aplicativo tem como vantagem poder fazer quantas vezes quisermos. II. Sim. É bem mais fácil montar fractais pelo GeoGebra graças as ferramentas dele, mas é uma pena não poder expor ele depois. III. Sim. Construir no aplicativo é uma opção mais viável, simples e permite alcançar um nível de detalhes teoricamente infinito. Além de permitir entender mais a matemática e geometria por trás.

Fonte: Dados de Pesquisa (GUEDES, 2023).

Entendemos, portanto, que por meio do aplicativo GeoGebra, exploramos a criatividade dos alunos na construção de padrões fractais. Deste modo, foi possível aguçar o interesse e promover o engajamento dos alunos, "(...) convidando-os a criar, inventar, explorar e resolver problemas complexos num mundo cada vez mais conectado e global" (MOURA, 2016, p. 166).

Com base na produção de dados da pesquisa, afirmamos que a aprendizagem no Ensino Médio é favorecida por meio da integração de conteúdos pertinentes às disciplinas de artes, matemática e informática, aliados a métodos de aprendizagem que posicionem o aluno como sujeito ativo. Para isso, é necessário a utilização de recursos como tecnologias digitais, uma vez que elas são capazes de favorecer um ambiente educacional dando-lhe aspecto dinâmico e integrador.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo objetivou investigar como o estudo de padrões fractais aliado às tecnologias digitais podem contribuir para aprendizagem interdisciplinar de alunos do Ensino Médio. Consideramos que o objetivo proposto foi alcançado, pois demonstramos que a abordagem interdisciplinar dos padrões fractais, englobando informática, artes e matemática, desempenhou um papel essencial ao permitir que os alunos desenvolvessem uma percepção abrangente de padrões, de infinitude e de tridimensionalidade. Esta abordagem estimulou a capacidade de análise estética e enriqueceu a construção de conhecimentos relevantes nas disciplinas.

Destacamos que a colaboração entre os alunos contribuiu para que a aprendizagem ocorresse de forma coletiva. As discussões em equipe estimularam a troca de ideias e a construção conjunta do conhecimento, promovendo habilidades sociais como comunicação e cooperação, ao mesmo tempo em que reforçou os conceitos aprendidos.

As propriedades de complexidade infinita e de autossimilaridade, presentes nos padrões fractais Tetra Círculo e Triângulo de Sierpinski, permitiram a exploração de conceitos pertinentes às disciplinas envolvidas na pesquisa. Na matemática, os fractais foram apresentados como objetos geométricos fascinantes e desafiadores. Nas artes, foram usados para criar padrões visuais intrigantes e detalhados. Já na informática geraram imagens realistas e recursivas. Assim, as propriedades estudadas proporcionaram a contemplação da estética nas harmonias, proporções e simetrias presentes nas regularidades desses padrões.

Quanto às tecnologias digitais, é possível ponderar que o smartphone contribuiu para apresentar uma visualização impactante, interativa e dinâmica dos padrões fractais.

O GeoGebra, especificamente, possibilitou a criação e exploração dos fractais de modo detalhado, em alta resolução e em diferentes escalas e ângulos. Destacamos, no processo de construção de fractais, o zoom que permitiu a construção e exploração dinâmica de níveis mais avançados.

Outro fator positivo do aplicativo é a capacidade de corrigir, de forma simples, pequenos erros nas construções se comparado às construções realizadas com materiais manipuláveis. Deste modo, com os recursos do GeoGebra, foi possível criar figuras esteticamente atraentes, capazes de expandir horizontes de maneiras criativa e interativa, permitindo que os alunos se envolvessem ativamente e descobrissem detalhes dos fractais.

Assim, evidenciamos que a incorporação dos padrões fractais neste estudo desempenhou papel significativo na promoção da educação cidadã crítico-reflexiva, o que contribuiu para instigar uma análise ponderada sobre a posição de cada pessoa na sociedade.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BARBOSA, Rui Madsen. **Descobrindo a Geometria fractal para a sala de aula**. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa Qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In:* BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara Loiola de. **Pesquisa Qualitativa em Educação matemática**. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

CALDAS, Felipe; HOLZER, Denise; POPI, Janice Aparecida. A interdisciplinaridade em arte: algumas considerações. **Revista Nupeart** v.17, 2017. Disponível em: https://revistas.udesc.br/index.php/nupeart/article/view/9839/7561. Acesso em: 27 mai. 2024.

CAVALCANTE, Larissa; SILVA, Carlos da; MENDES, Iran. Percepção visual e pensamento geométrico nos Anos Iniciais: uma abordagem interdisciplinar com a Arte. **REMATEC**, Belém, v. 15, p. 16–31, 2020. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p16-31.id231.

COSTA, Dielle Cruz da. **Potencialidades do uso do celular na matemática escolar:** atividades investigativas de função exponencial. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023. DOI: http://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.211

COSTA, Emilene de Cássia Faria. **Cores:** processo e aprendizados de artes visuais. Monografia (Especialização em Ensino de artes Visuais). 2015. 36f. UFMG, Belo Horizonte. 2015. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-AN5LAK/1/monografia_finalizada___17_10_2016___pdf. Acesso em: 27 mai. 2024.

DIAS, Graciele; CAVALCANTI, Rosiane. As tecnologias da informação e suas implicações para a educação escolar: uma conexão em sala de aula. **Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, v. 1, Ed. especial, p. 160-167, 2016. DOI: https://doi.org/10.24219/rpi.v1iEsp. 80.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Raciocínio proporcional na matemática escolar. **Revista Educação em Questão,** *58*(57). 2020. DOI: https://doi.org/10.21680/1981-1802.2020v58n57ID20024.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Padrões fractais: conectando matemática e arte. **Eccos Revista Científica**, v. 1, p. 33-53, 2012. DOI: https://doi.org/10.5585/EccoS.n27.3484.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho. **Padrões fractais:** contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Rio Claro - SP, 2012. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/items/4090b78d-acf2-4921-a22b-3777b004b851. Acesso em: 27 mai. 2024.

FAZENDA, Ivani. Interdisciplinares: definição, projeto, pesquisa. *In:* FAZENDA, Ivani. (org.). **Práticas interdisciplinares na escola.** São Paulo: Cortez, 1993.

GUEDES, Tatiana Machado Resende. Contribuições interdisciplinares da exploração estética dos padrões fractais. 2023. 120 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2023. https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.660.

LEFF, Enrique. Complexidade, interdisciplinaridade e saber ambiental. *In:* PHILIPPI JR, Arlindo (org.), **Interdisciplinaridade em Ciências Ambientais**. p. 22-50. SP: Signus, 2000.

MIRANDA, Theresinha Guimarães; GALVÃO-FILHO, Teófilo Alves. **O professor e a educação inclusiva**. Editora EDUFBA/ Salvador, 2012.

MOREIRA, Valter do Carmo. **Arte e Ilustração. 1ª ed. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., v. 1. 208p.** 2018.

MOURA, Adelina. Aplicativos para Aprendizagem Baseada em Projetos. *In:* COUTO, Edvaldo; PORTO, Cristiane; SANTOS, Edméa. (orgs.). **App-Learning:** experiências de pesquisa e formação. Salvador: EDUFBA, 2016.

MULLER, Silvia Ambrósio Pereira. **Inclusão digital e escola pública**: uma análise da ação pedagógica e da informática na educação. 2005. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Porto Alegre, Porto Alegre, 2005.

PERAZZO, Luiz Fernando; VALENÇA, Maslova Teixeira. **Elementos da Forma.** Rio de Janeiro: Ed. Senac Nacional, 1997.

RIBEIRO, Ana Elisa. Termos de Alfabetização, Leituras e Escritas para Educadores. *In:* FRADE, Isabel Cristina; VAL, Maria da Graça, BREGUNCI, Maria das Graças (orgs). **Glossário Ceale.** Belo Horizonte: UFMG, 2014. Disponível em: https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossario-ceale.html. Acesso em: 27 mai. 2024.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades. 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 27 mai. 2024.

ROQUE, Renata Dourado. **Padrões fractais, tecnologias digitais e interdisciplinaridade**. Relatório (Iniciação Científica) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2023.

SANTOS, Rosângela Salles; KRIPKA, Rosana Maria Luvezute. **Estudo de padrões fractais no ensino fundamental:** uma introdução ao estudo da geometria. Série Educar- Volume 15, matemática. 1ªed. Belo Horizonte: Editora Poisson, v. 15, p. 140-147, 2020. DOI: 10.36229/978-65-86127-00-3.CAP.19

SILVA, Márcia Regina Farias da; FARIAS, Carlos Aldemir; DUTRA, Maria da Conceição Farias da Silva Gurgel; SOARES, Marlene Yara Tenório. Hortas escolares e interdisciplinaridade nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **REMATEC**, Belém, v. 18, n. 45, 2023. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n45.pe2023010.id549.

SOUSA, Giselle Costa de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**, Belém, v. 16, n. 37, p. 140–159, 2021. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310.

THIESEN, Juares da Silva. A interdisciplinaridade com um movimento articulador no processo de ensino-aprendizagem. *In:* **Revista Brasileira de Educação.** v. 13, n.39, set/dez 2008. DOI: https://doi.org/10.1590/S1413-24782008000300010

ZAZKIS, Rina; LILJEDAHL, Peter. Generalization of Patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 49, n. 3, p. 379-402, Springer, 2002.

Histórico

Recebido: 28 de abril de 2024.
Aceito: 13 de julho de 2024.
Publicado: 18 de julho de 2024.

Como citar – ABNT

GUEDES, Tatiana Machado Resende; FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho. Aprendizagem Interdisciplinar por meio da construção de Padrões Fractais com Tecnologias Digitais. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 47, e2024022, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024022.id626

Como citar – APA

Guedes, T. M. R., & Faria, R. W. S. de C. (2024). Aprendizagem Interdisciplinar por meio da construção de Padrões Fractais com Tecnologias Digitais. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (47), e2024022.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024022.id626