Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 49, e2024002
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024002.id657

¿Qué tan Grande es el infinito? ¡El infinito … ya no nos asusta!

How Big is infinity?
Infinity ... no longer scares us!

Qual é o tamanho do infinito?
O infinito... não nos assusta mais!

Alejandro Ortiz Fernández[1]

RESUMEN

El objetivo de este artículo es presentar en forma breve y no – técnica la idea del infinito, desde la época de los antiguos griegos hasta los siglos XIX Y XX, dando énfasis a George Cantor y su teoría de conjuntos.

RESUMO

O objetivo deste artigo é apresentar de forma breve e não técnica a ideia de infinito, desde a época dos gregos antigos até os séculos XIX e XX, com ênfase em George Cantor e sua teoria dos conjuntos.

ABSTRACT

The objective of this article is to present in a brief and non-technical way the idea of infinity, from the time of the ancient Greeks to the XIX and XX centuries, with emphasis on George Cantor and his set theory.

ALGUNAS PALABRAS

Enseñar es básicamente una comunicación entre alguien que enseña y alguien que aprende; en esta relación entra en juego una serie de factores: buena formación del profesor, deseos de aprender del alumno, condiciones adecuadas para optimizar esta intercomunicación. Enseñar es un arte, en cierto sentido, y el profesor debe ser un artista. De ser así, creemos que temas delicados en su estructura podrían ser enseñados con resultados positivos. Esto es el caso de enseñar el infinito. Históricamente esta palabra atormentó por siglos a los pensadores, desde la antigua Grecia hasta mediados del siglo XIX, época en que se domó al infinito y la matemática pudo progresar con más rigor. Es cierto que el infinito no es un tema simple de entender en sus aspectos esenciales y en ciertos contextos podría estar más allá de la capacidad humana para entenderla completamente, como lo dijo el gran matemático G. Cantor, quien agregó que esta compresión está "reservada a una comprensión divina". Así, en la antigüedad las culturas egipcias y babilónicas cultivaron la astronomía y es posible que la infinitud del firmamento les haya producido la sensación de lo "inmenso", del "más allá" y capaz estas impresiones les motivó sentimientos religiosos, como así sucedió con algunas culturas de la antigüedad incluyendo a las prehispánicas.

El paso siguiente fue el surgimiento de la cultura griega en donde la mente de los pensadores fue capaz de formular profundas cuestiones relacionadas con el universo que observaban. La idea de "y así podemos continuar …" surgió con un simple argumento geométrico. Como sabemos ya en Babilonia y en Egipto se conocía el llamado "teorema de Pitágoras" pero fueron los griegos quienes lo estudiaron con rigor

1 Profesor Emérito Vitalicio de la Universidad Nacional de Trujillo. Ex – Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Email: jortiz@pucp.edu.pe

matemático. Tomaron un cuadrado de lado 1; ellos pudieron medir con exactitud la longitud del lado del cuadrado (por ejemplo, si se toma un subintervalo de longitud 0.1, con 10 de esos subintervalos se cubre exactamente el lado del cuadrado). Luego construyeron una diagonal y sabían que la diagonal era por el citado teorema; trataron de repetir el argumento anterior pero no encontraron un número finito de subintervalos que llenen exactamente a la diagonal. Llegaron al "así podemos continuar indefinidamente". Esto causó una profunda crisis en la filosofía natural de los griegos la que descansaba en la idea de número; ¿con qué número se puede medir a la diagonal del cuadrado de lado 1? … Es curioso, de algún modo, que tuvieron que pasar un aproximado de 2400 años para explicar con rigor esta situación. ¡Los griegos habían llegado al sentimiento del infinito! Sin embargo, la evolución de la matemática no se estancó ante esta crisis; siguió evolucionando, creciendo sobre todo por sus aplicaciones en diversos problemas del mundo físico. Pero debemos destacar que hubieron pensadores griegos que se enfrentaron al infinito como fue Zenón, quien con sus paradojas razonó sobre el infinito creando conflictos con la forma de pensar de entonces, y por ellos trataron de evitar, enfrentar a esta "incómoda idea". En 1932, el escritor argentino Jorge Luis Borges dijo: "Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito". En efecto, la idea de lo infinito causó cierto "pánico" en algunos pensadores de todos los tiempos, hasta finales del siglo XIX cuando surgió G. Cantor quien con una fe mística lo enfrentó y lo domó para felicidad de la ciencia en general.

UN POCO DE HISTORIA SOBRE EL INFINITO

En la Antigüedad, el griego Anaxágoras tuvo la idea intuitiva de lo muy pequeño y de lo muy grande al exclamar: "En lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño". "En lo grande siempre hay algo más grande". Parecía que Anaxágoras visualizó, en aquellos lejanos tiempos, al mundo del átomo y a lo inmenso del universo. Por otro lado, el matemático Eudoxo introdujo el método de "exhaución" con el cual evitaba al infinito, y que usó para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas. Un filósofo notable, como fue Aristóteles, también se interesó por el infinito e hizo interesantes comentarios al respecto como predecir la convergencia de la serie surgida en la paradoja de Aquiles y la tortuga. Aristóteles dijo "El infinito siempre en potencia, nunca en acto". Aún más, dijo: "No es posible que el infinito exista como un ser en acto o como una sustancia y un principio. Está claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles. El infinito existe potencialmente; el infinito es por adición o por división. La magnitud no es actualmente infinita, aunque infinitamente divisible". Bien, vamos a clarificar lo del infinito en potencia y lo del infinito en acto aun cuando ya Aristóteles lo está haciendo; tomemos el conjunto de los números naturales N; si n es un número muy grande, sabemos que existe $n + 1$, mayor que n; y así podemos continuar ... por esto, se dice que N es infinito en potencia. Pero no se aceptaba que el conjunto N, él fuera un elemento infinito, es decir, que podríamos considerarlo como un elemento de un conjunto donde hubieran otros elementos infinitos. Cantor aceptó estos infinitos, que se llaman infinitos en acto. Por ejemplo, en una línea ubiquemos a los números naturales N y a los números reales R, que también es infinito en acto. Con estos infinitos se pueden establecer relaciones, como veremos después.

A través de la historia iremos viendo cómo estos conceptos fueron rechazados y aceptados por los matemáticos.

Aristóteles también opinó que "toda magnitud finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada", idea que fue usada por el gran matemático **Arquímedes** para establecer el " axioma de continuidad" y que Euclides lo presentó como definición (en sus Elementos): "dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra ". Esta sentencia motivó, a su vez, a Eudoxio para establecer el "método de exhaución ", el que fue usado por Arquímedes para establecer la cuadratura de la parábola, en donde tuvo que sortear al infinito; ¡¡ en este trabajo Arquímedes casi llega a la idea de "límite "!!

HACIA EL SIGLO XIX

Desde la época de los griegos hasta la época en que el infinito fue enfrentado cara a cara pasó un largo camino, período en que la matemática siguió evolucionando y contribuyendo a la solución de problemas del mundo físico. Fue un período de alrededor de dos mil años durante los cuales los científicos convivieron con tal noción y con el temor y celo que ello implicaba. ¿Por qué tuvo que pasar tanto tiempo? . . . No es el único caso en que esto sucedió en la matemática; capaz las grandes revoluciones tienen que necesitar largos períodos de maduración; esto sucedió también con el cálculo infinitesimal. Posiblemente, en el caso del infinito se necesitaba de una gran teoría que sea el sustento de ella, como fue la teoría de conjuntos que recién fue formulada en la segunda mitad del siglo XIX.

Demos un ligero paseo por tal período de tiempo citado. El punto de partida es Arquímedes quién puso su genio en prueba al enfrentar al infinito; usó el método de exhaución para determinar ciertos infinitesimales en su trabajo sobre la cuadratura de la parábola. Por otro lado, él estuvo cerca del cálculo integral ya que llegó a expresiones que en el contexto actual equivalen a las fórmulas $\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$ y $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$. También atacó el problema de construir tangentes a espirales, . . .; es posible que en tales argumentos haya tenido que enfrentar a las aproximaciones pequeñas. Proclo, un historiador griego, estuvo de acuerdo con Aristóteles sobre el infinito pues tampoco acepta al infinito actual. Este conflicto del infinito surgido en Grecia y conforme la matemática fue avanzando, el infinito surge en el proceso de la evolución del cálculo infinitesimal en donde se manejan objetos muy pequeños y también muy grandes y así ... surgieron los llamados infinitésimos, idea que, de algún modo, ya se tenía en la antigua Grecia. Así, por ejemplo, al calcular áreas de algunas figuras geométricas se hacían usando aproximaciones con figuras cuyas áreas se conocían; tal es el caso de calcular el área de un círculo pues tal área se podía pensar como el " límite" de sumas de áreas de polígonos contenidos en el círculo. En esta dirección Eudoxio, en el siglo VI A.C. calculaba el área de un círculo usando esa idea. También Arquímedes usó ese método para calcular el volumen de una esfera y el área de un sector parabólico.

Cuando la civilización griega decae (luego de casi dos mil años de vigencia) por muchos años la matemática casi no tiene grandes progresos pues durante la Edad Media no se hicieron investigaciones científicas en general, salvo algunos casos aislados. Por esa época el problema del infinito quedó en manos de los filósofos y de algunos teólogos; algunos estaban a favor del infinito actual, otros no lo estaban. Y así llegamos al Renacimiento Científico donde se distingue la gran figura de Galileo Galilei (1564-1643) quien rechaza a los conjuntos infinitos porque ellos conducen a contradicciones con la razón. Así, por ejemplo, dados los segmentos

A ———————— B y C ———————————— D

se puede verificar que ambos segmentos tienen el mismo número de puntos, algo que va contra nuestra "verdad" y por tanto no es aceptable. De igual manera verificó que los conjuntos

A = {1, 2, 3, 4, 5, ...} y B = {1, 4, 9, 16, 25, . . .}

son iguales, es decir, tienen el mismo número de elementos ($n \leftrightarrow n^2$) no obstante que B está contenido propiamente en A y esto es también inaceptable! Cauchy, gran matemático francés y fundador del análisis matemático, tampoco aceptó al infinito. **Aún más**, el genial hombre de ciencia alemán Gauss no aceptó al infinito actual pues dijo:

"El infinito es solamente una forma de hablar, en lo que uno está realmente hablando de límites a las que ciertas razones pueden aproximarse, tanto como se quiera, mientras que otras crecen ilimitadamente . . . ". Retrocediendo un tiempo atrás, al siglo XVII, Newton expresa un sentimiento análogo al de Galileo pues expresa: " Los infinitos, cuando se consideran sin ninguna restricción o limitación, no son iguales, ni distintos, no guardan ninguna proporción uno respecto del otro ".

Debe observarse que Newton no niega del todo al infinito, lo acepta bajo ciertas restricciones cuando tuvo que reformular su cálculo infinitesimal en donde tuvo que usar sumas infinitas o clarificar el "acercamiento" de los x's a cero. Por otro lado, E. Leibniz tuvo sentimientos encontrados respecto al infinito ya que por un lado dice: " nada es más palpable que lo absurdo de la idea de un número infinito". Y por otro lado dijo: " estoy tan a favor de la realidad del infinito que, en lugar de admitir que la naturaleza lo abomina, como se dice vulgarmente, creo que la afecta por todas partes, para exhibir mejor las perfecciones de su autor".

Como observamos, Leibniz critica duramente la existencia del infinito, pero después lo acepta posiblemente debido a algunos pensamientos matemáticos–filosóficos cuando estaba creando el cálculo infinitesimal. De esta manera estamos observando que algunos celebrados matemáticos no aceptaban al infinito actual por las cosas " raras" que se obtenían con su aceptación. Así, hemos visto que el siglo XIX Cauchy y Gauss dieron duras críticas al infinito **como un elemento o un ser matemático.** Pero, por esta época aparece un singular personaje: **Bernhard Bolzano** (1781- 1848) a quién le debemos una importante contribución hacia la formulación de la futura teoría de conjuntos por G. Cantor y se le considera un precursor de la "aritmetización del análisis"; Bolzano proclama la necesidad de rigorizar el análisis. Lamentablemente sus trabajos al respecto fueron ignorados por sus contemporáneos; ¡en dichos trabajos Bolzano fue el primero en aceptar la existencia del infinito actual y trató de hacer un estudio sistemático del infinito actual! Destacamos que, en 1851, tres años después de su muerte, se publican su obra “ Paradojas del Infinito “ en donde se clarifica el camino de la futura teoría de conjuntos; nos da reflexiones sobre el infinito tanto en el aspecto filosófico, matemático y físico. Bolzano profetisa la idea de “correspondencia biunívoca”, idea que usaría Cantor para dar sus célebres ejemplos y contraejemplos. Aún más, vía esta idea Bolzano proclamó que en el caso de conjuntos infinitos una parte propia podía ser equivalente (o “igual” en el número de elementos) al conjunto total!; así, por ejemplo, dice que el intervalo (0,5) y el intervalo (0,12) pueden ser puestos en correspondencia biunívoca vía la relación $y = 12/5x$, no obstante que (0,5) está propiamente contenido en (0,12). Sospechamos que esta declaración de Bolzano debe haber causado mucha polémica entonces. Pero aún más dio más afirmaciones revolucionarias: “ afirmó que había diferentes números transfinitos para diferentes conjuntos infinitos”, algo que Cantor corrigió años después pues Z (enteros) $\neq$ Q (racionales) tienen el mismo número transfinito, el enumerable. Así, se podría afirmar con justicia que Bolzano fue el gran precursor de la teoría moderna del infinito, y posiblemente de la teoría de conjuntos. Estamos en el siglo XIX.

GEORGE CANTOR Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

> “Las generaciones futuras contemplarán la teoría de conjuntos infinitos como una enfermedad de la que nos hemos recuperado”. Henri Poincaré (1908).

G. Cantor nació el 03 de marzo de 1845 en San Petersburgo; sus padres fueron judíos puros. Desde muy joven mostró buenas condiciones para la matemática y por ello quiso ser matemático como profesión pero su padre deseó que fuera ingeniero; Cantor obedeció a su padre y comenzó sus estudios de ingeniería pero cuando George tuvo 17 años su progenitor le dio libertad para que estudie matemáticas, lo que el joven le agradeció de todo corazón e inicia sus estudios en Zúrich (1862) en matemática, física y filosofía teniendo como maestros a los reconocidos matemáticos Kummer, Weierstrass y Kronecker. En 1868 se gradúa de Doctor por la Universidad de Berlín siendo su tesis sobre teoría de números. En 1868-69 publica tres artículos donde dos de ellos lo conducirían a la teoría del infinito; ahí estudia las propiedades de los números irracionales. Kronecker comienza a no gustar de los trabajos del joven matemático y en el futuro sería un duro crítico de la teoría de conjuntos y de su autor. En 1870 Cantor ingresa como profesor ayudante en 1a universidad de Halle, institución donde se produciría una hermosa historia matemática pues en esta universidad estaba el matemático H.E. Heine quien estaba trabajando en series de Fourier y propuso a Cantor un crucial problema en relación a las series trigonométricas; Heine se convierte en el orientador de George y en el período de 1870-72 publica cinco artículos en donde estudia ciertos tipos de sumas infinitas. Se observa que por esta época ya la idea del infinito en potencia está en la mente de Cantor, pero aún no la del infinito en acto.

El primer artículo revolucionario de Cantor aparece en 1874: “ Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos”, trabajo en donde está la génesis de lo que sería la “ teoría del infinito”. Se está entrando en terrenos en donde se discute cuestiones esenciales del modo de pensar de muchísimas generaciones; por esta razón el gran matemático Weierstrass le aconsejó que tratara de ocultar las novedosas consecuencias que Cantor postulaba. Recordemos que desde tiempos antiquísimos los matemáticos, los filósofos y los teólogos tuvieron un serio respeto y misterio por lo “muy grande “ y por “lo inmenso" del universo; y aún en el siglo XIX el infinito se discutía con cierta prudencia; por lo opuesto, por lo infinitamente pequeño también se discutía con el recelo del caso. Pero, la idea del infinito aparecía en muchas investigaciones aun cuando se deseaba evitarlo.

En 1874 Cantor publica un trabajo donde vislumbra al escenario científico pues prueba que cualquier segmento de recta contiene infinitos números trascendentes [un número es trascendente si no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. El número " e " es trascendente. Un número que no es trascendente, se llama algebraico], lo que logra mejorar su método para probar que los números racionales es un conjunto numerable. En posteriores trabajos Cantor obtiene resultados increíbles para el razonamiento tradicional y por tal motivo recibió severas críticas, sobre todo de Kronecker quien lo calificó de " charlatán científico", entre otros duros calificativos; y todo porque Cantor hace uso del infinito en acto, es decir, del infinito como un "ser" matemático. Mencionemos que Cantor no tenía un carácter fuerte y ya padecía de ciertas dolencias mentales; esto unido a las fuertes críticas a su obra, le produjo crisis en su salud física y mental. Así, en 1884, cuando tenía 40 años Cantor comienza a sufrir de colapsos nerviosos y aun así trabaja intensamente atacando problemas muy complejos. Los sorprendentes resultados a los que estaba llegando le causa estados de fatiga, de ansiedad, de depresión, ... y por ello tuvo que ser internado en hospitales de reposo y salud mental. En este escenario Cantor hasta llegó a dudar de su propia teoría; fueron años muy difíciles para la matemática, y para la filosofía en general. Y llegamos al siglo XX.

Cantor defiende su teoría con una fe religiosa; dice

> "Mi teoría se yergue firme como una roca ..., he seguido sus raíces hasta la causa primera e infalible de todas las cosas creadas".

Como apreciamos, la vida de Cantor fue una pasión; sus dolencias no le dejaban momentos de tranquilidad para investigar, pero aun así no se dejaba vencer por las dificultades; ofrecía conferencias sobre todo dedicadas a las paradojas que surgían en su teoría de los conjuntos. En 1890 es reconocido y distinguido al ser nombrado como el primer Presidente de la Unión Matemática Alemana. En 1904 asiste al tercer Congreso Internacional celebrado en Alemania y a partir de esa fecha su salud le impide publicar artículos; en 1913 se jubila de la Universidad de Halle y debido a la I Guerra Mundial no se puede celebrar una reunión en su homenaje por sus 70 años en 1915. Dos años después, en 1917, Cantor es hospitalizado en una clínica psiquiátrica; su estado es delicado y el 06 de enero de 1918 George Cantor fallece cerrando sus ojos para abrirlos en el mundo maravilloso del infinito!

La posteridad reconoce que Cantor fue un gran matemático, un profundo visionario de nuevos universos matemáticos, que por primera vez el mundo científico conoció.

> "La teoría de Cantor me parece el fruto más admirable de la mente humana y una de las conquistas más preciosas de los procesos intelectuales del hombre … nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros". David Hilbert

LA TEORÍA DE CONJUNTOS

En la segunda mitad del siglo XIX la matemática progresó en muchas teorías muy novedosas; los matemáticos comenzaron a romper "tabús" y comenzaron a pensar con libertad, guiados por nuevas visiones del mundo matemático. Introdujeron teorías "atrevidas" para el clásico modo de pensar; tal fue el caso de las geometrías no-euclideanas, el álgebra moderna, ... Weierstrass introdujo la idea de límite de un modo formal, idea que desterró a los infinitésimos y en su formulación estuvo la idea del infinito; así, se entraba a la etapa de la "aritmetización" del cálculo infinitesimal, donde la noción del número real fue básico, y muchos otros aspectos, ¡donde aparece latente el infinito!

Como ya hemos mencionado, Cantor llega a Halle en 1870 y el profesor Heine le propone estudiar el problema de la descomposición de una función periódica en su serie de Fourier. Heine obtuvo algún os progresos al respecto al establecer que si la función no posee "saltos" (discontinuidades) o si en cada período tiene un número finito de discontinuidades, entonces prueba que tal representación es única. Quedaba abierto el problema de probar la **unicidad** (de tal descomposición) en el caso general; es decir, ¡investigar qué sucede si la función tuviera un número infinito de discontinuidades! . . . En 1870 Cantor logra unos primeros resultados al establecer que si las discontinuidades estuvieran distribuidas de un modo " conveniente" entonces se tiene la unicidad de la representación. Tal modo significa que las discontinuidades deben satisfacer ciertas condiciones, pero explicar estas condiciones de un modo preciso " no es fácil", (¡está entrando en el mundo del infinito!). Posteriormente, en el período 1870-72. logra resolver el problema de la unicidad de la representación de una función en su serie de Fourier. Se remarca que Cantor obtiene la unicidad si en cada período hay infinitas discontinuidades, pero " no tantas "; es decir, pareciera sentir la necesidad de conjeturar que hay infinitos " mayores " que otros infinitos. Por esa época se conocía a los infinitos numerables, así como los infinitos no numerables, como los números reales.

Cantor estaba entrando a dominios muy delicados ya que surgía el infinito en el horizonte. Recordemos que Euclides afirmó:

> "dado cualquier cantidad finita de números primos, siempre existe uno más".

Es decir, existen infinitos números primos en potencia, no en acto, pero, por esta época Cantor afirma: "para tener la unicidad de la representación se debe aceptar que el conjunto de discontinuidades debe ser un conjunto infinito **en acto**" Además, sus investigaciones lo conducen a tener que comparar entre sí diferentes conjuntos infinitos y llega a descubrir que . . . ¡¡había conjuntos infinitos más grandes que otros conjuntos infinitos!! De esta manera Cantor llega al paraíso temido por miles de años. Exclama: **"Lo veo, y no lo creo "**. Estos resultados fueron un tanto "peligrosos" para el ambiente de entonces y recibió durísimas críticas de L. Kronecker y llegó a oponerse para que Cantor fuera profesor de la Universidad en Berlín. Sus trabajos fueron publicados en 1883 en "Fundamentos para una teoría general. de conjuntos. Una investigación matemática-filosófica sobre la teoría del infinito".

HACIA UNA ASOMBROSA CADENA. ALGUNOS EJEMPLOS.

El Cardinal de los Números Naturales y Reales

Demos la idea. Sea el conjunto de los números naturales N = {1 ,2 ,3, ..., n, ...}, un conjunto infinito. El número cardinal asociado a N es la clase de equivalencia de todos los conjuntos que están en relación uno a uno, biyectiva, con los elementos de N. A este número cardinal Cantor le llamó "Alef" subcero, $\aleph_0$. Por ejemplo, si

P = {2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...}, entonces N y P tienen el mismo cardinal pues

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

Si Z es el conjunto de los números enteros, entonces N y Z tienen la misma cardinalidad. Ahora veamos al conjunto de los números racionales Q; se sabe que, entre dos números racionales, muy próximos entre sí, hay infinitos números racionales. Cantor tuvo el ingenio de probar que se pueden contar los elementos de Q, es decir que N y Q tienen el mismo cardinal, el numerable. Observemos que estamos teniendo conjuntos infinitos diferentes pero que tienen el mismo número cardinal, el del numerable. Y el conjunto de los números reales R, ¿tiene el mismo cardinal que N? . . . En forma sorprendente Cantor dijo que R es un conjunto infinito "más grande" que N; usando un ingenioso método (de la "diagonal") prueba que no existe tal biyección entre N y R. Por simplicidad verifica primero que el intervalo (0,1) no es un conjunto numerable; luego que el intervalo abierto arbitrario (a, b) no es numerable. Y finalmente se prueba que la recta R no es numerable. Cantor llamó al cardinal de R el Alef subuno $\aleph_1$.

La Naturaleza de los Cardinales Infinitos

Si X es un conjunto (no vacío), $\bar{X}$ denotará su número cardinal. Sean A y B dos conjuntos, se define $\bar{A} \leq \bar{B}$ si existe una correspondencia biyectiva entre todos los puntos de A con un subconjunto de puntos de B. Por ejemplo, $\bar{N} \leq \bar{Q}$ pues

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \end{array}$$

Se observa que $\bar{N} \leq \bar{Q}$ no es una contradicción pues se tiene $\bar{N} = \bar{Q} = \aleph_0$. Ahora Cantor define: $\bar{A} < \bar{B}$ si $\bar{A} \leq \bar{B}$ pero no existe una correspondencia biyectiva entre A y B. Por ejemplo, si C, es el número cardinal del continuo R, entonces $\aleph_0 < C$ pues se tiene

$$\begin{array}{lccccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ (0,1): & \frac{1}{\pi} & \frac{1}{2\pi} & \frac{1}{3\pi} & \frac{1}{4\pi} & \frac{1}{5\pi} & \ldots & \frac{1}{n\pi} & \ldots \end{array}$$

de esta manera se tiene $\bar{N} \leq \overline{(0,1)}$ pero no existe una correspondencia biyectiva entre N y (0,1), como ya hemos visto. Por otro lado, se verificó que si $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

La Conjetura de Cantor

"Si $\bar{A} \leq \bar{B}$ y $\bar{B} \leq \bar{A}$, entonces $\bar{A} = \bar{B}$".

Cantor luchó por algún tiempo por demostrar esta conjetura en forma satisfactoria pero no tuvo éxito, lo que le produjo ciertos estados depresivos. En forma independiente la conjetura fue probada, en forma independiente, por Ernst Schröder en 1896, y por Félix Bernstein en 1898; por este motivo en la literatura se le conoce como el "teorema de Cantor-Bernstein-Schröder". Como corolario se tiene: Si I es el conjunto de los números irracionales, entonces se tiene $\bar{I} = C$ (continuo).

El Teorema de Cantor

Cantor continúa en busca de resultados en este misterioso mundo del infinito. Así se plantea: **¿existen conjuntos A tal que $C < \bar{A}$?**, donde C es el cardinal del continuo R. Respecto a esta cuestión Cantor consultó a Richard Dedekind si existe una correspondencia biyectiva entre el intervalo (0,1) y el cuadrado S que se construye sobre él. Cantor conjeturó que tal correspondencia **no** existiría; ¡pero esto no fue cierto! ... Tal correspondencia si existe, es decir, se tiene $\bar{S} = \overline{(0,1)} = C$. Entonces, ¿dónde habría que buscar conjuntos cuyos números cardinales sean " más grandes" que C? ... ¿existen estos conjuntos? Se observó que relacionar (0,1) con el cubo construido sobre él, tampoco se consiguen conjuntos con cardinales mayores que C. Así las cosas, surgiría la sensación que C sería el último cardinal transfinito; pero . . . en 1891, ¡Cantor encontró tales conjuntos de un modo insospechado y simple! Cantor había llegado al paraíso maravilloso del universo infinito: " pudo construir no uno sino infinitos números cuyos cardinales son mayores que C!! Construyó una cadena ordenada por la relación " menor", visto antes, de tales números. Veamos la idea. Sea A un conjunto; la potencia de A es definida siendo el conjunto P(A) de todos los subconjuntos de A. Por ejemplo, si A tiene n elementos, entonces $\overline{P(A)} = 2^n$. Cantor prueba el esencial resultado:

Teorema de Cantor. Si A es cualquier conjunto, entonces $\bar{A} < \overline{P(A)}$.

De esta manera, como corolario de este teorema, se tiene la asombrosa cadena creciente de conjuntos infinitos:

$$\aleph_0 < C < \overline{P(0,1)} < \overline{P(P(0,1))} < \overline{P(P(P(0,1)))} < \ \ldots$$

Así, esta cadena dice que existen infinitos conjuntos infinitos, uno mayor que el anterior, todos ellos mayores que el cardinal de los números reales. Luego Cantor tuvo la dura tarea de construir una aritmética para estos elementos transfinitos.

La Hipótesis del Continuo de Cantor

Bien, Cantor continúa haciéndose preguntas: sabemos que $\aleph_0 < C$; ¿habrá algún conjunto que como cardinal tiene a tal que $\aleph_0 < \beta < C$?. Es decir, ¿habrá un conjunto infinito no-numerable que tenga cardinal menor que el del conjunto de los reales? . . . Cantor investigó esta cuestión, pero no tuvo éxito; por ello, en 1877, formuló su famosa conjetura:

"la hipótesis del continuo":

> "No existe una colección infinita con un cardinal entre el de los números naturales y el de los números reales ".

Cantor estaba convencido de que su conjetura era verdadera pero no pudo probarla y esto, posiblemente, le causó severos estados de depresión y su salud no era buena. Cantor falleció sin que conociera como quedaba su notable hipótesis. David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemática, 1900, propuso como primer problema a ser resuelto en el siglo XX, de los 23 que propuso, a la Hipótesis del Continuo, esto como un reconocimiento y un homenaje a George Cantor y a su teoría de conjuntos.

La Hipótesis del Continuo fue atacada por notables matemáticos; así Hilbert trató de probarla, pero no tuvo éxito; Aleksandrov probó la hipótesis para conjuntos de Borel. E. Zermelo investigó los fundamentos de la teoría de conjuntos; Kurt Gödel, en 1938, probó que la hipótesis **no es falsa**, y en 1964 Paul J. Cohen (de la Universidad de Chicago} probó que la hipótesis **no es verdadera**. Se debe remarcar que las demostraciones de estas conclusiones fueron hechas dentro de ciertos puntos de vista matemático (hubo diferentes corrientes filosóficas de la matemática). Por otro lado, y de un modo general se tiene: sea A un conjunto arbitrario, entonces se tiene $\bar{A} < \ P(\bar{A})$ y en este contexto el matemático Hausdorff estableció la Hipótesis del Continuo Generalizado:

"no existen conjuntos infinitos A y B tales que $\bar{A} < \bar{B} < P(\bar{A})$".

Posteriormente la teoría de conjuntos fue sometida a un análisis crítico sobre su consistencia matemática, y así, la Hipótesis del Continuo continuó siendo un tema de investigación.

ALGUNAS REFLEXIONES PEDAGÓGICAS

El objetivo de estas breves reflexiones es contribuir a que en las universidades y aún en los colegios se conozca a G Cantor y su obra en un contexto simple, motivador y no técnico.

La teoría de conjuntos es fundamental en la enseñanza de matemática. Debe ser enseñada con el rigor adecuado al nivel de los estudiantes que se tenga.

Lo anterior exige que tengamos profesores con la suficiente formación matemática y esto , en algunos países, es un problema porque la matemática no es comprendida en su valor nacional, y en consecuencia hay descuidos en muchos centros de formación de profesores a nivel de secundaria.

A nivel de universidad el panorama, en general, de la teoría de conjuntos es no buena ya que ella, creemos, no es bien conocida en sus fundamentos ni en su historia y por ello su enseñanza es, a veces, distorsionada y no adecuada a la realidad de un mundo técnico y académico actual.

Conocer la vida de Cantor y la evolución de su obra puede despertar vocaciones en los jóvenes estudiantes de ciencias; en todo caso es un complemento útil a que la enseñanza de la matemática sea más rica y "humana".

Los anteriores argumentos nos conducen a que las universidades ofrezcan cursos sobre historia de la matemática cuidadosamente elaborados. Tales cursos contribuirían a que nuestros profesores sean cultos en la ciencia que enseñan. Ahora hay libros muy motivadores, ilustrados y escritos por especialistas, sobre la historia de la matemática.

ALGUNAS LECTURAS RECOMENDADAS

E. T. Bell: Los Grandes Matemáticos. Buenos Aires. Losada. 2010.

C. Boyer: Historia de la Matemática. Alianza. Madrid. 1996.

I. Stewart: Historia de las Matemáticas. Crítica. Barcelona. 2008.

G.E. Piñeiro: Cantor. El Infinito en Matemáticas, Grandes Ideas de la Ciencia. España. 2013.

F. Rossell i Pujós: El Infinito. ¿Es un Viaje o un Destino? Grandes ideas de la Ciencia. España. 2019.

George Cantor: Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Dover Publications, INC. N.Y. 1915.

Histórico

Recebido: 01 de abril de 2024.
Aceito: 05 de junho de 2024.
Publicado: 26 de julho de 2024.

Como citar – ABNT

FERNÁNDEZ, Alejandro Ortiz. ¿Qué tan Grande es el infinito? ¡El infinito … ya no nos asusta! **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 49, e2024001, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024002.id657

Como citar – APA

Fernández, A. O. (2024). ¿Qué tan Grande es el infinito? ¡El infinito … ya no nos asusta!. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (49), e2024002. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024002.id657

Número temático organizado por

Iran Abreu Mendes