Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 49, e2024006
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id661

# Trazando el camino: Integración de la Historia de las Matemáticas en la formación docente para un cambio de paradigma

## Charting the Path: Integration of the History of Mathematics in Teacher Education for a Paradigm Shift

## Traçando o Caminho: Integração da História da Matemática na Formação de Professores para uma Mudança de Paradigma

Roberto Vidal Cortés[1]

### RESUMEN

En este artículo, presentaré la importancia de integrar la Historia de las Matemáticas en la formación del profesorado de Matemáticas, la que es crucial para comprender contextos históricos y superar el enfoque descontextualizado y despersonalizado de su enseñanza. Al respecto, argumento la necesidad del cambio de paradigma a través de la puesta en escena de la vigilancia epistemológica de los objetos de enseñanza, proponiendo algunos ejemplos de tareas y actividades de recontextualización histórica para su implementación y reflexión en la formación docente.
**Palabras clave:** Historia de las Matemáticas, vigilancia epistemológica, formación docente en Matemáticas, recontextualización.

### ABSTRACT

In this article, I will present the importance of integrating the History of Mathematics into Mathematics teacher education, which is crucial for understanding historical contexts and overcoming the decontextualized and depersonalized approach to its teaching. In this regard, I argue for the necessity of a paradigm shift through the enactment of epistemological surveillance of teaching objects, proposing some examples of tasks and activities for historical recontextualization for their implementation and reflection in teacher education.
**Keywords:** History of Mathematics, epistemological surveillance, mathematics teacher education, recontextualization.

### RESUMO

En este artículo, presentaré la importancia de integrar la Historia de la Matemáticas en la formación del profesorado de Matemáticas, la que es crucial para comprender contextos históricos y superar el enfoque descontextualizado y despersonalizado de su enseñanza. Al respecto, argumento la necesidad del cambio de paradigma a través de la puesta en escena de la vigilancia epistemológica de los objetos de enseñanza, proponiendo algunos ejemplos de tareas y actividades de recontextualización histórica para su implementación y reflexión en la formación docente.
**Palavras-chave:** Historia de la Matemáticas, vigilancia epistemológica, formación docente en Matemáticas, recontextualización.

1 Doctor en Ciencias de la Educación, área Didáctica de la Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Pontificia Universidad Católica de Chile. Magíster en Didáctica de la Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Profesor de Matemáticas, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Académico de la Facultad de Educación de la Universidad Alberto Hurtado, Chile. Email: rvidal@uahurtado.cl

## INRODUCCIÓN

En el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemáticas, estudios como los de Vidal, Quintanilla y Maz (2010), así como los de Torres, Guacaneme y Arboleda (2015), resaltan la importancia de integrar la Historia de la Matemáticas (HM) en la formación de los profesores de Matemáticas. Este enfoque ha ido cobrando relevancia en las últimas décadas como respuesta a la necesidad de superar la visión estática y dogmática de las Matemáticas en las aulas. Sin embargo, esta integración se vuelve aún más crucial en la actualidad, dada la proliferación de recursos tecnológicos en el mundo postpandemia, como los numerosos videos educativos de acceso gratuito en plataformas como YouTube, el uso persistente de libros de texto y el continuo desarrollo de herramientas basadas en Inteligencia Artificial.

En este contexto, la HM puede ser fundamental para diseñar actividades que promuevan el entendimiento de los contextos históricos en los que surgieron los conceptos matemáticos, destacando las controversias, los avances y los retrocesos que caracterizan el desarrollo de esta disciplina. Sin embargo, es común encontrar que los recursos de aprendizaje actuales se centran principalmente en la enseñanza de conceptos y propiedades, dejando de lado los procesos de elaboración desarrollados por las comunidades científicas. Esto conduce a una visión de la historia de las Matemáticas como una mera acumulación de conocimientos despersonalizados, descontextualizados y deshistorizados.

La inclusión de la HM permite humanizar el conocimiento matemático al contextualizarlo y temporalizarlo. Como señala Chevallard (2005), esto implica una transformación del saber científico, inicialmente impersonal, en un conocimiento susceptible de ser enseñado. Además, la HM facilita la comprensión de las razones que motivaron la creación del conocimiento matemático y el surgimiento de ideas clave, revelando las presiones, motivaciones y prácticas que influyeron en dicho proceso. Esto nos lleva a reconocer el dinamismo inherente a la ciencia, en particular a las Matemáticas.

Tradicionalmente, tanto en la enseñanza como en la divulgación científica, se ha puesto énfasis en los resultados, presentando a los científicos como genios aislados cuyas obras deben ser veneradas y aprendidas. Sin embargo, este enfoque limita la capacidad de los estudiantes para reflexionar sobre el mundo que les rodea, cuestionarlo y participar en su transformación, manteniendo un sentido ético y de justicia social.

En la primera parte de este documento, se argumentará la necesidad de un cambio de paradigma en las prácticas docentes en las aulas de Matemáticas, identificando la explicación por parte de los docentes como una característica del modelo epistemológico predominante en dichas prácticas. Posteriormente, se presentará el concepto de vigilancia epistemológica como fundamento para una mayor incorporación de la HM en la formación docente. Finalmente, se ofrecerán dos ejemplos de propuestas para trabajar con los futuros profesores de Matemáticas.

## MARCO TEÓRICO

Aquí desarrollaré algunos sustentos teóricos para fundamentar por qué la Historia de la Matemáticas (HM) es una componente meta-teórica adecuada para orientar la formación de docentes en Matemáticas. Por un lado, examinaré la necesidad de un cambio de paradigma en la enseñanza de Matemáticas, y por otro lado, exploraré el concepto de Vigilancia Epistemológica, que, como veremos, está estrechamente relacionado.

## La necesidad de un cambio de paradigma respecto de la docencia en Matemáticas

A menudo se asocia el acto de "enseñar" con el de "explicar", al punto de que, para muchos, la habilidad de explicar claramente es lo que define a un buen profesor. Esta concepción ha influido notablemente en la enseñanza de las Matemáticas, donde el modelo docente clásico implica que el profesor "transmite" el contenido y el estudiante lo recibe pasivamente. En una investigación realizada en 2020 sobre la percepción de la preparación para analizar, usar y seleccionar textos escolares, ocho profesores reconocieron que estas tareas las realizan mayormente utilizando el sentido común, ya que rara vez se enfrentaron a ellas durante su formación pedagógica. Además, se observa que los docentes buscan en los textos escolares "buenas explicaciones" sobre los conceptos y procedimientos, lo que refleja un enfoque teoricista-tecnicista en la enseñanza, donde el profesor es valorado principalmente como "explicador". Esta atribución no es fortuita, ya que la historia muestra que el papel del maestro ha estado históricamente asociado con ser un buen explicador.

Los primeros registros de actividad Matemáticas, como los papiros egipcios y las tablillas babilónicas, muestran que la enseñanza de las Matemáticas se basaba en la explicación de procedimientos para resolver problemas. Por ejemplo, el papiro de Rhind es una colección de 84 problemas. Uno de ellos, el problema 50, dice "calcular el área de un campo circular cuyo diámetro es 9 jet". La solución la expone mediante los siguientes pasos: resta al diámetro 1/9 del él, lo cual da 1. Quitando al diámetro esa parte, obtienes 8. Multiplica 8 veces 8, por lo que obtendrás 64, siendo ésta el área del círculo[2].

Las tablillas, por su parte, también se basaban en explicaciones de procedimientos para determinar la solución de problemas. Un ejemplo de aquello es el "método akadio", conocido como el método de completar cuadrados para resolver ecuaciones de segundo grado (Puig, 2006).

Hacia el año 300 a.C. en Grecia, Euclides escribió lo que se convertiría, sin lugar a dudas, en la obra Matemáticas más influyente de los siguientes 2000 años, destacando no solo por su brillante presentación deductiva, sino también por haber establecido el formato para la redacción de cualquier documento que aborde una teoría científica: "Los Elementos". Compuesta por 13 libros, esta obra expone los conocimientos matemáticos a partir de proposiciones iniciales (postulados) y conceptos básicos, tejiendo así una sólida red de proposiciones demostrables (teoremas), cada uno de ellos acompañado de su correspondiente prueba (demostración). Desde entonces, "Los Elementos" han sido considerados un referente en la escritura científica en Matemáticas, siendo reinstalados como modelo por la escuela de los Bourbaki en el siglo XX. Esta obra sentó las bases de un enfoque de enseñanza caracterizado por su tendencia teoricista, el cual ha predominado en la educación Matemáticas hasta la actualidad, manteniendo la tradición de la explicación. En sus páginas, las numerosas demostraciones constituyen una práctica de explicación en un contexto de generalidad,

2 Si bien una examinación a fondo permite inferir que para ellos el área del círculo la consideraban igual al área de un cuadrado cuyo lado mide 8/9 del diámetro.

a diferencia de obras anteriores que se centraban principalmente en ejemplos de problemas específicos, marcando así una transición de la explicación de procedimientos a la explicación de propiedades. Posteriormente, otras obras como "Sobre las revoluciones de los orbes celestes" (Copérnico, 1543) o "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" (Newton, 1687), son ejemplos notables de textos escritos en otras disciplinas siguiendo el mismo enfoque euclidiano.

En 1701, se publicó una obra póstuma de René Descartes, titulada "Regulæ ad directionem ingenii" (Reglas para la dirección del espíritu), la cual quedó incompleta tras su fallecimiento. En esta obra, Descartes aborda la traducción de problemas a ecuaciones. En relación a esto, Puig (2006) menciona que en su libro "Mathematical Discovery", publicado por primera vez en 1962, Polya retoma estas reglas de Descartes y las reformula como pasos para la resolución de problemas utilizando el álgebra, como se muestra a continuación:

**Figura 1**–La resolución de problemas en la historia de las Matemáticas

(1) En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)

[…]

(2) Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

[…]

(3) Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)

[…]

(4) Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI) (Polya, 1966, pp. 27-28)

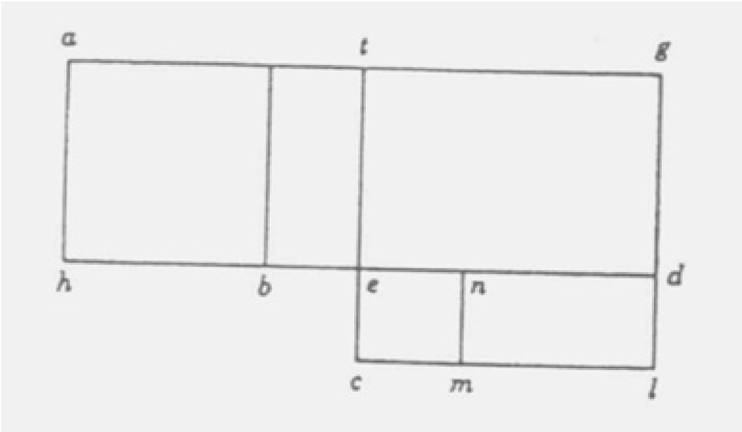
**Fuente**: Puig (2006)

Esto resalta otro aspecto relevante: la necesidad de establecer métodos para abordar tareas específicas. En la década de 1960, Polya se dedicó al estudio de la resolución de problemas matemáticos con el objetivo de mejorar su enseñanza. Su enfoque heurístico, como se evidencia en el recuadro anterior, está completamente justificado dado el modelo predominante de "explicación" en la enseñanza.

En la historia del álgebra, la contribución del astrónomo y matemático persa Muhammed ibn Musa Al-Khwarizmi en el siglo IX d.C. no escapa a este patrón. En su obra "Al-Jabr w'al-Muqabala", demuestra cómo resolver seis tipos de ecuaciones. Este enfoque detallado, que explica el proceso paso a paso, se ilustra con el ejemplo de cómo resuelve la ecuación $x^2 + 21 = 10x$:

**Figura 2** – Resolución geométrica de la ecuación $x^2 + 21 = 10x$

Haciendo el cuadrado ab que representa a $x^2$ (unidades de área) y el rectángulo bg que representa 21 (unidades de área), el rectángulo total hg que comprende el cuadrado ab y el rectángulo bg debe tener área 10x, por lo tanto, el lado ag debe medir 10 unidades.




**Fuente**: Moreno J. & Lilian W. (2005)

El enfoque predominante en la enseñanza basado en la explicación se establece de manera natural, inspirado por las grandes obras Matemáticas y de otras disciplinas, como he señalado anteriormente. En el siglo XX, el auge del estructuralismo como corriente filosófica permeó la práctica Matemáticas, otorgando aún más importancia a la comunicación a través de explicaciones. El estilo euclidiano, fortalecido por Bourbaki dentro del marco del estructuralismo, se ilustra claramente en el siguiente extracto:

**Figura 3** – Estilo euclidiano para introducir un concepto

**1. DERIVATIVE OF A VECTOR FUNCTION**

DEFINITION 1. *Let* $\mathbf{f}$ *be a vector function defined on an interval* $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ *which does not reduce to a single point. We say that* $\mathbf{f}$ *is differentiable at a point* $x_0 \in \mathrm{I}$ *if* $\lim\limits_{x \to x_0, x \in \mathrm{I}, x \neq x_0} \dfrac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}$ *exists* (*in the vector space where* $\mathbf{f}$ *takes its values*); *the value of this limit is called the first derivative* (or simply the *derivative*) *of* $\mathbf{f}$ *at the point* $x_0$, *and it is denoted by* $\mathbf{f}'(x_0)$ *or* $\mathbf{Df}(x_0)$.

If $\mathbf{f}$ is differentiable at the point $x_0$, so is the *restriction* of $\mathbf{f}$ to any interval $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ which does not reduce to a single point and such that $x_0 \in \mathrm{J}$; and the derivative of this restriction is equal to $\mathbf{f}'(x_0)$. Conversely, let J be an interval contained in I and containing a neighbourhood of $x_0$ relative to I; if the restriction of $\mathbf{f}$ to J admits a derivative at the point $x_0$, then so does $\mathbf{f}$.

**Fuente**: Bourbaki (1949)

El estilo del quehacer matemático, fundamentado en un enfoque estructuralista y revitalizado por el euclidianismo, refleja en su forma de comunicar las Matemáticas la influencia de presentar la enseñanza desde una perspectiva deductivista de conceptos, definiciones y propiedades de los objetos a enseñar. Esto ha normalizado una pedagogía dogmática y absolutista, con una marcada tendencia a la exclusión al tratar las Matemáticas como un lenguaje abstracto reservado para unos pocos privilegiados. En el ámbito escolar, este entendimiento se limitaba a explicaciones sobre procedimientos, lo que relegaba al estudiante a la ejecución de rutinas y la memorización de fórmulas y propiedades para su aplicación en la resolución de problemas.

El fracaso de la Reforma de las Matemáticas Modernas evidenció que este enfoque de enseñanza basado en la instrucción dogmática no era adecuado para las aulas. Se creía que la repetición de rutinas y la automatización de procesos serían suficientes, pero esto no garantizaba la comprensión real del contenido por parte de los estudiantes. Los avances tecnológicos han vuelto obsoletas algunas tareas relacionadas con cálculos y procedimientos en general, y la Inteligencia Artificial plantea el desafío de cómo incorporar estos avances al aula de Matemáticas para abordar los problemas del siglo XXI.

Desde diversas perspectivas teórico-filosóficas en Didáctica de las Matemáticas, se reconoce la obsolescencia del modelo docente clásico centrado en el "buen explicador". En la actualidad, se requieren competencias que vayan más allá de la habilidad en cálculos, como la toma de decisiones, la argumentación y la modelación Matemáticas, que se alineen con la revolución digital en la que estamos inmersos. Es necesario que los profesores transiten desde la enseñanza vía la explicación a ser diseñadores, implementadores y evaluadores de situaciones de aprendizaje que promuevan la participación activa de los estudiantes en la construcción de conocimientos. Esto implica una revisión en los discursos y prácticas educativas, así como el desarrollo de recursos pedagógicos que estimulen la resolución de problemas y la construcción colaborativa de conocimiento.

Los avances teóricos en Didáctica de las Matemáticas y las herramientas tecnológicas disponibles nos indican que estamos avanzando en esta dirección. Diseñar, implementar y evaluar actividades de aprendizaje matemático es hoy el eje central de un nuevo paradigma docente en construcción. Aunque existen diversas aproximaciones para lograr este cambio, en el siguiente apartado presentaré un constructo tomado de la Didáctica de la Matemáticas francesa que considero puede guiar acciones concretas en la formación del profesorado

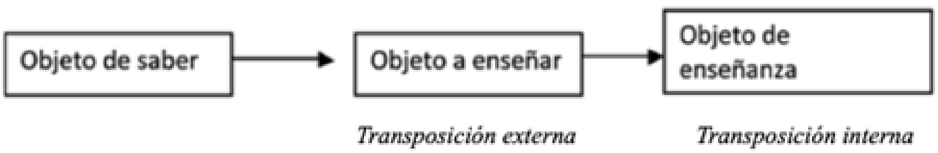
## Vigilancia Epistemológica

Tres preguntas a cualquier persona mayor de edad y sus respectivas respuestas nos invitan a reflexionar y entrar en el referente teórico de esta comunicación ¿Qué es "hacer Matemáticas" para Ud.?, ¿Con qué asocia "éxito" y "fracaso" en Matemáticas?, ¿Qué le gusta y qué no de las Matemáticas? "Hacer Matemáticas" les recordará probablemente su etapa escolar, por lo que hacer Matemáticas en ese contexto, consistía en hacer ejercicios, cálculos, emplear fórmulas. El éxito posiblemente lo asociarán con la rapidez en realización de cálculos, el conocimiento de ciertos atajos y tal vez la memorización de algunas propiedades, mientras que el fracaso, con el haberse equivocado en un "signo", no entender realmente para qué se les pedía hacer cosas sin sentido o no haber podido captar esa esencia abstracta de las Matemáticas. Esto último conduce a las respuestas esperables en cuanto a lo que les gusta o no de las Matemáticas, lo que devela prácticas docentes enmarcadas en la mecanización, seguimiento de rutinas y foco en el resultado de un determinado ejercicio. En la Historia de la Educación Matemáticas, centrarse en estos aspectos del que-hacer matemático en el aula, fue producto del fracaso de la Reforma de las Matemáticas Modernas, la que tuvo lugar durante los años de 1960 y que en América Latina convirtió los currículos oficiales en copias de la actividad científica Matemáticas, introduciendo desarrollos modernos de conocimiento tales como la Lógica y la Teoría de Conjuntos, los que se pensaban como indispensables para el aprendizaje de las Matemáticas, incluso desde los primeros años de escolaridad (Kline, 1973). Los números enteros se debían obtener mediante una construcción vía clases de equivalencia, se introdujo el estudio del supremo de un conjunto de números para transitar de los racionales a los reales, se reemplazó la geometría sintética de Euclides en una geometría con perspectiva vectorial y analítica, un introductorio estudio de las estructuras algebraicas, entre otros temas que, hasta ese entonces, tenían un lugar en la educación terciaria.

Chevallard (2005) en su Teoría de la Transposición Didáctica, se posiciona revolucionariamente para aquel entonces, en una perspectiva epistemológica que hace ver por primera vez, la existencia de dos tipos de Matemáticas: las Matemáticas formales o científicas que denominada como Saber Sabio y las Matemáticas escolares, las que son producto de una serie de decisiones y procesos en los que intervienen distintos actores, desde los matemáticos productores de conocimiento, que para presentar a la comunidad científica sus hallazgos y propuestas, han de despersonalizar, descontextualizar y des-historizar ese nuevo saber construido. Ese saber tiene los rasgos de abstracción propios de la época en que son comunicados y discutidos por la gente de ciencia. No está pensado para ser enseñable en la escuela, sino para ser compartido y examinado por matemáticos profesionales. Un proceso absolutamente diferente ocurre cuando se pretende hacer enseñable un saber científico y este es el gran aporte de esta teoría de la transposición didáctica, la que postula la existencia de un saber sabio o científico a un saber enseñado (en una escuela, liceo o incluso en la educación terciaria). Este proceso se puede determinar a través de una transposición externa, que produce una propuesta de saber enseñado, denominada saber a enseñar, que tal como se indica en su nombre, establece las condiciones bajo las cuales ese saber científico de referencia, puede transformarse en una propuesta educativa en algún cierto nivel. Se suele denominar externa, pues es "externa al docente", es decir, en esas instancias de transformación de saber sabio a saber a enseñar, no hay participación alguna de parte de los docentes.

Es tarea del docente participar en el proceso de transposición interna, la que administra en conjunto con las orientaciones curriculares o del programa oficial y donde pone a prueba su competencia en el diseño de actividades de aprendizaje.

**Figura 4** – Procesos de transposición externa e interna.




**Fuente**: Tomado de Alfaro y Cheverría (2012).

No obstante, este proceso, o más bien multiproceso, que conlleva la transformación de un objeto de saber científico en un objeto de enseñanza, plantea la cuestión de su legitimidad: ¿Cómo podemos garantizar que el objeto de enseñanza es una adecuación válida del objeto de saber, sin perder su esencia? Esta interrogante resalta la brecha existente entre ambos tipos de objetos, evidenciando la disparidad entre la Matemáticas científica y la que se enseña en el ámbito escolar. Chevallard, en este contexto, resalta la importancia de prestar atención a las posibles anomalías que pueden surgir durante los procesos de transposición externa e interna. Advierte sobre el riesgo de trivializar el conocimiento científico al convertirlo en un saber enseñado, que luego se integra en la cultura general, lo que conlleva un peligro inherente.

En la Teoría de la Transposición Didáctica, el concepto de Vigilancia Epistemológica aborda específicamente esta problemática sobre los docentes y su responsabilidad de transformar el saber a enseñar en un saber enseñado efectivo. Así, la banalización e incluso la mutilación de los objetos de saber se convierten en fenómenos asociados a los procesos de transposición didáctica.

## Un ejemplo de recontextualización para introducir los números complejos

Partamos de la premisa fundamental de que, para lograr el compromiso de los estudiantes con una tarea Matemáticas, es imprescindible que perciban una necesidad inherente en ella. Bajo el modelo del profesor como mero transmisor de conocimiento, el aprendizaje se convierte en una imposición de lo que se debe estudiar, sin considerar la necesidad real de dicho conocimiento. Sin embargo, al introducir la problematización en el aula como una estrategia clave, la necesidad de estudiar algo surge de manera intrínseca a partir de la situación problemática planteada a los estudiantes. Esto coincide con las diversas corrientes de la Didáctica de las Matemáticas que colocan la resolución de problemas como el núcleo de la actividad Matemáticas.

Recontextualizar el conocimiento matemático establecido en un programa o currículo escolar se convierte en una tarea crucial al diseñar clases. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta recontextualización debe ser pensada desde una perspectiva pedagógica, considerando el contexto específico de los estudiantes. Desde un enfoque didáctico-epistemológico, podemos buscar ideas de recontextualización del conocimiento que se espera reconstruir en el aula. Esto implica recuperar el contexto en el cual el objeto de enseñanza surgió en la historia para abordar algún problema, el cual, en el modelo educativo actual, podría haber sido pasado por alto.

Por ejemplo, el estudio de los números complejos dentro del modelo tradicional del profesor como simple explicador se reduce a la necesidad de extender el conjunto de los números reales para garantizar que todas las ecuaciones de segundo grado tengan soluciones en este nuevo conjunto. Esta motivación inicial se centra en la imposibilidad de resolver la ecuación cuadrática. Sin embargo, según Bagni (2001), se puede explorar una propuesta alternativa para introducir los números complejos a estudiantes de 16 a 18 años, basada en el problema histórico abordado por Bombelli en el siglo XVI, que condujo a la solución de una ecuación cúbica. Esta aproximación histórica puede ser una pista valiosa para motivar el estudio de nuevos conceptos numéricos, como los números complejos.

> …"los efectos de las selecciones que hace un profesor deberán ser verificados de manera experimental: la presencia de esta área experimental refuerza el uso de la HM, al mismo tiempo que cambia los lineamientos de la investigación educativa y brinda un estado epistemológico particular" (Bagni, 2001, p.1)

La propuesta implementada por Bagni se inspira en el trabajo histórico matemático de la resolución de ecuaciones de tercer grado por los italianos Gerolamo Cardano, Nicolo Fontana y Rafaél Bombelli principalmente. De este modo, trabaja con un grupo control al que se le presentan los números complejos desde la perspectiva algebraica predominante, desde la resolución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, para luego despejar la incógnita y proponer que $x = i$ o bien $x = -i$, para luego desde allí seguir la rutina de resolución para otras ecuaciones. El grupo experimental, en cambio, trabajará desde el caso histórico de la ecuación cúbica $x^3-15x-4 = 0$. Los resultados que obtiene refiere a que la aceptación de la solución con números complejos, mejora sustancialmente cuando se utiliza la ecuación cúbica en relación a la cuadrática.

El problema en el que nos encontramos en el caso chileno y en otros países en cuyos currículos de secundaria se introducen los números complejos, es que las ecuaciones de tercer grado están ausentes de los programas. Solo se estudian ecuaciones de grados 1 y 2. En este escenario adverso para la propuesta de Bagni, podría pensarse en modificar el currículo, sin embargo, desarrollaré acá otro posible abordaje para dar sentido a los números imaginarios, como antesala de los números complejos, sin necesidad de estudiar las ecuaciones cúbicas, interpretando la genial idea que desde la geometría ha sido divulgada por los trabajos de Robert Argand y luego por Caspar Wessel, con el propósito de dotar al profesorado de un conocimiento histórico olvidado, que al menos pretenda originar discusión en la colaboración en el profesorado para enfrentar el diseño de actividades y tareas Matemáticas para el aula, idealmente en la formación inicial docente.

La genial idea que se le atribuye a Argand, consiste en ubicar en la recta numérica un número -a, a partir de partirse de la ubicación conocida de a en la recta numérica, aplicando una rotación en 180° en torno al punto de abscisa cero con un ángulo de 180°. En el aula escolar, la práctica de ubicar números negativos en la recta mediante la rotación de los puntos cuyas abscisas sean números positivos, constituye una tarea inicial para comprender la naturaleza del número que será presentado como la "unidad imaginaria".

Es así como la ecuación $x^2 + 1 = 0$, requiere de una solución tal que su cuadrado sea igual a −1. Si i es tal número, entonces debe contar con la propiedad de que $i^2 = -1$, sin necesidad de acudir a expresiones con radicales, salvaguardando el hecho de que el signo radical se utilice como una función real de variable real.

Por otra parte, una composición de dos rotaciones de 180° en torno a un mismo centro, genera la identidad, por lo que al multiplicar a por (-1) dos veces seguidas, se obtendrá el mismo número a.

Dicho de otro modo, siendo P el punto de abscisa b, lo que simbolizaremos como P(b), se tiene que:

$$(Rot(O,180°)^{\circ}Rot(O,180°))(P(b)) = Rot(O,360°)(P(b)) = P(b)$$

puesto que la rotación en 360°, se puede interpretar como la rotación compuesta de dos rotaciones del mismo centro en giros de 180°.

Aquí ya tenemos un resultado importante: multiplicar $b>0$ por $i^2$ corresponderá a una rotación del punto de abscisa b, para encontrar el lugar en la recta del número $-b<0$. Pero también, multiplicar dos veces seguidas por $i^2$, corresponde a la identidad multiplicativa, es decir, por 1, lo que lleva a pensar en la posibilidad de aceptar que el nuevo número satisface que:

$$b \cdot i^2 = -b$$

y que $(b \cdot i^2) \cdot i^2 = b$

Si aceptamos introducir el uso de la propiedad asociativa[3] obtendríamos algo más:

$$(b \cdot i^2) \cdot i^2 = b \cdot (i^2 \cdot i^2) = b$$

mostrando que es necesario en tal caso, admitir que $i^2 \cdot i^2 = 1$. Explorando más allá, si se extendiera la propiedad $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ para el nuevo número $i$, tendríamos que $i^4 = 1$.

Los nuevos desarrollos al parecer llevan por buen camino, pues multiplicar por 1 o lo que es lo mismo ahora, multiplicar por $i^4$ nos otorga otra representación del número real 1. Sería legítimo preguntarse a dónde nos llevarán estas creaciones.

Si multiplicar $b$ por $i^2$ tiene el efecto de una rotación en 180° en torno al cero, obteniéndose $-b$ y multiplicar $a$ por $i^4$ se interpreta como una rotación en 360° en torno al cero, resultando el mismo $b$, otra nueva conjetura asoma: multiplicar por $i$ debería corresponder a una rotación en 90° con respecto al cero.

Esta arriesgada propuesta, muestra por qué los números imaginarios no pueden estar en la recta real, sino en una recta perpendicular a ella por punto de abscisa cero.

Los nuevos números, definidos como producto del real $b$ escogido por la unidad imaginaria, resultan estar situados en una semirrecta perpendicular en el origen, a la recta real y que tiene su punto inicial en tal punto. Si se escogen reales negativos, al multiplicarlos por $i$, la rotación en 90° los dejará situados en la semirrecta opuesta, por lo que en general, el producto $bi$, con $b \in R$, conforma un nuevo "eje graduado", similar a la recta real, perpendicular a ésta en un "origen" para ambos, que logra separar a los nuevos números de la forma $bi$, con $b \in R$, que se suelen denominar "números imaginarios".

Aunque esta propuesta podría expandirse para abordar la noción de números complejos a través de la construcción del Plano de Argand, no profundizaré en ese aspecto, ya que se aleja de los objetivos específicos de este ejemplo.

Lo que resulta notable desde la perspectiva de la construcción de significados, un aspecto a menudo ausente en el modelo educativo predominante, es que esta propuesta facilita la conexión entre los números y el álgebra con la geometría. Por ejemplo, se puede explorar el significado del signo menos al estudiar los números negativos y dar sentido a la igualdad $-(-a) = a$ interpretándolo como el opuesto del opuesto de $a$ es $a$. Además, esta aproximación tiene la ventaja de no requerir el estudio de ecuaciones cúbicas, las cuales, aunque presentes en la historia, implicarían una revisión significativa del currículo escolar, particularmente en el contexto chileno.

3 En rigor, la asociatividad de la multiplicación es la de los números complejos. No podemos aún establecer ciertamente aquello en este momento, por lo cual, aclaramos que se trata de ver que será necesario establecerla, como se señala aquí, para que funcione la extensión de la propiedad de multiplicación de potencias de igual base, en el paso de R al nuevo número y luego a los números complejos.

## Una recontextualización del teorema de Euclides relativo a los catetos a partir de una de las demostraciones del Teorema de Pitágoras

Una revisión rápida de libros de texto, guías de práctica en línea y otros recursos de aprendizaje revela, como señalan Gambia y Ballestero (2010), que la enseñanza de la geometría se centra principalmente en la ejecución de cálculos, la aplicación de fórmulas y la memorización de propiedades. Según Abrate, Delgado y Pochulú (2006), las actividades geométricas presentadas en los libros de texto argentinos tienden a requerir procesos de solución inmediatos o algoritmos, con escaso énfasis en el pensamiento heurístico, reflejando así el modelo docente predominante en geometría.

En este contexto, el Teorema de Pitágoras suele ser abordado de manera unidimensional, a pesar de contar con una amplia variedad de demostraciones disponibles en obras como la de Loomis (1972). Esta diversidad de enfoques ofrece una valiosa oportunidad para explorar la misma propiedad geométrica desde distintas perspectivas, sin embargo, esta riqueza suele pasarse por alto en los diseños de enseñanza, dejando una visión incompleta y excesivamente algebraica del teorema, reduciéndolo a la fórmula simbólica: $c^2 = a^2 + b^2$.

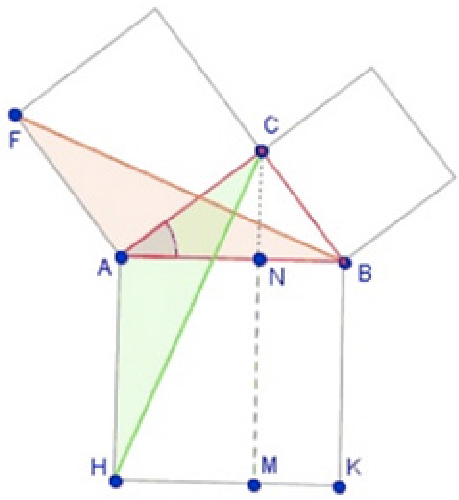
La propuesta que presentamos se fundamenta en la necesidad de recuperar el carácter bidimensional del Teorema de Pitágoras y de despojar a la geometría de su enfoque unidimensional basado en cálculos y fórmulas. Si bien es importante trabajar en este aspecto, creemos que hay un potencial bidimensional interesante que puede ser explorado con un conjunto de actividades.

La primera actividad, titulada con una pregunta, busca introducir una problemática Matemáticas que desafíe a los estudiantes a proponer respuestas y argumentar sus posturas, promoviendo la discusión entre pares. Para contextualizar la actividad, proporcionamos información histórica al inicio.

**Actividad sugerida:**

Con ayuda de una escuadra y una regla, traza un triángulo rectángulo y sobre sus lados construye cuadrados, tal como aparece en la imagen siguiente.

1. ¿Qué relación hay entre los triángulos FAB y HAC? ¿Podría rotarse uno de ellos para obtener el otro? Si así fuera, ¿en torno a qué punto habría que hacer el giro, para que uno de los triángulos quede sobrepuesto sobre el otro?
2. Si los triángulos FAB y HAC se pueden hacer coincidir por rotación, ¿Qué puedes decir de sus áreas?
3. Llama D al vértice que falta nombrar del cuadrado construido sobre el cateto
4. Llama E al vértice del cuadrado construido sobre el cateto y que es colineal con A y C.
5. Llama G al vértice del cuadrado construido sobre el cateto y que es opuesto al vértice C.
6. Considera como base del triángulo FAB el lado . Traza la altura que le corresponde.
7. El área del triángulo FAB se relaciona con el área de uno de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo ABC. ¿Cuál es el cuadrado aludido y cuál es dicha relación?
8. ¿Qué relación hay entre el área del triángulo HAC y el área del rectángulo [HMNA]? Ayúdate del lado como base para ambas figuras, para encontrar su área.
9. ¿Qué se puede decir de las áreas de [ACDF] y [HMNA]? Justifica.




Esta actividad que permite concluir la demostración de Euclides para el Teorema de Pitágoras contiene dos de los tres hechos matemáticos del Teorema de Euclides para el triángulo rectángulo: las áreas del cuadrado ACDF y del rectángulo HMNA son iguales, como también se concluye que el área del rectángulo MKBN es igual al área del cuadrado BGEC.

Habitualmente, el teorema de Euclides relativo a los catetos se suele encontrar en este formato, digamos unidimensional:

Si ABC es un triángulo rectángulo en C, donde a y b son las medidas de los catetos, c representa la medida de la hipotenusa y p y q son las medidas de las respectivas proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa, entonces $a^2 = cp$ y $b^2 = cq$.

Promovemos una perspectiva bidimensional a través de la comparación de áreas de cuadrados y rectángulos, para aprovechar la demostración anterior del Teorema de Pitágoras, por lo que la interpretación en términos de áreas del teorema de Euclides se escribiría así:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al rectángulo cuyos lados consecutivos son la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ésta.

Esta recontextualización aporta con una nueva mirada sobre el teorema de Euclides aprovechando la interpretación de áreas para el teorema de Pitágoras. Con este tipo de conocimiento se puede entrar al mundo de la abandonada álgebra-geométrica, en la que se resuelven ecuaciones cuadráticas mediante construcciones con regla y compás. El problema de resolver ecuaciones del tipo $x^2 = a$, con $a > 0$, desde la perspectiva geométrica puede considerarse como encontrar el lado de un cuadrado que es equivalente a un rectángulo cuyo producto de sus lados consecutivos sea $a$.

Si bien puede escaparse esta propuesta al currículo escolar actual escolar, en la formación inicial docente es un recurso importante para la construcción y dominio de distintas perspectivas interpretativas de los objetos matemáticos y su respectivo análisis para convertirlos en objetos de enseñanza.

## La importancia de los estudios histórico-epistemológicos para un análisis crítico del currículo

Gracias al estudio del contexto histórico del objeto de enseñanza, es posible desestimar algunas propuestas inadecuadas, incluso cuando forman parte del saber oficial promovido por las bases curriculares, como ha sucedido en Chile, tal como se describe a continuación.

El actual Programa de Estudio de Matemáticas para estudiantes de 12-13 años, correspondiente al nivel de octavo grado de Educación Básica en Chile, fue elaborado por el Ministerio de Educación y entró en vigencia en el año 2016. Este programa incluye un apartado sobre habilidades Matemáticas, con un énfasis particular en cuatro de ellas: Representar, Argumentar-Comunicar, Modelar y Resolver Problemas. Estas habilidades están presentes en el currículo de Matemáticas más allá de este programa específico para octavo grado. La habilidad de Representar propone que:

> "los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Así se logra que las expresiones Matemáticas tengan um sentido próximo para los estudiantes" (MINEDUC, Programa de estúdio 8° básico. p.35)

Los niveles para desarrollar la habilidad de Representar se han inspirado en la experiencia de Singapur, donde se ha propuesto un modelo de enseñanza de las Matemáticas basado en el enfoque COPISI, que hace referencia a los tres niveles de representación mencionados en el currículo chileno. Sin embargo, es importante destacar que este enfoque COPISI se originó en la teoría del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner en la década de 1960. Inicialmente concebido como un constructo teórico, este enfoque describe cómo un sujeto que aprende transforma la información en sistemas de representación enactivo (concreto), icónico (pictórico) y abstracto (simbólico), este último relacionado con el lenguaje matemático en el caso que estamos analizando.

Sin embargo, no siempre es posible emplear los tres modos de representación simultáneamente, como se evidencia en estudios histórico-epistemológicos sobre los números enteros. A pesar de ello, el Programa de Octavo Básico proporciona orientaciones sobre cómo facilitar la enseñanza mediante el desarrollo de la habilidad de:

> Representar; k. Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones em contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros); l. Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación;

m. Representar y ejemplificar utilizando analogias, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas. (MINEDUC, Programa de estúdio 8° básico. p.51)

Y más adelante, en el Eje Temático “Números”, presenta el objetivo de aprendizaje 1 (designado por OA 1), junto a indicadores de evaluación:

**Figura 5**–Indicadores de evaluación para el OA 1

| UNIDAD 1 | |
|---|---|
| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | INDICADORES DE EVALUACIÓN |
| Se espera que los estudiantes sean capaces de: | Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje: |
| **OA 1**<br>Mostrar que comprenden la multiplicación y la división de números enteros:<br>› Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica.<br>› Aplicando procedimientos usados en la multiplicación y la división de números naturales.<br>› Aplicando la regla de los signos de la operación.<br>› Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios. | › Representan la multiplicación por -1 de manera concreta; por ejemplo: con situaciones o procesos inversos (estar en contra de, etc.).<br>› Desarrollan la regla de los signos en ejemplos concretos o en la recta numérica: + • + = +; + • - = -; - • + = -; - • - = +.<br>› Representan la multiplicación de números enteros positivos y negativos de forma pictórica (recta numérica) o simbólica.<br>› Aplican la regla de los signos de las multiplicaciones y de las divisiones en ejercicios rutinarios.<br>› Representan, de forma concreta o pictórica, la división de un número negativo por un número natural.<br>› Multiplican números enteros positivos y/o negativos, utilizando la multiplicación de números naturales y la regla de los signos.<br>› Resuelven problemas cotidianos que requieren la multiplicación o división de números enteros. |

**Fuente**: Mineduc (2015)

El análisis de la Didáctica de las Matemáticas y los estudios histórico-epistemológicos sobre la multiplicación de números enteros (Glaser (1981), Alfonso (1999), Gómez (2001), Cid (2002), Cid (2015)) proporcionan una base sólida para aplicar la vigilancia epistemológica y examinar críticamente la propuesta ministerial, así como cualquier otra fuente relevante. Estos estudios convergen en un punto crucial: la multiplicación de números enteros, especialmente en el caso del producto de dos números enteros negativos, no puede ser abordada sin objeciones a través de representaciones no simbólicas. Incluso existen objeciones a algunas propuestas que intentan justificar la regla de los signos para este caso en el nivel simbólico de representación.

Específicamente, Cid (2002) ilustra cómo el uso de representaciones con materiales concretos de neutralización, como fichas bicolores, si bien puede resolver satisfactoriamente los casos de adición de enteros de igual y distinto signo, plantea obstáculos didácticos tanto en el orden en Z como en el campo multiplicativo. Una situación similar se presenta con el empleo de modelos de desplazamiento, siendo la recta numérica el modelo más comúnmente utilizado.

Por otro lado, Gómez (2001) examina en su estudio más de una decena de justificaciones de matemáticos de distintas épocas sobre por qué menos por menos da más, concluyendo que todas estas justificaciones presentan algún tipo de objeción. Su análisis abarca tanto justificaciones que recurren a representaciones concretas y pictóricas como aquellas que son puramente simbólicas.

La gran interrogante que surge es cómo proceder en este caso. ¿Existe alguna solución viable? Aunque la respuesta afirmativa existe, implica definir la regla de los signos en lugar de demostrarla. Es decir, en el proceso de transposición didáctica, nos encontramos ante un objeto de enseñanza que se define como una regla, mientras que en la Matemáticas científica o erudita, esta regla corresponde a una propiedad demostrable (teorema). Esto ocurre cuando se construyen los números enteros como clases de equivalencia a partir de los naturales con el cero, o cuando se considera Z como un subconjunto de R, momento en el cual la regla del producto de dos enteros negativos se asume como demostrada en el caso más general del producto de dos números reales menores que cero.

Lo que se propone en el nivel del Programa de Octavo Básico carece de sustento histórico-epistemológico y, por ende, afecta al diseño de actividades propuestas por el currículo nacional chileno. Esto subraya la importancia de la vigilancia epistemológica como una responsabilidad fundamental del profesorado de Matemáticas.

## REFLEXIONES FINALES

En conclusión, la reflexión sobre la necesidad de un cambio de paradigma en la docencia de las Matemáticas nos lleva a cuestionar el enfoque tradicional centrado en la explicación como estrategia principal de enseñanza. Este modelo, arraigado en la idea de que el buen profesor es aquel que explica claramente, ha perpetuado una pedagogía basada en la transmisión de conocimientos, donde el estudiante asume un papel pasivo en su aprendizaje. Sin embargo, la investigación muestra que esta práctica no siempre conduce a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y puede limitar el desarrollo de habilidades cognitivas más amplias.

La historia de la enseñanza de las Matemáticas revela cómo este enfoque explicativo ha dominado durante siglos, desde los primeros registros de actividad Matemáticas en civilizaciones antiguas hasta la influencia de obras clásicas como "Los Elementos" de Euclides. Aunque estos textos han sentado las bases de la escritura científica en Matemáticas, también han contribuido a la percepción de las Matemáticas como un campo abstracto y exclusivo, accesible solo para unos pocos privilegiados.

La respuesta a este desafío radica en la adopción de un enfoque más participativo y problematizador en la enseñanza de las Matemáticas, donde los estudiantes se involucren activamente en la construcción de su propio conocimiento. Esto implica un cambio en el papel del profesor, de mero transmisor de información a diseñador-implementador y evaluador de experiencias de aprendizaje significativas. Además, requiere una recontextualización del conocimiento matemático establecido, aprovechando la historia y la diversidad de enfoques disponibles para explorar conceptos desde múltiples perspectivas. Este cambio de paradigma no solo promueve una comprensión más profunda de las Matemáticas, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar los desafíos del siglo XXI, donde la capacidad de resolver problemas y pensar críticamente es esencial.

## REFERÊNCIAS

ABRATE, R. S., DELGADO, G. I., & POCHULU, M. D. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *39*(1), 1–9.

ALFONSO, H. (1999). *Menos por menos... Consideraciones previas a una propuesta didáctica.* Revista EMA, 5(1), pp. 68-79 .

BAGNI, G. T. (2001). La introducción de la historia de las Matemáticas en la enseñanza de los números complejos: una investigación experimental en la educación media superior. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en Matemáticas educativa*, *4*(1), 45–62.

BOYER, C. B. **Historia de la matemática**. Alianza. 1999.

CID, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los **números negativos.** En E. Palacián & J. Sancho (Eds.), Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, vol. 2, pp. 529-542). Zaragoza, España: Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.

CID, E. (2015). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los **números negativos (**Tesis de doctorado). Universidad de Zaragoza. http://www.atdtad.org/documentos/obstaculos-epistemologicos-en-la-ensenanza-de-los-numerosnegativos-tesis-doctoral/

CHAVARRÍA, J., & ALFARO, C. (2012). La transposición didáctica: un ejemplo en el sistema educativo costarricense. *Uniciencia*, *26*(1), 153–168.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica : del saber sabio al saber enseñado**. Aique, 2005.

COPERNICO, N. **Sobre las revoluciones (de los orbes celestes)**. Tecnos, 2001.

DESCARTES, R. **Reglas para la dirección de la mente**. Aguilar, 1983.

EUCLIDES. **Los Elementos**. Gredos, 1991.

GASCON, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las Matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en Matemática educativa*, *4*(2), 129–160.

GÓMEZ, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, pp. 257-275. Granada. Universidad de Granada.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition** National Council of Teachers of Mathematics, 1972.

MAZA GÓMEZ, C. **Las matemáticas en el antiguo** Egipto. Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla, 2009.

MINEDUC. **Matemáticas Programa de Estudio Octavo básico**, Santiago de Chile, 2015.

MORENO, J., & LILIAN, W. (2005). Historia de la Matemáticas–Parte 1 Ecuaciones Algebraicas. *Revista De Educación Matemáticas*, *20*(1).

NEWTON, I. **The Principia: mathematical principles of natural philosophy**. University of California Press, 2016.

POLYA, G. **Como plantear y resolver problemas.** Trillas, 1969.

POLYA, G. **Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving**. Wiley, 1968.

PUIG, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las Matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) Matemáticas para el siglo XXI (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

KLINE, M. **El fracaso de la matemática moderna : por qué Juanito no sabe sumar?**. Siglo veintuno, 1976.

KLINE, M. **El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días**. Alianza, 2002.

VIDAL R., MAZ A., QUINTANILLA M. (2010). La Historia de la Matemáticas: Un valioso componente para la Formación del Profesorado de Matemáticas. Revista Chilena de Educación Matemáticas Rechiem. 4(2).

TORRES, L. A., GUACANEME, E. A. & ARBOLEDA, L. C. (2015). La História de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas, Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 16(2), 203-233.

### Histórico

Recebido: 01 de abril de 2024.
Aceito: 05 de junho de 2024.
Publicado: 26 de julho de 2024.

### Como citar – ABNT

VIDAL, Roberto. Trazando el camino: Integración de la Historia de las Matemáticas en la formación docente para un cambio de paradigma. **Revista de Matemáticas, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 49, e2024006, 2024.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id661

### Como citar – APA

Vidal, R. (2024). Trazando el camino: Integración de la Historia de las Matemáticas en la formación docente para un cambio de paradigma. *Revista de Matemáticas, Ensino e Cultura – REMATEC*, (49), e2024006.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id661

### Número temático organizado por

Iran Abreu Mendes