Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura
e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 49, e2024007
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id662

Papel da dimensão epistemológica em pesquisas da didática da matemática

The role of the epistemological dimension in the research on the didactics of mathematics

El papel de la dimensión epistemológica en la investigación de didáctica de las matemáticas

Saddo Ag Almouloud[1]

RESUMO

Este texto de cunho qualitativo apresenta reflexões sobre a importância da dimensão epistemológica nas pesquisas em didática da matemática. Mostra-se que o estudo dessa dimensão é uma fase fundamental para que o pesquisador possa refletir sobre as questões didáticas. O significado dos conceitos, os problemas a eles associados, a posição relativa de um elemento do saber em um saber mais amplo que o engloba, e a variabilidade desses dados segundo períodos e instituições são questões que, entre outras, ajudam a compreender melhor o funcionamento de um sistema didático. As reflexões que se apresentam baseiam-se em trabalhos de vários autores e em exemplos sobre os processos de construção de alguns conceitos e/ou noções matemáticos, tais como os números negativos e a demonstração em matemática. A última parte deste texto concentra-se nos aspectos epistemológicos e didáticos da noção de limite, destacando as dimensões epistemológicas e didáticas da definição formal da noção de limite de uma função real de uma variável real.
Palavras-chave: Epistemologia; Dimensão didática; Obstáculos epistemológicos; Limite de uma função.

ABSTRACT

This qualitative text reflects on the importance of the epistemological dimension in research into mathematics didactics. This pondering demonstrates that the study of this dimension is fundamental for the researcher to reflect on didactic issues. The meaning of concepts and their associated problems, the relative position of an element of knowledge in a broader knowledge that encompasses it, and the variability of these data according to periods and institutions are questions that, among others, help better understand how a teaching system works. The thoughts presented are based on works by various authors and examples about the processes of construction of some mathematical concepts and/or notions, such as negative numbers and demonstrations in mathematics. The last part of this text focuses on the epistemological and didactic aspects of the notion of limit, highlighting the epistemological and didactic dimensions of the formal definition of the notion of limit of a real function of a real variable.
Keywords: Epistemology; Didactic dimension; Epistemological obstacles; Limit of a function.

RESUMEN

Este texto cualitativo reflexiona sobre la importancia de la dimensión epistemológica en la investigación en didáctica de las matemáticas. Esta reflexión demuestra que el estudio de esta dimensión es fundamental para que el investigador reflexione sobre cuestiones didácticas. El significado de los conceptos y sus problemas asociados, la posición relativa de un elemento de conocimiento en un conocimiento más amplio que lo engloba y la variabilidad de estos datos según épocas e instituciones son cuestiones que, entre otras, ayudan a comprender mejor cómo funciona un sistema de enseñanza. Las reflexiones presentadas se basan en trabajos de diversos autores y ejemplos sobre los procesos de construcción de algunos conceptos y/o nociones matemáticas, como los números negativos y demostraciones en matemáticas. La última parte de este texto se centra en los aspectos epistemológicos y didácticos de la noción de límite, destacando las dimensiones epistemológicas y didácticas de la definición formal de la noción de límite de una función real de una variable real.
Palabras clave: Epistemología; Dimensión didáctica; Obstáculos epistemológicos; Límite de una función.

1 Doutorado em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I – França. Professor Titular Livre do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil. CEP: 66075-110. E-mail: saddoag@gmail.com

INTRODUÇÃO

Este artigo tece reflexões sobre a importância de uma análise epistemológica nas pesquisas realizadas na perspectiva da didática da matemática, principalmente, nos estudos que envolvem os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Os resultados dessas reflexões são oriundos de uma pesquisa qualitativa de cunho teórico-metodológico, tendo como base teórica constructos da epistemologia e da didática da matemática.

Entende-se didática da matemática como uma parte da educação matemática cujos estudos focalizam as situações que visam a aquisição de conhecimentos por alunos, estudantes ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características destas situações como das características da aprendizagem que elas possibilitam. Por esse fato, a didática da matemática congrega conceitos de diversas áreas de conhecimentos, como a matemática, a epistemologia, a linguística, a psicologia, a sociologia, a ciência da educação, a antropologia, a filosofia. A particularidade da didática em relação a essas disciplinas se encontra na dimensão epistemológica de sua problemática que considera a especificidade dos conhecimentos em jogo.

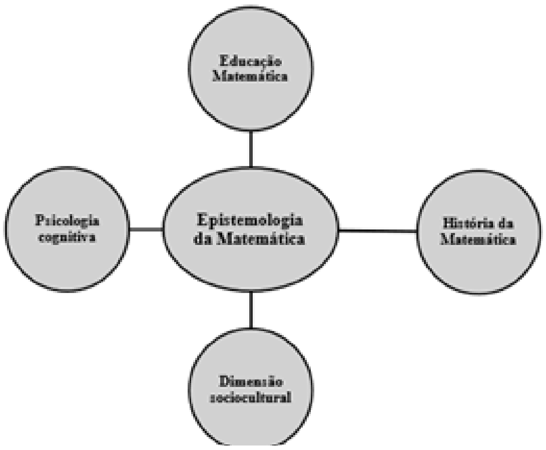
Nesta perspectiva, algumas pesquisas em didática da matemática apresentam fases experimentais, e o trabalho de campo (observações, experimentos, análises das produções dos alunos etc.) é geralmente sustentado por um trabalho preliminar importante relacionado com o estudo do saber matemático. Esse estudo é uma fase fundamental para que o pesquisador possa ter um olhar cuidadoso sobre as questões de cunho didático. O significado dos conceitos, os problemas a eles associados, a posição relativa de um elemento do saber em um saber mais amplo que o engloba, bem como a variabilidade desses dados segundo períodos e instituições, entre outros, são questões que ajudam a compreender melhor o funcionamento de um sistema didático.

A epistemologia surge como o termo mediador (Figura 1) que faz a ligação entre o trabalho histórico, o trabalho da psicologia cognitiva e o trabalho didático. Em outras palavras, a epistemologia desempenha um papel transversal porque interage tanto com a didática e a história da matemática quanto com a psicologia e a dimensão sociocultural. A epistemologia em sentido estrito pode aparecer como o nome erudito da filosofia da ciência ou como o estudo das condições de produção do conhecimento científico.

Os resultados do estudo da dimensão epistemológica de um dado objeto matemático podem se constituir em ferramentas cruciais na construção de situações-problema que têm potencial de desenvolver uma situação fundamental (BROUSSEAU, 1997). Desenvolver uma situação fundamental, segundo Legrand (1993, p. 126), significa rebelar-se contra a implacável lógica da apresentação científica, que é geralmente muito linear, e em que a clareza e o rigor do discurso e a trivialidade das asserções intermediárias muitas vezes resultam em fragmentação e compactação dos significados principais, causando a perda de controle do aluno sobre a validade e a relevância do que lhe é ensinado. Portanto, a epistemologia em ação no trabalho didático deve inventar novas ferramentas, ser cuidadosa com o mero funcionamento da matemática acadêmica e investigar novos territórios. Além disso, o pesquisador em educação matemática não deve se conformar com um ponto de vista interno ao sistema educacional; ele deve analisar o complexo processo que vai desde a produção do conhecimento na comunidade matemática até o seu ensino, recolocando a questão do conhecimento no contexto mais amplo de constituição de saberes.

Nesta perspectiva, uma parte importante da análise didática consiste em levar em conta a evolução e a constituição histórica do saber matemático no âmbito acadêmico e sua relação com a constituição do texto do saber ensinado. Além disso, o processo de transposição didática (CHEVALLARD, 1985) é complexo, não se inicia quando o professor prepara sua aula, pelo contrário, está naquele momento em sua fase final, cabendo ao professor apenas o controle das variáveis locais na apresentação do texto do saber. O pesquisador deve, portanto, voltar às fontes desse processo, até à produção do conhecimento acadêmico, a fim de se desprender da familiaridade de seu objeto de estudo, e exercer sua vigilância epistemológica. O estudo baseado nesta perspectiva apoia-se em cinco polos: epistemologia, didática, história da matemática, psicologia cognitiva e a dimensão sociocultural (Figura 1).

Figura 1 – Epistemologia com mediadora



Fonte: Autor (2024, inspirado em Dorier, 2015, p. 9)

Bachelard (1938, *apud* DORIER, 2015, p. 110) distingue a história e a epistemologia de uma ciência, quando afirma que

> É [...] o esforço de racionalidade e construção que deve prender a atenção do epistemólogo. O historiador da ciência deve considerar as ideias como fatos. O epistemólogo deve tomar os fatos como ideias, inserindo-os em um sistema de pensamentos. Um fato mal interpretado durante uma época permanece como um fato para o historiador. Fica a critério do epistemólogo um obstáculo ou um contra pensamento. O epistemólogo deve, portanto, esforçar-se para apreender os conceitos científicos em sínteses psicológicas progressivas, estabelecendo, em relação a cada noção, uma escala de conceitos, mostrando como um conceito produziu outro, vinculado a outro. Então ele terá alguma chance de medir uma eficácia epistemológica. Imediatamente o pensamento científico aparecerá como uma dificuldade vencida, como um obstáculo superado.

Esta diferenciação feita por Bachelard (1938) me leva a insistir sobre a importância para o pesquisador em didática da matemática, em considerar as relações entre epistemologia e didática para entender as necessidades formuláveis em termos de conhecimento dos processos pelos quais os conceitos matemáticos se formam e se desenvolvem, bem com as características da atividade matemática (Artigue, 1990).

O QUE SIGNIFICA EPISTEMOLOGIA

O significado do termo epistemologia tem se ampliado bastante no correr dos anos. Essa evolução deve muito ao desenvolvimento de campos como a história da ciência ou as ciências cognitivas, que mantêm estreitos vínculos com a epistemologia. Assim, o termo epistemologia foi aplicado a novas questões. Em particular, não é incomum hoje que a epistemologia designe a teoria dos métodos ou os fundamentos do conhecimento, que é o significado do termo epistemologia em inglês.

O uso introduzido por Piaget (1967, *apud* DORIER, 2015, p. 110) na expressão "epistemologia genética" também atesta essa expansão do uso, e apresenta duas aproximações para definir a epistemologia:

> i) Estudo da constituição de conhecimentos válidos. O termo "constituição" mostra a ideia de um processo, enquanto o uso do plural enfatiza a diferenciação disciplinar e o termo "válido" revela uma concepção normativa de conhecimento.
>
> ii) Estudo da transição de estados de menor conhecimento para estados de conhecimento mais avançado.

Esta posição induz a dimensão da gênese de um conhecimento e determina sua natureza. Esses dois pontos de vista coincidem, se considerarmos que a constituição do conhecimento nunca é completa.

Toma-se o termo epistemologia como o estudo da constituição dos conhecimentos científicos tanto na sua gênese histórica, na sua reconstrução mental em cada sujeito, bem como nas suas articulações numa dada etapa do desenvolvimento do saber científico, ou seja, é o estudo das relações que uma pessoa ou uma comunalidade têm com um objeto de conhecimento.

Balacheff (1991) assevera que um tema essencial da epistemologia é a elucidação da questão do significado, da origem e da evolução de um conhecimento matemático no seu desenvolvimento histórico, individual e coletivo. A complexidade desta questão reside no fato de que o significado não ser diretamente observável, nem pode ser apreendido na sua totalidade a partir da formulação de sua definição. O conceito de número, por exemplo, não pode ser empreendido unicamente a partir de uma declaração; seu significado só pode ser compreendido por meio de suas manifestações simbólicas e seu papel na resolução de problema.

O autor ainda observa que a notação decimal é o produto de um longo processo histórico, os números negativos foram contestados como tal no século XIX, e o debate sobre números inteiros não padronizados demonstrou a complexidade desse conceito "elementar" e sua natureza viva. O número não é "visível" em lugar algum; ele é uma "construção" legitimada pela força de suas aplicações e validada pelos meios específicos da ciência que o desenvolveu. Da mesma forma, a história cognitiva do indivíduo atesta a complexidade dessa questão de significado (BALACHEFF, 1991).

EPISTEMOLOGIA: SIGNIFICADO DE OBJETOS DO SABER CIENTÍFICO E OBJETOS DO ENSINO

Os resultados de pesquisas em didática da matemática, inclusive a publicação de Artigue (1990), mostram que a análise epistemológica pode auxiliar o pesquisador a ter uma atitude crítica a respeito das concepções que um indivíduo possa construir a partir de sua convivência e de sua vivência com a matemática e suas ferramentas. Uma análise epistemológica dos saberes matemáticos pode constituir um instrumento muito eficaz na compreensão dos elementos históricos constitutivos desses saberes, destacando a compreensão sobre os conceitos matemáticos que o ensino tradicional apresenta geralmente sob forma dogmática.

Bardini (2003) explica como a escrita simbólica contribuiu decisivamente para a invenção da própria matemática. Nele, ele faz um estudo epistemológico por meio de seu desenvolvimento histórico, da constituição da escrita simbólica matemática, e caracteriza a organização da escrita simbólica em seis partes, denominadas figuras de representação: representação do requisito, representação do dado, representação de instruções operacionais elementares, representação de instruções, representação da equalização, representação de conceitos compostos.

Para Bardini (2003), os egípcios não só apresentavam problemas aritméticos (relativos à distribuição de cerveja, sementes ou pão), mas também buscavam soluções para questões que não faziam referência a nenhum objeto concreto, e para as quais não se tratava mais de uma simples questão de realizar operações entre números dados. Por exemplo, não é incomum encontrar nos Papiros de Rhind ou Ahmes problemas retoricamente colocados envolvendo soluções para equações lineares do tipo $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, em que a, b e c são dados e x é desconhecido. Entretanto, assim como no caso dos hindus e dos árabes, o nome dado ao valor desconhecido que estava sendo procurado permanecia intimamente ligado ao contexto do problema apresentado. Enquanto os egípcios procuravam uma "pilha", os árabes geralmente se referiam a posses ou bens, e os hindus frequentemente evocavam cores. É importante ressaltar em todos que esses problemas foram apresentados no registro retórico, em que as declarações e os cálculos eram feitos em linguagem natural.

Estes fatos trazem à tona a necessidade de representar os objetos matemáticos, já que não podemos acessar seu significado diretamente ou expressá-lo em uma definição. Portanto, há necessidade de descrevê-los em termos de seus efeitos, conforme evidenciado pela atividade cognitiva, que, por sua vez, provavelmente produzirá fatos observáveis (BALACHEFF, 1991). Segundo Vergnaud (1990), o significado de um conceito é, portanto, caracterizado por três conjuntos estreitamente relacionados: um conjunto de problemas para os quais ele fornece um meio confiável e eficaz de resolução, um conjunto de procedimentos (invariantes operatórios) que são ferramentas para resolver esses problemas, e um conjunto de significantes que suportam uma linguagem operacional para descrever problemas e procedimentos (VERGNAUD, 1984). Nesta perspectiva, Balacheff (1991, p. 8, tradução nossa) observa que o número inteiro natural, por exemplo,

> dependendo do fato de ser representado por uma coleção de objetos ou por uma forma decimal, não permite o acesso às mesmas classes de problemas ou aos mesmos procedimentos. O significado do conceito de número não é o mesmo nos dois casos; a

> transição de um significado para o outro corresponde à evolução conceitual da quantidade para o número stricto sensu.

Comungamos com o autor, que assevera que uma análise epistemológica:

> seja ela baseada na história coletiva ou individual, destaca a multiplicidade de fatores envolvidos na determinação do significado: fatores de natureza material, social, cultural ou ideológica. Ela mostra o papel essencial desempenhado pelo contexto social e material no desenvolvimento de novos conhecimentos e, particularmente, na aprendizagem, sua sensibilidade às características das situações de ensino ou treinamento. Acima de tudo, mostra que o conhecimento impõe suas próprias leis para alcançar sua essência; como já mencionamos, os critérios de "verdade" em matemática, física e filosofia não podem ser reduzidos uns aos outros (BALACHEFF, 1991, p. 10).

Tomamos um exemplo relativo ao rigor em matemático, apoiando-nos em Barbin (1988) e Arsac (1988), todos citados por Almouloud (2022), que mostra que vários estudos epistemológicos e didáticos teceram reflexões sobre a evolução do significado dessa noção na história, de acordo com o meio social em que se desenvolveu. Por exemplo, a análise epistemológica feita por Barbin (1988, *apud* ALMOULOUD, 2022) sobre a demonstração evidencia a evolução da noção de rigor, sua dependência com os domínios matemáticos visados e com o nível de elaboração dos objetos manipulados, em diferentes épocas. No seu estudo histórico, Arsac (1988) destaca três grandes etapas que marcaram a evolução histórica da demonstração:

1. *Gênese, na antiguidade grega:* a demonstração aparece como um ato social que tem por objetivo *convencer*. Para os gregos, a ciência era o conhecimento verdadeiro e certo. Uma propriedade é conhecida cientificamente quando sabemos que ela é, mas, sobretudo, *por que* ela é e que ela não pode ser outra. A demonstração é, então, da ordem da *convicção* num debate contraditório.

2. *No século XVII*, a significação da demonstração evoluiu: seu objetivo passou a ser *esclarecer* e não é mais *convencer*. A vontade de inventar e de *esclarecer* deveu-se à importância dada à elaboração e explicação de novos conhecimentos. Tal fato explica a importância dos *métodos de descoberta*. A palavra "esclarecer" parece significar "fazer compreender o motivo pelo qual um enunciado é certo" e, para isso, é necessário fazer coincidir demonstração e método de descoberta.

Para Barbin (1988), o ato de demonstrar pode ter várias *significações*. Em consequência, toda abordagem didática da demonstração necessita de uma *reflexão epistemológica* que passa por duas questões: *Qual* é essa significação para o aluno? Qual é essa significação para o professor? A autora acredita que, se a demonstração tem por significação *esclarecer*, *tornar evidente* e *certo*, então o *método de resolução* pode valer como demonstração. Assim, o aluno que adota um método para resolver um problema pode ficar satisfeito e não dar nenhuma explicação sobre a sua estratégia de resolução. Pelo contrário, se o professor entende que a demonstração tem por significação *convencer*, ele esperará dos alunos uma outra postura. É importante que os professores saibam que a noção de demonstração não tem um significado *absoluto*.

Almouloud (2022) afirma que a análise epistemológica permite perceber que os problemas de fundamento não são sempre os primeiros a serem estudados em matemática.

Por exemplo, os fundamentos teóricos da análise foram estudados depois de séculos de utilização dos conceitos como ferramentas para a resolução de problemas. Um dos pontos importantes de uma análise epistemológica é, ainda, permitir ao pesquisador em didática da matemática apreender a diferença entre o saber "científico" e o saber "ensinado", pois esta análise lhe permite compreender a gênese da evolução do conhecimento científico.

EPISTEMOLOGIA E DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Os saberes matemáticos são construídos em resposta a questões externas ou internas à matemática. A abordagem para responder a essas questões que conduzem a novos saberes não é linear, é um labirinto de reflexões, ensaios, transformações da questão, reformulação de saberes conexos anteriores etc. O saber é, portanto, construído por indivíduos num contexto social e histórico, a partir de questões científicas, socioculturais.

No que diz respeito à matemática, o saber é escrito com uma apresentação axiomática: os objetos são definidos, algumas propriedades são aceitas, outras são demonstradas. Essa apresentação esconde a história do processo de construção do conhecimento e, com ele, as questões e dificuldades que surgiram, as discussões causadas por esses desafios, e as escolhas que finalmente foram realizadas.

A didática da matemática propõe que sejam apresentadas situações cujas soluções requerem a aplicação de saberes visados, para que os alunos pudessem resolvê-las por contra própria e com a mediação do docente. Nesta perspectiva, a análise epistemológica pode auxiliar o pesquisador e o professor de matemática a ter uma atitude crítica a respeito de concepções que um indivíduo possa forjar a partir de sua convivência e de sua vivência com a matemática e suas ferramentas (ARTIGUE, 1990).

O pesquisador em didática da matemática enfrenta o problema ligado à análise ou à elaboração da gênese do conhecimento, ponto importante de uma análise didática quando se trata de estudar os processos de ensino e de aprendizagem. Neste âmbito, Artigue (1990) assevera que uma análise epistemológica aponta questões globais e fundamentais para desenhar a produção de engenharias didáticas, bem como a análise do que se passa em sala de aula. As reflexões do pesquisador em didática da matemática que se utiliza da metodologia da engenharia didática permitem responder às seguintes questões, a partir do estudo epistemológico:

> O que devemos transpor no ensino dos saberes científicos e de suas inter-relações? Há uma transposição mínima ou um conjunto de transposições mínimas a respeitar para não descaracterizar o significado desses saberes? É possível fazer essa transposição e sob quais condições? Em quê as transposições podem ou devem depender dos públicos visados pelo ensino? Quais são as condições e os entraves ligados às transposições clássicas? Quais são seus efeitos? (ALMOULOUD, 2022, 212)

As respostas para essas questões podem ser encontradas nos estudos didáticos fundamentados na teoria das situações (BROUSSEAU, 1983, 1986, 1995, 1997), nos conceitos de dialética ferramenta-objeto e de jogos de quadros (DOUADY, 1992), às mudanças de pontos de vista (ROGALSKY, 1995), aos registros de representação semiótica (DUVAL, 1995), entre outros.

A análise epistemológica é de suma importância para o pesquisador em didática da matemática, pois pode ajudar na identificação de obstáculos epistemológicos. Assim, para a construção de engenharias didáticas, por exemplo, a análise epistemológica proporciona reflexões que permitem responder (parcial ou totalmente) às seguintes questões: quais obstáculos podemos (ou devemos) evitar? Quais obstáculos não devemos evitar? Como então superá-los? (BROUSSEAU, 1986).

Em seu estudo, Artigue (1990) salienta que as análises histórica e epistemológica evidenciam, também, que uma concepção errônea para o matemático atual pode ter sua origem e, sobretudo, ter-se revelado profundamente produtora, num dado momento da evolução histórica. Podemos formular a hipótese de que uma tal concepção era, para essa determinada época, a mais produtora possível, levando em conta o nível de elaboração conceitual dos objetos matemáticos em jogo. O que podemos transpor dessa realidade histórica, mais geralmente no ensino e por quê?

Toma-se como exemplo o estatuto dos números negativos, baseando-nos em Schubring (1986). Este autor mostra que as controvérsias sobre a existência dos números negativos se explicam, sobretudo, pelo obstáculo que decorre da passagem da noção de *grandeza*, que é de natureza substancial, à noção de *número*, que é essencialmente teórica.

Para o autor, a rejeição dos números negativos teve consequências importantes no desenvolvimento da matemática em geral. A importância dada à geometria *pura*, sem mistura com a álgebra, fez nascer um novo tipo de geometria: a "geometria sintética" estabelecida por Carnot, Poncelet (1788-1867, *apud* SCHUBRING, 1986) e Steiner (1796-1863, *apud* SCHUBRING, 1986), que impulsionou de forma singular a aparição de uma nova disciplina matemática: a geometria vetorial. Nestas novas geometrias se evitava a regra dos sinais.

Schubring (1986) assevera que as causas principais da contestação do estatuto matemático dos números negativos são de três categorias:

Os obstáculos internos à matemática: O problema central consiste em diferenciar o conceito de quantia e estabelecer o de número como um novo conceito fundamental e independente; pois se trata da aparição dos conceitos: quantia–grandeza – número. A ausência de diferenciação entre esses três conceitos constitui obstáculo à compreensão dos conceitos de variável, de função, de quantia e da aceitação destes como conceitos básicos da álgebra e da análise.

Os obstáculos epistemológicos relacionados com uma epistemologia substancialista, segundo a qual os números são considerados seres que têm uma existência física; e uma epistemologia sistêmica, na qual a existência é justificada pela coerência do campo conceitual; os conceitos só deverão satisfazer as condições *internas* à matemática.

A arquitetura da matemática é uma categoria das origens dos obstáculos aos quais vêm se misturar e interagir com causas internas ao desenvolvimento matemático e causas de natureza epistemológica. Trata-se, de acordo com autor, particularmente, de concepções sobre a importância da álgebra e da geometria em relação aos fundamentos da matemática.

Do ponto de vista da natureza do saber matemática, a análise epistemológica ajuda na compreensão de elementos históricos constitutivos desse saber, que o ensino tradicional apresenta geralmente sob forma dogmática.

Nas análises das organizações matemáticas (CHEVALLARD, 1999, GASCÓN, 2011), a epistemologia pode ser uma alavanca no processo de construção de modelos epistemológicos de referência (MER) e, consequentemente, do modelo epistemológico alternativo (MEA) ao modelo epistemológico vigente em uma determinada instituição escolar, no ensino e aprendizagem de objetos matemáticos.

Um MER construído a partir de uma análise epistemológica pode fundamentar o estudo das condições que devem ser cumpridas quando da construção/escolha, análise e experimentação de situações-problema voltadas para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Portanto, um estudo histórico-epistemológico pode ser *determinante na identificação e caracterização de obstáculos epistemológicos* que são inerentes ao processo de construção do saber, em nosso caso, de conceitos matemáticos. Neste âmbito, ela é um apoio significativo para estudo das três dimensões de um problema didático, objeto de estudo da próxima seção.

DIMENSÕES DE UM PROBLEMA DIDÁTICO

Para Barquero, Bosch e Gascón (2013, p. 3), uma pesquisa em educação matemática "deve ser realizada a partir da existência de um problema docente que a justifique**".** Esse problema é entendido como aquele de que "se depara um professor ao ter que ensinar um tema matemático aos seus alunos"**.**

Os aurores representam esse problema por P_0 do esquema heurístico representado por $\{[(P_0 \oplus P_1)P_2 \curvearrowright] \curvearrowright P_3\} \curvearrowright P_\delta$, onde P_1, P_2 e P_3 são, respectivamente, as dimensões epistemológica, econômica e ecológica. P_δ é o problema didático que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de Matemática (GASCÓN, 2011, p. 205; BARQUERO, BOSCH e GASCÓN, 2013, p. 2).

Para estes autores, P_0 é o possível ponto de partida para uma investigação científica em didática da matemática, também considerado o "problema docente". O símbolo $\oplus$ se refere à necessidade de ter, pelo menos, a dimensão epistemológica P_1. O símbolo não significa inclusão, mas uma hierarquização, no sentido de que a dimensão Pi+1 necessita da dimensão Pi que a precede.

Segundo esses autores, o problema P_0 é definido a partir do estudo das dimensões epistemológico e ecológica.

Para Almouloud (2022), a análise epistemológica tem por base o desenvolvimento histórico, permitindo identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática.

Para estudar os fatores relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, faz-se necessário considerar a natureza dos objetos matemáticos e tecer reflexões sobre o papel da atividade humana. Nesta perspectiva, a análise epistemológica de objetos matemáticos deve ajudar a esclarecer a natureza desses objetos.

Barquero, Bosch e Gascón (2013) indicam que a dimensão epistemológica se faz importante e presente em todo e qualquer problema didático, pois é nela que buscamos responder às questões como**:** Como se interpreta e se descreve o saber matemático? Quais são suas componentes e como se estruturam? Como se pode modelar os saberes matemáticos (modelo epistemológico general) e cada um dos âmbitos da atividade matemática (modelos epistemológicos específicos)? O entendimento desses aspectos permite vislumbrar o modelo epistemológico de referência do objeto matemático em estudo.

O estudo da dimensão econômica visa a responder à seguinte pergunta: Como as praxeologias relacionadas ao objeto matemático em estudo (*O*) se comportam em uma determinada instituição (BNCC, Parâmetros Curriculares, livros didáticos etc.? Nessa dimensão, precisamos estudar as questões relativas às condições que regulam a organização e o funcionamento de tais praxeologias na instituição de referência, ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, princípios e leis (normas) que regem sua vida institucional.

Para estudar a dimensão econômica, Barquero, Bosch e Gascón (2013)) sugerem buscar respostas a um conjunto de questões tais como: (1) Que âmbito institucional temos que levar em consideração para abordar o problema didático de *O* (a sala de aula, a escola, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou a Civilização)? (2) Como esse objeto é descrito e interpretado em cada uma das instituições que intervêm no processo de transposição? Quais tarefas, no sentido da TAD, vivem normalmente no sistema educativo brasileiro? (3) Como as atividades consideradas no sistema escolar se relacionam com as atividades conexas com o objeto em estudo e às atividades consideradas como solução matemática de problemas?

A dimensão econômica-institucional permeia a dimensão ecológica[2], uma vez que o "nascimento", a "vida" e a possibilidade de "falecimento" e/ou "ressurgimento" prescindem das condições econômicas. Nesta perspectiva, a dimensão ecológica, dentre outros fatores, deve evidenciar (GASCÓN, 2011, BARQUERO, BOSCH e GASCÓN, 2013): os âmbitos institucionais considerados; as instituições envolvidas e como descrevem e interpretam *O*; as práticas matemáticas existentes nas instituições envolvidas relativas à *O*; os modelos epistemológicos da matemática envolvida no seio das instituições; as dificuldades que surgem ao se tentar modificar as organizações didáticas em uma determinada instituição. Essas evidências permitem, por exemplo, os *habitats* e *nichos*[3] de *O* no ecossistema do sistema educativo brasileiros.

Para estudar as dimensões económicas e ecológicas do problema didático, o pesquisador (ou professor) utiliza implicitamente e/ou explicitamente como referência um modelo das praxeologias matemáticas que estão em jogo, isto é, um modelo epistemológico de referência (MER) do campo da atividade matemática em questão.

Quando falamos de modelo epistemológico de referência, referimo-nos a formas de interpretar e descrever um campo conceitual de objeto matemático pertencente a um

2 Devido ao espaço reservado a este artigo, não serão apresentados exemplos de estudos das dimensões econômico-institucional e ecológica.

3 Os ***habitats*** são os ambientes conceituais (componentes curriculares, livros didáticos, por exemplo) onde os números fracionários se encontram e vivenciam suas práticas. Os ***nichos,*** por sua vez, contemplarão as suas funcionalidades e praxeologias, que se evidenciam pelas práticas que, em relação a um objeto de ensino, se sobressaem em um dado ***habitat*** de um certo ecossistema, interagindo com os demai*s* *nichos.*

quadro (DOUADY, 1986), como, por exemplo, a geometria euclidiana, álgebra escolar, proporcionalidade ou estatística, que é predominante nas instituições escolares, mas também na noosfera e nas instituições que produzem o conhecimento matemático. É o instrumento com o qual o didata pode desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja divulgação intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar.

O MER também é essencial para estudar o conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado. Quando o MER é abertamente e explicitamente exposto à crítica e ao contraste empírico, ele constitui um instrumento de emancipação no que diz respeito ao modelo epistemológico vigente na instituição (GASCÓN, 2014).

Em coerência com esta MER e com base nela, o formador (ou pesquisador) utiliza (e, eventualmente, constrói) um modelo didático do que significa “aprender” conhecimentos matemáticos do referido campo.

Na próxima seção, apresenta-se um exemplo de estudo cujo foco é o estudo da dimensão epistemológica e didática do conceito de limite de função real de uma variável real e uma análise minuciosa da definição formal para evidenciar os problemas ligados a obstáculos epistemológicos.

ESTUDO DE UM PROBLEMA DIDÁTICO: O CONCEITO4 DE LIMITE NO ENSINO MÉDIO EM REPÚBLICA DO MALI

Este estudo apoia-se na tese de doutorado de Cheick Oumar Doumbia (2020), intitulada “Un modèle didactique de référence pour la construction de savoirs et l’actualisation des connaissances sur la notion de limite en terminale science exacte au Mali”. Concentra-se, nesta parte do artigo, nos aspectos epistemológicos e didáticos desse conceito matemático, destacando as dimensões epistemológicas e didáticas da definição formal da noção de limite de uma função real em uma variável real.

A noção de limite é uma noção polissêmica, mas o ensino atual dessa noção em Mali não permite que os alunos deem um significado matemático à noção de limite de uma função numérica de uma variável real. Esse ensino é essencialmente baseado em estruturas algébricas e numéricas. Além disso, percebe-se que a prática em sala de aula apresenta o problema com a busca pelo limite l em x_0, sem fornecer nenhuma justificativa. Aceita-se o fato de que é difícil ensinar uma definição formal do limite. Nos livros didáticos e nas práticas docentes opta-se por uma abordagem intuitiva, que busca dar sentido ao conceito de limite através da introdução de técnicas de limite de uma função em um ponto, deixando de lado os aspectos epistemológicos importantes, ou seja, adquirir conhecimento sobre a noção de limite significa tomar consciência desses aspectos epistemológicos, confrontá-los e superá-los. O ensino da noção de limite deve ser organizado em torno desses obstáculos epistemológicos, de modo que os alunos e estudantes se deparem com eles a fim de provocar sua crise de limite e, por fim, fornecer-lhes os meios para superá-los.

4 Fala-se de noção quando nos referimos, do ponto de vista matemático, ao conhecimento básico ou superficial sobre o objeto matemático limite. Fale-se de conceito, quando se trata de caracterizar e definir o objeto limite do ponto de vista matemático (definição, propriedades, diferentes formas de representá-lo etc.)

Estudo da dimensão epistemológica da noção de limite

Este estudo se baseia nos trabalhos de Cornu (1983), Sierpinska (1985), Artigue (1996a, 1996b), Bkouche (1997), Job (2011) e Doumbia (2020).

Relembramos os obstáculos relacionados à noção de limite, os problemas que permitiram o surgimento da noção de limite e alguns debates contraditórios sobre a definição de limite. Também apresentamos uma análise da definição formal de "*l* é o limite de uma função numérica de uma variável real em um ponto finito *a*".

Euler (1707-1783) fez muito para livrar o cálculo de seu suporte geométrico. Ele não trabalhou com quantidades, mas com funções, que foram um dos fatores no desenvolvimento da noção de limite. Na época de Euler, a noção de funções ainda não era muito clara; elas eram essencialmente expressões algébricas. Ao introduzir várias ordens de infinitesimais: dx, $(dx)^2$,Euler desenvolveu funções em série, o que permitiu que ele obtivesse vários resultados sobre séries numéricas. É importante observar que Euler não estava interessado apenas no aspecto qualitativo (convergência ou divergência), mas, acima de tudo, no aspecto quantitativo (velocidade de convergência ou de divergência).

Doumbia (2020) assevera que D'Alembert (1717-1783) era muito sensível ao problema do infinitamente pequeno e do infinitamente grande. Para ele, o infinitamente pequeno era uma questão de "metafísica", e não tinha lugar no raciocínio matemático.

O autor ainda afirma que D´Alembert insistiu no fato de que uma quantidade nunca se torna igual ao seu limite: ele tomou como exemplos o círculo, o limite de polígonos inscritos ou a soma de uma progressão geométrica. Ele definiu a "soma de uma sequência" (ou seja, de uma série) como "o limite de seus vários termos, ou seja, uma quantidade que pode ser aproximada o quanto se desejar, sempre tomando um número cada vez maior de termos da sequência". Doumbia era muito reticente com relação às séries divergentes. A noção de limite introduzida por D'Alembert contrasta a noção de limite com a de infinitamente pequeno. Por uma questão de rigor matemático, Sierpinska (1985) ressalta que a noção de função não aparece nessa definição, não se trata de números, mas de quantidades e, finalmente, as expressões aproximação, diferença entre quantidades e não atribuível também não são definidas.

Lagrange (1736-1813, *apud* DOUMBIA, 2020) queria reduzir toda a análise ao cálculo algébrico e, para isso, trabalhou com o desenvolvimento em série de funções. Lagrange, que rejeitou a noção de limite, foi um dos principais arquitetos da transição para o domínio numérico, uma transição que levou à unificação do conceito de limite, mas sem levar em consideração o infinito. Ele desenvolveu a prática de majorar e minorar, em particular para verificar o restante de uma série.

Foi Cauchy (1789-1857) quem deu à noção de limite seu lugar definitivo, reorganizando a análise em torno dessa noção. Para ele, o conceito de limite era o conceito básico em análise e, logo no início de seu curso na École Rurale Polytechnique, ele definiu o conceito de limite e introduziu operações relacionadas ao referido objeto matemático:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a diferir dele o mínimo possível, o valor fixo é

> denominado limite de todos os outros. Assim, por exemplo, um número irracional é o limite das várias frações que fornecem valores cada vez mais aproximados. Em geometria, a área de um círculo é o limite para o qual convergem as áreas dos polígonos inscritos, enquanto o número de seus lados aumenta cada vez mais (CORNU, 1983, p. 53).

Ele baseou toda a análise nos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral. No entanto, Cauchy ainda era influenciado pelo infinitamente pequeno, e às vezes o usava: isso influenciou sua linguagem; seus artigos de pesquisa usavam essencialmente a noção de infinitamente pequeno. A noção de limite ainda não havia sido definitivamente refinada: ela ainda era confundida com a noção de ponto de acumulação: lim(sin()) tem, para Cauchy, um número infinito de valores entre -1 e +1. Também há confusão entre o estudo da continuidade e o estudo do conceito de limite em um ponto, e confusão entre limite e imagem de uma função.

A relação funcional já aparece quando valores numéricos são atribuídos. Mas estamos falando de valores consecutivos, o que levou Sierpinska (1985) a dizer que essa definição se referia apenas a sequências numéricas. Inspirada por Lakatos (1978, p. 48), a autora ressalta que os quantificadores e as expressões indefinidas, como aproximar-se indefinidamente, estão implícitos nessa definição. Além disso, ela ressalta que Cauchy não distinguiu a dependência entre a vizinhança do ponto em que o limite é calculado e a vizinhança da ponte, que é o limite. Ela chama a nossa atenção para o fato de que, na linguagem natural, não prestamos muita atenção à ordem das palavras e às diferenças sutis que resultam disso.

À luz desse estudo histórico-epistemológico, podemos dizer que a noção de limite levou muito tempo para ser claramente definida, e sua construção possibilitou a construção do conjunto de números reais. Ela não surgiu para resolver novos problemas, mas para formalizar, unificar, generalizar e simplificar os conceitos básicos da análise.

Alguns obstáculos epistemológicos à noção de limite

Temos o limite como uma "noção metafísica", como a noção do infinitamente pequeno e do infinitamente grande. Essas noções misteriosas têm sido um dos principais obstáculos. Existe um estado intermediário entre o que é zero e o que não é zero? Existe um número maior do que os outros? Os debates em torno das quantidades evanescentes mostraram como é difícil fazer com que uma quantidade tenda a zero... o limite pode ser alcançado? e transposição numérica: (Esse é um obstáculo ligado à "dificuldade de se desvincular do contexto geométrico e cinemático, para trabalhar não mais com quantidades, mas com números", em suma, dificuldade com a aritmetização da noção de limite) (DOUMBIA, 2022).

Sierpinska (1985) identifica dois aspectos da noção de obstáculo epistemológico de acordo com Bachelard (1938): a inevitabilidade do aparecimento de obstáculos, e a repetição de seu aparecimento na filogênese e ontogênese de conceitos. A autora define o obstáculo epistemológico relacionado a um conceito como o conjunto de causas de lentidão na aquisição de um conceito que são específicas a esse conceito e somente a ele, e são tais que a toma de consciência delas é indispensável para a apreensão desse conceito. A partir de uma experiência realizada junto a alunos, a autora observa que estes discentes ainda precisam superar sérios obstáculos relacionados às noções de número e infinito, apesar de eles terem passado por um ensino sistemático dessas noções.

Seguindo a mesma linha de pensamento, Doumbia (2020) reforça que, devido à importância fundamental do conceito de função na construção do conceito de limite, a superação dos obstáculos associados a ela é de particular importância, e é necessário manter uma certa reserva com relação aos métodos demonstrativos ou intuitivos de introdução das noções de tangente ou limite usando diferentes representações geométricas.

No seu estudo, Sierpinska (1985) identifica um conjunto de obstáculos epistemológicos relacionados aos processos de conceitualização da noção de limite, a saber: horror ao infinito, obstáculos ligados à noção de função, obstáculos "geométricos", obstáculos "lógicos" e o obstáculo do símbolo.

Uma outra pesquisadora do conceito de limite é Artigue (1996a), que identificou outros tipos de obstáculos, como:

- O significado comum transmitido pelo termo limite, que favorece uma concepção do limite como uma barreira intransponível e até mesmo inalcançável, como uma fronteira ou até mesmo como o termo final de um processo, o que também tende a reforçar concepções monótonas estritas de convergência,

- O princípio da "continuidade" (assim denominado em referência a Leibniz), que consiste em tratar o processo de limite como um processo algébrico "finito", transferindo para o limite as propriedades comuns aos elementos do processo e, de modo mais geral, não prestando atenção ao que diferencia essa operação específica das operações algébricas usuais,

- Concepções que são muito dependentes de uma "geometria da forma" que não nos força a identificar claramente os objetos exatos envolvidos no processo de limite e a topologia subjacente. Isso dificulta a percepção da interação sutil entre a estrutura numérica e a estrutura geométrica subjacente ao processo de limite, e induz ou reforça convicções errôneas, como a crença constante de que se um objeto tende "geometricamente" a um objeto, todas as quantidades associadas a ele terão como limite os valores correspondentes das quantidades para o objeto limite.

A autora também se refere às dificuldades associadas ao status operacional e estrutural duplo do limite, que se refletem na dificuldade de se afastar de uma visão de limite simplesmente em termos de um processo, a fim de dissociar claramente o objeto limite do processo pelo qual ele foi construído e dar a ele uma identidade própria.

A aquisição de conhecimento do conceito envolve o enfrentamento e a superação de um número suficiente desses obstáculos. Portanto, uma aula sobre o conceito de limite deve permitir que os obstáculos apareçam e sejam superados. As práticas atuais em sala de aula não estão de acordo com essa visão.

Análise das organizações praxeológicas do conceito de limite

As práticas relacionadas à noção de limite variam, e essa diversidade se estende à definição do limite de uma função em um ponto a em $\mathbb{R}$. Para alguns, a formulação de "*l* é o limite de *f* quando x tende para a" é:

Definição 1: Dizemos que se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$, para qualquer sequência x_n que tende para a, a sequência $f(x_n)$ tende para *l*.

Esta definição enfatiza o aspecto covariante do limite, em outras palavras, respeita a ordem "natural" entre os conjuntos inicial e final da função considerada, o que parece corresponder às formulações espontâneas dos alunos. Ela leva em conta as conotações dinâmicas da expressão "tende a".

Job (2011) aponta que esta definição coloca em jogo sequências, em vez de séries. Portanto, ela esconde o aspecto "aproximação" subjacente à noção de limite, presente na definição 2 (cf. abaixo). A definição 1 explica melhor as intuições dinâmicas subjacentes a expressões como "tender para" do que a definição em épsilon e delta; no entanto, "tender para" se refere a um movimento contínuo, enquanto a definição 1 lida com o discreto ao se basear em sequências.

Para algumas pessoas, a formulação de "*l* é o limite de f quando x tende para x_0" é:

Definição 2: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$, enquanto para outros é:

Definição 3: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Além disso, em cada caso, usa-se a mesma notação $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$.

Para Job (2011), a definição 2 reflete o aspecto de aproximação subjacente ao conceito de limite. Uma segunda ideia é usar, para definir o limite de uma função, uma abordagem semelhante àquela utilizada para definir o limite de uma sequência. O tipo de quantificação universal utilizado na definição 2 é, de certa forma, mais fácil do que a quantificação universal que aparece na definição 1, porque não exige que consideremos uma infinidade dupla de objetos; seus objetos (os reais) são "mais simples" do que as sequências e, além disso, não precisamos considerar todos eles, apenas o menor.

A definição 2 não leva em conta os aspectos dinâmicos do conceito de limite. Ela não respeita a ordem "natural" entre os conjuntos inicial e final da função em consideração. A quantificação universal "para todo ε" mascara a ideia de que estamos interessados apenas em valores "pequenos" de ε. Às vezes, ela estabelece uma dialética entre covariância e contra variância (DOUMBIA, 2020).

Se considerarmos a definição 2: « $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$ », percebe-se *x* pode ser igual a x_0 se *f* é definida em x_0. Neste caso, teremos $\ell = f(x_0)$ e consequentemente *f* é continua em x_0. Com efeito, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$. Supõe-se que $f(x_0) - \ell \neq 0$, então $\frac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$. Seja $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}$, chega-se, portanto, a $|f(x_0) - \ell| < \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}$, o que é uma contradição, então $f(x_0) - \ell = 0$, isto é: $f(x_0) = \ell$ (DOUMBIA, 2020).

O autor observa que essa demonstração se baseia na seguinte propriedade: $\forall \varepsilon > 0 \ |x| < 0 \Leftrightarrow x = 0$. Em $\mathbb{R}$, ser o mais próximo que quisermos, significa igualdade. Nesse conjunto $\mathbb{R}$, a noção de "números consecutivos" não existe; cada número é seu próprio sucessor. A partir deste ponto, temos a completude de $\mathbb{R}$, ou seja, podemos representar pela reta numérica. Essa noção de números consecutivos funciona em conjuntos como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$. Nesses conjuntos, cada elemento tem um predecessor e um sucessor.

Para a definição 2, as seguintes propriedades podem ser estabelecidas:

Propriedade 1: Uma função f definida em x_0 tem um limite em x_0 se o limite de *f(x)* quando x tende a x_0 for igual a $f(x_0)$.

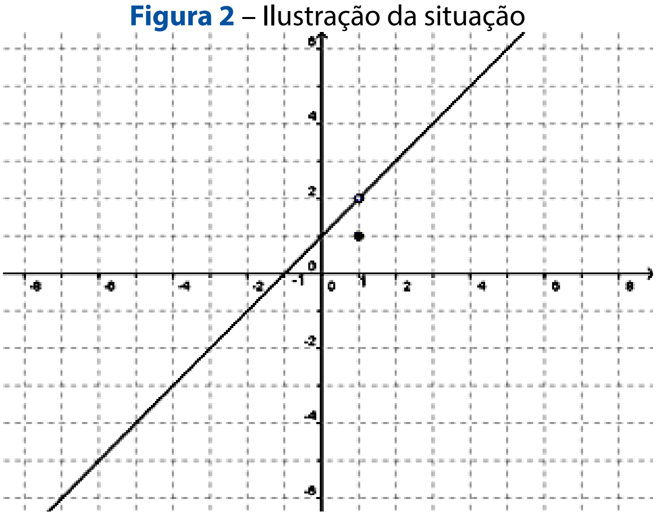
Propriedade 2: Seja f uma função definida em x_0, se f tiver um limite em x0, então f é contínua em x_0.

Propriedade 3: Seja f uma função e a um número real. Se f tiver um limite em a, então f é contínua em a ou pode ser estendida pela continuidade em a.

Com essa definição, tendemos a confundir o limite e a continuidade em um ponto, o limite e a imagem. Considere o exemplo a seguir:

Considere a seguinte função definida por *f(x)=x+1 se x e f(1)=2*

Figura 2 – Ilustração da situação



Fonte: Doumbia (2020, p. 79)

Neste exemplo, *f* é definida em 1, mas, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, mas f(1) = 1, *f* não é contínua em 1 e f não pode ser estendida por continuidade em a. Portanto, *f* não tem limite em *a*.

Vamos, agora, analisar a terceira definição formulada da seguinte forma:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Esta definição mostra claramente que x não pode ser igual a x_0. Ela também mostra que é difícil atingir o limite. Uma função f definida em a pode ter um limite em a que é diferente de f(a). A função definida por *f(x)=x+1 se x ≠ 1 e f(1)=2* admite um limite em 1 igual a 2 ; mas não é continua em 1, pois *f(1)* ≠ 2.

Continuando com a definição 3, a seguinte propriedade funciona: "Quando f tem um limite à esquerda em a e um limite à direita igual em a, então f tem um limite em a". Essa propriedade nem sempre é verificada com a definição 2.

Embora a maioria dos resultados seja válida com ambas as definições, não se pode generalizar, pois pode levar a resultados falsos. As definições 1 e 2 se contradizem. Se f não estiver definida em a, as definições 2 e 3 são equivalentes. Mas se f estiver definida em a, as duas definições se contradizem. Se a função f for contínua em a, as duas definições coincidem.

Aqui, podemos dizer que a definição 3 é uma restrição da definição 2, porque a definição 3 pode ser obtida da definição 2 ao tomar uma restrição da função f. Seja g a restrição de *f* à D*f*-{*a*}, tem-se que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. A definição 3 tem mais potencialidade que a definição 2.

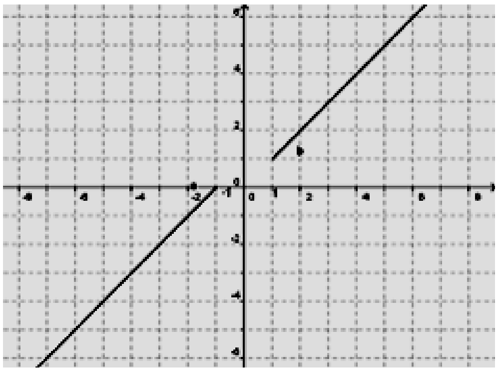
Um dos problemas marcantes da noção de limite é a escrita simbólica da definição formal:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Há uma tendência de ler as coisas de forma linear, ou seja, começando de $0 < |x - x_0| < \delta$ para determinar a relação $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. A exclusão de quantificadores é um obstáculo "lógico" à compreensão da definição formal do conceito de limite. É como se conhecêssemos δ de antemão. Isso ocorre porque esse é um número muito pequeno. Esquecemos que ε é uma função de *f(x)* e *l*. Sierpinska (1985, p. 54) observa que:

> outro problema ligado à ordem dos quantificadores na definição de limite é o seguinte: a função nos leva do eixo x para o eixo y, enquanto quando estudamos o limite em um ponto da função vamos na direção oposta.

A definição não é interessante a menos que assumamos que a é um ponto aderente a A. De fato, se esse não for o caso, podemos encontrar U∈Va tal que U∩A=∅, e a condição f(U∩A)⊂ V é então verificada para qualquer número L∈R e qualquer $V \in V_L$; qualquer número real seria então o limite de f quando x tende a *a*. Vejamos o seguinte exemplo para ilustrar nosso argumento: Seja a função f definida por sua representação gráfica:

Figura 3 – Ilustração da situação



Fonte: Doumbia (2020, p. 84)

Aqui, 0 não é um valor de aderência de Df, porque V=]-1/2 ;1/2[é uma vizinhança de 0, V∩Df é vazio. Portanto, f(V∩Df) = Ø que está incluído em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$. Assim, qualquer número real é o limite de f(x) quando x tende a 0.

Não devemos separar os dois membros da sentença: "f(x) tende a *l*" e "x tende a *a*", porque nenhum deles, considerado isoladamente, tem qualquer significado matemático.

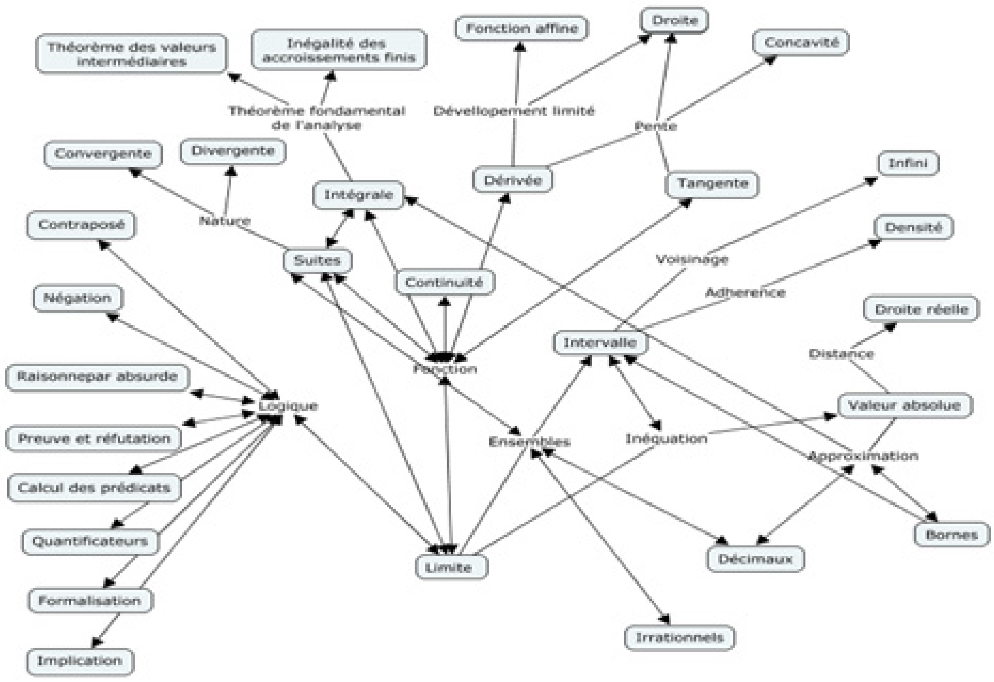
Temos dois tipos de dificuldade no registro algébrico: a dificuldade ligada aos símbolos dos quantificadores (existenciais e universais) e a dificuldade lógica ligada ao significado da implicação, à exclusão dos quantificadores e à sua ordem.

Na escrita, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\ \forall x\in D_f; 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\delta$, vamos da esquerda para a direita, mas o método intuitivo queima duas etapas $\forall\varepsilon>0, \exists\ \delta>0$ e começa diretamente com: $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$. Isso corresponde à exclusão de quantificadores, conhecida como obstáculo lógico. Devemos partir de $\forall\varepsilon>0$, ou seja, de *f(x)* e *l* para ter $|x-x_0|<\delta$, porque o dado de *f*(*x*) e *l* determina ε inteiramente. O problema é mostrar que $\forall\ \varepsilon>0$ existe $\delta > 0$ que satisfaz a condição.

Essa análise permitiu, de acordo com Doumbia (2020), situar o problema didático, ou seja, o descompasso entre a noção de limite e sua definição formal, e os tipos de problemas decorrentes do problema de ensino e aprendizagem: a noção de limite é covariante; mas sua definição formal é às vezes, contravariante, às vezes, covariante, e às vezes temos uma dialética entre os dois aspectos. Essa análise também permitiu evidenciar a razão de ser da definição formal do conceito de limite.

A partir desse estudo, Doumbia, Almouloud e Farias (2024,) construíram o mapa conceitual (Figura 4) que destaca alguns dos objetos matemáticos que alimentam o conceito de limite e as noções matemáticas construídas usando o limite.

Figura 4–Mapa conceitual do modelo epistemológico de referência



Fonte: Doumbia (2020 p. 115)

Este mapa mostra que a noção de limite está intimamente ligada aos conceitos de função, variável, integral, derivada, continuidade, conjunto, inequações com valor absoluto, lógica e topologia de $\mathbb{R}$ e a noção de infinito.

Este estudo também revela que é a definição intuitiva que surge entre os alunos, se perpetua e se estabelece como um obstáculo. É necessário introduzir o limite; mas ele é limitado, pois é uma qualificação aproximada da definição formal, permite que os alunos tenham uma ideia do que é o limite, reforça o obstáculo "uma função não atinge seu limite", o limite é o limite à esquerda, o limite é uma noção dinâmica. A definição formal exata não surge devido à maneira como é ensinada; ela é dada de forma grosseira e aplicada a casos simples, não há uma análise fina em torno dela.

CONCLUSÕES

Tal como a definimos neste artigo, a epistemologia e os estudos a ela relacionados reforçam a ideia de que o significado dos conceitos, os problemas a eles associados, a posição relativa de um elemento do saber em um saber mais amplo que o engloba, e a variabilidade desses dados segundo períodos e instituições, entre outras, ajudam na compreensão do funcionamento de um sistema didático (DORIER, 2015).

A pesquisa em didática da matemática é de natureza experimental, mas o trabalho de "campo" (observações, experimentos, análise do trabalho dos alunos etc.) é sustentado geralmente por um estudo da dimensão epistemológica do saber matemático. Portanto,

> [...] a epistemologia em ação no trabalho didático precisa inventar novas ferramentas, desafiar-se com o mero funcionamento da matemática aprendida e investigar novos territórios. Além disso, o pesquisador em didática não pode se contentar com uma visão interna do sistema de ensino, mas deve analisar o processo complexo que leva da produção do saber na comunidade matemática ao seu ensino, colocando a questão do conhecimento no contexto mais amplo da constituição do saber. (DORIER, 2015, p. 109, tradução livre)

Além do mais, os resultados das reflexões empreendidas corroboram com os de Andrade, Oliveira, Feitosa (2018), quando enfatizam que a didática está intrinsecamente relacionada com a epistemologia, já que uma de suas funções é estudar as organizações matemáticas e as organizações didáticas que permitem desenvolver ferramentas teórico-metodológicas para ensinar e/ou aprender as praxeologias matemáticas (CHEVALLARD, 1999). Esta relação estreita acontece pelo fato de a didática da matemática investigar os fatores que influenciam os processos de ensino e de aprendizagem, e propor alternativa teórico-metodológicas que têm potencial para construção do significado de conceitos matemáticos pelo aluno e/ou pelo professor de matemática em formação, e minimizar a resistência de alguns obstáculos de natureza epistemologia e didática.

No bojo desta reflexão, comungamos com Brousseau (1986, p. 2), quando observa que não se deve pensar que:

> os obstáculos decorrem apenas da natureza do ser humano, da natureza do conhecimento ou da falta de habilidade para ensinar, já que alguns deles só podem desaparecer ao preço de uma certa evolução na cultura e no conhecimento didático e epistemológico de toda a noosfera (obstáculo cultural). Superá-los está além do alcance da ação docente no sentido clássico: eles exigem ações didáticas de um tipo diferente.

Esses obstáculos perambulam entre a epistemologia relacionada à construção e ao significado do saber matemático e à epistemologia do professor que abrange o conhecimento científico e suas concepções sobre a disciplina, seu ensino e sua aprendizagem pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. **Fundamentos da didática da matemática**. 2ª edição, Editora da UFPR, 2022.

ANDRADE, Maria Helena de, OLIVEIRA, Rannyelly Rodrigues de, FEITOSA, Raphael Alves. A epistemologia na didática da matemática em completude com a tecnologia. **Tear: Revista de Educação Ciência e Tecnologia**, Canoas, v.7, n.1, p. 1-15, 2018. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/2698/2026 , acesso 19/03/2024.

ARSAC, G. Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. v.9.3, p. 247-280, 1988

ARTIGUE, M. « **Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994)** », eds. Bruno Belhoste et al., Les sciences au lycée : un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger (Paris : Vuibert), 195-217, 1996a.

ARTIGUE, M. « **L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques** », J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, p. 27-53, 1996b.

ARTIGUE, M. Épistémologiques et didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage, vol. 10, nº 23, pp. 241-286, **1990**.

BARBIN, Evelyne. La démonstration mathématique, significations épistémologiques et questions didactiques. **Bulletin de l'APMEP** v.366, Dec. 1988.

BACHELLARD, G (1938) **La formation de l'esprit scientifique**, Vrin, Paris. 1980

BALACHEFF, Nicolas. Contribution de la didactique et de l'épistémologie aux recherches en EIAO. XIII Journées francophones sur l'informatique, Jul 1991, Genève, France. pp. 9-38. hal-01027408. Disponível em : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01027408 , acesso 31/01/2024

BARDINI, Caroline. **Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique.** 2003. 286 f. Didactique des Mathématiques de l´Université de Paris VII, 2003. Disponível em: https://theses.hal.science/tel-00011697/document , acesso 31/01/2024

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, pp. 1-28, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757

BKOUCHE, R. Épistémologie, histoire et enseignement des mathématiques**. For the learning of mathematics** 17(1), 34-42, 1997.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, **Recherche en Didactique des Mathématiques**, Vol. 23, 303-346, 1983.

BROUSSEAU, Guy. Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique., Montréal, Canada. 1986, p. 277-285. ffhal-00516586. Disponivel em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516586 , acesso: 20/01/2024.

BROUSSEAU, Guy. Les stratégies de l´enseignant et les phénomènes typiques de l´activités didactiques, Actes de l´École d´Été de Didactique des Mathématiques – Saint-Sauves d´Avergne, 1995, p. 3-45

BROUSSEAU, Guy. La théorie des situations didactiques – Le cours de Montréal, 1997. Disponivel em http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/, acesso em 02/03/2024

CHAPELLE DE D´ALEMBERT 1ère édition, 1751

CHEVALLARD, Yves. L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1999.v. 19.2, p. 221-265 ».

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1985.

CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles** – Thèse de doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures – L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983

DELEDICQ A. **Theaching with infinitesimals**, Springer –Verlag, 1994.

DORIER, Jean Luc. La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale. In Theis L. (Ed.) **Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage** – Actes du colloque EMF2015 – GT1, p. 108-118, 2015. Disponível em : https://emf.unige.ch/files/9314/6400/7522/EMF2015GT1DORIER.pdf

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-IREM*. Pont-á-Mousson: Topiques Editions, 1992. v.6, p. 132-158.

DOUMBIA, Cheick Oumar. **Un modèle didactique de référence pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali**. Thèse sur l´enseignement, la philosophie et l´histoire des Sciences de L´Université Fédérale de Bahia et l´Université Étatique de Feira de Santana, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/31999

DUVAL, Raymond. **Semiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Peter Lang, 1995.

GASCÓN, J. (2011) Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME**, 14 (2), p. 203-231.

JOB, P**. Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques.** Thèse. Université de Liège, Belgique, 2011.

LAKATOS I (1978) **Cauchy and continuum dans Mathematics, Science and Epistemology**, Cambrigde University Press

LEGRAND M. **Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse**, Repère IREM, Vol. 10, pp. 123- 159, 1993.

Œuvre philosophique de D'Alembert volume2, Editeur Jean-François Bastien, 1805

Piaget Jean (1967) Logique et Connaissance Scientifique, Paris, Gallimard

POINTCARRÉ, H. **la logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. L'enseignement mathématique** 1, pp. 157-162, 1899. Disponible sur le link :http//: doi.org/1051.69/seals-1226 consulté le 15/01/2019.

Rogalski, Marc. Problèmes épistémologiques et didactiques liés aux notions de cadres (ou domaines de fonctionnement), registres de representation et points de vue. Le cas des représentations graphiques des fonctions. Xerox de transparências de seminários feitos no Centro das Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP, em Agosto de 1995.

SCHUBRING, Gert. Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x,* IREM De Grenoble, 1986. v.12, p. 5-32.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite- **DM** vol. 6, 1, pp. 5-67, 1985.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage. v. 10, n°2-3 p. 133-170, 1990

VERGNAUD, Gérard. Interaction sujet-situations.Actes de la III°Ecoled'Eté de Didactique des Mathématiques.Grenoble:IMAG., 1984, p. 22-42

Histórico

Recebido: 01 de abril de 2024.
Aceito: 05 de junho de 2024.
Publicado: 26 de julho de 2024.

Como citar – ABNT

ALMOULOUD, Saddo Ag. Papel da dimensão epistemológica em pesquisas da didática da matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 49, e2024007, 2024.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id662

Como citar – APA

Almouloud, S. A. (2024). Papel da dimensão epistemológica em pesquisas da didática da matemática. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (49), e2024007. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id662

Número temático organizado por

Iran Abreu Mendes