Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 47, e2024030
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024030.id670

O Pensamento Computacional e o Método de Completar Quadrados

Computational Thinking and the Completing the Square Method

Pensamiento Computacional y el Método de Completar Cuadrados

Marisabel Antunes[1]

RESUMO

Este trabalho de investigação é o resultado de um estudo realizado com alunos do 10.º ano do Ensino Secundário, de duas turmas piloto dos novos programas de Matemática, conhecidos como Novas Aprendizagens Essenciais, a entrarem em vigor no ano letivo 2024/2025, onde foi aplicada e analisada uma tarefa exploratória, elaborada com base nas práticas do pensamento computacional definidas por Wing (abstração, depuração, reconhecimento de padrões, pensamento algorítmico e decomposição). Pretendeu-se que os alunos, ao realizarem esta tarefa através do método de completar quadrados, numa manipulação geométrica e algébrica, chegassem às soluções de qualquer equação do segundo grau do tipo $x^2 + px = q$, com $q \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$. Enfatiza-se a importância deste estudo por ter sido aplicado a um novo currículo, antecipando a sua generalização. Trata-se de um estudo de caso exploratório, que utiliza métodos qualitativos, focado na integração do pensamento computacional em sala de aula. Concluímos que as práticas do pensamento computacional estão presentes nas respostas dos alunos, e que a tarefa promove o desenvolvimento do pensamento computacional. Contudo, verificámos, nestas turmas, dificuldades na manipulação algébrica, que se tornaram num entrave à concretização/resolução de algumas questões nela colocada, indo ao encontro do que é salientado na literatura.
Palavras-chave: Pensamento Computacional, Geométrico e Algébrico; Tarefa Exploratória; Método de Completar Quadrados.

ABSTRACT

This research paper is the result of a study carried out with 10th grade students from two pilot classes of the new maths programmes, known as New Essential Learning, which will come into force in the 2024/2025 school year, where an exploratory task was applied and analyzed, based on the computational thinking practices defined by Wing (abstraction, debugging, pattern recognition, algorithmic thinking and decomposition). The aim was for the students to carry out the task, using geometric and algebraic manipulation, to arrive at the solutions of any second-degree equation of the type $x^2 + px = q$, with $q \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$, i.e. any 2nd degree equation, using the method of completing squares. The importance of this study is emphasized, as it was applied to a new curriculum in anticipation of its generalization. This is an exploratory case study using qualitative methods focused on the integration of computational thinking in the classroom. We concluded that computational thinking practices are present in the students' responses, and that the task promotes the development of computational thinking. However, in these classes we found difficulties in algebraic manipulation, which became an obstacle to realizing/solving some of the questions posed, in line with what is highlighted in the literature.
Keywords: Computational, Geometric and Algebraic Thinking; Exploratory Task; Square Completion Method.

RESUMEN

Este trabajo de investigación es el resultado de un estudio realizado con estudiantes de 10.º grado de dos clases piloto de los nuevos programas de Matemáticas, denominados Nuevos Aprendizajes Esenciales, que entrarán en vigor en el curso 2024/2025, donde se aplicó y analizó una tarea exploratoria basada en las prácticas de pensamiento computacional definidas por Wing (abstracción, depuración, reconocimiento de patrones, pensamiento algorítmico y descomposición). El objetivo fue que los estudiantes, al realizar esta tarea utilizando el método de completar cuadrados, en una manipulación geométrica y algebraica, llegaran a las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado del tipo $x^2 + px = q$, com $q \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$. Destaca la importancia de este trabajo porque se aplicó a un nuevo plan de estudios, anticipando su generalización. Se trata de un estudio de caso exploratorio, con métodos cualitativos, centrado en la integración del pensamiento computacional en el aula. Concluimos que las prácticas de pensamiento computacional están presentes en las respuestas de los estudiantes, y que la tarea promueve el desarrollo del pensamiento computacional. Sin embargo, en estas clases encontramos dificultades en la manipulación algebraica, lo que se convirtió en un obstáculo para la realización/resolución de algunas de las cuestiones planteadas, en línea con lo destacado en la literatura.
Palabras clave: Pensamiento Computacional, Geométrico y Algebraico; Tarea Exploratoria; Método de Completar Cuadrados.

1 Escola Secundária D. Dinis, Coimbra, Portugal. E-mail: prof.marisabelantunes@gmail.com.

INTRODUÇÃO

Temos assistido nos últimos dois anos, em Portugal, a um novo paradigma na educação. O uso do pensamento computacional tem sido tema de destaque e abordagem em sala de aula, na disciplina de Matemática, desde a implementação do novo currículo, as recentes homologadas Novas Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática do Ensino Básico (Canavarro *et al*., 2021), a 19 de agosto de 2021, através do Despacho n.º 8209/202, que entraram em vigor de forma faseada no ano letivo 2022/23, e do Ensino Secundário (Carvalho e Silva *et al*., 2023), a 13 de janeiro de 2023, através do Despacho n.º 702/2023, a entrarem em vigor no ano letivo 2024/2025, para o 10.º ano, em 2025/2026, para o 11.º ano e em 2026/2027, para o 12.º ano de escolaridade. Embora o pensamento computacional seja uma capacidade integrada recentemente no ensino em Portugal, inicialmente estava circunscrito ao Reino Unido e a alguns estados dos EUA. Posteriormente, passou a ser obrigatório em Inglaterra, Finlândia, Canadá, Singapura, Itália, China, Austrália, Espanha, França, Turquia, e em muitos países da União Europeia (Bocconi *et al*., 2022; Carvalho e Silva *et al*., 2023).

O pensamento computacional é uma das ideias-chave (inovadoras) deste novo currículo, promove o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática (Canavarro *et al*., 2021; Carvalho e Silva *et al*., 2023). Tavares (2023), define o pensamento computacional e as suas práticas, do mesmo modo que Carvalho e Silva *et al*., (2023), como:

> Decomposição – estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema; Abstração – extrair a informação essencial de um problema; Reconhecimento de padrões – reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema, e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes; Algoritmia – desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser; e Depuração – procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada. (Tavares, 2023, p. 14–15)

> O termo "pensamento computacional" não é recente. Seymour Papert, o inventor da linguagem de programação *LOGO* (Papert, 1980; Solomon *et al*., 2020), conhecida pela tartaruga, usou-o pela primeira vez na década de oitenta do século passado para designar um conjunto de habilidades mentais, tais como o raciocínio lógico, a criatividade, a interpretação, a assimilação de informações e factos, ou o pensamento crítico, para citar só algumas. Estas habilidades mentais, desenvolvidas nos processos da programação, podem ser aplicadas para solucionar problemas nas diversas áreas do conhecimento (Albuquerque, 2021).

Em 2006, a pesquisadora Jeannette Wing publicou um artigo sobre o pensamento computacional e apontou as suas vantagens na área da educação, nomeadamente na sua introdução nas escolas desde a educação infantil (Wing, 2006, 2021). Após a publicação deste artigo, o pensamento computacional começou a ganhar relevo. A autora considerou que é tão importante desenvolver o pensamento computacional como aprender a ler, a escrever, a calcular e a fazer operações aritméticas. É o pensar como um cientista da computação, de uma forma lógica, estruturada, com vários níveis de abstração, que permite encontrar várias soluções para um problema (Wing, 2006, 2021). É uma capacidade estruturada do pensamento, que implica ou não o uso de um computador (Wing, 2006, 2021). O ato de elaborar uma receita, mudar uma lâmpada, otimizar as compras do supermercado, por exemplo, são atos que envolvem o pensamento computacional (Gomes; Santos, 2019). Aparece, assim, como um modo de pensar, referindo-se a processos/procedimentos do pensamento para resolver problemas complexos, que não têm uma solução imediata, capaz de prever novas situações, de forma que as suas resoluções possam ser testadas, executadas, ou não, por um computador (Albuquerque, 2021; Bastos; Boscarioli, 2018; Carvalho e Silva, 2021; Wing, 2006, 2021).

Assiste-se a um crescente interesse da comunidade científica em explorar as relações entre o pensamento computacional e a Matemática, visto como um aliado no processo de mudança na forma como os conceitos matemáticos são ensinados (Bocconi *et al*., 2022). Bocconi *et al*. (2022), por um lado, e Mestre e Carvalho (2023), por outro, consideram que a aplicação do pensamento computacional contribui para a melhoria da aprendizagem dos alunos e da capacidade de resolução de problemas, afirmando que é necessário investigar acerca das estratégias de ensino e aprendizagem que melhor promovam o pensamento computacional. Deve-se continuar a construir e adaptar diferentes instrumentos para trabalhar esta competência, tais como tarefas (Ponte, 2002), e verificar se os alunos utilizaram as práticas do pensamento computacional na resolução dos problemas, com ou sem computador, e se estas os ajudaram a encontrar a solução ou soluções (Bocconi *et al*., 2022; Mestre; Carvalho, 2023). O facto de o pensamento computacional estar a ser implementado num novo programa de Matemática em Portugal, com características diferentes do anterior, levou-nos a procurar estratégias e a elaborar/adaptar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento computacional, para serem trabalhadas em sala de aula, em particular para o Ensino Secundário (10.º, 11.º e 12.º anos). Desta forma, a nossa contribuição foi a elaboração e aplicação em sala de aula de uma tarefa exploratória/investigativa (Ponte, 2005), de carácter algébrico/geométrico, para encontrar soluções de equações do tipo $x^2 + px = q$, com $q \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$ através do método de completar quadrados, em que analisámos o desenvolvimento das referidas práticas do pensamento computacional definidas por Wing (2006, 2021). Verificámos que as práticas do pensamento computacional estavam presentes nas respostas dos alunos, com maior ou menor grau, podendo ser trabalhadas, parcial ou individualmente, como forma de consolidação de cada uma delas, e também como forma de aprendizagem do método de completar quadrados. As questões foram elaboradas tendo em conta as práticas do pensamento computacional. Mostrámos que é possível trabalhá-las com este método, e que este ajudou a desenvolver, além de conceitos matemáticos, o pensamento algébrico e geométrico na resolução das questões propostas. Relatámos e refletimos sobre os resultados positivos ou negativos da sua implementação, podendo contribuir para futuras experiências educacionais de outros colegas. Refletir sobre a aprendizagem e o ensino, refletir sobre as suas experiências em sala de aula, o modo como ensinam, e como os alunos progridem dentro desse ambiente de aprendizagem, constitui um fator/aspeto de desenvolvimento profissional dos professores (Cyrino; Jesus, 2014).

Classificámos a nossa tarefa como exploratória seguindo Ponte (2005, p. 17), que considera duas dimensões básicas para descrever as tarefas: o grau de desafio, dificuldade (reduzida, mais acessível – Explorações e Exercícios; e elevada, mais desafiantes – Investigações e Problemas), e o grau de estrutura (aberta, há pelo menos uma indeterminação no que é dado ou pedido – Explorações e Investigações; ou fechada, onde é claramente dito o que é dado e pedido – Exercícios e Problemas). Numa tarefa exploratória, o aluno começa a trabalhar sem muito planeamento pois, caso contrário, seria uma tarefa de investigação. Temos, portanto, como tarefas abertas as de exploração, com grau de desafio reduzido, e as de investigação, com um grau de desafio elevado. As tarefas abertas ajudam a desenvolver capacidades dos alunos, como a autonomia ou a capacidade de lidar com situações complexas. Uma tarefa de carácter exploratório e investigativo tem momentos de discussão, em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conclusões, conjeturam e apresentam justificações (Ponte, 2005).

Assim, pretendemos responder à seguinte **questão de investigação**:

Que práticas do pensamento computacional estão presentes na resolução da tarefa do **Método de Completar Quadrados**?

Na perspetiva de responder a esta questão propusemos como **objetivos**: identificar e analisar as práticas do pensamento computacional dos alunos na abordagem da tarefa matemática que explora o método de completar quadrados (abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, depuração e pensamento algorítmico); explorar como é possível integrar o pensamento computacional numa tarefa de completar quadrados; investigar quais as práticas do pensamento computacional que são as mais utilizadas. Para estudar os resultados, identificámos as categorias de análise que permitiram compreender a forma como as diferentes práticas surgiram na atividade dos alunos enquanto exploravam a tarefa (Quadro 1).

Quadro 1 – Evidências das práticas do pensamento computacional

Dimensão	Práticas	Indicadores na exploração da tarefa
Indicadores da utilização do pensamento computacional	**Abstração [1]**	• Identifica a informação essencial • Mobiliza a informação essencial
	Decomposição [2]	• Divide a tarefa em partes menores • Mobiliza essa divisão para resoluções parciais
	Reconhecimento de Padrões [3]	• Reconhece regularidades • Mobiliza as regularidades na resolução
	Pensamento Algorítmico [4]	• Fornece uma sequência de instruções para resolver a tarefa • Identifica detalhadamente as instruções
	Depuração [5]	• Identifica erros • Corrige erros • Otimiza soluções corretas

Fonte: Mestre e Carvalho (2023)

Recuando à década de noventa do século passado, nas recomendações do estudo "Matemática 2001", iniciado em 1996 e concluído em 1998, coordenado por Paulo Abrantes e realizado pela Associação de Professores de Matemática sobre o estado do Ensino da Matemática, já encontrávamos a valorização pedagógica de tarefas que promoviam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, a aplicação de diversas formas de interação em aula, utilizando contextos diversificados, criando momentos de discussão, de trabalho de grupo, a promoção da autoaprendizagem e o espírito crítico dos alunos, leitura e análise de textos, realização de sínteses, apresentações em sala de aula, entre outros (Abrantes *et al*., 1998, p. 44).

Retrocedendo um pouco mais, a 1975, nos guias para utilização do Compêndio de Matemática, Sebastião e Silva (1975) refere que:

> a modernização do Ensino da Matemática terá de ser feita não só nos programas, mas também nos métodos de ensino. O professor deve, tanto quanto possível, abandonar o método expositivo tradicional, que coloca o aluno numa posição quase cem por cento passiva, para um método ativo, estabelecendo o diálogo de modo a conduzi-lo à redescoberta (p. 11).

Ao trabalharmos tarefas, estaremos a dar seguimento a estas ideias, bem como às preconizadas, quer no Ensino Básico, quer no Ensino Secundário, em que se pretende apoiar a aprendizagem dos alunos por tarefas para a construção do conhecimento, com contextos e recursos diversificados, de abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos, valorizando o trabalho colaborativo, num ambiente de entreajuda e corresponsabilização (aprendizagens) e argumentação. Os alunos devem ter oportunidade de explicar, justificar, formular conjeturas e procurar prova, como forma de mobilizarem o raciocínio em contexto de sala de aula. As tarefas são essenciais na construção de conhecimentos, através de questões desafiadoras, de problemas e na procura de justificações, com a integração da tecnologia. Na tarefa proposta recorremos ao uso de uma folha de cálculo e a ambientes de programação *Python*, acedidos e explorados em computadores, telemóveis ou calculadoras gráficas, indo ao encontro do preconizado nas AE, que referem o ***recurso sistemático à tecnologia*** como forma de incentivar a abordagem exploratória de ideias e conceitos. Colocámos atividades de programação, trabalhando a linguagem *Python* sugerida para o Ensino Secundário, que são relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática, envolvendo a formulação e a resolução de problemas, promovendo assim o desenvolvimento do pensamento computacional (Carvalho e Silva *et al*., 2023, p. 6). A literatura refere que os estudos que envolvem a aprendizagem de ideias matemáticas, através da programação, não são abundantes, à exceção dos que utilizam a programação *Scratch* (Benton *et al*., 2017).

O Projeto QUASAR (Silver; Stein, 1996), mostra que o foco em tarefas matemáticas, bem como nas suas fases de utilização na sala de aula, pode ajudar os professores no processo de reflexão. Neste projeto dirigido por Edward A. Silver, tal como no das nossas turmas, houve a implementação de novos programas. Nele, Silver e Stein consideravam uma tarefa como um segmento da atividade da sala de aula para o desenvolvimento de uma ideia matemática particular, com foco na aprendizagem dos alunos, tal como a nossa. Segundo a escala QUASAR, a classificação de tarefas faz-se de acordo com o nível cognitivo: as tarefas de memorização e de procedimentos sem conexões consideram-se de exigências de nível baixo, e as de procedimentos com conexões ou fazendo matemática, consideram-se de exigências de nível elevado (Cyrino; Jesus, 2014; Stein; Smith, 1998). A nossa tarefa enquadra-se nestas últimas, apresentando, segundo a descrição, exigências de nível elevado (Quadro 2). Construímos e aplicámos a tarefa de forma a desenvolver conexões entre o pensamento computacional, algébrico e geométrico, envolvendo áreas importantes da Matemática, e levando o aluno a utilizar diferentes representações para formar ideias. Na resolução da tarefa, o pensamento computacional ajuda o aluno a seguir o processo de completar quadrados, desenvolvendo a sua compreensão, sem apelar à memorização, uma competência de baixo nível (Rico, 2011; Rico; Lupiáñez, 2008). Na tarefa proposta, os alunos, partindo de figuras geométricas, transcrevem o seu raciocínio para uma escrita algébrica, chegando ao método de completar quadrados. Foi-lhes solicitado que descrevessem e analisassem os seus resultados, com a finalidade de atribuírem um significado ao seu trabalho, desafiando-os a construir um pensamento lógico – uma nova maneira de pensar – que os levou ao conhecimento do método pretendido.

Quadro 2 - Categorização dos níveis cognitivos de tarefas matemáticas QUASAR

Características de tarefas que envolvem elevado nível de demanda cognitiva	Procedimentos com conexão com significado	Fazer Matemática
	- focam a atenção dos alunos sobre o uso de procedimentos, a fim de desenvolver, mais profundamente, os níveis de entendimento dos conceitos e ideias matemáticas;	- exigem um pensamento complexo e não algorítmico, e não é sugerido explicitamente, pela tarefa, um caminho previsível, instruções para sua execução, ou um exemplo a ser seguido, que bem treinado leva à resolução da mesma;
	- sugerem explícita ou implicitamente caminhos a serem seguidos, que são procedimentos amplos e gerais que têm íntima conexão com as ideias conceituais;	- exigem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos matemáticos, procedimentos, ou relações;
	- usualmente, permitem representação em múltiplos caminhos, com diagramas visuais, manipuladores, símbolos, e situações-problemas, fazendo conexões entre múltiplas representações que ajudam a desenvolver os significados;	- exigem alta monitoração ou alta regulamentação de seu próprio processo cognitivo;
	- exigem esforço cognitivo. Apesar de procedimentos gerais poderem ser seguidos, eles não podem ser seguidos sem compreensão. Os alunos precisam envolver-se com ideias conceituais que estão por trás dos procedimentos a serem seguidos para completarem a tarefa com sucesso e desenvolvendo a compreensão.	- exigem que os alunos mobilizem conhecimentos relevantes e experiências, e façam uso apropriado destes no trabalho durante a resolução da tarefa;
		- exigem que os estudantes analisem a tarefa e examinem ativamente se ela pode ter possibilidades limitadas de estratégias de resoluções e soluções;
		- exigem um considerável esforço cognitivo e podem envolver alguns níveis de ansiedade para o aluno por não ter uma lista antecipada de processos exigidos para a solução.

Fonte: Cyrino e Jesus (2014)

INTERSEÇÃO ENTRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO E O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Como já foi referido, a nossa tarefa – o método de completar quadrados – a par do pensamento computacional, que é o nosso foco, tem uma forte utilização do pensamento e da escrita algébrica. Os alunos, de um modo geral, costumam apresentar dificuldades na aprendizagem da álgebra, especialmente em situações-problema que a exigem (Schwantes, 2021). Este facto dificultou a resolução da tarefa proposta. Presumimos que, na sua resolução, os alunos do Ensino Secundário mobilizassem conceitos algébricos, o sentido de símbolo e a manipulação simbólica no sentido de Rodrigues e colegas (2018), o que constatámos que não se verificou. Ressaltamos que a resolução de equações, a manipulação de expressões algébricas, baseando-se nos seus conhecimentos sobre álgebra, enfatizando o caso notável conhecido como o quadrado de uma soma, não eram dominados pelos alunos. Contudo, a tarefa não teve o objetivo único da manipulação algébrica, mas sim a exploração de novos conceitos, e, por isso, considerámos que o uso das práticas do pensamento computacional poderia ajudar, quer a revisitar os conceitos que não dominavam, quer a construir um conhecimento novo.

Ao fazermos este estudo, verificámos a estreita relação e a interseção destes dois pensamentos, o algébrico e o computacional. Para Carolyn Kieran (2020), foram as dificuldades sentidas pelos alunos que levaram a mudar a visão da álgebra, não a considerando apenas um conjunto de procedimentos envolvendo a forma simbólica da letra, mas também que consistia na generalização de uma atividade, que fornece ferramentas para generalizar relações matemáticas, padrões e regras (Watson; Mason, 2005). Assim, a álgebra passou a ser vista não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensar e raciocinar sobre situações matemáticas. Nestes pontos, encontrámos semelhanças entre o pensamento computacional e a álgebra (Espadeiro, 2021).

De acordo com Kieran (2020), o pensamento algébrico pode ser definido como uma capacidade de reconhecer, representar e analisar padrões e relações em situações matemáticas, usando formas simbólicas e gráficas, bem como de manipular essas representações para resolver problemas. Encontramos, aqui, pontos semelhantes com o pensamento computacional: o pensamento estruturado, o reconhecimento de padrões, a resolução de problemas, já referidos anteriormente, e a generalização. Esta última aparece no final do processo do pensamento computacional: tendo como objetivo conseguir interpretar o todo, por exemplo, um algoritmo é capaz de resolver todas as situações tipo (Espadeiro, 2021).

Borralho e Barbosa (2011)com base numa abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, compreender o significado da utilização, em sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. O ponto de partida assentou em duas questões de investigação centradas em: (1, também referem que os padrões podem ser um veículo para uma abordagem da álgebra e, consequentemente, desenvolver o pensamento algébrico. O desenvolvimento do pensamento algébrico exige a utilização de práticas de ensino em que os alunos tenham a oportunidade de explorar padrões e relações numéricas, generalizando (Borralho; Barbosa, 2011) com base numa abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, compreender o significado da utilização, em sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. O ponto de partida assentou em duas questões de investigação centradas em: (1.

Constatamos que regularidades e generalizações são alicerces para o desenvolvimento da álgebra, assim como do pensamento computacional. Entendemos, pois, o pensamento computacional como uma competência que permite a resolução de problemas, e desenvolve o pensamento crítico e a criatividade (Korkmaz *et al*., 2017)skill and attitudes necessary to be able to use the computers in the solution of the life problems for production purposes. In this study, a scale has been developed for the purpose of determining the levels of computational thinking skills (CTS. O pensamento algébrico também é, deste modo, uma forma de resolver problemas.

Consideramos que o primeiro passo para aprender a pensar é aprender a descobrir padrões, a estabelecer conexões e generalizações, práticas do pensamento computacional e algébrico, passando, assim, para uma estrutura mais abstrata (Devlin, 2002).

ABORDAGEM PEDAGÓGICA: METODOLOGIA, CONTEXTO E

ATIVIDADES

Para o nosso estudo formulámos uma tarefa exploratória de completar quadrados, considerando o caso particular de equações do tipo $x^2 + px = q$, com $q \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$, com base nas práticas do pensamento computacional, mobilizando também o pensamento algébrico, onde usámos o estudo de caso (Amado, 2017; Yin, 2003, 2010), de natureza qualitativa, construído de forma indutiva, descritiva, exploratória (Bogdan; Biklen, 1994), a partir dos dados obtidos no ambiente natural. Pretendeu-se saber se os alunos aprenderam o método de completar quadrados e se utilizaram as práticas do pensamento computacional. Escolhemos nas AE o tema Funções do 10.º ano, do tópico Funções polinomiais de grau não superior a dois, onde sugerem que os alunos deduzam a fórmula resolvente para o cálculo dos zeros da função quadrática (Carvalho e Silva *et al*., 2023). Os alunos podiam consultar o caderno, telemóvel, as tarefas realizadas, os ficheiros guardados nas calculadoras e a *internet*.

Este estudo foi realizado sobre a prática profissional de uma professora, enquanto observadora e participante, numa escola secundária na periferia de uma cidade, desenvolvido com as suas duas turmas do 10.º ano, uma com 14 alunos e outra com 16, sendo ambas turmas piloto das AE a entrarem em vigor no próximo ano letivo, 2024/2025. As turmas eram constituídas por alunos com idades compreendidas entre os 14 e 16 anos. A média das idades era de aproximadamente quinze anos. Considerámos vinte alunos para o nosso estudo, uma vez que nem todos foram assíduos na resolução da tarefa: um saiu da turma e um não apresentou qualquer trabalho. Além de alunos nacionais, tínhamos alunos oriundos de Angola, Marrocos, Brasil e Ucrânia.

Parte dos dados foram recolhidos em sala de aula, pela professora, nomeadamente: registos escritos dos alunos, observação direta, gravações, fotografias e anotações da professora. Aplicaram-se questionários aos alunos e entrevistou-se uma professora coadjuvante de uma das turmas, bem como uma aluna, sobre as suas perceções das dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução da tarefa. Posteriormente, todos estes dados foram registados e analisados.

Os questionários foram elaborados numa linguagem adaptada aos alunos, e aplicados para aferir as suas perceções, as suas capacidades de pensamento computacional, a sua satisfação e as suas dificuldades na resolução da tarefa, tendo sido as respostas individuais. Utilizámos respostas abertas e, em algumas das questões, a escala de *Likert:* • Concordo totalmente; • Concordo; • Nem concordo, nem discordo; • Discordo; • Discordo totalmente; e resposta múltipla de Sim ou Não (Oliveira; Pereira, 2023). A recolha dos dados foi feita no *Forms* do *Google* e organizados em gráficos, que apresentaremos mais à frente no nosso trabalho. Na entrevista à aluna, esta referiu as dificuldades que teve na segunda tarefa (a final).

Para podermos comparar o que observámos nas respostas dos alunos, usámos a análise de conteúdo Bardin (1977a), visando realizar a descrição e a análise dos dados qualitativos. O processo da análise de conteúdo dividiu-se em três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos dados e interpretação da análise, tendo como base um mapeamento de páginas em Excel, para apresentação dos resultados em gráficos, tabelas e quadros para facilitar a sistematização e visualização das informações.

Para concretizar o nosso objetivo, estabeleceu-se uma sequência de ensino, em que foram elaboradas, analisadas e aplicadas tarefas exploratórias, uma preliminar, trabalhada e discutida em grande grupo (turma); depois, uma trabalhada a pares ou em pequenos grupos, homogéneos, com base nas médias das classificações, de forma a compreender em que medida o pensamento computacional esteva presente, e como contribuiu para a aprendizagem do método de completar quadrados. Ambas as tarefas foram construídas tendo em conta as práticas do pensamento computacional, sendo as respostas analisadas de forma a detetar essas práticas. Dedicaram-se, ao todo, seis aulas de 50 minutos. Os enunciados e as respostas às tarefas realizadas em grupo eram sempre recolhidos no final de cada aula. A sua aplicação respeitou três fases de uma tarefa exploratória: (i) apresentação da tarefa; (ii) trabalho autónomo dos alunos em pares ou em grupo; e, (iii) discussão coletiva e sistematização das aprendizagens (Fonseca *et al*., 1999) conforme Figura 1.

Figura 1 - Fases de implementação da tarefa

Fonte: Elaboração da Autora

Nas aulas onde foram aplicadas as tarefas não recorremos à exposição da matéria. Nestas tarefas pretendeu-se trabalhar, para além do pensamento computacional e algébrico, a comunicação matemática mediada pela professora, onde os alunos expressavam as suas ideias e estratégias, valorizando o trabalho colaborativo entre pares, num ambiente de entreajuda e corresponsabilização. Estes argumentavam, procuravam soluções, formulavam conjeturas e deduziam, refletiam e justificavam, como forma de mobilizarem o raciocínio (Canavarro *et al*., 2021; Carvalho e Silva *et al*., 2023). No currículo português, estas capacidades são realçadas devido à importância atribuída ao facto de os alunos serem incentivados a justificar as suas ideias e resoluções, encadeando os seus raciocínios de forma organizada e coerente. Em todas as tarefas, a professora procurou dar autonomia (a possível) aos alunos, nunca dando a resposta e, a partir de uma pergunta colocada pelos alunos, respondia com outra, direcionando-os, orientando-os para pensarem e serem eles a chegar à solução.

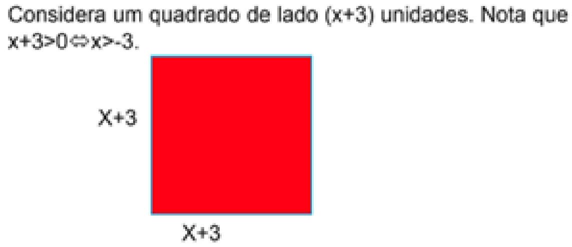
DESCRIÇÃO DO PROCESSO: TAREFAS E RESPOSTAS – EVIDÊNCIAS

Tarefa introdutória

Na tarefa introdutória e de preparação para a tarefa de completar quadrados, para cada alínea, um aluno lia o enunciado e registava as respostas e as conclusões no caderno; a professora fazia o mesmo no quadro branco. Na construção das questões e nas respostas dos alunos, quer orais, quer as que foram registadas nos seus cadernos, observámos que constavam as práticas do pensamento computacional, segundo a tabela das evidências apresentadas no Quadro 1.

A tarefa partia de um quadrado de lado $x + 3$, com $x > -3$ (Figura 2), depois solicitava a expressão da área como produto de dois fatores e, de seguida, era dado o valor da área. As instruções foram dadas passo a passo (algoritmia) até chegarem ao pretendido, às soluções de uma equação de segundo grau.

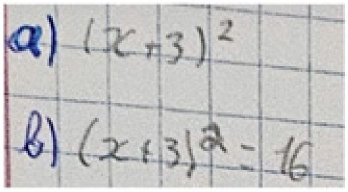
Figura 2 - Imagem introdutória da tarefa inicial
$(x + p)^2 = q$, com $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}^+$



Fonte: Elaboração da Autora

A tarefa estava dividida de modo a permitir a sua resolução parcelar (decomposição). À medida que se percorria a tarefa, esta ia sendo decomposta e resolvida, em partes menores, de forma a encaminhar os alunos para o objetivo pretendido, sendo as conclusões registadas e utilizadas nas questões seguintes. Considerámos esta escolha como uma das práticas do pensamento computacional: a decomposição. A compreensão de uma questão permitia resolver a seguinte. Por exemplo, na primeira alínea os alunos chegaram à expressão da área $(x+3)^2$; na segunda, à equação: $(x+3)^2 = 16$ (Figura 3).

Figura 3 - Respostas de um aluno às primeiras alíneas



Fonte: Elaboração da Autora

Quando nos referimos às dificuldades dos alunos a álgebra, podemos dar um exemplo de um aluno que na alínea (a) referiu que a área do quadrado "é lado vezes lado". Apesar disso, há um que responde que a área é $2 \times (x+3)$. A professora pediu, novamente, para repetirem a fórmula da área do quadrado. Outro aluno disse $(x+3)^2$. Perguntou-se à turma qual a opção que consideravam correta. Decidiram-se pela última. Este diálogo permitiu fazer a depuração e verificar onde estava o erro na primeira resposta

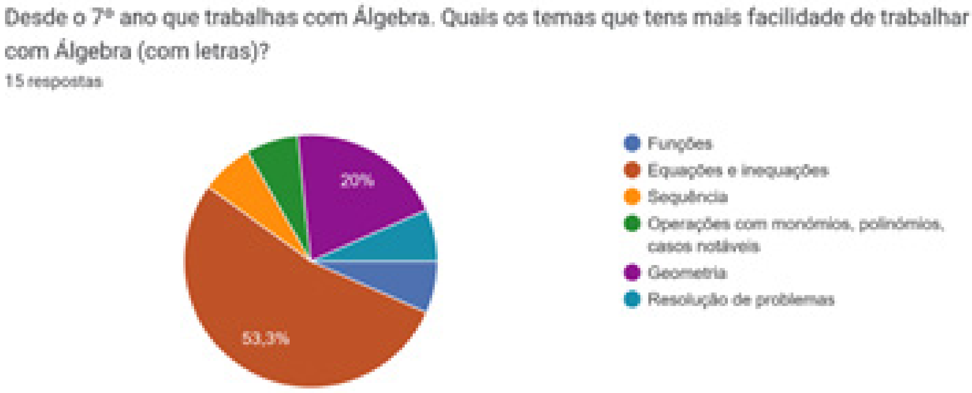
$$A_{\blacksquare} = l \times l = (x+3)(x+3) = (x+3)^2.$$

Considerámos nesta resolução que os alunos trabalharam a abstração e o reconhecimento de padrões. Segundo a tabela de evidências (Quadro 1), destacaram a informação essencial para a realização da tarefa, reconhecendo o quadrado e a fórmula a usar. Identificaram e reconheceram o comprimento dos lados como essenciais para determinar a área do quadrado e a respetiva fórmula, que depois foi utilizada nas questões seguintes o que impulsionou a prática da abstração.

Na alínea (c), a partir da condição anterior, os alunos tinham de dizer quais os valores que verificavam a equação $(x+3)^2 = 16$ (área 16). Foram questionados onde iriam colocar os números em que estariam a pensar. Responderam no lugar do x. Um aluno referiu o 1 e verificou que $(1+3)^2 = 16 \Leftrightarrow 4^2 = 16$ (depuração). Perguntámos se haveria outro número que também a verificasse, se haveria outro valor de x tal que $x+3=4$? Nesta fase foi feita nova decomposição, pensando primeiro no valor da base e reconhecendo padrões que dariam 4 pois, se "der" 4 na base, o seu quadrado será 16. Um aluno perguntou se, de facto, poderia haver outra solução. Recordámos que uma equação de segundo grau podia ter duas soluções. Uma aluna referiu -7. Verificámos $(-7+3)^2=16$ (depuração). O aluno que questionou se poderia haver outra solução, disse que -7 não podia ser porque o $x>-3$. Novamente, aqui, o aluno pensou na informação essencial do problema (abstração).

A partir do diálogo com os alunos, e comparando com outras situações de aprendizagem do ensino básico (reconhecimento de padrões), foi solicitado aos alunos para resolverem analiticamente, agora em $\mathbb{R}$, a equação $(x+3)^2=16$. Uma aluna disse que, primeiro, tiravam-se os parênteses e ficaria $x^2+3^2=16$, o que demonstrou, uma vez mais, as dificuldades na manipulação algébrica, agora de potências. Recordámos o caso notável, quadrado de uma soma, para mostrar à aluna que a sua resposta não estava correta. Aplicou-se o caso notável, corrigindo o erro (depuração) e verificámos que o seu desenvolvimento tinha três parcelas. Contudo, foi dito aos alunos que resolvessem a equação não recorrendo ao desenvolvimento do caso notável, mas recorrendo à aplicação da raiz quadrada. Também aqui os alunos ficaram sem saber o que fazer. Como não avançavam, perguntámos: se tivessem a equação $x^2=16$, como a resolveriam? Reconheceram esta equação, responderam que o quadrado do primeiro membro passaria para o segundo membro na forma de raiz quadrada: $x=\sqrt{16}$. Referimos que quando o expoente é par obtemos duas soluções, uma positiva e uma negativa, $x=\sqrt{16}$ ou $x=-\sqrt{16}$. Este erro é detetado em alunos do 8.º ano, habituados a resolver equações de 2.º grau na aplicação do Teorema de Pitágoras. Como nesse tipo de problemas trabalham comprimentos, é sempre suprimido o sinal que indica que um número é negativo $(-)$. Estas dificuldades, apresentadas pelos alunos, não refletem a autoavaliação destes, visível na Figura 4. No primeiro questionário aplicado aos alunos, em que obtivemos apenas 15 respostas, mencionaram que uma das matérias em que tinham menos dificuldades era na resolução de equações.

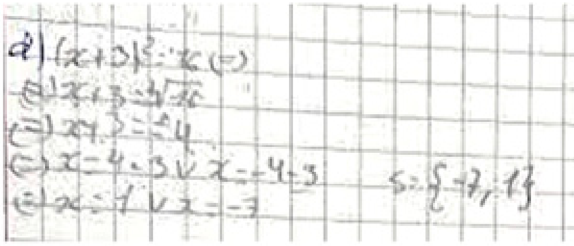
Figura 4 - Respostas ao questionário 1



Fonte: Elaboração da Autora

Compreendida a resolução da equação anterior, e reconhecido o padrão da equação, conseguiram resolver, na alínea (d): $(x+3)^2=16 \Leftrightarrow x+3=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x=\pm 4-3 \Leftrightarrow x=-7$ ou $x=1$, apresentando os passos da resolução (algoritmo), obtendo em , duas soluções Figura 5).

Figura 5 - Resolução da equação

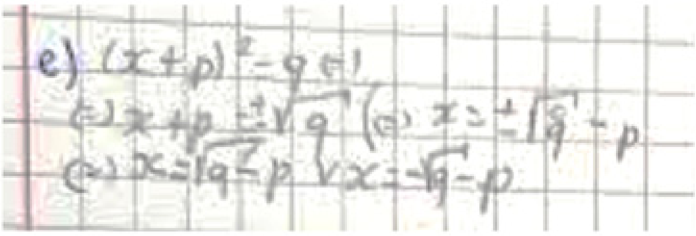


Fonte: Elaboração da Autora

Alterando os números 3 e 16 para parâmetros p e q, os alunos generalizaram a equação inicial para outros valores de $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}^+$. Na alínea (e), reconhecendo os padrões, chegaram às soluções, resolvendo passo a passo (pensamento algorítmico):

$(x+p)^2 = q \iff x+p = \pm\sqrt{q}$ $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{q} - p \Leftrightarrow x = \sqrt{q} - p$ ou $= -\sqrt{q} - p$ (Figura 6).

Figura 6 - Generalização da equação



Fonte: Elaboração da Autora

Na alínea (f) foram discutidos os valores possíveis para o número q.

Na alínea (g) pediu-se a construção de um programa em *Python,* um algoritmo (Figura 7). Os alunos elaboraram um programa simples, com o apoio da professora, em diálogo com esta, após recordarem algumas funções do *Python.* O programa determinava as soluções de equações do tipo $(x + p)^2 = q$, com $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}^+$, $x = \pm\sqrt{q} - p$. Recordámos algumas funções, tais como ***input()*** (introdução de dados) e ***print()*** (saída de resultados) e a instrução ***ctrl+r*** para correr o programa. A sua construção utilizava a prática da algoritmia, bem como outras práticas do pensamento computacional. Albuquerque (2021), coautor das AE, afirma que é quando se corre um programa num computador que o pensamento computacional atinge a sua plenitude.

O programa construído constituiu uma síntese e uma generalização de toda a tarefa. Numa primeira fase foi necessário o aluno reconhecer as letras que representam parâmetros ou variáveis. Reconhecer que devem ser introduzidos valores p e q pelo utilizador e que se pretende calcular o x. Aqui, a manipulação algébrica e o reconhecimento de padrões levaram a um entendimento de que os parâmetros desconhecidos eram necessários para a elaboração do algoritmo, e que tinham de ser pedidos ao utilizador do programa. A depuração foi outra prática trabalhada. O aluno, ao fazer correr o programa, recebia, quase em simultâneo, os erros matemáticos ou de sintaxe. Assim, à medida que os erros foram aparecendo, fez-se a depuração.

Figura 7 - Programa em *Python*

```
solucoes.py
from math import *
print("Determinar a solução da equação (x+p)^2=q")
p=float(input("Indica o valor de p: "))
print("p=",p)
q=float(input("Indica o valor de q: "))
print("q=",q)
print("A equação é (x+",p,")^2=",q)
print("As soluções são,",sqrt(q)-p,-sqrt(q)-p)
```

Fonte: Elaboração da Autora

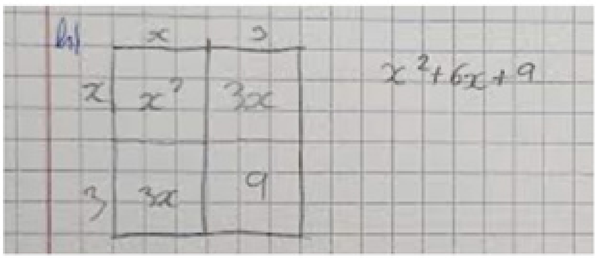
Relativamente à inclusão da programação na tarefa, aproximadamente 53% dos alunos, concordaram, ou concordaram totalmente, que conseguiram escrever o algoritmo (Figura 8).

Figura 8 - Resposta ao questionário sobre *Python*

Fonte: Elaboração da Autora

Ainda nesta tarefa fez-se o desenvolvimento e escrita da equação do segundo grau, através da decomposição do quadrado inicial de lado $x + 3$ em quatro quadriláteros (Figura 9).

Figura 9 - Decomposição em quatro quadriláteros



Fonte: Elaboração da Autora

A abstração permitiu que, a partir da identificação das áreas destes quadriláteros x^2, $3x$, $3x$, 9, os alunos chegassem a uma nova fórmula, também do segundo grau, para a área do quadrado, x^2+6x+9. Como a área continuava a ser 16, obtiveram a equação $x^2+6x+9\ =16$, culminando na escrita na forma canónica $(ax^2+bx+c=0, a \neq 0)$, $x^2+6x+9\ =16 \Leftrightarrow x^2+6x+9$ $=16$. Através do reconhecimento de padrões, identificaram os valores dos parâmetros a, b e c, isto é, $a=1$, $b=6$ e $c=-7$. Nesta fase, para além da comunicação matemática na forma corrente e simbólica, os alunos conjeturaram, a partir da observação e comparação das soluções $x = -7$ ou $x = 1$ e dos valores de b e c, como os poderiam obter a partir das soluções (-7 e 1) e de operações matemáticas. Rapidamente concluíram que $b = -(-7+1)$ e $c = -7\times1$, donde conjeturaram que $b=-\mathrm{S}$ e $c=\mathrm{P}$, sendo S a soma das duas soluções e P o produto dessas mesmas soluções. Terminaram reescrevendo:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

utilizando também a decomposição, primeiro pensando no valor de e c, depois, de b

Tarefa de exploração do método de completar quadrados

Seguiu-se a tarefa de completar quadrados. A primeira versão desta tarefa sofreu diferentes atualizações. Envolveu três fases diferentes: uma primeira aplicação realizada às duas turmas; uma segunda, com aplicação a uma turma, após ligeiras melhorias; e uma terceira fase, com aplicação final a outra turma, com mais alterações. Antes da aplicação da tarefa melhorada, foi aplicado o primeiro questionário aos alunos de modo a fazer-se um balanço do ponto de situação. Analisadas as respostas dos alunos e os registos da professora, estas sessões culminaram com a aplicação, em sala de aula, de uma tarefa melhorada, mantendo a maioria das questões, retirando algumas e reformulando outras, construída com base nas práticas do pensamento computacional. Foram analisadas duas questões para retirar uma delas, devido ao tempo despendido: uma, para consultar o algoritmo de resolução de uma equação de segundo grau no *chatgpt*, que teriam de seguir, trabalhando, assim, o reconhecimento de padrões e o pensamento algorítmico; e uma outra que continha a resolução de três equações. Considerámos a primeira pergunta interessante, para podermos aferir se os alunos conseguiam seguir, ou não, um algoritmo. Contudo, o facto de os alunos não apresentarem dificuldades na sua resolução e existirem raciocínios idênticos noutras questões, estando repetidas, condicionou a escolha da equação a retirar. Outras melhorias das tarefas deveram-se às dificuldades de interpretação das questões referidas pelos alunos (aproximadamente 47%) no primeiro questionário (Figura 10). Por exemplo, em algumas questões, substituímos a palavra quadrilátero, por quadrado e retângulo, pois percebemos que aquela palavra confundia os alunos. Acrescentámos o símbolo igual (=), pois alguns alunos tinham tendência para escrever apenas as imagens referentes ao primeiro membro da equação.

Detetaram-se dificuldades na manipulação algébrica, quer pelo facto de a maioria dos grupos não a terem conseguido concluir, quer pelas dificuldades apresentadas, ou por não controlarem o tempo para o término (Figura 10). Verificámos, por exemplo, que alguns alunos não perceberam que o quadrado de área x^2 tem lado igual a x. Ressaltaram, assim, as dificuldades dos alunos que não tiveram a ver com as práticas do pensamento computacional, mas com os fatores já atrás mencionados. Importa referir que as turmas foram acompanhadas por uma colega, professora de Matemática da escola, ao longo de todo o ano, indo a uma das aulas semanais. Esta colega foi entrevistada e reforçou que os alunos apresentam dificuldades na manipulação algébrica, provenientes de anos anteriores. A colega referiu que *os alunos do ensino básico apresentam muita dificuldade nos casos notáveis. É preciso muita abstração para interiorizar os casos notáveis e o nível etário não colabora. Estes estão num nível de muita concretização. A abstração para entender que* $(x+1)^2$ *é igual a* x^2+2x+1 *não está desenvolvida na grande parte dos alunos. De um lado, são duas parcelas, e do outro, três!!! Não entendem! Também no Ensino Secundário os alunos têm muita dificuldade em perceber e aplicar os casos notáveis, devido à falta de pré-requisitos e à falta de maturidade para perceber estes conceitos. Deveriam ser aprofundados no básico para evitar as dificuldades no secundário*. Palavras que vão ao encontro das nossas conclusões. São necessárias mais tarefas exploratórias, no sentido de Ponte (2005), em sala de aula, e o tema da álgebra deve ser iniciado nos anos anteriores, como Kieran (2007) referiu.

Aproximadamente 33,7% concordaram e concordaram totalmente terem sentido dificuldades a responder às questões, e 40% respondeu ter dificuldades em matérias anteriores, tais como operações com monómios e casos notáveis.

Figura 10 - Gráficos do primeiro questionário

Fonte: Elaboração da Autora

Entre a aplicação da primeira versão da tarefa e a segunda, houve uma aula de exploração de conteúdos a lecionar que serviu para verificar se os alunos tinham compreendido o método de completar quadrados. Nesta aula trabalhámos a expressão de uma função quadrática, passando da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, para a forma $f(x)=a(x-h)^2+k$, $a \neq 0$ que nos permite conhecer as coordenadas do vértice da parábola (h,k), e a equação do seu eixo de simetria $(x = h)$. Do trabalho realizado pelos alunos ressaltaram as suas dificuldades em relacionar a tarefa exploratória com estes exercícios, facto que levou a professora a procurar melhorar a tarefa.

Das respostas ao primeiro questionário, aproximadamente 47% dos alunos não discordaram, nem concordaram; 33% concordaram totalmente que foram autónomos; aproximadamente 87% concordaram ou concordam totalmente que foram autónomos; e 13% nem concordaram, nem discordaram. Em relação aos trabalhos a pares ou em grupo, 93% dos alunos, aproximadamente, referiram que gostam deste tipo de trabalho e que os fez compreender os conceitos. Em relação à ajuda da professora, todos os alunos, à exceção de um, responderam que a professora não lhes deu nenhuma das respostas (Figura 11). Saliente-se que o aluno que respondeu que a professora lhe deu a resposta, afirmou que esta lhe tinha dito a fórmula resolvente.

Figura 11 - Gráficos sobre aprendizagens, autonomia e trabalho de grupo

Fonte: Elaboração da Autora

Quando perguntámos aos alunos o porquê, e em que é que o trabalho de grupo facilitou a resolução da tarefa, salientaram que foi importante trabalharem em grupo porque permitiu ouvir, expressar, trocar e discutir ideias diferentes com os colegas. Referiram que tornou a resolução mais fácil, e que é mais produtivo para a aprendizagem. Nas palavras dos alunos, é fácil pensar em conjunto *porque podemos discutir as nossas ideias até chegar a um consenso; pois em conjunto é sempre mais fácil de pensar, e é bom haver trocas de ideias. A partilha de ideias entre os colegas ajuda na realização do trabalho; com duas pessoas temos horizontes maiores; considerar diferentes perspetivas; "ajuda-nos a discutir ideias e ouvir formas diferentes de pensar para chegar a um consenso*. Estas são algumas das respostas dos alunos. Destaque-se que um dos alunos respondeu que o que mais gosta nas aulas é a resolução de tarefas de exploração/investigação em grupo.

Terminada esta fase, surgiu uma segunda versão da tarefa completar quadrado em que os alunos corresponderam mais positivamente. A primeira versão da tarefa teve piores resultados. Para não haver repetição da análise/descrição das tarefas, dadas as parecenças destas, optámos apenas por fazer a da versão final da tarefa. Primeiro, analisámos as questões, procurando evidências da aplicação das práticas do pensamento computacional (Quadro 1), e fez-se um balanço destas preenchendo o Quadro 3. Por exemplo, na primeira questão pretendia-se que os alunos utilizassem a abstração, a decomposição e o reconhecimento de padrões.

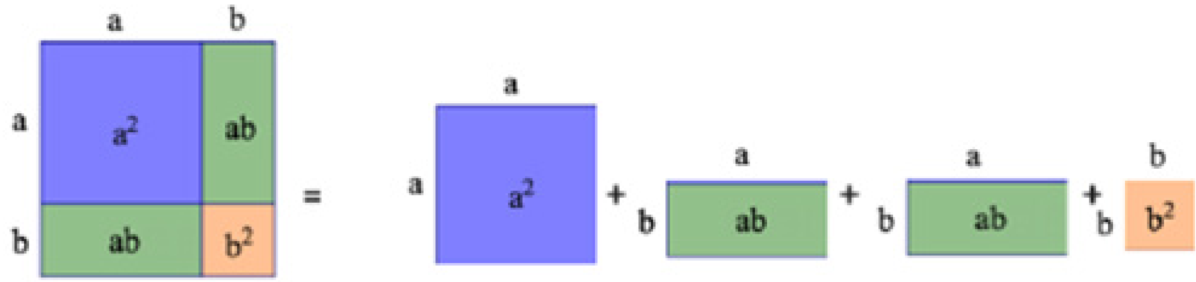
Quadro 3 - Práticas do pensamento computacional nas questões da tarefa

Práticas Questões	Abstração	Reconhecimento de Padrões	Decomposição	Pensamento Algoritmico	Depuração
1	X	X	X		
2	X	X	X		
3		X			
4	X	X			
5	X	X		X	
6		X			
7	X	X		X	
8		X			
9		X	X	X	
10		X			
11		X		X	
12		X			X
13	X	X	X	X	X
14	X	X	X	X	

Fonte: Elaboração da Autora

A tarefa inicia-se com a fórmula de um dos casos notáveis: o quadrado da soma e sua representação geométrica (Figura 12).

Figura 12 - Primeira figura da tarefa - caso notável



$$(a+b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2$$

Fonte: Elaboração da Autora

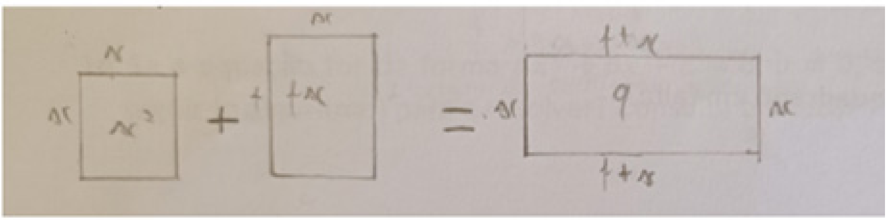
A sequência de questões decompõe o problema inicial em problemas menores. De seguida, cada uma das partes foi resolvida, passo a passo, para que o aluno encontrasse a fórmula das soluções através do método de completar quadrados. Considerámos ter trabalhado aqui a prática da decomposição e a algoritmia.

De seguida analisámos as respostas dos alunos. Para a resolução da primeira questão (Figura 13), foi necessário que o aluno se concentrasse nos aspetos essenciais, os elementos da situação a destacar, ignorando os restantes, de forma a reduzir a complexidade e a sua classificação (abstração): perceber que x^2, px e q correspondem a áreas de quadriláteros (o primeiro a um quadrado, o segundo e o terceiro a um retângulo); identificar o comprimento dos lados, perceber o modo de representação dos dados e mobilizar estes conceitos, por exemplo, as áreas com o comprimento dos lados, fazendo jus à tabela das evidências: "Identifica a informação essencial" e "Mobiliza a informação essencial", passando de representações simbólicas para geométricas.

Figura 13 - Primeira questão e resposta de um aluno

Dada a equação $\boldsymbol{x^2 + px = q}$, considera os seus termos $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{px}$ e $\boldsymbol{q}$ como áreas de três quadriláteros (um quadrado e dois retângulos).

1. **Desenha** o quadrado com área $\boldsymbol{x^2}$ e o retângulo de área $\boldsymbol{px}$, adiciona-os e iguala-os a um retângulo de área $\boldsymbol{q}$. Coloca a medida dos comprimentos dos lados nos dois primeiros.



Fonte: Elaboração da Autora

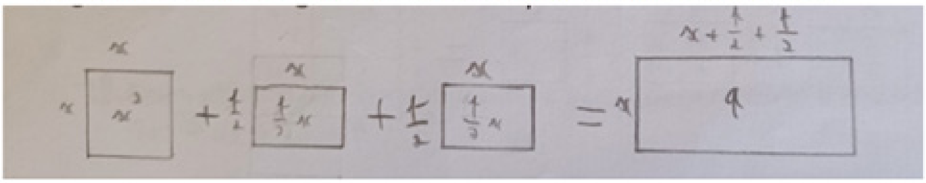
Depois de desenharem as figuras e colocarem as áreas x^2 e px, questionámos o grupo com mais dificuldades, por ter solicitado a ajuda da professora, sobre qual era o comprimento de cada lado. Uma aluna referiu que não se lembrava dos comprimentos. Pedimos para considerar um quadrado de área x^2, e questionámos qual é o comprimento de cada um dos seus lados? Os comprimentos têm de ser iguais, afirmámos. Repetiu-se a pergunta de outra forma: se a área for 4, quanto mede o comprimento de cada lado? A aluna respondeu, sem pensar: mede 4. À qual se respondeu: então a área seria 16 e não 4. Respondeu, novamente, então, 2. Porque $2 \times 2 = 16$. Voltámos à questão inicial, agora com letras. Então se a área é x^2, qual é o comprimento de cada lado? A aluna voltou a responder 2. Foi-lhe dito que o comprimento do lado não era um número, mas uma expressão com letras, $x \times x$ é igual a x^2. Do mesmo modo, perguntámos quais os comprimentos dos lados de um quadrilátero de área $p \times x$? Desta vez, não houve dúvidas que um mede x e o outro p.

Ao decomporem a equação em três parcelas, equivalendo-as a três quadriláteros, considerámos que também aqui estávamos na presença da prática da decomposição, uma vez que, pela tabela, era solicitado aos alunos: "Divide a tarefa em partes menores" e "Mobiliza essa divisão para resoluções parciais". Além de reconhecerem o padrão, quer de exercícios anteriores, quer identificando a primeira figura com o quadrado, fizeram, novamente, a conexão entre a álgebra e a geometria.

Na segunda questão (Figura 14), foi solicitado aos alunos a divisão do retângulo de área px em dois, geometricamente iguais, facilitando a continuação da resolução do problema (decomposição). A decomposição em três figuras, permitiu trabalhar cada uma delas em separado, ajudando na construção do quadrado correspondente ao completar o quadrado. Concentrando-se no quadrilátero solicitado, identificaram, por um lado, as áreas de cada figura partida, concentrando-se na área da figura inicial e na operação que deviam fazer para obter cada uma delas. Reconheceram o quadrado, a sua área e os seus lados; a similaridade entre o segundo e o terceiro retângulo, bem como o comprimento dos seus lados e as suas áreas (abstração). Por outro lado, reconheceram que os dois quadriláteros são iguais e que a figura obtida nesta questão é equivalente à obtida na questão anterior (reconhecimento de padrões).

Figura 14 - Questão 2 e resposta do aluno.

2. Repete o esquema anterior dividindo apenas o retângulo de área *px* em dois retângulos geometricamente iguais, em que a medida de um comprimento de um dos lados é *x*. Acrescenta a cada figura as respetivas áreas e os respetivos comprimentos dos lados.



Fonte: Elaboração da Autora

Todos os alunos de uma turma conseguiram realizar esta questão, da qual se apresenta uma resolução (Figura 14). Contudo, surgiram dúvidas em dois grupos com dificuldades em escrever a área de cada um dos quadriláteros. Foi estabelecido um diálogo com a professora, em que esta recorreu à aritmética, e a valores concretos.

– Então se a área do quadrilátero de área $p \times x$ fosse 10, se dividissem em duas partes iguais, qual seria a área de cada quadrilátero? – perguntou a professora.

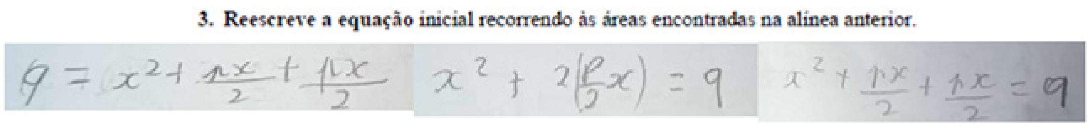
Os alunos do grupo responderam que a área seria 5. Perguntou-lhes que operação haviam feito para passar de 10 para 5. Ambos os grupos responderam elevado a dois. Então, perguntou a professora, mas se elevássemos 10 a dois dava 5? Não, dava 100. A área ainda era maior do que a do quadrado inicial, o que não podia acontecer. Depois concluíram que dividiriam o por dois. Surgiram dificuldades em passar desta parte aritmética para a algébrica pois, em vez de números, tinham as letras p e x. A professora repetiu a questão diversas vezes de forma a perceberem que a escrita matemática teria de ser $10/2$ (metade). Neste ponto perceberam que, relativamente a px teriam de considerar metade de px. Uma aluna referiu que dividiu ao meio, metade para cada lado. Traduzir essa metade por meio de símbolos foi complicado.

– Como escreves metade de px? – perguntou a professora.

Respondeu: px sobre 2? E então escreveram $px/2$. Como diziam Blanton e Kaput (2005), foi a produção de significados sobre o contexto da situação-problema que possibilitou a sua representação por meio de uma linguagem simbólica e estritamente algébrica. Segundo Vygotsky (2007), o ponto fulcral concentra-se na linguagem que, quando carregada de significados, transforma-se em pensamento, o qual pode, nesse momento, ser expresso.

Na questão 3, solicitámos aos alunos para fazerem o percurso inverso, ou seja, passar da parte geométrica para a algébrica, reescrevendo a equação a partir da figura obtida na questão 2, mobilizando e identificando a informação essencial, recorrendo à prática de abstração. Considerámos que foi usada a prática do reconhecimento de padrões: "Reconhece regularidades" (áreas iguais) e mobiliza-as para a escrita da equação, recorrendo à ajuda visual do esquema anterior, fazendo a conexão entre a parte geométrica e a algébrica (Figura 15).

Figura 15 - Questão 3 e respostas de alunos.



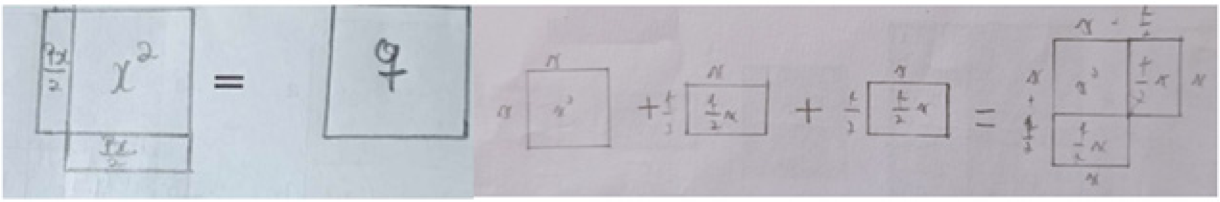
Fonte: Elaboração da Autora

Depois de construídos os quadriláteros com as respetivas áreas, não houve qualquer dificuldade em escrever a equação. Verificámos que todos os alunos responderam corretamente a esta questão, tendo um deles indicado apenas o primeiro membro.

Na questão 4, considerámos que continuava a existir a prática de reconhecimento de padrões para que os alunos conseguissem juntar os quadriláteros pretendidos: juntar lados adjacentes, com as mesmas medidas, de modo a tentar formar um quadrado. Salientamos que muitos alunos não conheciam o termo *adjacentes*. Como a professora não podia dar a resposta, os alunos consultaram o *google,* outros o *chatgpt*, para procurar a definição deste termo. Após a procura, continuaram com dificuldades pois retiraram como significado "estar num lado próximo", "lados juntos", tendo alguns desenhado, inicialmente, o quadrado encostado a um retângulo e, por sua vez, este encostado ao outro retângulo (Figura 16). A partir desta questão, os alunos começaram a apresentar dificuldades, não respondendo corretamente.

Figura 16 - Questão 4 e respostas de alunos.

4. Adapta o esquema da questão 2, de modo a tentar completar um quadrado. Encosta os dois retângulos obtidos na divisão, a dois lados adjacentes do quadrado de área $\boldsymbol{x^2}$. Mantem os comprimentos dos lados na figura obtida.



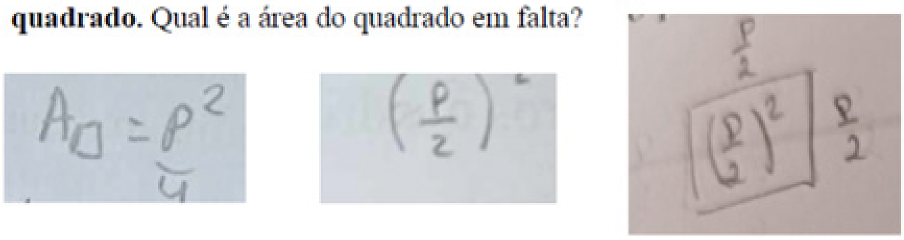
Fonte: Elaboração da Autora

Muitos alunos apresentaram os quadriláteros, mas não identificaram o comprimento dos lados, que consideramos essencial nesta parte do reconhecimento de padrões para responder às questões seguintes. Apesar disso, três grupos conseguiram apresentar um novo esquema, dois apenas o esquema do primeiro membro, e dois não apresentaram nenhum esquema.

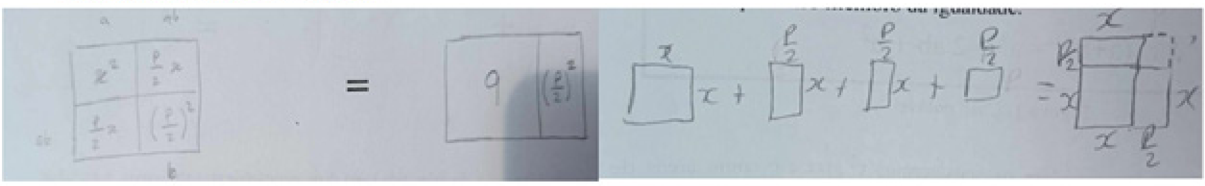
Nas questões 5, 6 e 7 os alunos tiveram de reconhecer padrões, e reconhecer a medida do comprimento do lado dos quadriláteros (reconhecimento de padrões e abstração). A questão 5 solicitava a identificação do quadrado em falta, e a sua área, para completar quadrados; na questão 6, tinham de acrescentar este quadrado à figura obtida na questão 4. Apresentamos uma nova imagem com este quadrado (Figura 17); na questão 7 foi feita uma sistematização, visível na Figura 18.

Figura 17 - Respostas às questões 5 e 6.

5. Repara que falta juntar um quadrado à figura anterior para completares um quadrado. Qual é a área do quadrado em falta?

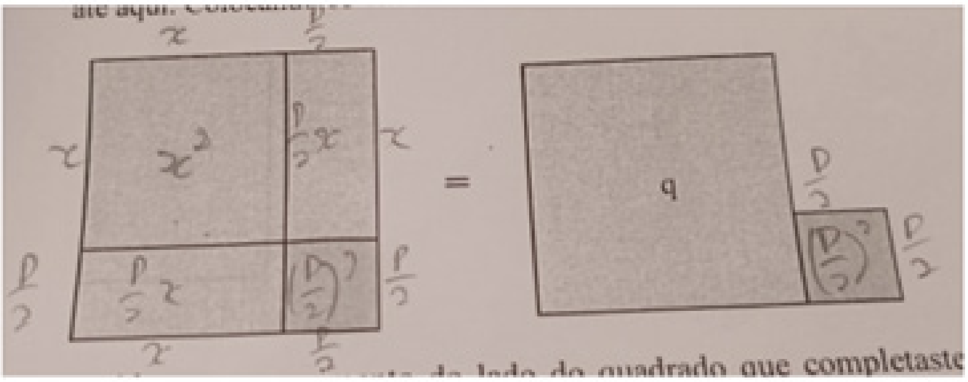


6. Acrescenta esse **quadrado em falta** a **ambos os membros da equação geométrica.** Acrescenta na figura a área dos dois quadrados e dos dois retângulos, mantendo escritos os comprimentos dos lados.



Fonte: Elaboração da Autora

Figura 18 - Esquema da resolução da questão 7



Fonte: Elaboração da Autora

Na questão 8, após acrescentarem o quadrado em falta, foi solicitado novamente para reescreverem a equação anterior após completarem o quadrado, apresentando no primeiro membro a área desse quadrado (caso notável – reconhecimento de padrões) o que pode ser observado na Figura 19.

Figura 19 - Questão 8 e respostas.

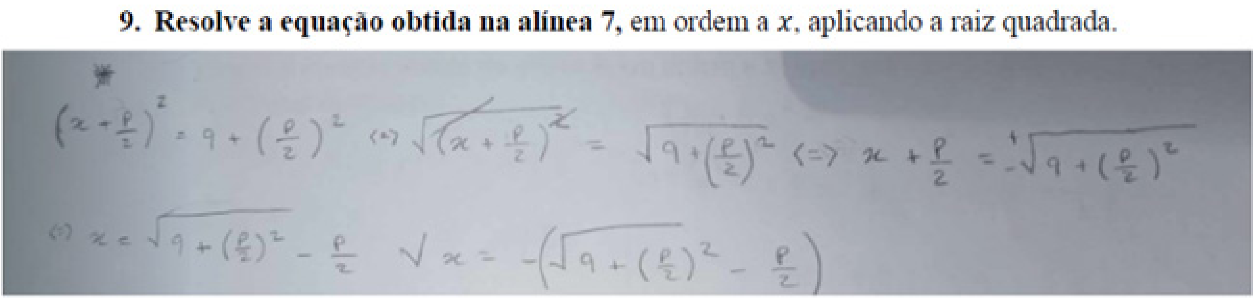
8. Considera o comprimento do lado do quadrado que completaste no primeiro membro e escreve a sua área utilizando essa medida (caso notável-em forma de potência), identificando o a e o b da figura 1. Rescreve a equação da questão 3, a partir do esquema da pergunta 7.

$(x + \frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2$ $\quad$ $(x + \frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2$

Fonte: Elaboração da Autora

Segue-se a questão 9 (Figura 20), onde foi solicitado que seja resolvida a equação obtida. Alguns alunos utilizaram o desenvolvimento dos casos notáveis, trazendo-lhes dificuldades na resolução posterior da equação. Porém, um grupo apresentou logo o binómio, e dois grupos, depois de escreverem o desenvolvimento e atendendo às dificuldades que estavam a ter, optaram por reescrever o binómio. A aluna entrevistada considerou que esta foi uma das perguntas mais complicadas da tarefa. Porém, disse que, na sua opinião, quem não escolheu o binómio dependia das suas experiências anteriores/treino. Ela optou primeiro pelo desenvolvimento do caso notável, retomando-o em forma de uma potência. Considerámos estarem presentes a abstração e o reconhecimento de padrões. Considerámos, também, implícito o pensamento algorítmico, uma vez que o aluno tem de descrever, passo a passo, a resolução da equação e identificar as soluções a que chegaram. Considerando o Quadro 1, o aluno “Fornece uma sequência de instruções para resolver o desafio”, “Identifica detalhadamente as instruções” e a identificação de padrões, com a resolução de equações anteriores, nomeadamente na tarefa introdutória realizada em grande grupo. Este algoritmo apresenta uma generalização possível para resolver equações do tipo $x^2 + px = q$. Contudo, dadas as dificuldades apresentadas na manipulação de raízes (radicais) e potências, impossibilitou-os de descrever corretamente os passos, como se constata na Figura 20.

Figura 20 - Questão 9 e resposta.

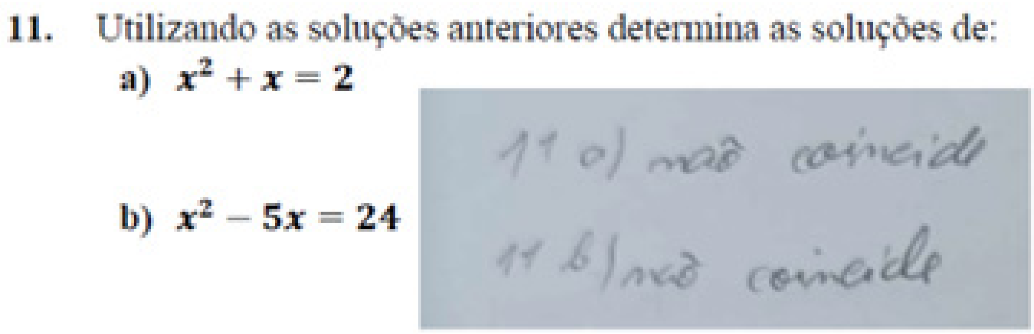


Fonte: Elaboração da Autora

Na questão 10, foram sistematizadas as soluções.

Na questão 11, considerámos a utilização do reconhecimento de padrões e o pensamento algorítmico. Foram dadas duas equações e pediram-se as soluções, partindo os alunos das fórmulas a que chegaram. Estes tiveram de identificar, para cada equação, os valores dos parâmetros p e q, de seguida, reconhecer e aplicar a fórmula a que chegaram. Considerámos que, nesta escolha, os alunos utilizaram a prática da abstração. Alguns identificaram corretamente o p e o q, mas depois apresentaram dificuldades na manipulação da raiz quadrada (reconhecimento de padrões).

Figura 21 -Questão 11 e respostas.



Fonte: Elaboração da Autora

Na questão 12, os alunos identificaram se erraram nos passos do método e corrigiram os erros. O *QR code* fornecido transportou-os para uma folha de *Excel* em que foram apresentadas as fórmulas corretas e em que o aluno, ao substituir o p e q, verificou se as suas soluções estavam corretas (depuração), e se efetuou devidamente a generalização. Também nesta questão os grupos apresentaram, na resolução da equação, muitas dificuldades na manipulação da raiz quadrada, apesar de ter sido feita uma questão idêntica na tarefa introdutória.

Figura 22 - Questão 12 e resposta.

12. Utilizando a folha de cálculo disponibilizada no QR Code verifica se as soluções que encontraste na pergunta 11 coincidem com as que encontraste na folha de cálculo

x^2	+	p	x	=	q	<=>	x=	(-p+sqrt(p^2+4q))/2	v	x=	(-p-sqrt(p^2+4q))/2
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0
x^2	+		x	=		<=>	x=	0	v	x=	0

A solução diferente, porque na folha de calculo e usada outra formula que ao calcular podemos observar resulta as formula em ambas as linhas

Fonte: Elaboração da Autora

A partir destas fórmulas, na questão 13 foi pedido um programa em *Python*, em que, no algoritmo, foi apresentada uma generalização para resolver equações do tipo $x^2 + px = q$. Na construção do programa em *Python* conseguimos ver todas as práticas do pensamento computacional, abstração, depuração (identificação e correção automática dos erros de código e matemáticos); pensamento algorítmico (foi construída uma sequência de passos a executar); reconhecimento de padrões; decomposição (Figura 23).

Figura 23 - Questão 13 e programa em *Python*.

13. Constrói um programa em *Python* que resolva equações do tipo $\boldsymbol{x^2 + px = q}$. Utiliza a pergunta 10 para te ajudar.

*completar_quadrados.py 11/11

```
from math import *
print("Soluções de x^2+px=q")
p=float(input("Indica o valor de p: "))
q=float(input("Indica o valor de q: "))
x1=sqrt(q+(p/2)**2)-(p/2)
x2=-sqrt(q+(p/2)**2)-(p/2)
print("As soluções são:",x1,"ou",x2)
```

Shell Python 8/8

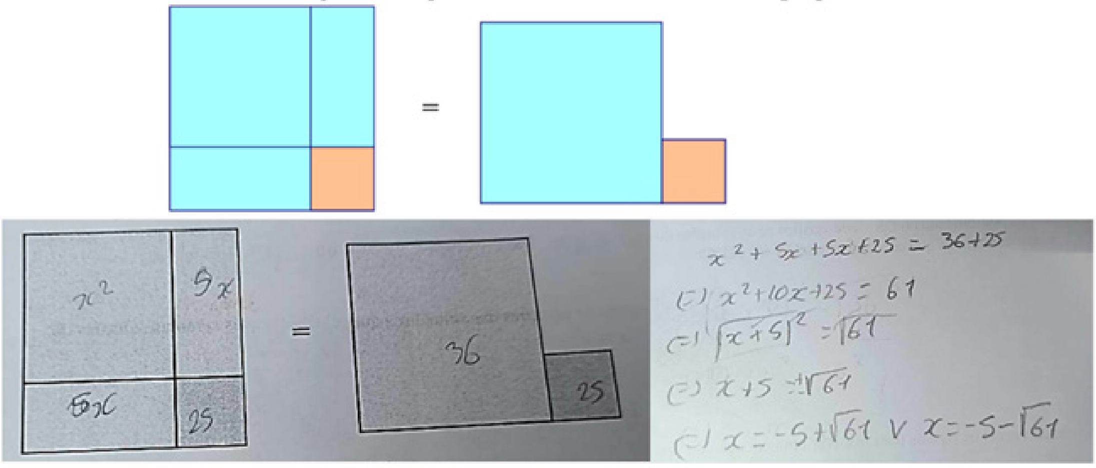
```
>>>#Running completa
>>>from completar_qua
Soluções de x^2+px=q
Indica o valor de p: 1
Indica o valor de q: 2
As soluções são: 1.0 ou
 -2.0
```

Fonte: Elaboração da Autora

Na última questão (Figura 24), pretendeu-se verificar se o aluno aprendeu ou não o método de completar quadrados, aplicando os passos que percorreu nas questões anteriores para uma situação concreta ($x^2 + 10x = 36$). Para facilitar, foram construídos os quadrados e os retângulos que os alunos tinham de completar (decomposição). Em vez de e , tinham, agora, números (reconhecimento de padrões). Alguns conseguiram completar o quadrado totalmente, outros parcialmente e três grupos conseguiram resolver a equação. Mas, novamente, demonstraram dificuldades na manipulação da raiz.

Figura 24 - Questão 14 e respostas dos alunos

14. Considera a figura 2 e a equação $x^2 + 10x = 36$. **Volta a ler a pergunta 7.**



Fonte: Elaboração da Autora

Nesta questão, considerámos estarem presentes as práticas da abstração (concentrar-se no que é essencial, áreas apresentadas na equação e distribuição pelos quadrados e retângulos), decomposição (pensar na área de cada quadrado e retângulo em separado), reconhecimento de padrões (reconhecer as áreas de cada membro, o comprimento do lado e a área do quadrado do primeiro membro), pensamento algorítmico (o passo a passo da resolução para chegar à solução).

No final da tarefa fizemos uma síntese que iria ser utilizada sempre que aparecesse uma situação de completar quadrados:

Podemos concluir que, para resolver uma equação do tipo $x^2 + px = q$, dividimos o termo em duas partes iguais (dois retângulos geometricamente iguais) e acrescentamos a cada membro o termo $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Na última questão, para ajudar um dos grupos com mais dificuldades, sintetizámos os passos efetuados. Começámos por perguntar qual era a área do quadrado inicial? Responderam x^2. Depois dividimos o retângulo px em dois, geometricamente iguais, e juntámos esses dois retângulos ao primeiro quadrado. Mas, para completar o quadrado inicial faltava um "quadradinho" que tinha de lado $p/2$. Esse quadrado inicial tinha de lado o comprimento $x + \frac{p}{2}$ e a sua área era $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. No caso, os alunos tinham $x^2 + 10x = 36$, sendo $\frac{10x}{2} = 5x$ as áreas dos retângulos que se encostavam ao quadrado . Para completar o quadrado faltava um "quadradinho" de lado 5, ou seja, de área 25. Deste modo o lado do quadrado completado era $x+5$ e a sua área $(x + 5)^2$.

Ora, terminada a análise da tarefa, passemos à análise dos resultados.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Tivemos como objetivo saber quais foram as práticas do pensamento computacional usadas pelos alunos na tarefa método de completar quadrados. Após aplicação da tarefa, recolha e análise dos dados, verificámos que as práticas do pensamento computacional apresentadas nas AE – decomposição, algoritmia, depuração, reconhecimentos de padrões e abstração – (Carvalho e Silva et al., 2023), estavam presentes nos registos dos alunos, nas respostas que deram às questões colocadas. Destas práticas, salienta-se o reconhecimento de padrões, que considerámos estar presente em todas as respostas dadas às questões apresentadas. Estudos realizados referem que a exploração de padrões em tarefas pode ser um bom caminho para os alunos desenvolverem competências e raciocínios algébricos, estabelecendo conexões matemáticas, desenvolvendo a comunicação matemática (escrita e oral) adequada a cada situação, e melhorando a imagem da Matemática (Kieran, 2020). Considerámos que as práticas do pensamento computacional permitiram encontrar processos de resolução deste tipo de equações, encontrando um caminho para a sua generalização. Blanton e Kaput (2005, p. 413), também enfatizam os processos de generalização na sua caracterização do raciocínio algébrico quando consideram o raciocínio algébrico como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de instâncias particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso de argumentação e expressam-nos de maneiras cada vez mais formais e apropriadas à idade.

Concluímos que este tipo de tarefa envolve, e desenvolve, uma grande capacidade de abstração nos alunos, e que, apesar das práticas do pensamento computacional os ajudarem a pensar, a estabelecer conjeturas, a desenvolver ideias, contribuem igualmente para o pensamento crítico e criativo.

Quisemos ir mais longe, e analisámos as respostas de todos os grupos em relação às práticas utilizadas, apresentando um novo questionário aos alunos. Na nossa análise, começámos por constituir o *corpus* da pesquisa e escolher os documentos que seriam analisados. Escolhemos as respostas dos alunos às quinze questões da tarefa exploratória de completar quadrados. As respostas dos alunos foram, em grande parte, figuras geométricas, equações e expressões algébricas, que depois de recolhidas e fotografadas, foram contextualizadas e descritas de uma forma objetiva (Saldaña, 2013). A análise destas imagens colocou de lado aspetos como a cor, ambiente, textura, emoções, entre outros, desnecessários para a nossa descrição/investigação/estudo. Saldaña (2013), ressalta que a melhor forma de analisar dados visuais é através de uma abordagem holística, guiada pela nossa investigação interpretativa, intuitiva e questões de investigação. Seguindo o autor, fizemos um exame cuidado e uma reflexão sobre as imagens, registando no *Excel* as nossas interpretações e impressões das mesmas, anotações descritivas, palavras e códigos chave, avaliando a credibilidade da nossa leitura através de todos os detalhes da fotografia/imagem, tendo em conta o quadro teórico descrito. Gee (2010), refere que numa imagem há elementos que contam, que nos parecem importantes e que pretendemos analisar e, nestas escolhas, precisamos de ser exigentes. Refere que, tal como acontece na linguagem, qualquer imagem comunica, tem um significado num certo contexto, enquanto outra parte, também importante, pode ser deixada de lado. Nestas escolhas entra o conhecimento e experiência do investigador sobre o contexto, nomeadamente com imagens parecidas. Gee (2010), propõe que os métodos que utilizamos para análise do discurso de textos escritos sejam igualmente válidos para a análise de materiais visuais. Assim, as respostas dadas pelos alunos e registadas em imagens, foram descritas, depois codificadas e categorizadas após identificadas as práticas do pensamento computacional. Estas descrições também fizeram parte do *corpus*. Considerámos uma dimensão, os indicadores de utilização do pensamento computacional e cinco categorias correspondentes às cinco práticas referidas: [1] para a abstração; [2], para a decomposição; [3], para o reconhecimento de padrões; [4], para a algoritmia; e [5], para a depuração. Com esta categorização, pretendíamos saber a frequência das práticas que foram trabalhadas, em cada questão, pelos grupos. A etapa de tratamento e exploração dos resultados foi feita no momento em que realizámos o tratamento estatístico, validando os dados encontrados, sintetizando os resultados e tirando conclusões, retomando as hipóteses e objetivos iniciais, indicando possibilidades para uma nova análise (Bardin, 1977b). A nossa identificação não é fechada, refere-se à nossa perspetiva da forma como explorar tais práticas no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, neste caso com uma tarefa exploratória. As questões da tarefa estão numeradas de 1 a 13 e 14.1 e 14.2; os dez grupos de alunos, codificados de G1, G2, a G10. Com esta codificação, foi elaborada uma página de registo numa folha de Excel onde constam diferentes quadros e gráficos. Na Figura 25 é apresentada parte de um desses quadros. Foram analisadas todas as respostas às quinze questões, de todos os dez grupos, procurando em cada uma delas as cinco práticas. Em cada questão, a partir das respostas dos alunos, visávamos identificar (ou não) uma possível relação com as práticas do pensamento computacional. Usámos os códigos, em relação às práticas: 1- ocorre; 0 - não ocorre e 99 - não responde. Neste quadro, apresentado na Figura 25, encontramos percentagens referentes às frequências relativas, obtidas desta codificação na prática da abstração, até ao G6.

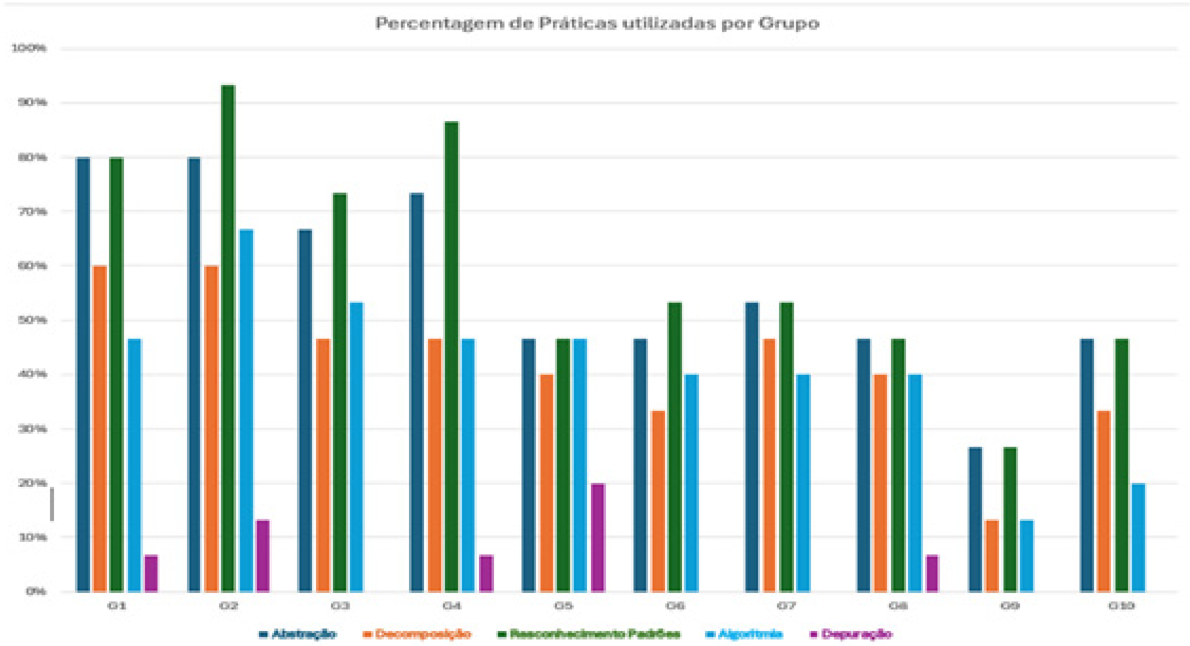
Figura 25 - Parte da tabela de análise de dados

		Grupos					
número de alunos		2	2	2	2	2	2
Prática | Grupos	**Questões**	G1	G2	G3	G4	G5	G6
Abstração [1]	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	0
	4	1	1	1	1	1	1
	5	1	1	1	1	0	1
	6 e 7	1	1	1	1	1	1
	8	1	1	1	1	0	1
	9	1	1	1	1	1	0
	10	0	0	0	0	"99"	0
	11	1	1	"99"	1	"99"	0
	12	"99"	0	"99"	0	"99"	"99"
	13	1	1	"99"	"99"	"99"	"99"
	14.1	1	1	1	1	1	1
	14.2	1	1	1	1	0	"99"
	Total	80%	80%	67%	73%	47%	47%
Decomposição [2]	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	0	1
	2	1	1	1	1	1	0
	3	0	0	0	0	0	1

Fonte: Elaboração da Autora

Após esta fase, passou-se para a etapa de enumeração, que visou contabilizar a frequência relativa de cada prática, no total da tarefa, por grupo. Verificámos que os últimos seis grupos, com alunos com mais dificuldades na disciplina de Matemática, apresentaram uma percentagem menor da utilização de práticas do pensamento computacional. Foram aqueles que apresentaram mais respostas erradas, ou não dadas, sendo o grupo mais fraco o codificado com G9. Os primeiros quatro grupos tiveram menos dificuldades em resolver a tarefa, apresentando, por isso, uma maior propensão para usar as práticas do pensamento computacional e, consequentemente, foram os que mais as usaram (Figura 26). Verificámos que os alunos responderam com menos dificuldades às primeiras questões que, apesar de algébricas, não requeriam conhecimentos, conceitos ou manipulação algébrica significativa, utilizando as práticas do pensamento computacional. Nas últimas questões, pelo contrário, os alunos apresentam mais dificuldades, não respondendo, ou respondendo erradamente, devido às falhas em conhecimentos-base e não da utilização das referidas práticas. Estas últimas envolviam estabelecer relações, generalizar conceitos e abstrair situações em que não são apresentadas as informações diretamente.

Figura 26 - Percentagem de práticas apresentadas por grupo



Fonte: Elaboração da Autora

Na Tabela 1 apresentamos o balanço das percentagens observadas dessas práticas em toda a tarefa, utilizadas pelos grupos de alunos em que concretizaram respostas corretas. Por exemplo, em média, os grupos utilizaram a abstração em 38% das questões. Podemos observar que a prática do pensamento computacional mais utilizada pelos alunos foi o reconhecimento de padrões com 40%, seguido da abstração com 38%, e depois da decomposição e da algoritmia com a mesma percentagem, 28%. A menos observada e a mais difícil de concretizar, com 4%, foi a depuração. Seria conveniente reforçar neste tipo de tarefas, questões que incluam esta prática, sendo este um ponto a melhorar, uma vez que é através dos erros e da sua correção que os alunos aprendem e consolidam conceitos conforme a literatura indica (Abrantes *et al*., 1998; Canavarro *et al*., 2021; Carvalho e Silva *et al*., 2023; Sebastião e Silva, 1975).

Tabela 1 - Frequências relativas das práticas utilizadas na questão

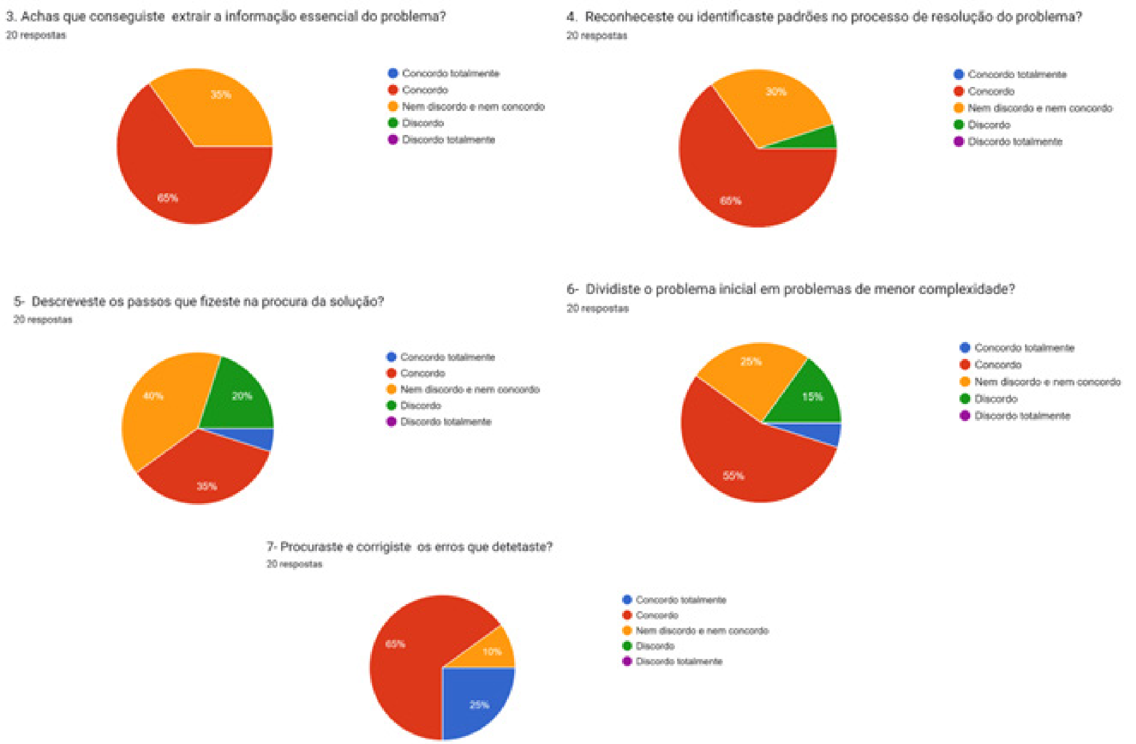
Abstração	38%
Decomposição	28%
Reconhecimento de Padrões	40%
Algoritmia	28%
Depuração	4%

Fonte: Elaboração da Autora

Esta é uma prática importante, em que os alunos detetam e corrigem erros, onde o pensamento crítico se torna ativo face às soluções e respostas encontradas. Contudo, verificámos que é na questão em que os alunos constroem um algoritmo em Python, que as cinco práticas são trabalhadas, e que é possível trabalhar a depuração.

A seguir apresentamos a perceção dos alunos sobre as práticas do pensamento computacional utilizadas na resolução da tarefa, observáveis nos gráficos obtidos no segundo questionário (Figura 27). Saliente-se que os alunos já tinham noções sobre o conceito de pensamento computacional.

Figura 27 - Práticas do Pensamento Computacional observáveis pelos alunos



Fonte: Elaboração da Autora

Da análise dos gráficos da Figura 27, verificámos que os alunos referiram cumprir as práticas do pensamento computacional na resolução da tarefa, previamente discutidas: 65% referiu extrair a informação essencial (abstração); 65% concordaram que reconheceram e identificaram padrões (reconhecimento de padrões); 40% concordaram ou concordaram totalmente que procuraram detetar e corrigir erros (depuração) e 60% concordaram ou concordaram totalmente que dividiram o problema em problemas de menor complexidade (decomposição); 37% referiu descrever os passos na resolução (pensamento algorítmico). A prática mais identificada na tarefa foi a depuração, e a menos identificada foi o pensamento algorítmico. Saliente-se que os processos do pensamento computacional no questionário foram substituídos por uma linguagem adaptada aos alunos.

Comparando as respostas dos alunos com o nosso estudo, verificámos que foi reiterado por estes, que a prática de reconhecimento de padrões é a mais utilizada, seguida da abstração. As menos utilizadas foram a depuração e a algoritmia, o que coincidiu também com as respostas dos alunos.

Passemos, de seguida, às conclusões e recomendações, salientando que algumas das limitações deste estudo foram sendo referidas ao longo do texto e à medida que se tornava oportuno.

CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

Neste estudo mostrámos que podemos construir/adaptar uma tarefa de exploração do Método de Completar Quadrados, com questões construídas na base das práticas do pensamento computacional (abstração, reconhecimento de padrões, decomposição, pensamento algorítmico e depuração), e que estão presentes nas resoluções algébrica e geométrica dos alunos. Mostrámos que estas podem ser trabalhadas na exploração de processos e conceitos matemáticos, neste caso de carácter algébrico, em sala de aula e, posteriormente, analisadas. A descrição que fizemos da sua aplicação permitiu verificar como elas foram integradas. Verificámos que todas as práticas foram trabalhadas, utilizadas pelos alunos nas suas respostas, umas com mais frequência que outras. Em todos os grupos ressaltou o reconhecimento de padrões como a mais utilizada, seguida da abstração, possivelmente acentuando o carácter algébrico da tarefa, o que vai ao encontro da literatura (Borralho; Barbosa, 2011)com base numa abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, compreender o significado da utilização, em sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. O ponto de partida assentou em duas questões de investigação centradas em: (1. O pensamento computacional, tal como o pensamento algébrico, que é mais do que manipular expressões e resolver equações, envolvendo as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas, foi observado nas respostas à tarefa. Portanto, o pensamento computacional promoveu o pensamento algébrico e vice-versa. A menos utilizada foi a depuração. Onde teremos de ter mais cuidado é na elaboração e nos objetivos das questões, sendo esta uma prática muito importante. Seria conveniente, reforçar, neste tipo de tarefas, questões que incluam esta prática, sendo este um ponto a melhorar, uma vez que é através dos erros e da sua correção que os alunos aprendem. Estas análises ajudam a identificar pontos fortes e fracos na aprendizagem dos alunos em diferentes práticas do pensamento computacional e não só, permitindo pensar na elaboração de diferentes estratégias pedagógicas para as remediar.

A tarefa que foi construída tendo por base o pensamento computacional, permitiu que os alunos chegassem às soluções de equações tipo $x^2 + px = q$, com $q \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}$, generalizando um processo algébrico. Assim, os modelos de ensino que se baseiam no pensamento computacional podem promover o desempenho da aprendizagem dos alunos, melhorando as suas capacidades de pensamento computacional e a sua habilidade de resolver problemas (Zhao; Liu, 2022).

Os resultados deste estudo de caso poderão dar pistas sobre as práticas do pensamento computacional a desenvolver. Contudo, dado que este é um estudo de caso, não é possível generalizá-lo (Amado; Freire, 2017; Yin, 2003, 2010). A amostra foi selecionada por conveniência. Tem limitações de entre as quais destacamos o número de alunos ou os grupos estudados. Verificámos que as dificuldades algébricas dos alunos podem ter comprometido o desenvolvimento das tarefas.

Mostrámos que o professor, a partir de uma tarefa exploratória de alto nível, como a apresentada, pode criar um ambiente de aprendizagem matemático desafiador, através de uma escolha e construção criteriosas de questões matemáticas, nomeadamente da álgebra, baseando-se nas práticas do pensamento computacional, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos, contextualizadas e centradas na participação ativa dos alunos na construção de seus próprios conhecimentos. Essas tarefas e modos de trabalho deverão permitir, ao aluno, desenvolver processos de aprendizagens, questionar, conjeturar, testar, comunicar matematicamente, entre outros. O professor desempenha o papel de mediador das aprendizagens, dando-lhes autonomia. Mais longe, estas tarefas baseadas nas práticas do pensamento computacional podem desenvolver e *treinar* outras competências tais como o pensamento algébrico, o pensamento crítico, criativo e lógico, nomeadamente na área da programação na linguagem *Python*.

Tendo em conta que, por um lado, a integração da programação em matemática é recente nos currículos e, por outro lado, que está provado que as habilidades desta trazem benefícios para os alunos, sugere-se que se façam mais estudos sobre a sua integração nos currículos e o modo com são desenvolvidas. Por isso, é pertinente que continuemos a encontrar estratégias e a elaborar/adaptar tarefas para que estas competências possam ser trabalhadas em sala de aula, nomeadamente as que promovam o desenvolvimento das práticas: abstração, reconhecimento de padrões, decomposição, pensamento algorítmico, depuração (Mestre; Carvalho, 2023).

Com esta ideia inovadora do currículo, em pano de fundo, recentemente introduzida nos currículos (Canavarro *et al*., 2021; Carvalho e Silva *et al*., 2023), em Portugal, considera-se que se deve continuar a efetuar estudos deste tipo, para aferir de que modo o pensamento computacional, utilizado na sala de aula, influencia a aprendizagem dos alunos, sabendo-se que há ainda muito para investigar.

Seria, contudo, importante mostrar que as práticas do pensamento computacional podem ser avaliadas, mas deixamos em aberto o aperfeiçoamento de instrumentos de avaliação para tarefas realizadas sem computador.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Precatado, A., Lopes, A. V., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Amaro, G., Guimarães, H. M., Almiro, J., Ponte, J. P., Matos, J. M., Filipe, L., Reis, L., Serrazina, L., Pires, M. V.,; Teixeira, P. (1998). *Matemática 2001—Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem* *da Matemática* (1.ª ed.). Associação de Professores de Matemática; Instituto de Inovação Educacional.

Albuquerque, C. (2021). Pensamento Computacional e Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 31–38.

Amado, J. (Ed.). (2017). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (3.ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra. https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1

Amado, J.,; Freire, I. (2017). Estudo de caso na investigação em educação. Em J. Amado (Ed.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (3.ª ed., 1–II–1, p. 123–145). Imprensa da Universidade de Coimbra. http://monographs.uc.pt/iuc/catalog/view/71/192/287-1

Bardin, L. (1977a). *Análise de conteúdo* (1.ª ed.). Edições 70.

Bardin, L. (1977b). *Análise de conteúdo* (1.ª ed.). Edições 70.

Bastos, T.,; Boscarioli, C. (2018). Pensamento Computacional Como Competência Transversal em Metodologias Ativas Orientadas a Problemas. *Pleiade*, *12*(25), 153–169. https://doi.org/doi.org/10.32915/pleiade.v12i25.456

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I.,; Noss, R. (2017). Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*(2), 115–138. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x

Blanton, M. L.,; Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagienė, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M. A., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V.,; Stupurienė, G. (2022, março 3). *Reviewing Computational Thinking in Compulsory Education*. JRC Publications Repository. https://doi.org/10.2760/126955

Bogdan, R.,; Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Borralho, A.,; Barbosa, E. (2011). *Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico*. https://rdpc.uevora.pt/handle/10174/5287

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M.,; Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério da Educação. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Carvalho e Silva, J. (2021). A resolução de problemas em Matemática e o Pensamento Computacional. Em V. Santos, I. Cabrita, T. B. Neto, M. Pinheiro,; J. B. Lopes (Eds.), *Matemática com vida: Diferentes olhares sobre a tecnologia* (p. 9–18). UA Editora. https://doi.org/10.48528/vt67-1729

Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M. E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G.,; Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário*. Direção

Geral da Educação, Ministério da Educação. http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario

Cyrino, M. C. D. C. T.,; Jesus, C. C. D. (2014). Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. *Ciência; Educação (Bauru)*, *20*(3), 751–764. https://doi.org/10.1590/1516-73132014000300015

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos Padrões*. Porto Editora.

Espadeiro, R. G. (2021). O Pensamento Computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5–10.

Fonseca, H., Brunheira, L.,; Ponte, J. P. da. (1999). *As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática*. Actas do ProfMat 99, Lisboa.

Gee, J. P. (2010). *How to do Discourse Analysis: A Toolkit: A Toolkit*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203850992

Gomes, A.,; Santos, J. (2019). *Algoritmia, Programação e Robótica com a TI-Nspire CX II-T*. FCA - Editora de Informática.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 5-26 Páginas. https://doi.org/10.48489/QUADRANTE.22814

Kieran, C. (2020). Algebra Teaching and Learning. Em S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 36–44). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_6

Korkmaz, Ö., Çakir, R.,; Özden, M. Y. (2017). A validity and reliability study of the computational thinking scales (CTS). *Computers in Human Behavior*, *72*, 558–569. https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.01.005

Mestre, C.,; Carvalho, R. (2023). Desenvolver o Pensamento Computacional na aula de matemática do 1.º ciclo: Práticas dos alunos. *Aprender*, *45*, Artigo 45. https://doi.org/10.58041/aprender.185

Oliveira, C. M.,; Pereira, R. (2023). Coleta de Evidências do Exercício do Pensamento Computacional no Ensino Superior em Computação: Um artefato de apoio. *Anais do III Simpósio Brasileiro de Educação em Computação (EDUCOMP 2023)*, 300–309. https://doi.org/10.5753/educomp.2023.228211

Papert, S. (1980). New cultures from new technology. *Byte magazine*, 230–240.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em G. T. I. Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (p. 7–28). APM - Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (p. 11–34). APM - Associação de Professores de Matemática.

Rico, L. (2011). El estudio PISA y la evaluación de la competencia matemática. *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, *7*(1), 1–9.

Rico, L.,; Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza Editorial.

Rodrigues, C., Menezes, L.,; Ponte, J. P. da. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: Os casos de dois professores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), Artigo 61. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a05

Saldaña, J. (2013). *The coding manual for qualitative researchers* (2nd ed). SAGE.

Schwantes, V. (2021). Escrita Algébrica A Partir Da Produção De Significados Sobre Situações-Problema. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, *09*(06), 34–60.

Sebastião e Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (Vol. 1). Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Silver, E. A.,; Stein, M. K. (1996). The Quasar Project: The «Revolution of the Possible» in Mathematics Instructional Reform in Urban Middle Schools. *Urban Education*, *30*(4), 476–521. https://doi.org/10.1177/0042085996030004006

Solomon, C., Harvey, B., Kahn, K., Lieberman, H., Miller, M. L., Minsky, M., Papert, A.,; Silverman, B. (2020). History of Logo. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, *4*(HOPL), Article 79. https://doi.org/10.1145/3386329

Stein, M.,; Smith, M. (1998). *Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática*.

Tavares, J. N. (2023). *Pensamento Computacional—Com introdução à programação em Python 3.x* (Casa das Ciências).

Vygotsky, L. (2007). *Pensamento e Linguagem*. Relógio D'Água Editores.

Watson, A.,; Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Lawrence Erlbaum Associates.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. Em *Commun. ACM* (Vol. 49, Número 3, p. 33–35). Association for Computing Machinery.

Wing, J. M. (2021). Pensamento Computacional. *Educação e Matemática*, *162*, 2–4.

Yin, R. K. (2003). *Case study research design and methods* (3.ª ed.). SAGE Publications.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Bookman.

Zhao, F.; Liu, S. (2022). *Research on blended teaching reform based on computational thinking*. 184–188. Scopus. https://doi.org/10.1109/ITME56794.2022.00048

Histórico

Recebido: 25 de Abril de 2024.
Aceito: 13 de julho de 2024.
Publicado: 09 de agosto de 2024.

Como citar – ABNT

ANTUNES, Marisabel. O Pensamento Computacional e o Método de Completar Quadrados. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 47, e2024030, 2024. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024030.id670

Como citar – APA

Antunes, M. (2024). EO Pensamento Computacional e o Método de Completar Quadrados. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (47), e2024030. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n47.e2024030.id670