Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 52, e2024002
10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024002.id729

Como Desenvolver Aulas de Matemática Centradas na Resolução de Problemas

How to Develop Math Class Focused on Problem Solving

Cómo desarrollar Clases de Matemáticas Centradas en la Resolución de Problemas

Fredy Enrique González[1]

RESUMO

No artigo se propõe um modelo didático aplicável na organização de aulas de Matemática baseadas na resolução de problemas, gerado a partir de uma pesquisa desenvolvida com estudantes para professor de Matemática que participaram num curso de resolução de problemas matemáticos, projetado para propiciar sua atividade cognitiva e metacognitiva, enquanto se dedicavam à busca da solução de problemas matemáticos apresentados pelo professor no contexto das aulas do referido curso. As noções teóricas assumidas foram: Cognição Matemática, Metacognição, Mediação Cognitiva, e Tarefas Intelectualmente Exigentes (TIE), entre outras. A pesquisa, qualitativa de natureza interpretativa, permitiu construir o modelo intitulado: Dinâmica P2MA (Professor-Problema, Matemática, Aluno), constituído por quatro modalidades de trabalho (Individualmente, em Duplas, em Grupos Pequenos e em Grupo Completo); neste artigo são descritas e caracterizadas detalhadamente ditas modalidades de trabalho.
Palavras-chave: Metacognição; Tarefas Intelectualmente Exigentes; Protocolos Escritos; Mediação Cognitiva; Cognição Matemática.

ABSTRACT

This article proposes a didactic model applicable in the organization of math Aulas based on problem solving, generated from a research developed with students for Mathematics teacher who participated in a math problem solving course, designed to foster their cognitive and metacognitive activity, while pursuing the solution of mathematical problems presented by the teacher in the context of the Aulas of that course. The theoretical notions assumed were: Mathematical Cognition, Metacognition, Cognitive Mediation, and Intellectually Demanding Tasks (IDT), among others. The research, qualitative of interpretative nature, allowed to build the model titled Dynamic P2MA (Professor-Problem, Mathematics, Student), constituted by four working modalities (Individually, in Pairs, in Small Groups and in Complete Group); this article describes and characterizes in detail these four modes of work.
Keywords: Metacognition; Intellectually Demanding Tasks; Written Protocols; Cognitive Mediation; Mathematical Cognition.

RESUMEN

En este artículo se propone un modelo didáctico aplicable en la organización de clases de Matemáticas basadas en la resolución de problemas, generado a partir de una investigación desarrollada con estudiantes para profesor de Matemáticas que participaron en un curso de resolución de problemas matemáticos, diseñado para propiciar su actividad cognitiva y metacognitiva, mientras se dedicaban a la búsqueda de la solución de problemas matemáticos presentados por el profesor en el contexto de las clases de dicho curso. Las nociones teóricas asumidas fueron: Cognición Matemática, Metacognición, Mediación Cognitiva, y Tareas Intelectualmente Exigentes (TIE), entre otras. La investigación, cualitativa de naturaleza interpretativa, permitió construir el modelo intitulado Dinámica P2MA (Profesor-Problema, Matemática, Alumno), constituido por cuatro modalidades de trabajo (Individualmente, en Parejas, en Grupos Pequeños y en Grupo Completo); en este artículo se describen y caracterizan detalladamente esas cuatro modalidades de trabajo.
Palabras clave: Metacognición; Tareas Intelectualmente Exigentes; Protocolos Escritos; Mediación Cognitiva; Cognición Matemática.

1 Doutor em Educação, ênfase em Educação Matemática (Universidad de Carabobo, Venezuela). Professor Visitante Estrangeiro, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEDMAT) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. E-mail: fredy.gonzalez@ufop.edu.br / fredygonzalezdem@gmail.com

INTRODUÇÃO

A investigação sobre a resolução de problemas parece ser uma atividade permanente entre os educadores matemáticos que assumem este assunto como preocupação prioritária de suas pesquisas; numerosos são os achados relativos a este tema; e ao que parece, os problemas e sua didática serão um tema de pesquisa sempre vigente no âmbito da Educação Matemática como campo para a produção profissional de saberes. Duas questões particularmente atraentes são: (1) o uso didático da resolução de problemas por parte dos professores de Matemática; (2) a possibilidade de gerar saberes matemáticos mediante a participação em atividades de resolução de problemas matemáticos no âmbito escolar; com este propósito, o autor desenvolve uma linha de pesquisa iniciada em González (1997), a qual serve de contexto para o presente trabalho, que teve como sujeitos um grupo de *Estudantes para Professor* (EPP), e pelo modo como foi desenvolvida permitiu derivar um modelo didático (González, 2003c) intitulado a Dinâmica P^{2}MA (Professor-Problema, Matemática, Aluno) que se concebe como uma maneira diferente de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da Matemática: (a) baseando-o na resolução de problemas; (b) enfatizando a tomada de consciência, por parte do aluno, de seu próprio acionar cognitivo, realizado durante a atividade resolutiva; (c) considerando a Matemática como uma forma especial de pensamento e à sala de aula como uma Comunidade Matemática em cujo contexto se realizam processos de produção e socialização do conhecimento matemático; e (d) desenvolvendo quatro modalidades de trabalho que são as que se expõem neste artigo.

O artigo começa expondo a problemática associada à dualidade presente na formação inicial dos estudantes que estão se formando para ser Professores de Matemática (EPM) derivada da dupla necessidade que eles têm de, por um lado, aprender a resolver problemas e, por outro, de aprender formas de ensinar a resolver problemas. Depois, expõe-se a metódica empregada na execução de uma pesquisa maior que o autor realizou com um grupo de estudantes para professor de uma instituição superior de formação de docentes e da qual se derivou o presente artigo.

Em seguida, expõem-se as coordenadas teóricas conceituais que serviram de sustento ao estudo: (a) O que significa Fazer Matemática no âmbito escolar? (b) A resolução de problemas como espaço de possibilidades para Fazer Matemática; (c) Modelos explicativos do processo de resolução de problemas; e, (d) A Resolução de Problemas desde a Perspectiva do Solucionador[2].

Depois, apresentam-se as quatro modalidades de trabalho em Aulas centradas na resolução de problemas, a saber: individual, em dupla, em grupo pequeno, e em grupo completo. Finalmente, se faz um exercício de prospectiva formulando recomendações e sugestões para os professores de Matemática quanto ao uso da resolução de problemas em suas aulas.

2 Essa expressão (Solucionador) é usada para se referir à pessoa que tenta resolver um problema.

ABORDAGEM DA QUESTÃO

Paul Halmos, em 1980, no importante jornal da Associação de Matemáticos de Estados Unidos (*American Mathematical Monthly)*, publicou um artigo intitulado *The Heart of Mathematics*, no qual o autor perguntava-se

> No que a matemática ***realmente*** consiste? Axiomas (como o postulado paralelo)? Teoremas (como o teorema fundamental da álgebra)? Provas (como a prova de indecidibilidade de Godel)? Conceitos (como conjuntos e Aulas)? Definições (como a definição de dimensão de Menger)? Teorias (como teoria das categorias)? Fórmulas (como a fórmula integral de Cauchy)? Métodos (como o método de aproximações sucessivas)? A matemática certamente não poderia existir sem esses ingredientes; todos eles são essenciais. É, no entanto, um ponto de vista sustentável que nenhum deles está no centro do assunto, que a principal razão de existência do matemático é resolver problemas, e que, portanto, o que a matemática ***realmente*** consiste são problemas e soluções (Halmos, 1980, p. 519).

Logo após de fazer uma revisão crítica de livros sobre resolução de problemas de autores clássicos, como H. Dorrie (*100 Great Problems of Elementary Mathematics*), D. Hilbert (*Mathematical problems*), G. Klambauer (*Problems and Propositions in Analysis*), G. Polya and G. Szego (*Problems and. Theorems in Analysis*), e H. Steinhaus (*One Hundred Problems in Elementary Mathematics*), o autor chega à conclusão seguinte:

> *Eu acredito que os problemas são o coração da matemática*, e espero que como professores, na sala de aula, em seminários, e nos livros e artigos que escrevemos, vamos enfatizá-los cada vez mais, e que vamos treinar nossos alunos para ser melhores proponentes e solucionadores de problemas do que nós somos. (Halmos, 1980, p. 524) (Itálicas nossas).

O autor deste artigo concorda com o afirmado por Halmos, já em 1980; essa conclusão e o livro já clássico de Polya (1945) são duas das bases para sustentar nosso ponto de vista em acordo com o qual, a resolução de problemas e todos os pormenores associados com esse processo, será sempre um assunto de interesse nas pesquisas na Educação Matemática.

Como exposto por Suárez Alemán (2003), desde sempre os problemas e a sua resolução marcaram o desenvolvimento da Matemática ao longo da sua história toda; de facto, vários dos seus ramos nasceram, cresceram e desenvolveram-se a partir do esforço para resolver algum problema que num dado momento chamou a atenção e o esforço de matemáticos notavelmente esclarecidos, como pode ser confirmado nos trabalhos de Miguel de Guzmán (1983, 1996), e nas publicações recentes de Cai& Hwang (2019), Chua & Toh (2022), Cropley (2019), Favier (2022), Liljedahl & Santos-Trigo (2019), Santos-Trigo (2023) e Toh, Santos-Trigo, Chua, Abdullah, Zhang (2023) entre muitos outros.

Mas, importante salientar que a relevância dos processos de busca de solução de problemas transcende o campo da Matemática; de facto, considera-se que resolver problemas é uma habilidade transversal, ou seja, requerida praticamente como condição *sine qua non* para o sucesso em qualquer atividade humana relativamente complexa. Por conseguinte, na concepção dos planos de formação de praticamente todos os tipos de profissionais atuais devem-se incluir objetivos relacionados com a formulação e resolução de problemas.

Desta forma, os problemas e a dinâmica de sua atividade resolutiva associada, é um assunto que provoca a reflexão dos responsáveis pelos processos de formação (tanto inicial como permanente) em todas as profissões, em particular a de professor de Matemática. Assim, resolver problemas é um dos saberes que devem possuir aqueles que desejam se dedicar profissionalmente ao ensino da Matemática nos diferentes níveis escolares.

Ora, existe um espaço onde este assunto assume particular relevância; trata-se das instituições encarregadas da formação dos docentes que devem ensinar Matemática (licenciados, bacharéis e pedagogos) tais como as escolas normais superiores, as universidades pedagógicas e os departamentos de educação das universidades; os responsáveis pelo preparo dos futuros professores de matemática são formadores de formadores; isto, no caso específico dos problemas de Matemática, incorpora um elemento adicional; já não se trata apenas de procurar que os alunos (que são vistos como estudantes para professor, EPP, professores em processo inicial de formação, ou *preservice mathematic´s Teachers*) aprendam a resolver problemas mas, além disso, eles devem aprender a ensinar a "aprender a resolver problemas"; esta última expressão não é um disparate; pelo contrário, refere-se a uma problemática didática ainda não totalmente resolvida.

Os EPP, enquanto alunos de uma instituição formadora de docentes de Matemática, devem eles mesmos aprender a resolver problemas; e, além disso, (enquanto futuros professores) devem aprender como ensinar a resolver problemas a aqueles que, no futuro, serão seus alunos. Surgem, então, várias interrogações em quem são seus formadores (ou seja, os professores encarregados de sua formação inicial a nível superior): Qual é a formação em resolução de problemas que deve receber um futuro professor de Matemática? Como deve ser realizada essa formação? Que tipo de experiências de resolução de problemas devem ter os futuros professores envolvidos no seu processo de formação inicial?

Na busca de respostas a estas e outras questões associadas, foram geradas várias investigações. Assim, por exemplo, Puig (1996) realizou uma exaustiva indagação na qual abordou com profusão elementos-chave da resolução de problemas. Do mesmo modo, Callejo (1994) tem trabalhado com intensidade na busca de conhecimentos que permitam gerar proposições didáticas a partir da reflexão sobre experiências de resolução de problemas onde participam estudantes. Nesta mesma ordem de ideias trabalhou Blanco Nieto (1996) que se dedicou ao estudo das concepções e crenças sobre a resolução de problemas que têm os EPP e, com base nisso, apresentou diversas propostas curriculares.

Outros pesquisadores que se ocuparam da resolução de problemas são: Schoenfeld (1985a, 1985b, 1992) que concebe a resolução de problemas como característica distintiva de um modo matemático de pensar; Miguel de Guzmán (1991) que desenvolveu um conjunto de ferramentas heurísticas úteis na resolução de problemas matemáticos de variados tipos; Lester (1994) que fez uma interessante revisão sobre o estado da arte da pesquisa em resolução de problemas nos United States of America (USA) à luz de um inquérito sobre a ênfase investigativa e metodológica referida nos artigos sobre a solução de problemas publicados na revista americana *Journal for Research in Mathematics Education* durante os 25 anos compreendidos entre 1970 e 1994; Santos (1996), por sua vez, estabeleceu princípios e métodos da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática.

Finalmente, para obter mais informações sobre este assunto é benéfica a leitura das obras fundamentais: Kilpatrick, Rico e Sierra (1994) e Kilpatrick (1992), que faz uma recontagem histórica de cem anos de pesquisa em Educação Matemática; e, D´Amore (2003) que realizou uma minuciosa reconstrução histórica da Didática da Matemática verdadeiramente atualizada e internacional e cujo capítulo 9 é dedicado ao exame minucioso dos conceitos de exercício, problema e situação problemática.

Com base em todo este acervo indagatório, alguém não avisado poderia pensar que a investigação em resolução de problemas é um assunto já esgotado; no entanto, pelo menos no âmbito latino-americano, isto não é verdade; prova disso são os resultados das provas para avaliação do desempenho em Matemática aplicadas em nossos países como, por exemplo, a prova PISA, entre outras que dão conta dos insatisfatórios rendimentos de nossos estudantes nas áreas de Matemática e Linguagem. Por exemplo, desde 2006, mais da metade dos estudantes chilenos no alcançam o nível mínimo de competência matemática na nomeada prova; e Brasil, dentre os 52 países participantes, ocupou a 51ª posição nas habilidades relacionadas à Resolução Colaborativa de Problemas RCP, na prova PISA de 2015. Resultados de outros países latino-americanos participante não são melhores.

No caso particular do Brasil, além da Prova PISA, outro parâmetro de referência são os resultados da prova ENEM, disponíveis até os de 2023 que indicam que a nota de Matemática – área especialmente relevante para a discussão sobre formação de habilidades analíticas necessárias para enfrentar os desafios da era digital -, caiu cerca de 1,4% em relação ao ano anterior (2022). Este instrumento de medição de competências contempla dois aspectos: a capacidade verbal e a numérica; esta última deve ser demonstrada mediante a solução efetiva e eficiente de problemas cujo conteúdo corresponde à Matemática que teve que ser estudada nos níveis educacionais anteriores (educação básica e educação média); com base em, pelo menos, os resultados do ENEM-2023, que devem apresentar todos os aspirantes a ingressar na educação superior, pode supor-se que estes estudantes têm falhas na resolução de problemas. Mas qual é a origem de tais falhas?

Para a pergunta anterior, podem ser propostas várias respostas; uma delas está associada à atuação dos professores de Matemática que eles tiveram nos níveis educacionais pré-universitários, que, por sua vez, foram formados nas universidades ou institutos superiores de formação docente. Cria-se assim um círculo vicioso: os alunos graduam-se no ensino secundário sem saber resolver problemas porque não foram ensinados pelos seus professores e estes, por sua vez, não adquiriram essa competência durante o seu processo de formação inicial. É aqui que poderia residir o cerne da questão: incorporar estratégias para que os EPP aprendam, não só a resolver problemas, mas também a ensinar aos outros a resolver problemas; foi neste sentido que se orientou a investigação a partir da qual se derivou o presente trabalho, cujo método é exposto em seguida.

MÉTODICA

Em virtude da sua natureza, orientação disciplinar, tipo de informação recolhida, tratamento dado a esta última e concepção assumida em relação às unidades de análise, a concepção do estudo que serviu de base à elaboração do presente relatório de investigação corresponde à de um estudo de caso simples de orientação etnográfica interpretativa.

Teve como cenário uma instituição superior de formação docente, em uma de cujas salas se realizou o trabalho de campo cujos protagonistas (sujeitos) foram os alunos participantes de um curso sobre resolução de problemas ministrado pelo autor.

As técnicas e instrumentos aplicados foram: (a) Observação Participante Ativa; (b) Entrevistas; (c) Protocolos Verbais do Aluno; (d) Folhas do trabalho desenvolvido pelos alunos; e (e) Caderno de Notas.

O procedimento para a arrecadação da informação de campo consistiu em um curso sobre Resolução de Problemas Matemáticos, desenhado, facilitado e avaliado pelo próprio pesquisador; em cada um dos Encontros Edumáticos (González, 2000; 2010, p. 52) constitutivos deste curso, o professor (pesquisador) apresentava verbalmente ou por escrito o enunciado de um ou vários problemas (dos denominados "verbais" ou "de história") que tivessem uma alta probabilidade de serem totalmente desconhecidos por todos ou pela maioria dos alunos participantes; instruía-se os alunos para que (individualmente, em duplas, em pequenos grupos, ou em Grupo Completo) abordaram o problema durante um período determinado (variável segundo a dificuldade que apresentasse o problema com o qual se estivesse trabalhando); depois, se passava à realização de uma sessão de socialização (plenária de trabalho em Grupo Completo); uma vez concluída a "colocação em comum" do trabalho realizado, procedia-se a fornecer indicações e atribuições, sobre algum outro problema que servisse de pretexto para iniciar a próxima aula.

A informação recolhida através de diferentes meios, técnicas e instrumentos de recolha foi submetida a um processo de análise qualitativa do conteúdo, a partir do qual se puderam identificar modalidades de produção de saberes matemáticos propiciadas no contexto dos Encontros Edumáticos, centrados em resolução de problemas, que constituíram o curso.

REFERÊNCIAS CONCEPTUAIS

As coordenadas teóricas conceituais que serviram de sustento a este estudo, estão referidas aos seguintes aspectos: (a) O que significa Fazer Matemática no âmbito escolar? ; (b) A resolução de problemas como espaço de possibilidades para Fazer Matemática; (c) Modelos explicativos do processo de resolução de problemas; e, (d) A Resolução de Problemas desde a Perspectiva do Solucionador. Cada uma destas referências será em seguida resumidamente desenvolvida.

O que significa "Fazer Matemática" no Âmbito Escolar

Neste estudo, a Matemática está concebida não como um saber técnico expresso no manejo de artifícios e regras operatórias mas como uma tarefa social historicamente situada (González, 2003a); esta disciplina é uma expressão da ação humana que, num contexto didático como o é a sala de aula, manifesta-se através das cognições, metacognições, afectos e comportamentos que os protagonistas dos Encontros Edumáticos (González, 2000, 2010;

Martínez, 2003) Eles desdobram-se quando tentam resolver problemas próprios da Matemática. Assim, os problemas propostos nas Aulas de Matemática e cuja busca de solução demanda a realização de uma atividade intelectual esforçada, constituem um meio propício para o exercício de ações próprias do trabalho matemático na sala de aula.

Assim, a busca de solução para um problema matemático dá ao Solucionador a oportunidade de se comportar como o fazem os matemáticos quando se dedicam à realização das tarefas específicas que são exigidas pelo trabalho com esta ciência; é isto que, no âmbito deste estudo, se denomina "Fazer Matemática", expressão utilizada para referir-se aos esforços cognitivos, metacognitivos e comportamentais que realiza uma pessoa comprometida na realização de uma tarefa que demanda a execução de ações próprias de uma tarefa matemática tais como: induzir, deduzir, inferir, conjecturar, demonstrar, limpar, formular, simbolizar, grafitar, visualizar e calcular, entre outras.

1. A possibilidade de "Fazer Matemática" na sala de aula utilizando a resolução de problemas, requer a constituição de um contexto didático caracterizado por:
2. Uma concepção da Matemática que dê ênfase aos processos próprios do pensamento matemático (González, 2003b)
3. A criação de oportunidades para a realização de Tarefas Intelectualmente Exigentes (González, 1998).
4. A geração de um clima que propicie a liberdade para pensar (Martínez, 2003; Rocerau e colaboradores, 2002).
5. A realização de atividades de mediação cognitiva tanto individual como socializada (González, 1995, 1996; Ruiz Bolívar, 1988, 1998)
6. A construção de um Repertório de Ferramentas Heurísticas (de Guzmán, 1991; González, 1997; Polya, 1975; Schoenfeld, 1985a, 1985b, 1992)
7. A adoção de um Modelo Representativo do processo de resolução de problemas (Polya, 1975)

Modelo representativo do processo de resolução de problemas

Em relação à representação do processo de resolução de problemas foram desenhados diversos modelos; entre estes, para os efeitos deste estudo, assumiu-se a proposta elaborada por Polya (1975); esta seleção foi feita com base na simplicidade estrutural e popularidade deste modelo e porque o mesmo foi utilizado apenas como um esquema para viabilizar o manejo de um vocabulário comum entre os alunos participantes na pesquisa.

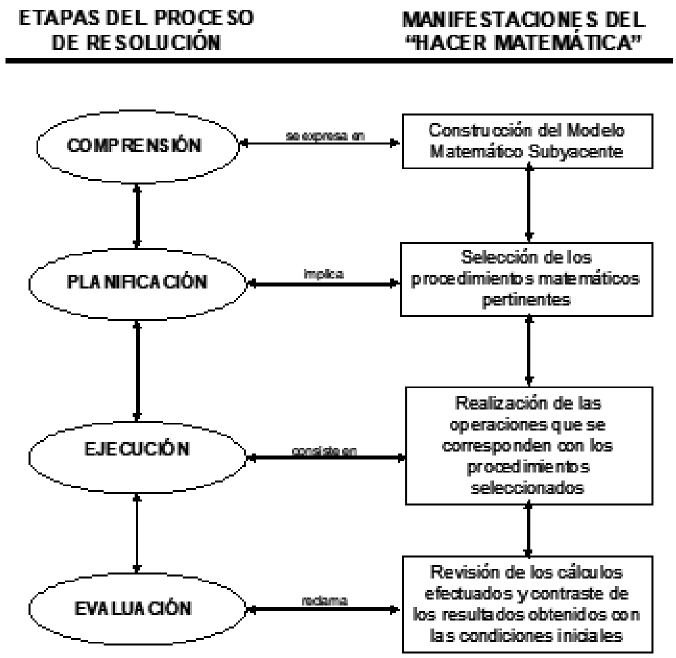
O Modelo de Polya consta de quatro etapas (Compreensão, Planejamento, Execução e Avaliação) e proporciona um critério para organizar a atividade do resolvedor, possibilitando a construção de uma plataforma global onde se sustenta todo o acionar cognitivo, metacognitivo e afetivo de quem faz Matemática quando resolve problemas.

O processo produtivo propiciado mediante a abordagem de problemas com conteúdo matemático corre ao longo de toda a atividade resolutiva e se vai manifestando de distinto modo em cada uma das etapas do processo de resolução.

A primeira etapa conclui-se com a explicitação do Modelo Matemático Subjacente, atuando sobre este, continua-se o processo, desenvolvendo as etapas posteriores mediante a seleção e consequente realização das operações matemáticas pertinentes, tudo isto acompanhado, simultânea ou retrospectiva de ações de revisão e/ou avaliação do trabalho realizado.

Assim, a cada uma das etapas do modelo que Polya propõe para a representação do processo de resolução de problemas, corresponde uma manifestação específica do "Fazer Matemática"; o paralelismo entre este e a resolução de problemas mostra-se no Gráfico 1.

Grafico 1



É necessário ressaltar que, além das operações propriamente matemáticas, em cada uma das Etapas do Modelo proposto por Polya se manifesta uma ação observável na qual confluem, de forma manifesta ou não, exigências relacionadas com: (a) o manejo de informação (Processos Cognitivos); (b) mecanismos reguladores deste manejo (Processos Metacognitivos); e (c) os sentimentos e emoções que se suscitam ao estar comprometido na realização de uma Tarefa Intelectualmente Exigente como é a resolução de um problema matemático (Processos Afetivos). A dinâmica gerada pela interação destas três dimensões do Solucionador pode ser observada no Quadro 1.

Quadro 1

FASE	ACCION	PROCESOS		
		COGNITIVOS	METACOGNITIVOS	AFECTIVOS
COMPRENSION Captar la estructura profunda del problema	Lectura intencional	Capturar información Identificar Esquemas	Tomar conciencia de la intencionalidad de la lectura Tomar conciencia de lo que sabemos Tomar conciencia de bloqueos mentales La tarea cognoscitiva, como por ejemplo sus características, dificultad Evaluar el nivel de entendimiento de una tarea intelectual o de cualquier acto mental Saber lo que se sabe y lo que se ignora, la potencialidad o las limitaciones que tiene, el grado de dificultad o de complejidad de una tarea	Tomar conciencia de las preferencias y estilos Problemas que le gusta resolver Controlar la impulsividad Concepto de sí mismo y de otros, Reconocer fallas y potencialidades
PLANIFICACION Establecer un curso inicial de acción resolutiva	Elaborar planes de ataque	Evaluar los planes elaborados para atacar el problema (cantidad y calidad de las operaciones matemáticas requeridas)	Si no se consiguen, al principio, varias vías para trabajar el problema, se empieza por la que se tenga La estrategia, como conocimiento del mérito relativo de diferentes alternativas, para enfocar una tarea cognoscitiva Predicción de las consecuencias de un evento	
EJECUCION Desplegar las acciones derivables del plan de ataque seleccionado, con el propósito de encontrar la solución del problema	Poner en práctica el plan que se considera más viable y efectivo para encontrar la solución del problema	Poner en práctica el Conocimiento Procedimental (cómo se hacen las cosas: operaciones, algoritmos, fórmulas, procedimientos)	Reconocer círculos viciosos; Si no se llega a nada o se complica se debe evaluar el plan y establecer otro plan que se crea que puede satisfacer la solución en el tiempo esperado; Cualquier camino que potencialmente pueda llevar a la solución debe ser recorrido en su totalidad Manejo de las actividades a realizar Práctica en el uso de la retroalimentación Hacer preguntas adecuadas, decidir con propiedad cuándo se requiere releer un material	Activar mecanismos de autocontrol, cuando no se logra la solución de un problema en el tiempo que se ha estimado suficiente para resolverlo. Evitar la desesperación y la angustia.
VERIFICACION Comparar el Estado Final con el Estado Inicial (pertinencia, verosimilitud de la solución); proyección de la información (aprender a partir del problema)	Revisar proceso y resultado		Verificación de los resultados de las propias acciones	Satisfacción Sensación de plenitud, disfrute y gozo Refuerzo del Autoconcepto Matemático Confirmación de la Vocación hacia el trabajo con la Matemática Incremento de la Autoestima Superación de fobia y miedo hacia la Matemática Aumento de la Confianza en Sí mismo

Com base no exposto, pode-se afirmar que na atividade resolutiva de problemas matemáticos o Solucionador põe em jogo os seguintes elementos:

1. Conhecimentos de conteúdo matemático

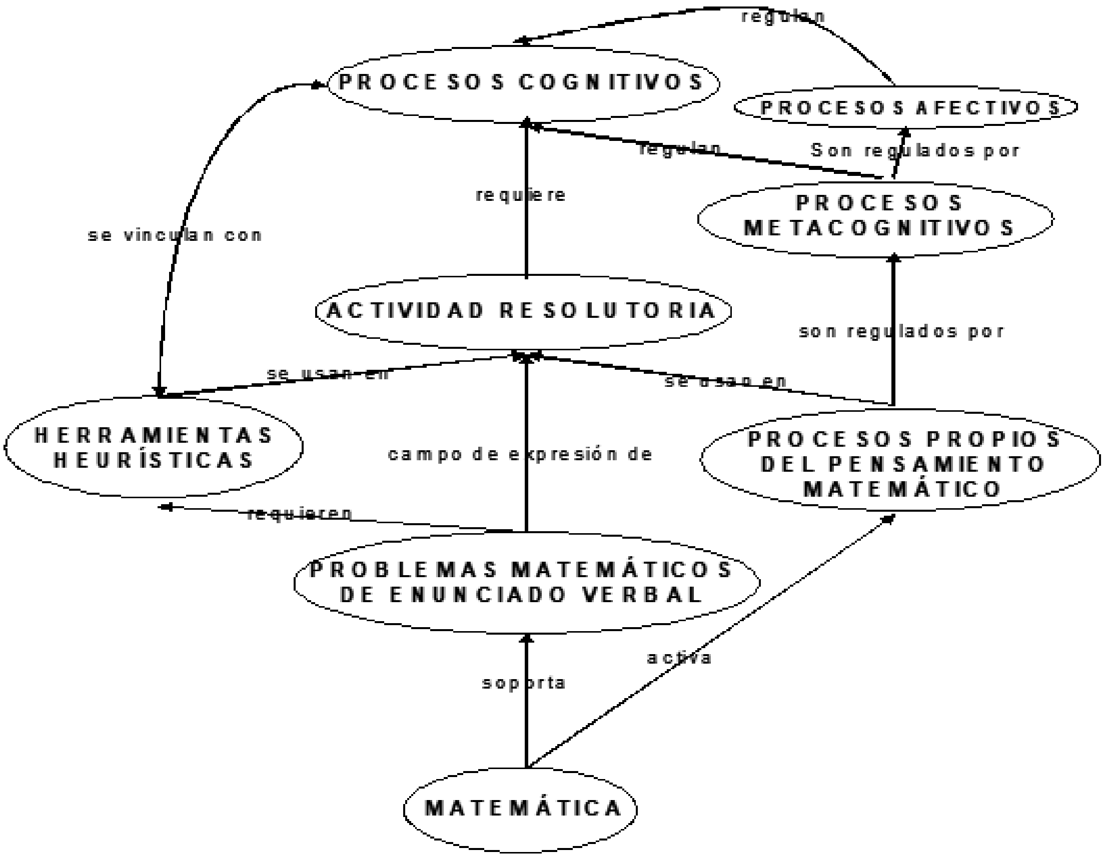
2. Ferramentas heurísticas para a abordagem do problema

3. Uma representação mental do processo de resolução de problemas

4. A consciência de suas próprias fraquezas e fortalezas como solucionador.

O último dos aspectos anteriormente citados é de natureza metacognitiva (González, 1993-1996), o que se manifesta como tomada de consciência e reflexão em torno da dinâmica e inter-relação de todos os aspectos implicados na resolução (matemáticos, cognitivos e comportamentais), tal como apresentado no Gráfico 2.

Gráfico 2



Em resumo, o Modelo de Polya proporciona um sistema comum de códigos que permite a negociação e troca de significados entre várias pessoas que se dedicam à solução de um problema ou de vários problemas distintos; esse modelo funciona como um contexto onde podem ser localizadas as diversas ações realizadas individualmente por cada um dos sujeitos em busca da solução do(s) problema(s) colocado(s). Apresenta-se a seguir parte da reflexão realizada por um dos alunos participantes no estudo sobre o seu próprio perfil como Solucionador de problemas; neste relato se aprecia a menção implícita às etapas do Modelo de Polya como referências para avaliar sua perícia no momento de resolver problemas.

> Em relação à forma de enfrentar um problema, posso dizer que tomei um certo grau de consciência da ordem lógica dos passos ou etapas na resolução de um problema. Anteriormente, falhei nas etapas de compreensão do problema e na abordagem de vias para resolvê-lo, já que muitas vezes não me dava conta dos erros tratando de resolver o problema. Esclareci que compreender e planejar vias de ataque de um problema facilita grandemente o sucesso na busca da solução de um problema (Víctor, Aula Nro. 6).
>
> Como resolvíamos problemas antes (no início da oficina) e como resolvemos problemas agora?
>
> Antes: Bem, a primeira etapa de compreensão do problema era praticamente a mesma de agora, mas sem a consciência de que era uma das etapas do modelo de resolução de problemas. Muitas vezes me ocorria que ao tentar captar a estrutura profunda de um problema se me apresentavam muitos pensamentos negativos: "está muito difícil", "este problema me assusta", etc.

> No que diz respeito à fase de planeamento, eu não a cumpri de facto, mas a primeira coisa que me acontecia, eu fazia-o, claro que sempre tentando chegar à solução solicitada, não pensava em planos alternativos, só executava o que pensava numa mesma ação; E normalmente, uma vez encontrada a resposta, não a verificava já que presumia que estava bem.
>
> Agora: Tenho consciência da primeira etapa e da grande importância que tem de se dar conta de todos os dados que dá o problema assim como o que pede; também trato no possível de ter pelo menos duas vias para atacar o problema; isto é, pensar mais para logo trabalhar menos. no entanto, não excluo o fato de encontrar novos planos como eu estou executando um deles.
>
> Uma vez executado o plano e encontrada a resposta, verifico os resultados (Victor, Autobalance Nro. 1).

Como se pode inferir, o Modelo de Polya, além de constituir um esquema para organizar o processo de busca de solução aos problemas, proporciona um vocabulário que permite a comunicação e o intercâmbio de ideias entre todos os Solucionadores; por conseguinte, este modelo pode ser aceite como um quadro de referência geral que oferece a oportunidade de dispor de um vocabulário comum e de um contexto no qual são interpretáveis as diferentes circunstâncias que se apresentam aos alunos durante a resolução dos problemas.

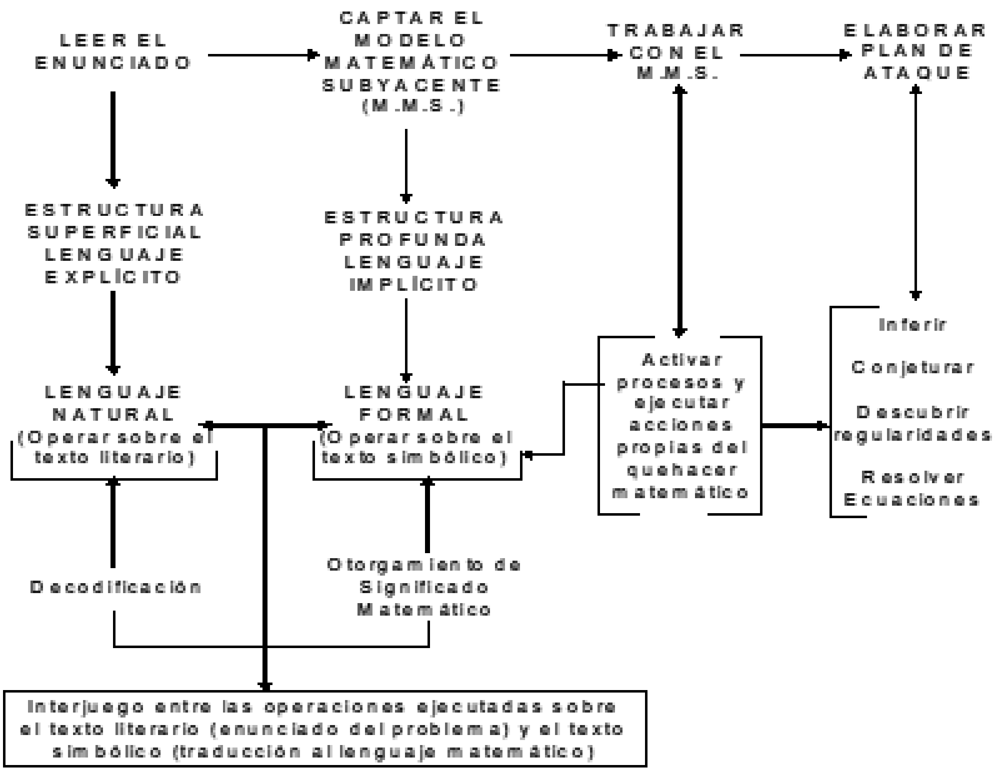
A Resolução de Problemas na Perspectiva do Solucionador

Se se adota a abordagem de Processamento de Informação para interpretar a atividade cognitiva que uma pessoa desdobra quando resolve um problema (Wittrock, 1986), e além disso se concebe à Matemática como uma modalidade específica do pensamento humano, então, pode-se presumir a existência de vínculos entre a atividade matemática e a cognição durante a resolução de problemas matemáticos tal como se mostram no Gráfico 3.

Gráfico 3

No caso dos Problemas Matemáticos de Enunciado Verbal (escrito), durante o processo que conduz desde a decodificação do enunciado até sua matematização, ou seja, sua tradução em um texto simbólico que representa o Modelo Matemático Subjacente (MMS), se produz um Inter jogo Cognitivo que, partindo das operações exercidas sobre o conteúdo do enunciado, conclui-se com a realização das ações próprias da atividade matemática associadas com o processo de busca da solução do problema. A dinâmica desse Inter jogo é apresentada no Gráfico 4.

Gráfico 4



A matematização do enunciado do problema implica a penetração na Estrutura Profunda deste e isso se faz ostensível na explicitação do MMS correspondente; isto é a evidência de que se compreendeu o problema, o qual é um aspecto crucial para sua resolução; portanto, é necessário que o Solucionador esteja muito consciente das exigências cognitivas desta fase da atividade resolutiva.

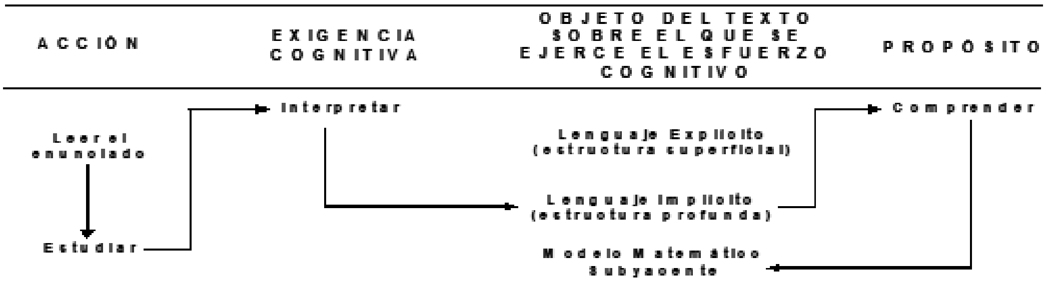
> "Ao estudar (ler o enunciado de) um problema é necessário interpretar a linguagem implícita e o explícito e confrontá-los para poder encontrar a compreensão global" (Reconhece-se que no enunciado -abordagem- de um problema, a informação se apresenta em dois níveis: superficial (explícito) e profundo (implícito); este é o que refere ao Modelo Matemático Subjacente ao problema, sua captação é a medida da realização da compreensão cabal do problema) (Edgar, Aula Nro. 5) (parênteses do Investigador)

A ação de ler se associa com o processo cognitivo de interpretar a linguagem explícita (estrutura superficial) na qual é dado o enunciado para fins de acesso ao MMS (estrutura profunda, linguagem implícita) com o qual se consegue a compreensão cabal do problema.

> Como consequência de (interpretar) a linguagem implícita (ou seja, a estrutura profunda, modelo matemático subjacente) podem-se derivar inferências lógicas, que podem ser a chave na resolução (do problema) (Edgar, Aula Nro. 5).

No Gráfico 5 se mostra uma representação das inter-relações entre as exigências cognitivas do Estágio de Compreensão, as estruturas, superficial e profunda, de um problema e a intencionalidade da leitura que se faz do enunciado.

Gráfico 5



Em síntese, os problemas e sua resolução são um meio adequado para fazer Matemática na sala de aula; para isso, é conveniente assumir um modelo representativo da atividade resolutiva, entendida como a exercitação de processos cognitivos e metacognitivos, concomitantemente e a posteriori da atividade resolutiva; desta maneira, assumindo a Matemática como um modo especial de pensamento, é viável incorporar a perspectiva do Solucionador nos projetos de formação inicial de professores de Matemática que se baseiam nos processos de formulação, abordagem e resolução de problemas.

MODALIDADES DE TRABALHO EM AULAS DE MATEMÁTICA CENTRADAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O modelo didático originado na investigação que deu lugar ao estudo aqui relatado baseia-se na resolução de problemas realizada segundo quatro modalidades diferentes mas complementares: resolução de problemas individualmente, em pares, em pequeno grupo e em Grupo Completo. Cada uma delas.

Trabalho Individual

Esta modalidade corresponde ao caso em que todos os alunos, cada um a trabalhar separadamente, se defrontam com um mesmo problema, procurando estar atentos à atividade mental gerada pelo esforço pessoal que realizam ao tentar resolvê-lo, de modo que possam se tornar conscientes de sua própria dinâmica cognitiva, ou seja, dos processos de pensamento que desenvolvem quando realizam a atividade resolutiva. A abordagem individual de um problema é uma experiência idiossincrática; ou seja, cada aluno enfrenta o problema desde sua própria perspectiva; é assim, a representação da situação problemática que cada sujeito constrói tem caráter pessoal.

Igualmente são pessoais tanto as trajetórias que o aluno traça e/ou percorre desde o Estado Inicial até o Estado Meta ou Solução, como as emoções, sentimentos e demais circunstâncias afetivas que se geram nele quando tenta resolver algum problema. Aqui está um exemplo.

> Primeiro li três vezes o enunciado do problema e associei-o a um problema que tinha resolvido anteriormente. Li novamente para ver o que era o que tinha e o que me pediam; pensei que não devia deixar-me influenciar pelas dificuldades que me haviam apresentado na resolução de outro problema e disse a mim mesmo: tenho que fazer o problema e encontrar a solução.
> Ficou claro que tinha que trabalhar com equações; me ocorreu...
> O único plano que eu via era através das equações e me dispus a sacar os dados...

> A = idade de José
> B = idade de Juan
> C = idade de Julio
> A + B + C = 17 anos y 6 meses
> D = sacola de ameixas = 770 ameixas
>
> Não encontrava como fazer as outras equações. Pensei novamente no anterior e li novamente o enunciado para ver se me ajudava em algo mas não conseguia decifrar a relação. Pensei novamente em equações, ou seja, nas variáveis que me envolviam tudo isto; e me ocorreu escrever que entre os três receberiam 770 ameixas...
> Não pode ser, José não pôde tomar 11 ameixas e no total eram 770; é algo absurdo. Estou lendo novamente o problema. O que eu preciso é da relação entre as equações. Me parece muito difícil, tenho que pensar muito bem quais devem ser as verdadeiras equações (Cristóbal)

A procura individual de solução para um mesmo problema, por parte de várias pessoas, proporciona a cada uma delas uma perspectiva particular da situação. Com base nestas vivências, individualmente experienciadas por cada participante ao enfrentar problemas específicos, você pode proceder à elaboração teórica de conceitos, propiciando intercâmbios comunicativos cujo conteúdo inicial faz referência à experiência pessoal vivenciada por cada sujeito.

Para conseguir isso, eles são incentivados a que, enquanto estão trabalhando com o problema, anotem, escrevam, “tudo o que passa pela sua mente”; assim, você obtém um registro da atividade mental contentivo de expressões escritas relacionadas: (a) planos elaborados para atacar o problema, (b) procedimentos utilizados para verificar a solução encontrada e (c) cálculos derivados das diferentes operações matemáticas implementadas. Além disso, também são convidados a fazer anotações relativas aos pensamentos, emoções e outros aspectos afetivos que se suscitam “enquanto estão envolvidos no problema”.

Estes testemunhos escritos, onde os alunos tentam detalhar tudo o que pensam quando tentam resolver algum problema, são um elemento chave para examinar, a posteriori, sua perícia como Solucionadores; por conseguinte, devem ser proporcionadas aos alunos todas as oportunidades possíveis para registarem a sua atividade cognitiva pessoal:

> tivemos um mês inteiro de ensaios realizando problemas individuais, não me acostumava à ideia de transcrever meus pensamentos no problema, mas, pouco a pouco, fui aumentado minha habilidade para fazê-lo (Erlinda, Resumo do Curso).

Algumas das ferramentas heurísticas que contribuem para a conscientização sobre a atividade cognitiva pessoal e seu consequente registro são as seguintes:

1. *Falar com o Problema:* esta é uma heurística sugerida para iniciar a abordagem de um problema; consiste em estabelecer um “diálogo” com o enunciado, no qual se toma em conta que os problemas “respondem” quando se lhe formulam perguntas tais como as seguintes*: o que me dá? O que está me pedindo? O que devo encontrar?* estas questões podem ser respondidas satisfatoriamente a partir da leitura repetida do enunciado do problema tantas vezes quantas forem necessárias..

2. *Auto-interrogatório:* este é um procedimento para orientar a Reflexão Concorrente durante o processo de resolução.

   > Enquanto você está resolvendo um problema, você deve se perguntar: o que estou fazendo? , por que estou fazendo isso? , aonde me leva o que estou fazendo?) (José Gregório).
   > Como é possível dar-se conta, de maneira consciente, que num momento em que se está resolvendo um problema se está dando simultaneamente ao processo cognitivo o processo metacognitivo? Resposta: nos autoformulando perguntas que nos façam dar conta destes processos: Como, para que, para onde vou? Como o plano seguido funciona? Estou demorando muito para resolver o problema? Que conhecimentos possuo que podem ser úteis para resolver o problema? Domino corretamente este conhecimento ou tenho dúvidas ao usá-lo? (Victor)

Além do anterior, com a ajuda do docente, o aluno em sua condição de Solucionador individual de problemas, pode dar-se conta das exigências cognitivas do processo, o qual se vincula com a aquisição de uma consciência metacognitiva.

> Minhas impressões sobre o processo que segui para tentar encontrar uma solução para este problema são as seguintes É necessário manter uma conduta de auto-controle das ações realizadas para constatar ou advertir qualquer irregularidade durante o desenvolvimento da resolução; é necessário observar detalhadamente e cuidadosamente os passos feitos e perguntar a si mesmo o que está sendo feito? Por quê? E para quê? Estas perguntas podem servir como indicadores e alertas, para detectar algum aspecto contraproducente durante a resolução do problema. É preciso ouvir as vozes internas, as quais constituem indícios de meta-cognição em evolução e crescimento. Em geral aprendi sobre a necessidade de considerar em toda sua extensão, a eminente importância dos processos meta-cognitivos na resolução de problemas. (Edgar, Aula Nro. 25)

Entre os traços de natureza metacognitiva que se podem destacar, estão os seguintes:

1. *A conversão da atividade resolutiva própria em objeto de reflexão,* neste caso a reflexão se realiza concomitantemente com a execução da atividade resolutiva: "É necessário manter uma conduta de autocontrolo das ações realizadas para constatar ou advertir qualquer irregularidade durante o desenrolar da resolução".
2. *O Solucionador monitora e regula sua própria atuação cognitiva por meio de um procedimento de auto-interrogatório:* "é necessário observar detalhadamente e conscienciosamente os passos efetuados e perguntar a si mesmo: O que estou fazendo? Por quê? e para quê? Estas perguntas podem servir como indicadores e alertas, para detectar algum aspecto contraproducente durante o processo de resolução do problema.
3. *Reconhece-se a importância e se apreciam os outros processos que acompanham a atividade de processamento de informação própria da resolução de problemas:* "Há que ouvir as vozes internas; as quais constituem indícios de metacognição em evolução e crescimento". Em geral aprendi sobre a necessidade de considerar em toda sua extensão, a eminente importância dos processos meta-cognitivos na resolução de problemas".

Trabalho em Duplas

Esta modalidade surge quando dois alunos, em cooperação mútua, se empenham na resolução de um mesmo problema. Neste caso, as trocas de informações orais que ocorrem são registadas por escrito, incluindo as operações matemáticas efetuadas, bem como todas as incidências próprias do processo relativas à reflexão que ambos os membros do casal realizam sobre as atividades que estão a desenvolver em busca da solução do problema que tratam de resolver.

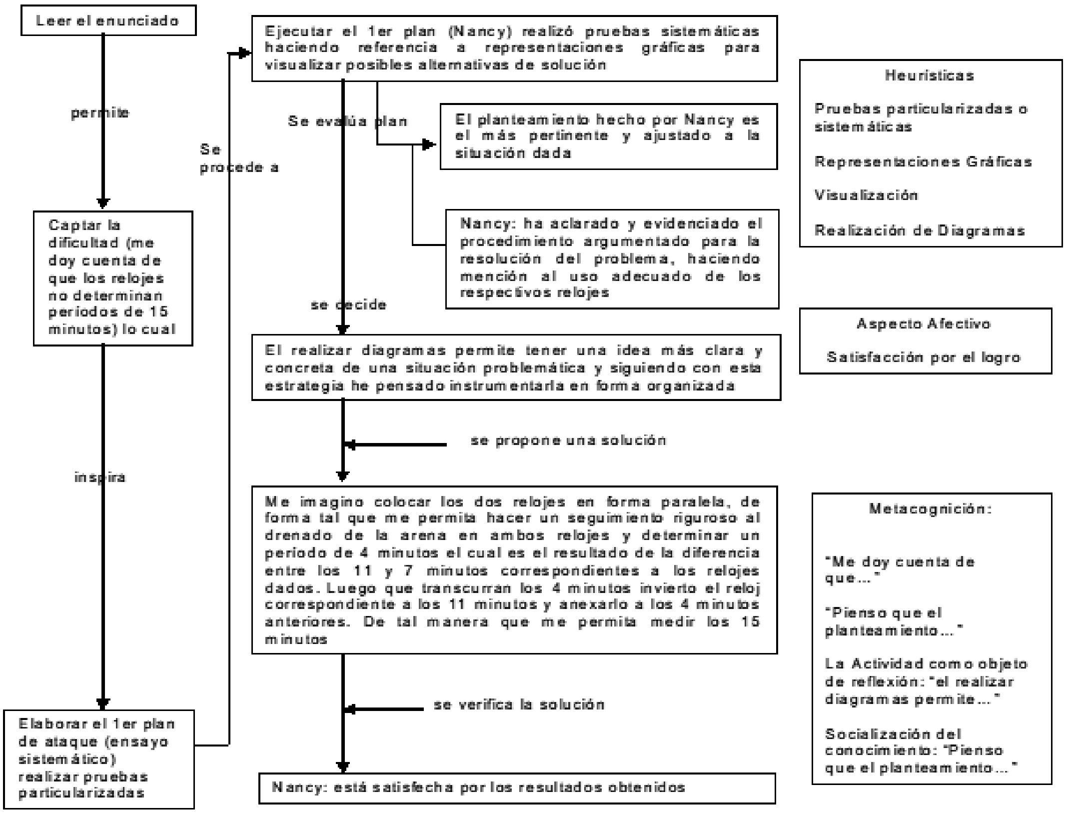
O trabalho em Duplas constitui *"... muito boa ideia desde que como se diz, duas mentes pensam mais do que uma". (Erlinda)*, e consiste em *"...rever o trabalho ou processo de resolução de problemas, mas entre dois" (Victor)*. Em este caso: "... se trabalha resolvendo um problema entre dois, e se mantém um registro sequencial. Para conseguir um melhor registro se procede a usar gravadores, verbalizando tudo o que se pensa" (Victor).

Quando um dos membros do casal fala enquanto o outro fica calado, o falante faz as vezes de "eu interno" de seu companheiro dizendo, em voz alta, questões tais como: "*não se cale, o que pensa, diga, que tempo leva trabalhando o problema" (Cristóvão, Resumo final do Curso).*

Com isto se estimula a tomada de consciência por parte do ouvinte quanto às peculiaridades de sua própria atividade resolutiva.

A representação gráfica do Processo de Solução do Problema "Relógios de Areia" pode ser vista no Gráfico 6.

Gráfico 6



Trabalho em Grupos Pequenos

Esta modalidade se apresenta quando 3, 4 ou 5 alunos se dedicam a resolver, entre todos eles, um mesmo problema; neste caso, o Pequeno Grupo constitui uma microcomunidade matemática em cujo seio se realizam ações tais como as que se mencionam a seguir:

1. Troca de opiniões
2. Proposição de ideias diversas para resolver os problemas levantados
3. Ativação de processos, tanto do pensamento matemático (trabalhar com propriedades e estabelecer relações com uma definição), como cognitivos (visualizar)
4. Avaliação de planos de ataque próprios e de seus companheiros.
5. Análise retrospectiva dos planos executados e dos processos de resolução desenvolvidos.
6. Auto-reflexão em torno de sua própria ação como resolvedores de um problema particular.
7. Identificação de contradições com esquemas habituais de pensamento.

Etapas do Trabalho em Grupos Pequenos

Quando os alunos constituem grupos pequenos (não mais de cinco integrantes) para trabalhar cooperativamente na resolução de problemas matemáticos, são perceptíveis as seguintes quatro (4) etapas: Familiarização; Avaliação de Planos; Execução; e, Revisão. Os pormenores de cada uma delas são apresentados a seguir.

Etapa I: Familiarização

Durante esta etapa se produzem os primeiros contatos com o enunciado do problema os quais têm como finalidade identificar as relações que correspondem ao Modelo Matemático Subjacente (MMS). Com estas ações, os integrantes do pequeno grupo procuram formar uma ideia global em torno do problema (condições iniciais, exigências, conhecimentos matemáticos requeridos, cursos de ação possíveis, apreciação subjetiva sobre a dificuldade do problema, etc.); este esforço para se familiarizar com o problema, subjectivá-lo, apropriar-se dele, pode conseguir-se através do desenvolvimento de uma chuva de ideias; ou seja, uma interacção onde cada participante do grupo tem a oportunidade de expressar livremente, sem censura alguma, todas as ideias que lhe ocorram em relação ao problema, mesmo aquelas que possam parecer loucas.

Chuva de ideias: "desde o início, várias ideias ou estratégias foram discutidas (consideradas) para resolver o problema, mas sem um horizonte definido"

Esta ação propicia uma Troca de opiniões em torno do enunciado; cada membro do grupo expressa seu ponto de vista sobre como interpreta as expressões constitutivas do enunciado e que plano propõe para tentar resolver o problema.

No entanto deve-se ter cuidado *(Consciência dos aspectos a ter em conta quando se resolvem problemas em pequenos grupos)* de não descartar imediatamente uma via de resolução sem antes avaliá-la em toda sua extensão.

Fase II: Avaliação dos planos

"Foram discutidas (avaliadas) diversas opiniões sobre as condições expostas no enunciado do problema."

Durante a fase de Familiarização, espera-se que surjam várias opções que se traduzam em planos para enfrentar o problema; cada um destes planos é estudado e avaliado coletivamente; assim como na etapa de familiarização, aqui deve haver plena liberdade para pensar.

Plano 1: "Particularmente assomei a ideia de trabalhar com as propriedades dos logaritmos (Plano 1) para tentar visualizar uma maior informação quanto à estrutura do problema e estabelecer as relações com respeito à definição de progressão aritmética" (*Consciência do propósito, o "para que" serve de regulador e controle da atividade*).

> *Avaliação do Plano 1:* "Admito que a ideia anterior também carecia de rumo fixo, mas (havia a expectativa) de que a longo prazo poderia revelar alguma pista mais significativa para orientar uma via de resolução efetiva" ***(O próprio resolvedor tem oportunidade de avaliar e criticar o plano que ele mesmo propõe).***

Plano 2: "No meio da dissertação Víctor (outro companheiro) apareceu a ideia de expressar os logaritmos em uma mesma base, para logo aplicar propriedades inerentes aos mesmos (Plano 2)

> *Avaliação do plano 2:* Esta ideia não se concretizou na sua oportunidade (ou seja, não foi totalmente considerada e, por conseguinte, não foi posta em prática). No entanto, depois de termos realizado o processo de resolução, apercebemo-nos da importância desse comentário para resolver a situação colocada." ***(A visão retrospectiva do processo, permite dar-se conta de debilidades e fortalezas, e reconhecer qual é a informação ou o aspecto chave que permitiu enrumbar-se para a solução do problema) (Neste caso há a consciência de que um plano, descartado no início, no final pode ser revalorizado).***

Plano 3: "Tanto Víctor como Gustavo (outros companheiros), propuseram trabalhar com a tese (Plano 3) ou seja, aplicar logaritmos a x^{18}, Y^{21}, Z28 e logo indagar algum comportamento especial."

> *Avaliação do Plano 3:*"No início eu não compartilhei esse caminho, porque não me parecia familiar com o meu esquema habitual de raciocínio ***(Conhecimento sobre o seu próprio processo de pensamento/ Metacognição).*** Teria sido interessante partir de maneira linear desde a hipótese até chegar à tese". ***(Esta é a típica modalidade de abordar a resolução de um problema como se fosse a demonstração de um teorema).***

Plano 4: "Em última instância predominou a estratégia (plano) sugerida por Gustavo, a qual consistiu em <u>expressar relações entre a razão r e as diversas variáveis envolvidas (x,y,z)</u> (Plano 4). No entanto, apesar de se concretizarem várias igualdades alusivas (ou seja, de se ensaiar, executar-se o plano -o dito por Gustavo-); não se conseguiu dar com a solução esperada (fazer a demonstração).

> *Avaliação do Plano 4:* É possível que este último plano não esteja mal do ponto de vista algébrico, só que não se conseguem os objectivos propostos ***(não se chega à demonstração).***

Fase III: Execução

Uma vez que se tenha conseguido construir o MMS e discutido e avaliado os possíveis planos de ataque, e se tenha posto em marcha algum deles, entra-se plenamente na fase de execução, durante a qual os Solucionadores exercem o seu accionar cognitivo, ativando processos próprios da tarefa matemática que são aplicáveis ao problema.

Convém assinalar que é provável que o plano que está a ser executado não conduza à solução; pelo contrário, pode-se estar muito "ocupado com o problema" sem fazer progressos; neste caso deve-se evitar cair em círculos viciosos assim como também identificar e superar os engarrafamentos e as "trancas"; uma das opções para conseguir isto é pôr em dúvida a veracidade do enunciado, pelo que se deve voltar à etapa anterior, relendo a própria abordagem do problema.

"Finalmente se pôs em dúvida a veracidade do enunciado em vista dos resultados obtidos".

Etapa IV: Revisão

Ainda que se tenha obtido algum resultado que, possivelmente, constitua uma solução do problema, é proveitoso e conveniente realizar uma visão retrospectiva de todo o trabalho realizado; isto permitirá que se tome consciência da dinâmica do processo, bem como ter conhecimento de eventuais círculos viciosos em que possa ter incorrido.

"Fazendo uma <u>visualização geral do processo seguido</u>, penso que se exploraram as possíveis vias de resolução (se testaram vários planos) sem o resultado esperado, mas é importante destacar a natureza (tipo) do problema (não se conseguiu fazer a demonstração, talvez devido à dificuldade do problema), é evidente (que a complexidade do problema cria) a necessidade de articular a parte cognitiva e meta-cognitiva no indivíduo para detectar alguma pista que resolva a situação."

Aspectos Sociais da Resolução de Problemas Trabalhando em Pequenos Grupos

Na resolução de problemas trabalhando em pequenos grupos, são visíveis os seguintes aspectos sociais: *Comunicação, Cooperação, Controle*; convém destacá-los com o fim de aproveitar ao máximo as possibilidades deste modo de organizar atividade didática no marco de uma Aula de matemática centrada na busca de solução a problemas.

1. Efeito da Comunicação Grupal sobre cada indivíduo: no grupo se cria um clima cooperativo de trabalho que permite que cada um dos integrantes incremente seu acervo de ferramentas para abordar o problema, com base na informação fornecida por seus companheiros.

   > É importante destacar que a comunicação grupal pode enriquecer o contexto de idéias e conceitos que sobre o problema se tem, isto é, amplia a margem de ação quanto à instrumentação de estratégias convenientes e razoáveis. Esta pluralidade de ideias e opiniões é positiva porque oferece uma variedade de possíveis vias de resolução. (Edgar).

2. <u>Clima Cooperativo</u>: quando se trabalha em um pequeno grupo, gera-se um clima que permite o respeito das ideias alheias e a avaliação das mesmas em função do propósito

compartilhado de encontrar a solução ao problema; além disso, o grupo acumula um acervo coletivo de saberes que pode ser aplicado ao processo de resolução.

> Claro que a interação grupal é outro fator que promove a expansão de ideias, planos e estratégias variadas. O conhecimento de fórmulas e ferramentas matemáticas pode determinar o grau de fluidez na resolução de problemas (Edgar).

Outro aspecto relevante é que cada um dos membros do grupo se torna mediador da aprendizagem de seus companheiros:

a) Sugerindo planos para abordar o problema:

> Tanto Elvira como Víctor haviam sugerido de maneira inicial (1er. plano de ataque) a análise do problema através dos citados ensaios. (informação chave fornecida no enunciado do problema)

b) Colaborando na construção do Modelo Matemático Subjacente:

> Após a realização das análises particulares (ou seja, após a execução do plano), chegou-se à conclusão (observou-se a seguinte regularidade) de que se estabelecia uma estreita relação entre o número de percursos e a quantidade de distância percorrida no processo. Chegou-se a induzir a fórmula matemática que determinava o comportamento imerso no problema (ou seja, se fez a formalização matemática, expressou-se o modelo matemático subjacente no enunciado do problema)

c) Participando na realização das operações de cálculo pertinentes:

> ...e logo que se calculou a Distância total percorrida, mediante um simples Despeje...

3. Controle da impulsividade: a diminuição da propensão a atuar irreflexivamente é outra das questões que se pode conseguir quando se trabalha em pequenos grupos:

   A proposição de planos de ação deve ser o produto de uma reflexão impregnada dos diversos elementos meta-cognitivos que interagem com o problema em si (Controle da impulsividade).

A valorização do processo de resolução de problemas em função dos aspectos sociais do trabalho em pequenos grupos é apresentada no Quadro 2.

Quadro 2. Aspectos Sociais da Resolução de Problemas Trabalhando em Pequenos Grupos

ASPECTO	CARACTERIZACIÓN
Comunicação grupal: dialética do individual e do coletivo	Esta pluralidade de ideias e opiniões é positiva porque oferece uma variedade de possíveis vias de resolução.": (a) enriquece o contexto de idéias e conceitos que se têm sobre o problema, e (b) amplia a margem de ação quanto à instrumentação de estratégias convenientes e razoáveis
Clima de trabalho cooperativo (respeitoso, estimulante, não desqualificador, não agressivo)	Atitude de respeito pelas ideias dos outros. Cada membro tem a opção de propor o plano que considere conveniente e "deve-se ter cuidado (Consciência dos aspectos a ter em conta quando se resolvem problemas) de não descartar imediatamente uma via de resolução sem antes avaliá-la em toda sua extensão.
Interdependência: o grupo como controlo do indivíduo	Possibilidade de controlar a impulsividade individual: "A proposição de planos de ação deve ser o produto de uma reflexão impregnada dos diversos elementos meta-cognitivos que interagem com o problema em si"

Fatores que contribuem para o sucesso na resolução de problemas quando se trabalha em pequenos grupos

Entre os fatores que contribuem para o sucesso na solução de problemas quando se trabalha em pequenos grupos podem-se mencionar os seguintes:

1. O grupo, como equipe, possui um conhecimento acumulado que pode ser compartilhado cooperativamente por cada um dos membros individuais; isto reforça o valor didático do trabalho coletivo:

> No grupo tínhamos (os seguintes) conhecimentos (matemáticos necessários para encontrar a solução) progressões e operações com termos de progressão".

2. Ao trabalhar em forma coletiva, se oferece a possibilidade de compartilhar diferentes opções e modalidades para abordar o problema, o que permite a superação de esquemas rígidos e bloqueios mentais, já que se valorizam os diferentes modos de enfrentar os problemas:

> Outro fator que ajudou a "detalhar a situação levantada" foram as ferramentas heurísticas que foram aplicadas: "diagramação ou tradução gráfica do enunciado do problema", "abordar casos particulares" de forma concreta e objetiva. (Esta é uma manifestação da superação da abordagem algebrizante, e propõe a valorização de outros modos de abordar os problemas, diferente da abordagem de equações algébricas).

3. O trabalho em grupo gera uma força supraindividual apoiada no conhecimento compartilhado:

> "Claro que a interação grupal é outro fator que promove a expansão de ideias, planos e estratégias variadas".

4. Ao compartilhar a informação matemática que possui cada um dos integrantes do grupo, compensam-se as debilidades e deficiências de cada integrante com as fortalezas dos outros companheiros:

> "O conhecimento de fórmulas e ferramentas matemáticas pode determinar o grau de fluidez na resolução de problemas".

TRABAJO NO GRUPO COMPLETO

Conceito

Esta modalidade se apresenta quando todos os alunos, com a mediação do professor, se dedicam à busca da solução de um mesmo problema. Todos os participantes (alunos e professores) se localizam de um modo tal que seus assentos estejam organizados em forma circular e tenham a possibilidade de se olhar uns aos outros; o docente, em seu papel de facilitador, conduz uma Discussão Dirigida e utiliza o Interrogatório Guiado a fim de ir percorrendo as diferentes etapas do processo de resolução do problema.

Etapas de Desenvolvimento

A resolução de problemas de acordo com a modalidade de "Grupo Completo" se organiza nas seguintes etapas: 1. Formulação do problema; 2. Leitura do Enunciado; 3: Mediação da Compreensão; 4. Execução de Plano de Ataque. Os detalhes de cada uma destas etapas são apresentados abaixo.

Etapa 1: *Formulação do Problema*

O Trabalho em Grupo Completo começa com a seleção do problema que se tentará resolver; seu enunciado pode ser formulado pelo professor ou por qualquer um dos alunos; uma vez que se tenha selecionado o problema, as instruções para o trabalho são rodadas, entre as quais se destacam as seguintes: (a) cada aluno tem o direito de opinar livremente em relação à sua perspectiva sobre o problema; (b) não se deve desqualificar a priori nenhuma ideia acerca da possível solução do problema.

Esta modalidade de trabalho será ilustrada pelo problema cujo enunciado é o seguinte.

Considere os seguintes números: 234234234, 123123, 777777, 518518.

Que dizer dos números indicados?

Enuncie e demonstre uma propriedade que, em geral, satisfaz todos os números da forma ABCABC, onde A, B e C são dígitos entre 1 e 9.

Nesta frase aparecem vários números que compartilham uma propriedade, o assunto consiste em descobri-la, formular uma conjectura em torno dela e logo demonstrar essa conjectura. Estima-se que a busca da solução deste problema requer a ativação de processos próprios da tarefa matemática, tais como: analisar, particularizar, inferir, conjeturar, verificar e demonstrar, entre outros.

Etapa 2: *Leitura do Enunciado do Problema*

O suporte físico do problema considerado é uma abordagem escrita (enunciado escrito em linguagem natural -idioma castelhano); portanto, a primeira ação que deve fazer quem tenta lhe encontrar solução é ler esse enunciado, o que significa que o potencial Solucionador deve levar a cabo uma atividade decodificadora de processamento de informação (Todos os alunos devem fazer individualmente uma leitura silenciosa do enunciado)

Assim, o contato inicial com problemas deste tipo se faz mediante uma leitura de seu enunciado, o qual não constitui uma entidade monolítica; pelo contrário, em sua estrutura são perceptíveis dois níveis: Superficial e Profundo (González, 1997; Stacey e Scott, 2000)

> "Em qualquer problema sempre existe o explícito (aparente) e o implícito (profundo). Um problema nunca poderá ser resolvido enquanto não for captada a sua profundidade. Quando não se compreende profundamente o problema ocorre, comumente, que se lhe agrega ou se lhe elimina informação e então o problema é mudado" (Víctor, Aula Nro. 4).

O primeiro nível é explícito, denomina-se *Estrutura Superficial do Problema* e está conformada pelos parágrafos contentivos das expressões, frases ou frases constitutivas do enunciado; o outro nível está implícito, é designado como *Estrutura Profunda do Problema* e é constituído pelas relações entre os elementos do enunciado que são expressáveis matematicamente.

À primeira destas duas estruturas se tem acesso mediante uma leitura consciente do enunciado, cuja intencionalidade é tornar explícita a Estrutura Profunda do Problema; isto significa que a leitura que se faz com a finalidade de tratar de resolver este tipo de problemas matemáticos, tem a intenção de buscar e captar o sentido e significado matemático das relações expressadas no enunciado, as quais constituem o seu Modelo Matemático Subjacente (MMS); por esta razão, é necessário que o Solucionador de um problema matemático com texto esteja consciente de que, quando lê o seu enunciado, o que está procurando com ele é *aceder à sua estrutura profunda e, em consequência, estabelecer o seu MMS correspondente*.

> Quando uma pessoa lê o enunciado de um problema com a intenção de solucioná-lo, ativa-se toda sua maquinaria intelectual como resolvedor, procurando capturar a estrutura profunda do problema e realizando ações em função de resolvê-lo (Víctor, Aula Nro. 6)

Esta etapa do trabalho com o problema constitui uma Fase de Familiarização durante a qual a intervenção mediadora do docente se manifesta mediante a formulação de algumas perguntas tais como *O que estão fazendo?* e *como estão fazendo isso?* e depois deixar que os alunos continuem a ler atenta e conscientemente o enunciado do problema, trabalhando com suficiente autonomia, tanto individual como grupal.

Etapa 3: *Mediação da Compreensão do Problema*

Tendo em conta que compreender um problema consiste em formular seu Modelo Matemático Subjacente, ou seja, explicitar sua Estrutura Profunda, depois que os alunos tiveram tempo suficiente para ler o enunciado, o docente enfatiza seu papel como mediador e, Usando a Discussão Guiada e o Interrogatório Dirigido, procura que os alunos identifiquem os vínculos matemáticos implícitos entre os diferentes elementos referidos no enunciado:

> Depois de passar algum tempo, o professor começou a perguntar o que cada aluno havia respondido; cada um começou a dizer o que pensava da formação desses números... (Cristóbal, Sala Nro. 3).

Pode-se começar formulando perguntas de tipo genérico, relacionadas com o modo de abordar o problema, que permitam que vários alunos compartilhem com o resto de seus companheiros o que cada um deles observou durante o período de leitura silenciosa individual. Isto permite conhecer diversas formas de abordar o problema e, ao mesmo tempo, identificar possíveis dificuldades confrontadas pelos alunos.

Depois, continua-se a discussão insistindo em que antes de proceder aos cálculos, deve-se pensar em pelo menos dois modos para abordar o problema. Durante esta fase, os alunos são encorajados a expor as suas ideias de forma livre, espontânea e sem restrições, as que são positivas são encorajadas; no entanto, nenhuma delas é descartada nem nenhuma delas é desclassificada a priori, mesmo que pareça louca; pelo contrário, todas devem ser escutadas atentamente e submetidas à consideração e avaliação por parte do grupo.

> C. Um começou por lá dizendo "tentei fazê-lo mas na realidade não sabia por onde começar";
>
> C. Outro disse "eu acho que esse número expresso dessa forma deve ser divisível por algum número".

> F. Tem a ideia, por aí vai.
>
> C. Outro disse: "e se decompomos esses números em seus fatores primos"
>
> F. É uma boa ideia.
>
> (Cristóbal, Sala Nro. 3)

Depois de colocar várias opções, estas devem ser avaliadas; para isso, sugere-se que o Solucionador se auto-interrogue formulando, entre outras, perguntas tais como: Que operações devo executar? Qual é o meu grau de perícia quanto à sua execução? Quanto tempo necessito para executá-las? De que tipo são? Tudo isso com o fim de conscientizar os alunos sobre a quantidade e qualidade das operações que devem efetuar, bem como sobre a perícia que eles possuem para levá-las a cabo.

Sempre que possível, devem-se escolher vários modos de abordagem (planos de ataque) para ensaiar todos aqueles que pareçam plausíveis; quando se tenham dois ou mais planos, o Grupo Completo se subdivide em dois subgrupos e a cada um deles é atribuído um dos planos.

No entanto, o que geralmente acontece é que, com as intervenções dos alunos, se obtêm diversas ideias para "atacar" o problema, e a partir delas se elabora um "Plano de Ataque", o qual se constrói sobre a base das contribuições dos estudantes e, na verdade, torna-se um plano partilhado para enfrentar o problema.

> Assim passaram vários minutos e Fredy nos disse:
>
> F. E por que não fazem o que disse a companheira? Decomponham os números em seus fatores primos, e, por sua vez, procurem outros números com a mesma forma e descompactem-nos para ver o que acontece, mas levando em conta que o maior número dessa forma é 999999.
>
> (Cristóbal, Sala Nro. 3)

Etapa 4: *Execução do Plano de Ataque*

Uma vez que se construiu em forma coletiva um plano de ataque se procede a pô-lo em prática.

> F. Começar
>
> C. Cada um copiou um número diferente e começou a decompor. "Fatores primos são identificados e M.C.D."
>
> (Cristóbal, Sala Nro. 3)

Com este trabalho, pretende-se que cada um dos alunos tenha a oportunidade de encontrar as relações matemáticas que constituem o MMS correspondente ao problema.

> C. ... Depois de tudo isso, a primeira conjectura foi feita: qualquer número que tenha a forma ABCABC é divisível por 11.
>
> F. Bem, não haverá outra forma de enunciar?

C. A maioria disse que sim. O mesmo professor escreveu no quadro.

Todo número da forma ABCABC, com A, B, C $\in S_{10}$ é divisível por 11.

(Cristóbal, Aula Nro. 3)

A mediação por parte do docente deve ser orientada para a construção do MMS; para isso, o interrogatório pode ser dirigido para a formulação de conjecturas baseadas no comportamento regular das variáveis envolvidas no enunciado do problema; estas conjecturas podem ser formuladas, primeiro, em forma verbal e logo simbolicamente procurando desenhar ou chegar a uma expressão geral; o processo é conduzido até que um dos alunos enuncie explicitamente alguma conjectura baseada nas propriedades comuns partilhadas pelos elementos ou variáveis referidos na frase do problema.

"Todos os números da forma ABCABC são múltiplos de 11"

Neste caso, mesmo quando o enunciado é correto, ainda se está no plano da linguagem natural; é necessário avançar mais para chegar ao MMS; dependendo do nível de perícia matemática dos alunos, aqui poderia ser imprescindível uma intervenção mais direta do docente para ajudá-los a dar o salto para a simbolização:

Depois houve outra pergunta:

F. Não haverá forma de generalizar? ,

C. Victor disse "sim há"

F. Bem, por que não passa a escrever?.

Victor (dirigindo-se ao quadro) escreveu:

$11/ABCABC \Leftrightarrow \exists\ n \in Z, \ni n.11 = ABCABC$

(Cristóbal, Aula Nro. 3).

Esta última expressão sim constitui o Modelo Matemático Subjacente correspondente ao problema; as próximas ações da atividade resolutiva não se executarão sobre o enunciado original mas sobre este modelo onde: (a) são levantadas as relações entre os elementos do problema; (b) aparece a informação não explícita no enunciado; e, (c) se complementa o conjunto de interações entre dados e incógnitas e os vínculos entre estes dois conjuntos de elementos de um problema.

A partir daqui se entra no terreno claramente matemático, manejando a linguagem formal correspondente.

Então o professor enfatizou algo:

F. Lembrem-se que, cada vez que uma proposta for apresentada como "existencial", a demonstração exige uma construção". (Cristóvão, Aula Nro. 3).

Depois (o professor) disse, bom como temos a ABCABC podemos convertê-lo em forma de polinômios, mas de base 10 (Cristóbal, Aula No. 3).

> Após todos estes comentários (nós proseguimos fazer a mostra)
>
> $A10^5 + B10^4 + C10^3 + A10^2 + B10^1 + C10^0 = ABCABC$
>
> $A(10^5 + 10^2) + B(10^4 + 10^1) + C(10^3 + 10^0) = ABCABC$
>
> $A10^2(10^3 + 1) + B10(10^3 + 1) + C(10^3 + 1) = ABCABC$
>
> $(10^3 + 1)(A10^2+ B10 + C) = ABCABC$
>
> $ABC(1001) = ABC(1000 + 1) = ABC(1000) + ABC = ABCABC$
>
> (Cristóbal, Aula Nro. 3)
>
> Trabalhou-se em função dos casos particulares que se tinham e se chegou à conclusão de que o valor de "n" era 1001 (Víctor, Aula Nro. 3).

CONCLUSÕES

O estudo aqui relatado destaca as modalidades de trabalho que podem ser implementadas em uma Aula de Matemática centrada na Resolução de Problemas; a partir da experiência do autor, são duas as conclusões principais: (a) a possibilidade de "Fazer Matemática" utilizando a resolução e problemas; e (b) o caráter do papel protagónico que deve desempenhar o docente como mediador dos processos cognitivos e metacognitivos associados à atividade resolutiva. Em seguida, desenvolverá cada uma destas conclusões.

Conclusão 1: "Fazer Matemática" usando a resolução de problemas é possível

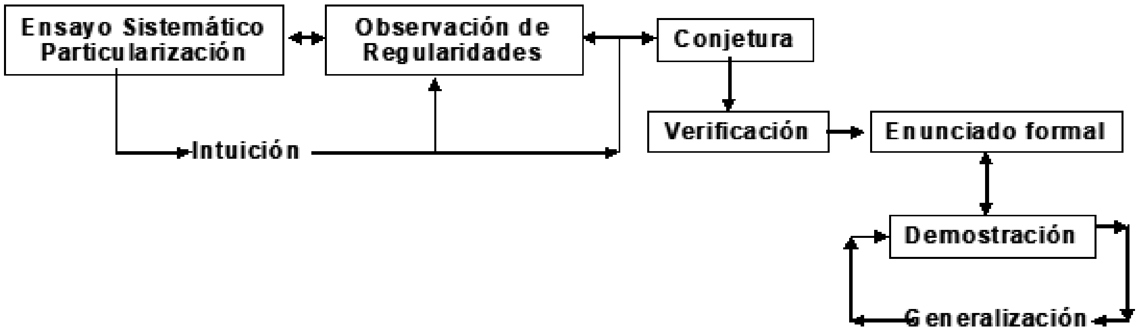
De acordo com a abordagem da atividade resolutiva até aqui apresentada, pode-se afirmar que o confronto com problemas matemáticos com texto propicia a oportunidade de pôr em prática processos próprios da atividade matemática; Assim, durante a busca de solução para este tipo de problemas, os alunos, do ponto de vista do esforço intelectual que devem realizar, podem atuar como deve fazer um matemático (de Guzmán, 1996).

Assim, por exemplo, mediante a particularização e o ensaio sistemático, no problema utilizado como ilustração da modalidade de trabalho em Grupo Completo, foi possível detectar

> "uma possível condição, que evidenciava uma regularidade permanente, para um certo conjunto de números e que portanto merecia um enunciado formal e sua correspondente demonstração" (Edgar, Aula Nro. 3).

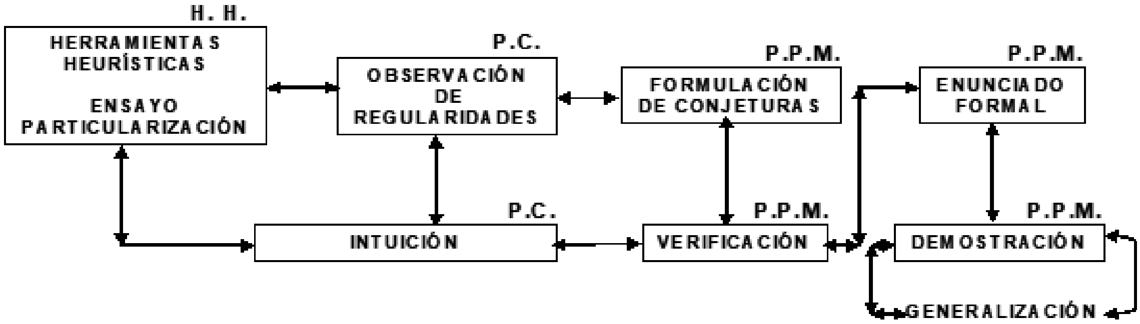
Os pormenores deste processo, apresentados num plano de interpretação abstracto, são apresentados no Gráfico 7.

Gráfico 7



Os vínculos entre as Ferramentas Heurísticas (H.H.), os Processos do Pensamento Matemático (P.P.M.), e os Processos Cognitivos (P.C.) aplicados no mesmo problema são mostrados no Gráfico 8.

Gráfico 8



Conclusão 2: O papel do professor nas aulas de matemática centradas na resolução de problemas é o de mediador de processos cognitivos e metacognitivos.

> *Nesta aula, o docente realizou uma conversa com os alunos, sobre os processos implementados na solução de problemas e sua incidência em áreas afins à matemática. O docente propôs a resolução de um exercício de forma democrática e livre. Em particular selecionei o problema 6 porque o observei familiar com conhecimentos adquiridos no secundário, sobre os logaritmos e suas propriedades (Edgar).*

O docente, como parte da comunidade matemática que se constitui na sala de aula quando esta se converte em cenário para a resolução de problemas, desempenha um papel preponderante; graças à sua mediação, a experiência de resolver problemas converte-se em oportunidade de aprendizagem, dando-lhe transcendência e possibilitando a tomada de consciência por parte dos Solucionadores, sobre aspectos relevantes do processo.

As intervenções do docente ocorrem depois que os alunos (individualmente, em casais, em pequenos grupos, ou em Grupo Completo) tenham trabalhado de forma independente, e têm a finalidade de fazê-los tomar consciência dos processos de resolução que têm instrumentado e ajudá-los a reconhecer as incidências gerais chave que aconteceram durante o trabalho realizado. Com base nas “ideias, critérios e opiniões” que os alunos emitem sobre a sua actividade resolutiva própria, o docente contribui para a construção de um discurso interpretativo, que explica o ocorrido, dá-lhe sentido, e relativiza-o, Por referência às situações comunicadas pelos participantes:

Uma das estratégias que pode empregar o docente é o Interrogatório Guiado, com este se busca estimular um processo de reflexão individual mas compartilhado e público, no contexto do Grupo Completo, que permita aos integrantes deste tomar consciência dos processos ativados durante a resolução do problema, bem como das Ferramentas Heurísticas utilizadas, a fim de consolidar o que foi aprendido e garantir a possibilidade eventual de o transferir para outros contextos ou problemas.

> *Depois que o grupo fez os respectivos comentários; o docente se aproximou para indagar que processos de resolução tínhamos instrumentado e quais foram as incidências gerais do trabalho realizado. Perante as perguntas do professor, expus em linhas gerais os resultados obtidos e, além disso, descrevi os passos realizados de forma geral.*

O docente, ao propor a modalidade de trabalho e o problema que se trabalhará, continua desempenhando um papel protagônico: (a) seleciona os problemas; (b) elabora o suporte físico que sustenta seus respectivos enunciados ou abordagens (guias); (c) "propõe"" A forma como os alunos devem organizar-se (individualmente, em pares, em pequenos grupos ou em Grupo Completo) para "resolver" os problemas:

> *A aula começou com a respectiva saudação do professor, e logo se propôs trabalhar de maneira grupal na resolução de alguns problemas; eu me agrupei com Nancy e realizamos a análise ao problema da "bola rebotadora".*

Além disso, o docente como integrante da comunidade, é um recurso humano disponível; seu trabalho mediador é conveniente e oportuna, sobretudo em casos em que se apresentam dificuldades que não podem ser superadas pelos Solucionadores.

Perante a constatação de que o trabalho de um grupo ou casal se encontra atolado, o docente pode aproximar-se do mesmo e estender-lhes um convite para que revisem a atividade realizada, com base na reconsideração das anotações que ficaram consignadas por escrito nas "Folhas de Trabalho" (expressão usada para denominar o suporte material no qual ficam registradas as operações e demais cálculos matemáticos realizados pelos alunos durante sua atividade resolutiva).

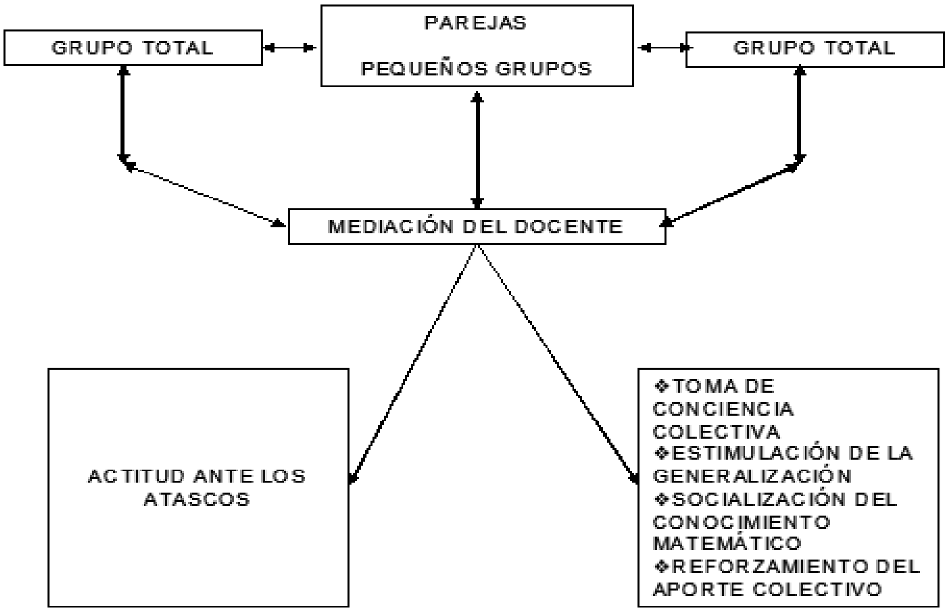
Este reexame pode abranger tanto o aspeto específico de cálculo (operações de cálculo) como o heurístico, ou seja, o modo, o processo ou a estratégia utilizados para abordar a tarefa; neste último caso, recomenda-se uma re-análiseAvaliação dos planos de ataque executados:

> *Felizmente o docente se aproximou e nos orientou quanto ao processo de resolução, o que certamente levou a reconsiderar o produto da atividade intelectual realizada para determinar falhas ou erros.*

> *Finalmente o docente uniu-se com o conjunto de alunos e estabeleceu uma conversa para recolher ideias, critérios, opiniões dos alunos a respeito da atividade realizada em aula. No entanto, o docente mencionou a evidente inter-relação e articulação dos processos metacognitivos e cognitivos, durante a atividade de resolução. O docente fez alusão a certas condutas psíquicas que denotam desqualificação e desvalorização da capacidade de raciocínio quando, por certas circunstâncias, não se consegue a solução a um determinado problema, deve evitar-se conceber tais preocupações negativas e contraproducentes (Edgar, Aula N. 26)*

No Gráfico 9 pode-se apreciar o conjunto de interações que serve de base ao processo de socialização do conhecimento:

Gráfico 9



Depois que os alunos trabalham com algum problema, se organiza a Colocação em Comum, uma atividade à qual se incorporam todos os participantes, destinada a propiciar o intercâmbio de experiências, abordagens, pontos de vista, procedimentos, formas de abordar, métodos, soluções, etc. geradas por cada um dos Solucionadores no processo de busca da solução do problema levantado.

> *"... uma vez resolvido ou pelo menos encontrado vários planos de ataque, o docente fazia perguntas de reflexão sobre o que se aprendia ou o interessante que cada um observava ao resolver problemas e isto ficou gravado pelo professor em algumas fitas do reprodutor". (Victor, Aula Nro. 22).*

Assim, depois do Tempo para Trabalhar, realiza-se uma reunião em Grupo Completo para compartilhar as experiências individuais; esta reunião é presidida pelo professor que, atuando simultaneamente como facilitador e mediador de processos, conduz uma Discussão Guiada na qual, através de perguntas convenientemente formuladas, propicia a auto-reflexão, orientada a extrapolar e generalizar o feito e aplicado durante a atividade resolutiva; Assim, cada aluno pode transformar seu confronto individual com o problema em uma experiência pessoal de aprendizagem.

Para isso é necessário gerar um clima de sala de aula no qual: (a) se estimule o sentido de igualdade e não de competência; (b) se propicie o respeito às ideias dos outros como um assunto valioso; (c) se impulsione o trabalho cooperativo, (d) se recorra às expressões e vivências dos participantes; e (e) se estimule permanentemente a reflexão e a tomada de consciência.

O propósito da Colocação em Comum é que os alunos compartilhem suas vivências (o que aprendeu, como o resolveu, o que lhe pareceu o problema?, etc.) como Solucionadores e possam converter o processo de resolução do problema em uma experiência de aprendizagem. Para isso é imprescindível fazer com que o aluno se dê conta do que fez (como?, por que?, para que?) durante o processo de busca da solução; isto é possível quando quem trabalha o problema desenvolveu um alto nível de consciência metacognitiva, mas é potencializado quando vários Solucionadores compartilham suas respectivas experiências individuais; neste caso o intercâmbio e a interação social proporcionam a cada um dos participantes a possibilidade de se dar conta e de contextualizar o que fez e refletir sobre isso.

Esta é a base da aprendizagem através da resolução de problemas; com efeito, durante a partilha das respostas às seguintes questões, entre outras: como foi abordado o problema? , a que categoria pertence? é possível generalizar o método?

> *"... uma vez resolvido ou pelo menos encontrado vários planos de ataque, o docente fazia perguntas de reflexão sobre o que se aprendia ou o interessante que cada um observava ao resolver problemas e isto ficou gravado pelo professor em algumas fitas do reprodutor". (Victor, Aula Nro. 22).*
>
> *"Depois de passar algum tempo, o professor começou a perguntar o que cada aluno tinha respondido..."(Cristóvão, Aula Nro. 3).*
>
> *"Depois começou a perguntar a cada aluno como o tinha resolvido e me dei conta que cada um de meus companheiros lhe havia pensado de formas diferentes, outros coincidiam com a abordagem, mas no total é verdade o que diz Fredy que "há várias formas de colocar um problema"; o qual o tomarei bastante em consideração (Cristóbal, Aula Nro. 3).*
>
> *"Quando todos concluímos o nosso trabalho foi feita uma breve resenha de como cada um de nós tinha encaminhado o problema, claro baseando-nos no Modelo de Polya" (Erlinda, Aula No. 5)*
>
> *"Depois de aproximadamente 60 minutos procedeu-se a fazer um comentário grupal do problema observando a forma como cada um atacou o problema e se evidenciou mais uma vez o arraigado de alguns esquemas cognitivos que temos: 'equações, sistemas de equações'" (Victor, Aula No. 14).*

Se o professor tentou resolver o problema, comportando-se como um participante a mais, então, durante a sessão de reflexão coletiva sobre o que cada um tenha feito, também pode compartilhar sua experiência com a de cada um dos demais participantes:

> *"cada um expunha (em voz alta perante o resto dos companheiros) como havia resolvido o problema"; desta maneira é possível dar-se conta de que "não há uma só forma de colocar-se um problema senão várias formas" (Cristobal, Aula Nro. 3).*

Durante a Partilha, o facilitador desempenha o papel de mediador de processos cognitivos: chama a atenção sobre aspectos relevantes da atividade resolutiva, propicia a negociação de significados, convida à comparação das abordagens individuais e à tomada de consciência das perspectivas adoptadas por cada um dos participantes.

Alguns dos aspectos sobre os quais se exerce a reflexão são, entre outros, as heurísticas empregadas, os processos afetivos e as estratégias de trabalho. O professor pode começar por fazer perguntas gerais: *como o fizeram? Como se sentiram durante o processo? Como abordaram o problema? Qual é a sua opinião sobre a estratégia utilizada?* Isto torna possível que vários alunos compartilhem com seus companheiros o que têm feito, o que permite conhecer diversas formas de enfocar o problema e, ao mesmo tempo, identificar possíveis dificuldades confrontadas pelos alunos.

Esta interação social é fonte de aprendizagem e pode constituir um evento que contribua para aumentar a habilidade como solucionador de problemas de cada um dos participantes. Com efeito, quando se compartilham as experiências pessoais adquiridas durante o processo de busca de solução de algum problema, cada resolvedor pode tomar consciência plena das características de seu próprio desempenho; Ao compará-lo com o de seus companheiros se dará conta de que provavelmente estes adotaram outros pontos de vista e outras maneiras para enfocar o problema.

Também pode observar que são diversos os planos de ataque que os alunos têm desenhado e que os erros cometidos por ele não foram os mesmos de seus companheiros; da mesma forma, as reflexões sobre os modos pessoais de resolver problemas que estes fazem, agem sobre ele como "vozes interiores", permitindo que o momento de compartilhar grupalmente as experiências se converta em um reforçador da atividade metacognitiva individual.

Finalmente, durante a discussão grupal correspondente à Colocação em Comum se reflete sobre:

1. *A forma como cada um atacou o problema*: desta forma é possível observar tendências ou preferências para atacar problemas, que sejam predominantes no grupo.

> *"Problemas continuaram a ser resolvidos em grupo e no final foram recolhidas opiniões sobre como nos sentimos diante do problema e nossas impressões sobre por que sim ou por que não se resolvia o problema" (José Gregório, Aula Nro. 23).*

2. *O processo seguido para resolver o problema*: com o qual se procura que os participantes realizem uma visão retrospectiva do que cada um fez.
3. *O método aplicado:* para ver se pode ser aplicado em outros problemas da mesma Aula; ou seja, estudar em que medida o método utilizado para resolver um problema determinado é aplicável ou utilizável na resolução de outros problemas que sejam do mesmo tipo, embora aparentemente sejam diferentes.
4. *As abordagens preferidas para resolver problemas:* não ter consciência dos mesmos pode gerar bloqueios ao resolver problemas específicos:
5. *"Temos muito arraigado a abordagem algébrica para resolver problemas (uso predominante de equações) sem levar em conta outras possíveis abordagens (Víctor, Aula Nro. 15).*

REFERENCIAS

Blanco Nieto, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon (Revista de la S.A.E.M. THALES) 25*; 49-60.

Blanco Nieto, L. J. (1996). *Concepciones y Creencias sobre la "resolución de problemas" de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares.* [Disponible en: http://www.terra.es/personal/ljblaco/pag3e.html]. Consultado el 04/04/04: 18:43 PM.

Callejo, Mª. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea S. A. de Ediciones.

D'Amore, Bruno. (2003) *Elementos de Didáctica de la Matemática*. México: Editorial Iberoamérica. (La edición original es de 1999: *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora Editrice).

González, F. (1993/96). Acerca de la Metacognición. *Revista Paradigma, XIV-XVII*. [Disponible en: http://cidipmar.fundacite.arg.gov.ve/volumenes/articulo1p.html]

González, F. (1995, Octubre). Algunas Ideas en Torno a la Mediación Cognitiva. *Colecciones CIEAPRO, 2*; 39-59.

González, F. (1996). El Sistema de Mediación Tutorial. *Enfoques (Revista de Investigación del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro), 1* (2, Enero-Julio): 56-71.

González, F. (1997). *Procesos Cognitivos y Metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos.* Tesis Doctoral No Publicada. Valencia (Venezuela): Universidad de Carabobo.

González, F. (1998). Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos. Zetetiké, 6(9).

González, F. (2000) Agenda latinoamericana de investigación en educación matemática para el siglo XXI. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (México), 12 (1); 107/128.

González, F. (2003a). Matemática, Educación y Ciudadanía. Conferencia pronunciada en el *II Encontro Internacional de Ensino da Matemática,* Universidad Luterana del Brasil (ULBRA), Campus Canoas, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil; 6, 7 y 8 de Noviembre de 2003.

González, F. (2003b). Cognición Matemática: ¿Modelo de Inteligencia o para el Desarrollo de la Inteligencia? *Acta Scientiae* (Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad Luterana del Brasil) 2003/1, 7-33.

González, F. (2003c). La Dinámica P^2MA: Una opción didáctica frente a la enseñanza tradicional de la Matemática. *Anais do II Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Universidade Luterna do Brasil (ULBRA): Canoas-RS, Br. 6 al 8 de noviembre de 2003. Conferencia de Inauguración. Entregado para publicación en la Revista Investigación y Postgrado. UPEL (Caracas, Venezuela)

González, Fredy. Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de matemática. **SAPIENS**, Caracas , v. 11, n. 1, p. 47-59, jun. 2010 . Disponible en <http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1317-58152010000100004&lng=es&nrm=iso>. accedido en 02 jul. 2024.

Guzmán, M. De (1983). *Algunos Aspectos Insólitos de la Actividad Matemática*. [Disponible en: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/aspectosinsolitos/aspectosinsolitos.html] Consultado el 04 de Abril de 2004, a las 18:10 PM.

Guzmán, M. De (1991). *Para Pensar Mejor*. Barcelona (España): Editorial Labor, S. A.

Guzmán, M. De (1996). El Papel del Matemático en la Educación Matemática. (*Conferencia en el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8 (Sevilla 1996), publicada en las Actas del Congreso, Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES",* *Sevilla, 1998).* [Disponible en: http://usuarios.bitmailer.com/mdeguzman/guzmanpa/papeldelmatematico.htm] Consultado el 05/04/04; 09:19 am

Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*; 519-524.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En D. A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig*. New York: MacMillan Publishing Co., 3-38.

Kilpatrick, J. Rico, L y Sierra, M (Editores). (1994). *Educación Matemática e Investigación*. Colección Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis.

Lester, F. K. (1994) Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education. 25 (6),* 660-675.

Martínez P., O. (2003). *El Dominio Afectivo en la Educación Matemática: aspectos teórico-referenciales a la luz de los Encuentros Edumáticos.* Trabajo de Ascenso No Publicado, presentado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro"; Turmero, Edo. Aragua, Venezuela.

Polya, G. (1975). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Editorial Trillas. [Traducción al Castellano hecah por J. Zugazagoitía del original de 1945 *How to Solve it?*. editado en Princenton, NJ, por Princenton University Press].

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada (España): Editorial COMARES. Colección MATHEMA, Nº 6.

Rocerau, Mª C., Valdez, G., Oliver, Mª, Vilanova, S., Jolis, Mª, (2002, Octubre 23 al 27). Factores Afectivos, Socio-Culturales y Heurísticos en la Resolución de Problemas Matemáticos. Ponencia presentada en el *2do. Encuentro Latinoamericano (6to. Encuentro Argentino-Cubano) Misión Educar.* Mar del Plata. Disponible en: http://www.mision-futuro.com/www/congresos/cuba/014Octubre2002.doc. Consultado el: 23 de Febrero de 2004. 05:51 PM

Ruiz Bolívar, C. (1988). La Estrategia Didáctica Mediadora: una alternativa para el desarrollo de procesos en el aula. *Investigación y Postgrado, 3* (2), 57 -73.

Ruiz Bolívar, C. (1998). La Estrategia Didáctica Mediadora: ocho años después. *Investigación y Postgrado, 13* (1), 15 – 37.

Santos, L. M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos-Trigo, M. (2023). Trends and Developments of Mathematical Problem-Solving Research to Update and Support the Use of Digital Technologies in Post-confinement Learning Spaces. In: Toh, T.L., Santos-Trigo, M., Chua, P.H., Abdullah, N.A., Zhang, D. (2023), Chapter 2, p. 7-32.

Schoenfeld, A. (1985a). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985b). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving:*

Multiple Research Perspectives. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Assocciates, Publishers. 361-380.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition an Sense-Making in Mathematics. En D. Grows, Ed. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan; Capítulo 15, pp 334-370.

Stacey, K. y Scott, N. (2000). Orientation to deep structure when trying examples: a key to successsful problem solving. En: J. Carrillo Yáñez & L. C. Contreras González. *Resolución de Problemas en los Albores del Siglo XXI: Una visión Internacional desde Múltiples Perspectivas y Niveles Educativos*. Huelva (España): Hergué, Editora Andaluza; Capítulo 4, 119-146

Suárez Alemán, C. (2003). Aplicaciones de la historia de las matemáticas en el aula. *Épsilon, Nº 56*, 259-285.

Toh, T.L., Santos-Trigo, M., Chua, P.H., Abdullah, N.A., Zhang, D. (eds) Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education. Springer, Singapore. 2023. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2

Wittrock, M (1986). Student´s Thought Processes. En.M. C. Wittrock (Ed). *Handbook of Research on Teaching* (Third Edition) New York: Macmillan Publishing Company. Part 2, Chapter 10; 297 – 314.

Chua, P. H., & Toh, T. L. (2022). Developing problem posing in a mathematics classroom. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 15(1), 99–112.

Favier, S. (2022). A characterization of the problem solving processes used by students in classroom: Proposition of a descriptive model. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 15(1), 35–53.

Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cropley, D. H. (2019). Homo Problematis Solvendis—Problem-solving Man. Springer. https://doi. org/10.1007/978-981-13-3101-5_13

Liljedahl, P., & Santos-Trigo, M. (Eds.). (2019). Mathematical problem solving, current themes, trends, and research. ICME-13 monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-104 72-6_4

Histórico

Recebido: 01 de junho de 2024.
Aceito: 15 de setembro de 2024.
Publicado: 31 de dezembro de 2024.

Como citar – ABNT

GONZÁLEZ, Fredy Enrique. Como Desenvolver Aulas de Matemática Centradas na Resolução de Problemas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 52, e2024002, 2024.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024002.id729

Como citar – APA

González, F. E. Como Desenvolver Aulas de Matemática Centradas na Resolução de Problemas. (2024). Título. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (52), e2024002.
https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024002.id729

Número temático organizado por

Héctor José García Mendoza