

Problemas de uma Operação e Problemas que usam uma Operação Aritmética

Problems of an Operation and Problems using an Arithmetic Operation

Problemas de una Operación y Problemas al usar una Operación Aritmética

Pedro Sá¹  

John Fossa²  

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que buscou responder a seguinte questão: O que é um problema de uma das operações aritméticas? Durante a pesquisa foi formulada uma distinção entre problema de uma operação e problema que usa uma operação aritmética. A comparação entre uma distinção entre problemas de uma operação e problemas que usam uma operação aritmética com uma distinção entre problemas aritméticos e problemas algébricos proposta pelos autores em 2008 indicou, por meio da análise da sentença natural de cada tipo de problema, que os problemas aritméticos são sempre problemas de uma operação e que os problemas que usam uma operação nem sempre são algébricos, mas todos os algébricos usam uma ou mais operações aritméticas. Além disso, foi percebido que questões que envolvem as operações aritméticas podem, a partir da sua sentença natural, ser classificadas sobre perspectivas distintas.

Palavras-chave: Sentença natural de um problema; Problemas de uma operação; Problemas que usam uma operação; Problemas aritméticos; Problemas algébricos.

ABSTRACT

The present work presents results originating in research that sought to answer the following question: What is an arithmetic operation problem? During the study we formulated a distinction between arithmetic operation problems and problems that use an arithmetic operation. This distinction was compared with that between arithmetic problems and algebra problems proposed by the authors in 2008. By analyzing the natural language sentences of each type of problem, the investigation indicated that arithmetic problems are always operation problems and that, although problems that use an operation are not always algebra problems, all algebra problems use one or more arithmetic operations. Moreover, it was found that questions involving arithmetic operations can be classified, with regard to their natural language sentences, according to distinct perspectives.

Keywords: Natural language sentence of a problem; Operation problems; Problems that use an operation; Arithmetic problems; Algebra problems.

RESUMEN

Este Trabajo presenta los resultados de una investigación que buscó responder a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el problema con una de las operaciones aritméticas? Durante la investigación se formuló una distinción entre un problema de operación y un problema que utiliza una operación aritmética. La comparación entre una distinción entre problemas de una operación y problemas que utilizan una operación aritmética con una distinción entre problemas aritméticos y problemas algébricos propuesta por los autores en 2008 indicó, a través del análisis de la oración natural de cada de cada tipo de problemas, que los problemas aritméticos son siempre problemas de una operación y que los problemas que utilizan una operación no siempre son algebraicos, sino que todos los algebraicos utilizan una o más operaciones aritméticas. Además, se observó que las preguntas que involucran operaciones aritméticas pueden, según su oración natural, clasificarse bajo diferentes perspectivas.

Palabras clave: Oración natural de un problema; Problemas de una operación; Problemas que utilizan una operación; Problemas aritméticos; Problemas algebraicos.

1 E-mail: pedro.sa@uepa.br

2 E-mail: jfossa03@gmail.com

INTRODUÇÃO

O assunto normalmente denominado de “problemas envolvendo as quatro operações” é um dos que mais comumente é encontrado em trabalhos de pesquisa e em documentos curriculares relacionados com a matemática escolar do ensino fundamental, como sendo um que apresenta mais dificuldades para os estudantes. De fato, as pesquisas sobre o assunto datam dos anos 90 do século passado e já têm um volume significativo. Podemos mencionar, a título de exemplo, os de Puig (1988), Filloy e Rojano (1989), Martínez (1995), Linchevski e Hercovics (1996), etc.

Ainda em relação à referida problemática, Sá e Fossa (2008 e 2021) apresentaram considerações sobre tipos distintos de situações problemas e os seus níveis relativos de dificuldade para o estudante. Propunham definições para “problemas aritméticos” e “problemas algébricos”, que nos proporcionam uma maneira eficaz de distinguir entre essas importantes categorias.

No presente trabalho, aprofundamos a nossa análise por identificar o conceito de “problema de operação aritmética”, em contraste a um problema que usa uma operação aritmética, e comparar tais problemas com os referidos problemas aritméticos e algébricos dados em Sá e Fossa (2008 e 2021).

A DISTINÇÃO ENTRE PROBLEMAS ARITMÉTICOS E ALGÉBRICOS

Como já mencionamos, a pesquisa sobre as situações problemas tem um volume considerável de trabalhos, que procuram determinar os fatores que tornam um problema mais ou menos difícil para os discentes de diferentes níveis de escolaridade e outros que visam entender as relações entre a aritmética, a álgebra e a respectiva transição entre as mesmas. A importância e o estado inconclusivo desses estudos foram destacados em Lins e Gimenez (1997, p. 113) ao apontarem, da seguinte maneira, para a necessidade de ter uma compreensão maior entre os dois referidos campos da matemática escolar:

O que precisamos fazer é entender de que modo álgebra e aritmética se ligam, o que elas têm de comum. Feito isso teremos encontrado uma verdadeira raiz, o que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única.

Sá e Fossa (2008) foi apresentaram a distinção entre problemas aritméticos e algébricos. A distinção tomou como ponto de partida a manifestação de alguns autores que se propuseram a distinguir entre problemas aritméticos e algébricos, como é exemplificado no Quadro 1.

Quadro 1 – Caracterização problemas aritméticos e algébricos segundo autores

Autor	CARACTERIZAÇÃO	ANALISE DA CARACTERIZAÇÃO
FTD (SD)	<i>“nos problemas de aritmética, ordinariamente procuram-se certos números desconhecidos, por meio de outros conhecidos”</i>	Discordam da afirmação feita pelo autor devido ao fato de que nos problemas ditos algébricos, também operamos com quantidades conhecidas para determinar quantidades desconhecidas.

Puig (1988)	<i>um problema será um problema aritmético sempre que os conceitos, conhecimentos ou recursos não estritamente aritméticos dos contextos que aparecem no enunciado não sejam decisivos na hora de resolver o problema” (p. 19).</i>	Essa caracterização dos problemas aritméticos também não é satisfatória, pois não apresenta critério(s) que permita(m) decidir de maneira operacional se um dado problema é ou não aritmético a ainda tem uma circularidade na sua apresentação.
-------------	---	--

Fonte: Sá e Fossa (2008)

Os autores defenderam que, para os propósitos da Educação Matemática, seria mais importante identificar o que distingue a álgebra da aritmética em vez de tentar fazer uma caracterização isolada do que seja a aritmética. Por isso, buscaram elaborar uma conceitualização do problema a partir da seguinte pergunta: qual a diferença/relação entre um problema algébrico e um problema aritmético?

Para enveredar nessa abordagem, Sá e Fossa (2008) procuraram esclarecimentos provenientes da História da Matemática, analisando, por exemplo, procedimentos matemáticos das civilizações egípcia e babilônica, bem como a distinção dos gregos antigos entre a “logística” e a “aritmética”. Para os propósitos do presente resumo, talvez seja oportuno nos limitar a revisitar a origem da nossa palavra álgebra na matemática árabe da Idade Média.

Na exposição de Roque (2012, p. 196):

O termo “álgebra” tem origem em um dos livros árabes mais importantes da Idade Média: *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarizmi. A palavra *al-jabr*, ou “álgebra”, em árabe, era utilizada para designar “restauração”, uma das operações usadas na resolução de equações. Já a *al-muqabala* queria dizer algo como “balanceamento”. Trata-se, de fato, de duas etapas do método para resolver equações.

Isto indica que a álgebra resolve equações pela transposição e pelo cancelamento de seus termos. Assim, Sá e Fossa (2008) propuseram, basicamente, que um problema seria aritmético caso sua resolução exija apenas a execução de uma ou mais operações aritméticas, enquanto seria algébrico caso exija o uso de propriedades da igualdade (*al-jabr*, e *al-muqabala*).

Assim, após analisarem os problemas envolvendo as 4 operações com números naturais e fracionários, Sá e Fossa (2008) agruparam os problemas envolvendo uma só operação em dois grupos:

1º grupo—Os problemas em que a pergunta/incógnita está isolada num dos membros da igualdade após sua modelação (tradução dos dados para linguagem simbólica). Nestes problemas, normalmente, a igualdade é utilizada para indicar o resultado da operação realizada, ou seja, a igualdade é usada para representar transformações ou resultados. As questões a seguir são exemplos de problemas do 1º grupo:

- a) Tinha R\$ 50,00 e ganhei R\$ 20,00 num sorteio. Com quanto fiquei? (Neste problema a modelação é $50 + 20 = ?$);
- b) Um vendedor possuindo 150 metros de fio de telefone fez uma venda de 80 metros. Quantos metros de fio restaram ao vendedor após a venda? (Neste caso a modelação do problema é $150 - 80 = ?$);

- c) Um cinema possui 15 fileiras com 18 cadeiras cada. Não sendo permitido que se assista filme em pé, qual é o número máximo de pessoas que podem assistir um filme por sessão neste cinema? (Neste caso a modelação é $15 \times 18 = ?$);
- d) Tenho 1200 bombons para distribuir igualmente em cinco caixas. Quantos bombons devo colocar em cada caixa? (Neste problema a modelação é $1200 \div 5 = ?$).

Desta forma, para um problema do 1º tipo, está associada uma das seguintes expressões: 1) $c + b = ?$; 2) $c - b = ?$; 3) $c \times b = ?$ e 4) $c \div b = ?$. Nestes problemas, a operação é escolhida diretamente a partir de sua conotação semântica, ou seja, da transformação ocorrida com os dados que está indicada pelo enunciado do problema.

2º grupo—Os problemas em que a pergunta/incógnita não está isolada em um dos membros da igualdade após sua modelagem. Nestes problemas, a igualdade é utilizada para indicar a relação de equilíbrio exigida entre os dados, ou seja, a igualdade é utilizada para indicar equilíbrio. As questões a seguir são exemplos de problemas do 2º grupo:

- a) Meu pai tinha certa quantia no seu cofre. Depois de guardar a quantia de R\$25,00 passou a ter R\$ 78,00. quanto papai tinha no início? ($? + 25 = 78$);
- b) Fui ao comércio com uma certa quantia. Após gastar R\$ 156,00 verifiquei que ainda me restavam R\$ 95,00. Com quanto cheguei ao comércio? ($? - 156 = 95$);
- c) Um comerciante possuía 2000m de arame, após vender alguns metros verificou que ainda tinha 1890m de arame. Quantos metros de arame o comerciante vendeu? ($2000 - ? = 1890$);
- d) O triplo de uma certa quantidade é 120. Qual é a quantidade? ($3 \times ? = 120$);
- e) Distribui 28 brinquedos entre algumas crianças. Cada criança recebeu 4 brinquedos. Quantas crianças participaram da distribuição? ($28 \div ? = 4$);
- f) Uma certa quantidade de brinquedos foi distribuída igualmente entre 9 crianças. Cada criança recebeu 5 brinquedos. Qual a quantidade de brinquedos que foi distribuída? ($? \div 9 = 5$).

Para um problema do 2º tipo, está associada uma das seguintes expressões: 1) $? + a = b$, 2) $a + ? = b$, 3) $? - a = b$, 4) $a - ? = b$, 5) $a \times ? = b$, 6) $? \times a = b$, 7) $a \div ? = b$ e 8) $? \div a = b$. Neste tipo de problema, ao contrário do que acontece com os de 1º tipo, a escolha da operação é feita com base na propriedade da operação inversa. O estudo de Nesher, Greeno e Riley (1982) mostrou que os problemas aditivos do 2º tipo são mais difíceis para os alunos.

O motivo desta dificuldade pode está no fato de que estes problemas são apresentados, normalmente, após o ensino de cada uma das operações fundamentais e que as mesmas são apresentadas com grande apelo ao seu significado semântico, não destacando as relações entre as operações.

Dado tudo isso, Sá e Fossa (2008) propuseram as seguintes definições:

Definição 1. **Problema Aritmético é aquele problema que, em sua resolução operacional, não são usadas de maneira implícita ou explícita as propriedades da igualdade.**

Exemplo: Um cinema tem 25 fileiras de 18 cadeiras cada. Não sendo permitido assistir filme em pé, quantas pessoas são necessárias para lotar o cinema três vezes?

Os problemas aritméticos podem ser divididos em: **simples e combinados**.

Definição 2. **Problemas aritméticos simples são aqueles problemas aritméticos que só envolvem uma operação na sua resolução.**

Exemplo: Uma caneta custa R\$2,00. Quanto custam 7 dessas canetas?

Definição 3. Problemas aritméticos combinados são aqueles problemas aritméticos que envolvem duas ou mais operações ou a repetição de uma mesma operação na sua resolução.

Exemplo: Uma pessoa foi à feira com R\$50,00. Comprou R\$5,00 de frutas e R\$13,00 de verduras. Quanto lhe sobrou do dinheiro?

Definição 4. **Problema algébrico é aquele problema em que, na sua resolução operacional, são usadas de maneira explícita ou implícita as propriedades operacionais da igualdade.**

Exemplo: Um número somado com seu dobro é 36. Qual é o número?

Os problemas algébricos podem ser dos seguintes tipos: **imediatos simples, imediato combinado e estruturado**.

Definição 5. **Os problemas algébricos imediatos simples são aqueles problemas algébricos que, na sua resolução, é usada apenas uma operação sem o uso explícito de uma variável ou incógnita.**

Exemplo 1: Já li 125 páginas de um livro de 438 páginas. Quantas páginas ainda faltam eu ler para terminar a leitura do livro?

Exemplo 2: Uma dúzia de canetas custa R\$36,00. Quanto custa uma dessas canetas?

Definição 6. **Os problemas algébricos imediatos combinados são aqueles problemas algébricos em que, na sua resolução operacional, são efetuadas mais de uma operação sem o uso explícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples e problemas algébricos imediatos.**

Exemplo 1: O dobro de minha idade mais cinco anos equivale a cem anos. Qual é a minha idade?

Exemplo 2: Uma dúzia de canetas custa R\$36,00. Quanto custam sete dessas canetas?

Pois, o mesmo pode ser decomposto nos seguintes problemas:

1. Uma dúzia de canetas custa R\$36,00. Quanto custa uma dessas canetas? (que é algébrico imediato simples).
2. Uma caneta custa R\$3,00. Quanto custam sete canetas? (que é aritmético).

Definição 7. **Os problemas algébricos estruturados são aqueles problemas algébricos que, na sua resolução, é necessário o uso de variáveis ou incógnitas, para que fique mais compreensível a resolução.**

Exemplo: Repartir a quantia de R\$210,00 entre três pessoas de tal modo que o segundo receba R\$50,00 a mais que primeiro e que o terceiro receba R\$ 80,00 a mais que o segundo.

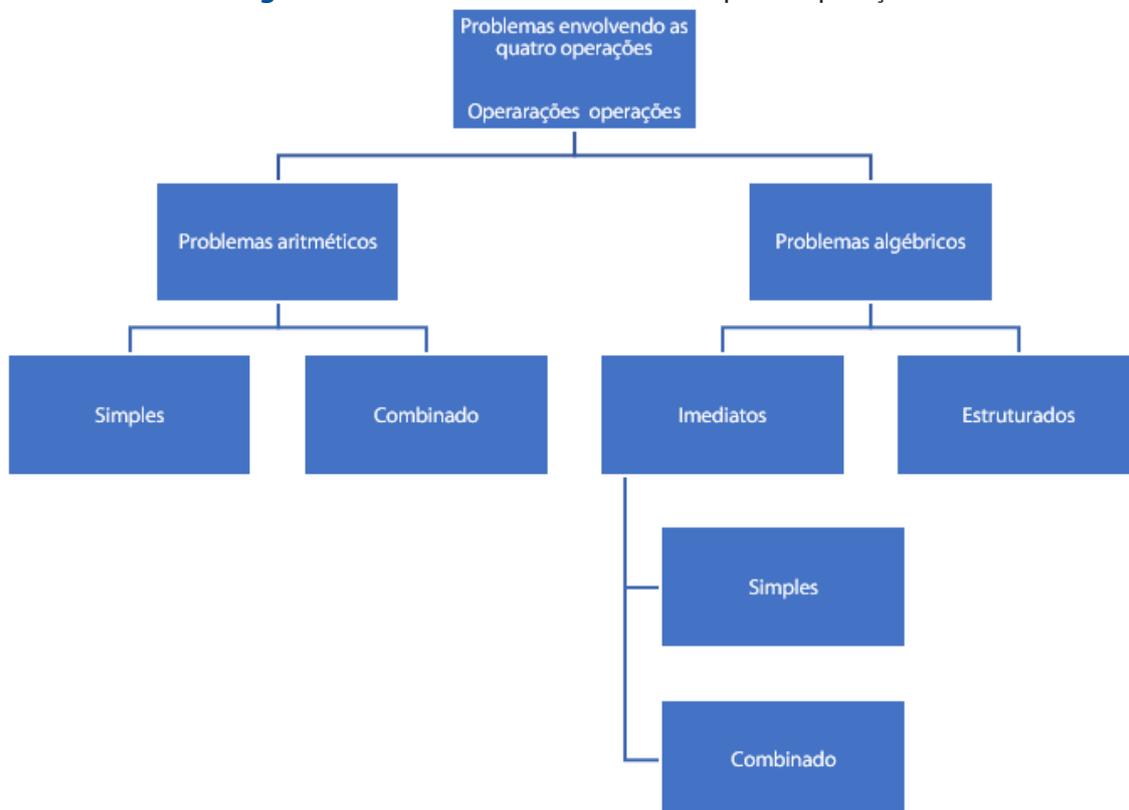
Dos exemplos apresentados acima podemos concluir que os problemas com as quatro operações produzem tanto problemas aritméticos quanto problemas algébricos. Quanto a modelação dos problemas aritméticos e algébricos podemos afirmar que:

- **A modelação de um problema aritmético sempre resulta numa expressão em que o valor desconhecido fica isolado no segundo membro da igualdade;**
- **A modelação de um problema algébrico sempre resulta numa expressão em que o valor desconhecido não fica isolado.**

Levando essas ideias para ambientes mais gerais como o de um anel $(A, +, \cdot)$, temos que uma expressão do tipo $(a \cdot b) + d = x$, com $a, b, d, x \in A$, corresponde a expressão de uma questão aritmética, enquanto $(a \cdot x) + b = d$, com $a, b, d, x \in A$ e x desconhecido, corresponde a uma expressão de um problema algébrico.

Os problemas envolvendo as operações fundamentais da aritmética podem ser visualizados por meio da Diagrama 1.

Diagrama 1 – Problemas envolvendo as quatro operações



Fonte: Sá e Fossa (2008)

Realizando a modelação dos problemas em relação a cada umas das operações aritméticas, obtemos o Quadro 2.

Quadro 2 – Modelação de problemas aritmético envolvendo uma operação aritmética

PROBLEMA DA OPERAÇÃO	MODELAÇÃO
Adição	$b + c = ?$
Subtração	$b - c = ?$
Multiplicação	$b \times c = ?$
Divisão	$b \div c = ?$

Fonte: Elaboração dos autores

O Quadro 2 sublinha o fato de que as sentenças de modelação dos problemas aritméticos têm a característica de ter a quantidade desconhecida isolada num dos membros de sentença.

O Quadro 3 apresenta as sentenças de modelação dos problemas algébricos com uma operação.

Quadro 3 – Modelação de problemas algébricos envolvendo uma operação aritmética

PROBLEMA DA OPERAÇÃO	MODELAÇÃO
Adição	$a + ? = b$ $? + a = b$
Subtração	$a - ? = b$ $? - a = b$
Multiplicação	$a \times ? = b$ $? \times a = b$
Divisão	$a \div ? = b$ $? \div a = b$

Fonte: Elaboração dos autores

O Quadro 3 sublinha o fato de que as sentenças de modelação dos problemas algébricos envolvendo uma operação têm a característica de não ter a quantidade desconhecida isolada num dos membros da sentença de modelação.

As consequências da distinção entre problema aritmético e problema algébrico apresentadas por Sá e Fossa (2008) estão registradas no Quadro 4.

Quadro 4 – Consequências da distinção de problema aritmético e algébrico

CONSEQUÊNCIA	DESCRIÇÃO
1ª	É possível explicar a diferença de dificuldade entre os problemas aditivos de mesmo tipo.
2ª	Muitos problemas que são apresentados aos alunos das séries iniciais como problemas aritméticos não são aritméticos, mas sim problemas algébricos imediatos.
3ª	Os problemas envolvendo a operação de subtração de números naturais que são denominados de problemas de “complemento” e “comparação” são na realidade problemas algébricos imediatos,
4ª	Muitos dos problemas envolvendo operações com frações que são apresentados aos alunos das séries iniciais como problemas aritméticos não são aritméticos, mas sim problemas algébricos imediatos.
5ª	Os problemas envolvendo frações podem ser vistos em dois grupos, o dos aritméticos e o dos algébricos, ou seja:
6ª	Os problemas envolvendo o conceito de porcentagem também podem ser agrupados em problemas
7ª	Os problemas de cálculo de razão em duas grandezas são aritméticos.
8ª	Os problemas envolvendo proporção são algébricos.

Fonte: Sá e Fossa (2008)

As consequências registradas no Quadro 4 certamente podem ser ampliadas e revistas à medida que outros estudos sobre o tema sejam realizados.

Em Sá e Fossa (2021), nós revisamos as definições de problemas aritméticos e problemas algébricos propostas no trabalho de 2008. A revisão se deu com base nas características observadas sobre o isolamento, ou não, do valor desconhecido nas sentenças de modelação dos problemas aritméticos e algébricos, respectivamente.

As definições propostas foram as seguintes.

DEFINIÇÃO 8. Um problema envolvendo uma operação aritmética é dito *aritmético* quando o valor desconhecido fica isolado num dos membros da sua sentença de modelação.

DEFINIÇÃO 9. Um problema envolvendo uma operação aritmética é dito *algébrico* quando o valor desconhecido não fica isolado num dos membros da sua sentença de modelação.

Essa revisão também alterou a definição de problema algébrico imediato e de problema algébrico estruturado por meio das seguintes definições.

DEFINIÇÃO 10. Um problema algébrico é dito *algébrico imediato* quando na sua resolução operacional não há necessidade de realizar operações com a quantidade desconhecida da sentença de modelação.

DEFINIÇÃO 11. Um problema algébrico é dito *algébrico estruturado* quando na sua resolução operacional há necessidade de realizar operações com a quantidade desconhecida da sentença de modelação.

As definições revisadas são equivalentes às anteriores, mas fazem com que a identificação dos problemas aritméticos e algébricos seja mais fácil de realizar, pois basta observar o isolamento ou não da quantidade desconhecida após a elaboração da sentença de modelação de um dado problema envolvendo operações aritméticas.

Na próxima seção do presente trabalho, apresentaremos uma definição de “problema de uma operação aritmética” e consequências da mesma.

OS PROBLEMAS DE UMA OPERAÇÃO ARITMÉTICA

Nos livros didáticos e, em consequência, na maioria das aulas destinados aos anos iniciais do ensino fundamental, após o estudo das operações fundamentais com os números naturais, é comum encontrarmos uma seção dedicada a resolução de problemas envolvendo as operações estudadas. Os problemas que aparecem nessas seções sofreram variações significativas de metade do século passado até os dias atuais. Em Gomes e Sá (2001), encontramos um estudo das variações ocorridas nas questões envolvendo as operações com naturais mostrando que as questões sobre esse assunto podem ser divididas em dois grandes grupos:

- **Os problemas envolvendo as operações com naturais;**
- **As questões acerca das propriedades das operações com naturais.**

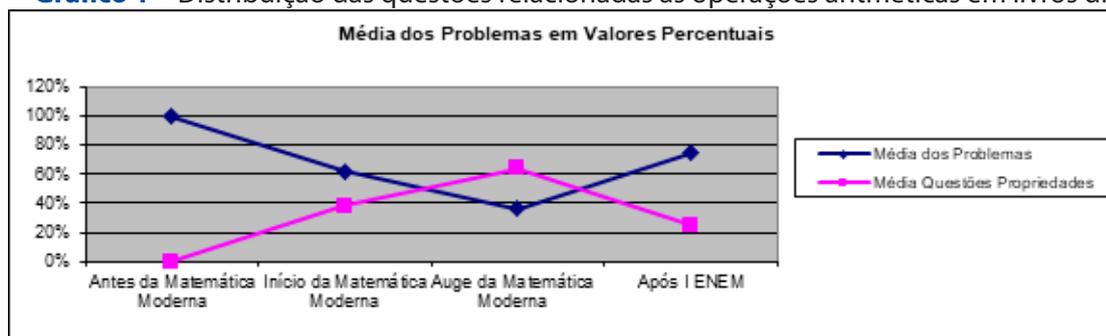
No estudo em questão, foram analisados 21 livros destinados aos anos que equivalem hoje ao 6º ano do ensino fundamental, cobrindo o período de 1951 a 2000. Esse período foi dividido em quatro épocas a saber:

- **Antes da Matemática Moderna:** período que foi de 1951 a 1960;
- **Início da Matemática Moderna no Brasil:** período que foi de 1961 a 1970;
- **Auge da Matemática Moderna no Brasil:** período que foi de 1971 até o I Encontro Nacional de Educação Matemática (1987);
- **Após o I ENEM:** período que foi de I ENEM a 2000.

A análise dos livros mostrou a seguinte distribuição das médias percentuais dos problemas e das questões de propriedades.

O Gráfico 1 mostra de maneira mais explícita como se deu a variação da quantidade de problemas envolvendo as operações e as questões envolvendo propriedades das operações.

Gráfico 1 – Distribuição das questões relacionadas às operações aritméticas em livros didáticos



Fonte: Gomes e Sá (2001)

Os resultados apresentados deixam claro que, no período do Auge da Matemática Moderna no Brasil, os problemas envolvendo as operações com números naturais tiveram, nos livros didáticos, menor frequência que as questões sobre as propriedades dessas operações. A situação sofreu sensível mudança no período seguinte. Merece ser registrado que a menor ênfase sobre os problemas poderia ter ajudado a provocar o declínio da capacidade de resolver problemas com as quatro operações que foi registrado em diversos trabalhos sobre o assunto, como, por exemplo, Santos e Souza (1997). Pois, muitos dos professores atuais foram formados por escolas que seguiam à risca as recomendações da Reforma do Ensino de 1971, que era orientada pelo Movimento da Matemática Moderna, no que diz respeito ao ensino de Matemática.

Em Gomes e Sá (2001), encontramos que os problemas envolvendo o princípio multiplicativo, bem como os quebra cabeças com as operações, começam a surgir nos livros didáticos após o auge da Matemática Moderna no Brasil. Este fato provocou-nos a seguinte pergunta: **Todo problema que envolve uma operação na sua resolução é um problema da operação?**

Respondendo positivamente, temos a seguinte consequência: Os problemas de cálculo de área são de multiplicação. Respondendo negativamente, a pergunta que surge é a seguinte: **O que são os problemas das operações?**

Talvez a dificuldade esteja em responder a seguinte questão: o que é cada uma das operações fundamentais? Acreditamos que as operações podem ser vistas de dois aspectos: semântico e simbólico.

O **aspecto semântico** diz qual é a pergunta que a operação responde.

O **aspecto simbólico** nos dá o resultado da manipulação dos símbolos envolvidos na realização de cada operação. Pode ser feito, no caso de números entre 0 e 9, somente consultando a tabuada da operação, sem nenhuma interpretação.

Desse modo, ao resolver o problema “Qual é o troco que me sobra se pago R\$18,00 com uma nota de R\$50,00?”, primeiramente usamos o aspecto semântico das operações a fim de determinar qual operação deve ser usada e descobrimos que a operação que devemos utilizar é a subtração. Em seguida, usamos o aspecto simbólico para determinar o resultado da operação $50 - 18$. O aspecto simbólico permite que escolhamos entre um grande número de técnicas para obtermos o resultado procurado; vão do cálculo com dedos ao uso dos computadores, passando pelos algoritmos, cálculo mental e as calculadoras. Já o aspecto semântico exige uma certa dose de interpretação da situação e experiência com as operações e/ou mesmo técnica de conversão entre registros para que seu uso seja eficaz.

Para responder à pergunta “O que é um problema de uma operação?”, é preciso que façamos a distinção entre **problema de uma operação** e **problemas que usam uma operação** na sua solução.

Exemplo 1: Paguei uma geladeira em cinco prestações iguais de R\$58,00. Quanto custou a geladeira?

Este é um problema em que a determinação da operação é baseada somente na análise semântica do enunciado.

Exemplo 2: De uma cidade A até uma cidade B, há 3 caminhos distintos e da cidade B até a cidade C há 4 caminhos. De quantas maneiras distintas é possível ir de A até C, passando por B?

A escolha da operação neste problema não depende só da análise semântica do enunciado mais também do conhecimento, intuitivo ou formal, do princípio fundamental da contagem.

Para nós, o Exemplo 1 é um problema da operação multiplicação, enquanto o Exemplo 2 é um problema que usa a operação multiplicação na sua resolução.

Exemplo 3: Doze bananas custam R\$2,40. Quanto custa uma banana?

É um problema que usa a divisão, pois a determinação da operação não pode ser baseada somente no enunciado do apresentado.

Exemplo 4: Quero repartir igualmente 120 bombons entre 10 crianças. Quantos bombons devo dar a cada criança?

Este é um problema de divisão pois, a partir somente da análise semântica do enunciado do problema, é possível perceber a operação que deve ser realizada para responder à pergunta apresentada.

Para responder o que significa cada operação **semanticamente**, consultamos algumas enciclopédias e o *Novo Dicionário Aurélio de Língua Portuguesa* e obtivemos os resultados registrados no Quadro 5.

Quadro 5 – Significado semântico das quatro operações aritméticas

OBRA	OPERAÇÃO	SIGNIFICADO
Enciclopédia Delta Universal (1980)	Adição	“Adição é a operação que consiste em reunir duas ou mais coisas para descobrir que o seu número total”. (Vol. 1, p. 71.)
	Subtração	“Subtração é uma operação que consiste em retirar um número de coisas de outro número de coisas. Ao efetuar uma subtração queremos saber o número de coisas que restam”. (Vol. 13, p. 7431.)
	Multiplicação	“Multiplicação é uma maneira de adicionar ou somar números iguais”. (Vol. 10, p. 5514.)
	Divisão	“Divisão é uma maneira de separar um grupo de coisas em partes iguais”. (Vol. 5, p. 2602.)
Enciclopédia BARSA (1995)	Adição	“Adicionar dois números ou dois conjuntos de elementos é achar um terceiro número ou conjunto que contenha todas as unidades ou os elementos desses dois conjuntos”. (Vol. 1, p. 114.)
	Subtração	“Subtração é a operação inversa da adição, ou aquela que, dados a soma de dois números e um deles, tem por finalidade calcular o segundo”. (Vol. 1, p. 114.)
	Multiplicação	“Multiplicação é a operação em que se realiza uma adição simplificada de parcelas iguais”. (Vol. 1, p. 115.)
	Divisão	“Divisão é a operação inversa da multiplicação, ou seja, aquela que, dados o produto de dois números e um deles, tem por finalidade determinar o segundo”. (Vol. 1, p. 115.)
Novo Dicionário Aurélio de Língua Portuguesa	Adição	“Operação (Latim <i>Operatione</i>) Ato ou efeito de operar ação de um poder ou faculdade de que resulta certo efeito. Matemática Qualquer processo em que se transforma uma entidade matemática em outra”. “Total (Latim Medieval <i>Totale</i>) Que constitui ou abrange um todo; completo” “Adição (Latim <i>Additione</i>) Acrescimento, acréscimo, acrescentamento, aditamento. Matemática Soma”. “Acrescentar: ajuntar alguma coisa à outra, para torna-la maior em tamanho, número ou força”.
	Subtração	“Subtrair (Latim <i>Subtrahere</i>) Tirar às escondidas ou fraudulentamente. Tirar (nº, parcela, quantia, etc.) de outro número, parcela, quantia, etc”. “Subtração (Latim <i>Subtractione</i>) Efeito de subtrair. Aritmética Operação inversa da adição”.
	Multiplicação	“Multiplicação (Latim <i>Multiplicatione</i>) Operação elementar em que se calcula a soma de n parcelas iguais a um número”. “Multiplicar (Latim <i>Multiplicare</i>) Aumentar em número ou importância, tornar maior. Aritmética Fazer uma multiplicação”.
	Divisão	“Divisione (Latim <i>Divisione</i>) Aritmética. Operação que tem por fim determinar o maior número de vezes que um número chamado dividendo contém outro chamado divisor”.

Fonte: Elaboração dos autores

De posse do exposto, propomos as seguintes interpretações semânticas para cada uma das 4 operações fundamentais com os números naturais³:

- **Adição:** operação que, dadas duas quantidades que representem a mesma grandeza, visa responder seguinte pergunta: qual é o total dessa grandeza?
- **Subtração:** operação que, dadas duas quantidades que representem a mesma grandeza, visa responder a seguinte pergunta: qual é a diferença entre elas?

³ Ao passar para os números relativos, essas interpretações semânticas teriam de ser revisitadas.

- **Multiplicação:** operação que, dado um valor, deseja responder à pergunta: quanto é esse valor adicionado a ele mesmo várias vezes?
- **Divisão:** operação que visa responder a seguinte pergunta: quantas vezes uma quantidade está contida em outra?

Assim, os problemas de:

- adição são os problemas que solicitam um total,
- subtração são os problemas que solicitam uma diferença,
- multiplicação são os problemas que solicitam a determinação uma adição de parcelas iguais,
- divisão são os problemas que solicitam a determinação de quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Como já sabemos que em nem todos os problemas a operação a ser usada é determinada somente com base na sua interpretação semântica, os problemas envolvendo uma das 4 operações fundamentais com números naturais podem ser divididos em dois grandes grupos, a saber:

1º grupo: os problemas em que a determinação da operação a ser realizada para sua resolução operacional se baseia exclusivamente no sentido semântico da operação;

2º grupo: os problemas em que a determinação da operação a ser realizada para sua resolução operacional não se baseia exclusivamente no sentido semântico da operação.

Com base nesses dois grupos de problemas, propomos, por meio das seguintes definições, uma distinção entre problema de uma operação e problemas que usam uma operação:

DEFINIÇÃO 12. Os problemas de uma operação aritmética são aqueles problemas em que a determinação da operação a ser realizada para a sua resolução operacional se baseia exclusivamente no sentido semântico da operação.

DEFINIÇÃO 13. Os problemas que usam uma operação são aqueles em que a determinação da operação a ser realizada para a sua resolução operacional não se baseia exclusivamente no sentido semântico da operação.

Vejamos alguns exemplos elucidativos.

Exemplo 1: Tinha duas moedas e ganhei três moedas de meu pai. Com quantas moedas fiquei?

Este é um problema da operação adição, pois basta a análise semântica do enunciado para sabermos que a operação que devemos realizar com os dados contidos no enunciado é a adição. No campo conceitual aditivo, este problema é da categoria simples e, segundo Nesher, Greeno e Riley (1982) e ratificada pela experiência docente dos autores, é resolvido com sucesso por quase todas as crianças dos anos iniciais.

Exemplo 2: Tinha cinco bolas. Ganhei algumas bolas e fiquei com oito bolas. Quantas bolas ganhei?

Esse problema é normalmente visto como um problema de subtração. Devido

bastar calcular $8-5$ para obtermos o valor procurado. Entretanto, a análise semântica do problema não aponta para tal operação. Nesse caso a operação subtração é usada como inversa da adição e, portanto, sua determinação não tem origem no seu sentido semântico.

Segundo Lindvall e Ibarra (1980), um dos equívocos mais comuns nesse tipo de problema é o de somar os valores apresentados no enunciado, numa clara confusão entre as informações contidas no enunciado, que remetem a ideia de adição, e a operação usada para determinar a quantidade solicitada a partir das informações dadas. Não consideramos esse problema com sendo da operação subtração e sim que usa a referida operação na sua resolução. Portanto, o consideramos como um problema do 2º grupo acima apresentado.

Exemplo 3: Tinha oito bombons e dei dois a meu irmão. Com quantos bombons fiquei?

Nesse problema, somente com base na análise semântica do enunciado, é possível determinar que a operação envolvida é a subtração. Devido ao exposto, consideramos o problema em questão como sendo um problema da operação subtração. Segundo Nesher, Greeno e Riley (1982), o desempenho dos estudantes, desde os anos iniciais, é bem melhor que em problemas do tipo apresentado no Exemplo 2.

Exemplo 4: Tenho duas camisas e três calças. De quantas maneiras distintas posso vestir-me usando uma camisa e uma calça?

Este é um problema que utiliza a operação multiplicação na sua resolução, pois só conhecendo o princípio fundamental da contagem é que concluímos pela multiplicação do número de camisas pelo número de calças para obter a solução do problema.

Observamos ainda que sempre há resoluções alternativas para problemas matemáticas. No Exemplo 4, por exemplo, basta a pessoa fazer um quadro com dupla entrada e logo perceberá que é suficiente calcular o produto dos números dados no problema, aparentemente fazendo assim de o problema um de multiplicação. Ao agir assim, porém, a pessoa não está simplesmente fazendo uso da interpretação semântica da operação multiplicação e sim incorporando relações simbólicas na interpretação que ela dá ao problema. Desta forma, efetivamente, ela mescla os dois aspectos (semântico e simbólico) do problema. Em consequência, ao nosso ver, o problema permanece do tipo dos que usam a operação. Não obstante, o fenômeno da mesclagem dos dois aspectos pela interpretação merece mais investigação.

Exemplo 5: Pagarei uma dívida em cinco parcelas iguais de R\$20,00. Qual o valor da minha dívida?

Esse problema tem a determinação da operação (adição ou multiplicação) com o uso exclusivo da análise semântica do enunciado. Portanto, esse problema é do tipo problema de uma operação.

Exemplo 6: O preço de cinco canetas é R\$10,00. Quanto custa uma caneta?

Esse problema parece ser da operação divisão. Entretanto, se analisarmos melhor seu enunciado não encontramos o sentido semântico da operação divisão. Antes usa uma relação fundamental no comércio que é a seguinte: a quantidade de mercadoria vezes o preço unitário dá o valor a ser pago. O uso da operação divisão na resolução se deve ao fato da mesma ser a inversa da multiplicação e permitir a determinação do valor unitário de uma das cinco canetas na relação $5 \times \text{Preço} =$

20. Logo, o consideramos como sendo do tipo que utiliza a operação, neste caso a divisão.

Exemplo 7: Tenho 20 figurinhas e quero reparti-las igualmente entre meus quatro primos. Quantas figurinhas cada primo deverá receber?

Neste problema somente a análise semântica do enunciado é suficiente para determinar a operação que deve ser utilizada para resolver o problema, no caso a divisão. Portanto, consideramos esse problema como sendo um de uma operação.

De acordo com a classificação apresentada dos problemas envolvendo as operações, os problemas de uma operação são mais fáceis que os problemas que utilizam a operação na sua solução. Como podemos observar entre os problemas que usam uma operação há um grupo que não depende de resultados de outros campos da Matemática, como é o caso dos problemas apresentados nos Exemplos 2 e 6, e um grupo que depende de resultados de outros campos da Matemática, como é o caso do problema apresentado no Exemplo 4. Desse modo, podemos subdividir os problemas que usam uma operação em duas categorias: 1) os independentes e 2) os dependentes.

Assim propomos as seguintes definições.

DEFINIÇÃO 14. Os problemas que usam uma operação são ditos *independentes*, quando para determinar a operação a ser utilizada na sua resolução operacional não depende de resultados de outros campos da Matemática.

DEFINIÇÃO 15. Os problemas que usam uma operação são ditos *dependentes*, quando para determinar a operação a ser utilizada na sua resolução operacional depende de resultados de outros campos da Matemática.

Vejamos alguns exemplos elucidativos.

Exemplo 8: Uma pessoa tinha algumas canetas, ganhou 7 e passou a ter um total de 12 canetas. Quantas canetas a pessoa tinha antes de ganhar as 7 canetas?

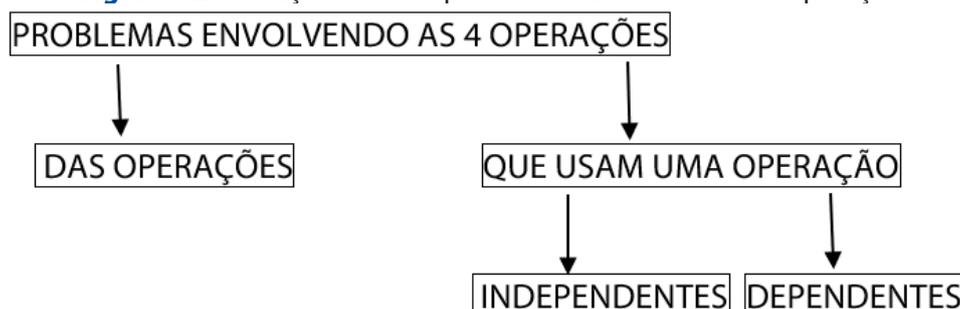
Este problema tem a seguinte sentença de modelação $?+7=12$. Logo, com base no princípio aditivo da igualdade, podemos afirmar que $?+7-7=12-7$ o que resulta em $?=12-7$. A operação de subtração foi usada sem ser fruto de algum resultado fora da aritmética. Por este motivo, a questão em tela é por nós considerada como um problema que usa a operação subtração de maneira independente.

Exemplo 9: Uma pessoa tem 4 camisas e 5 calças compridas. De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode ser vestir usando uma das camisas e uma das calças?

Para resolver operacionalmente a questão apresentada no Exemplo 9 basta multiplicar 4 por 5. Mas o que dá segurança para realizar esta operação é o princípio fundamental da contagem que é um dos resultados básicos da análise combinatória. Por esse motivo, consideramos o referido problema como sendo um que usa a operação multiplicação de maneira dependente.

Com base no exposto sobre os problemas de uma operação e os que usam uma operação, podemos propor o Diagrama 2 para os problemas envolvendo as operações fundamentais com os números naturais.

Diagrama 2 – Relação entre os problemas envolvendo as 4 operações



Fonte: Elaboração dos autores

As implicações metodológicas desses resultados apontam para a necessidade de re-avisar muitas das recomendações constantes nos livros de metodologia das quatro operações, pois eles tratam os problemas de uma operação e os que usam uma operação como se possuíssem resolução idêntica.

O Quadro 6 sistematiza as sentenças de modelação dos problemas envolvendo as quatro operações com relação à possibilidade de ser da operação ou usar a operação e também quanto a possibilidade de ser aritmético ou algébrico.

Quadro 6 – Sentenças de modelação de problemas envolvendo as operações aritméticas

QUANTO A OPERAÇÃO	SENTENÇA(S) DE MODELAÇÃO POSSÍVEL(IS)	QUANTO ARITMICIDADE	SENTENÇA(S) DE MODELAÇÃO POSSÍVEL(IS)	RELAÇÃO ENTRE AS SENTENÇAS DE MODELAÇÃO
Da adição	$a + b = ?$	Aritmético simples	$a + b = ?$	Idênticas
Que usa a adição	$a + ? = b$ $? + a = b$	Algébrico simples	$a + ? = b$ $? + a = b$	Idênticas
Da subtração	$a - b = ?$	Aritmético simples	$a - b = ?$	Idênticas
Que usa a subtração	$a - ? = b$ $? - a = b$	Algébrico simples	$a - ? = b$ $? - a = b$	Idênticas
Da multiplicação	$a \times b = ?$	Aritméticosimples	$a \times b = ?$	Idênticas
Que usa a multiplicação	$a \times ? = b$ $? \times a = b$	Algébrico simples	$a \times ? = b$ $? \times a = b$	Idênticas
Da divisão	$a \div b = ?$	Aritmético simples	$a \div b = ?$	Idênticas
Que usa a divisão	$a \div ? = b$ $? \div a = b$	Algébrico simples	$a \div ? = b$ $? \div a = b$	Idênticas

Fonte: elaboração dos autores

A análise do Quadro 6 indica que para cada uma das quatro operações básicas da aritmética há uma correspondência entre as sentenças de problemas da operação com sentença de problemas aritméticos simples e também uma correspondência entre as sentenças de problemas que usam uma operação e sentenças de problemas algébricos simples. Essa correspondência pode levar a crença de que todo problema que usa uma operação aritmética é algébrico simples. Mas como veremos a seguir há casos de problemas que usam uma operação e possuem a sua sentença de um problema aritmético e casos em que o problema usa uma operação e a sentença é de um problema algébrico imediato.

Consideremos o seguinte problema: Uma pessoa tem 3 calças e 4 camisas; de quantas maneiras distintas ela pode se vestir usando uma calça e uma camisa das que possui? A solução operacional dele é baseada na aplicação do princípio fundamental da contagem e sua sentença de modelação será $3 \times 4 = ?$. Desse modo, utilizando as definições apresentadas

no presente trabalho, podemos concluir que o problema usa a operação de multiplicação de maneira dependente, mas a sua sentença é um problema aritmético.

Vejam agora o seguinte problema: Uma pessoa tem 3 calças e deseja adquirir algumas calças de tal forma que possa se vestir de maneira distinta exatamente 12 vezes utilizando uma calça e uma camisa das que possui; nestas condições, de quantas calças ele deverá adquirir para atender as condições dadas? Novamente a solução do problema em tela será baseado no princípio fundamental de contagem, mas a sua sentença será $3 \times ? = 4$. Por isso, é um problema que usa a operação multiplicação de maneira dependente e tem sentença de um problema algébrico imediato.

Agora, consideremos o problema: Ayla tinha cinco canetas, ganhou mais algumas de sua mãe e ficou com 17 canetas; quantas canetas a Ayla ganhou de sua mãe? Esse problema tem a sentença $5 + ? = 17$ como sentença de modelação. Logo, é um problema que usa a operação subtração de maneira independente.

Desse modo podemos concluir que quando um problema é de uma operação aritmética ele será aritmético, mas, se um problema possui uma sentença de modelação de um problema aritmético, isto não garante que o mesmo seja aritmético pois, ele pode ser um problema que usa a operação envolvida.

Além disso, podemos também concluir que não existe uma correspondência plena entre a sentença de modelação e os tipos de problemas que usam uma operação. Pois, existe a possibilidade de o problema usar uma operação e sua sentença de modelação ser de um problema aritmético ou algébrico.

Desse modo, podemos concluir que **todo problema algébrico é um problema que usa uma operação não sendo verdadeira a recíproca**. Também podemos concluir que todo problema de uma operação é um problema aritmético.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como temos visto, há vários tipos de problemas verbais que até possam parecer entre si semelhantes, mas que encerram princípios estruturais significativamente distintos. Essas diferenças podem ter consequências importantes na sala de aula, pois, por exemplo, os problemas algébricos são geralmente mais difíceis para o estudante do que os problemas aritméticos e, entre os problemas que usam uma operação, os dependentes são geralmente vistos como mais difíceis do que os independentes. Assim, as distinções feitas no decorrer do presente artigo são de grande importância tanto para o professor na sala de aula, quanto para os autores de livros textos, no que se diz respeito a elaboração e sequenciação dos problemas a serem apresentados na sala de aula, bem como na escolha de quesitos para a avaliação. Tais considerações também serão essenciais na identificação das dificuldades com que o estudante esbarra nos seus estudos destes problemas e a consequente escolha das medidas que podem ser usadas para ajudar o estudante a superar suas dificuldades.

REFERÊNCIAS

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. **For the Learning of Mathematics**, v. 9, nº 2, p. 19-25, 1989.

GOMES, J. Q.; SÁ, P. F. de. As questões envolvendo as 4 operações nos livros didáticos brasileiros. *In: Encontro de Pesquisa em Educacional do Norte e Nordeste*, 15, 2001, São Luís. PROGRAMAÇÃO E RESUMOS, São Luís: UFMA, 2001, 1 CD-ROM.

LINDVALL, C. M.; IBARRA, C. G. Incorrect Procedures Used by Primary Grade Pupils in Solving Open Addition and Subtraction Sentences. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 11, nº 1, p. 50-62, 1980.

LINCHEVSKI, L.; HERSCOVICS, N. Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operation on the Unknown in Context of Equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 30, p. 39-65, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997.

NESHER, P.; GREENO, J.G.; RILEY, M.S. The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 13, p. 373-394, 1982.

MARTÍNEZ, E. C. Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa. Granada: Editorial COMARES, 1995.

PUIG, L.; CERDAN, F. **Problemas Aritméticos Escolares**. Madrid: Síntesis, 1988.

ROQUE, T. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁ, P. F. de. Qual a relação entre problema aritmético e problema algébrico? **Anais do V EBRAPEM**, p.383-388, São Paulo: 2001.

SÁ, P. F. de; FOSSA, J. A. Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos. **Revista Educação Em Questão**, v. 33, nº 19, p. 253-278, 2008. Disponível em <https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/3936>.

SÁ, P. F. de; FOSSA, J. A. Elementos de dificuldade estruturais das questões envolvendo as quatro operações aritméticas. *In José Joelson Pimentel de Almeida, Francisco Ferreira Dantas Filho e Flávia Aparecida Bezerra da Silva (Orgs.). Práticas Educativas como Itinerários de Pesquisa em Ensino de Ciências e Educação Matemática*. Campina Grande: EDUEPB, 2021.

Histórico

Recebido: 12 de agosto de 2024.

Aceito: 17 de novembro de 2024.

Publicado: 31 de dezembro de 2024.

Como citar – ABNT

SÁ, Pedro; FOSSA, John. Problemas de uma Operação e Problemas que usam uma Operação Aritmética. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 52, e2024006, 2024.

<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024006.id733>

Como citar – APA

Sá, P., & Fossa, J. Problemas de uma Operação e Problemas que usam uma Operação Aritmética. . *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (52), e2024006. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024006.id733>

Número temático organizado por

Héctor José García Mendoza  