

Pesquisa sobre Proposição de Problemas Matemáticos: Trinta Anos de Avanços a partir da Publicação “On Mathematical Problem Posing”¹

Mathematical Problem-Posing Research: Thirty Years of Advances Building
on the Publication of “On Mathematical Problem Posing”

Investigación sobre la Formulación de Problemas Matemáticos: Treinta Años
de Avances Basados en la Publicación de “On Mathematical Problem Posing”

Jinfa Cai² 

Stephen Hwang³ 

Matthew Melville⁴ 

RESUMO

Em 1994, Ed Silver publicou um artigo original intitulado “On Mathematical Problem Posing”. Silver tanto ajudou a estabelecer as bases para a pesquisa de proposição de problemas como apontou direções-chave que a pesquisa de proposição de problemas poderia explorar. Este artigo fornece uma breve revisão da literatura sobre proposição de problemas nas últimas três décadas, mostrando que houve avanços marcantes na pesquisa de proposição de problemas. Fornecemos não apenas uma revisão dos avanços na pesquisa de proposição de problemas, mas também do impacto do artigo original de Silver na pesquisa de proposição de problemas. O artigo termina com uma discussão de três áreas específicas de pesquisa sobre a proposição de problemas matemáticos (uma dessas áreas é a Aprendizagem Baseada em Proposição de Problemas [P-PBL]) que estão prontas para o progresso e podem significativamente avançar todo o campo.

ABSTRACT

In 1994, Ed Silver published a seminal paper entitled “On Mathematical Problem Posing.” Silver both helped to lay a foundation for problem-posing research and pointed out key directions that problem-posing research could explore. This chapter provides a brief review of the problem-posing literature in the past three decades, showing that there have been marked advances in problem-posing research. We not only provide a review of the advances in problem-posing research, but also of the impact of Silver’s seminal paper on problem-posing research. The chapter ends with a discussion of three specific areas of research on mathematical problem posing (one of these areas is Problem-Posing-Based Learning [P-PBL]) that are ripe for progress and could significantly move the entire field forward.

RESUMEN

En 1994, Ed Silver publicó un artículo original titulado “On Mathematical Problem Posing”. Silver tanto ayudó a establecer las bases para la encuesta de proposición de problemas como señaló direcciones clave que la encuesta de proposición de problemas podría explorar. Este artículo ofrece una breve revisión de la literatura sobre proposición de problemas en las últimas tres décadas, mostrando que hubo avances notables en la encuesta de proposición de problemas. Proporcionamos no solo una revisión de los avances en la encuesta de proposición de problemas, pero también del impacto del artículo original de Silver en la encuesta de proposición de problemas. El artículo termina con una discusión de tres áreas específicas de encuesta sobre la proposición de problemas matemáticos (una de esas áreas es el Aprendizaje Basada en Proposición de Problemas [P-PBL]) que están listas para el progreso y pueden significativamente avanzar todo el campo.

1 Tradução realizada por Silvanio de Andrade e José Jorge de Sousa do Artigo Original: Cai, J., Hwang, S., Melville, M. (2023). Mathematical Problem-Posing Research: Thirty Years of Advances Building on the Publication of “On Mathematical Problem Posing”. In: Cai, J., Stylianides, G.J., Kenney, P.A. (eds) Research Studies on Learning and Teaching of Mathematics. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35459-5_1. Aqui, agradecemos aos autores e a editora Springer pela permissão da tradução.

2 Doutor (Ph.D) em Education (Cognitive Studies in Mathematics Education), University of Pittsburgh. Docente na University of Delaware. EWG 437, Newark, DE 19716. E-mail: jcai@udel.edu.

3 University of Delaware. EWG 437, Newark, DE 19716. E-mail: hwangste@udel.edu.

4 Doutor (Ph.D) em Education (Mathematics Education), University of Delaware. Purdue University Fort Wayne, Fort Wayne, IN, USA. E-mail: mdmelvil@pfw.edu.

INTRODUÇÃO

Em 1994, Ed Silver publicou um artigo original intitulado “On Mathematical Problem Posing”. Este artigo foi visto como uma “leitura obrigatória” na pesquisa de proposição de problemas matemáticos devido às bases que estabeleceu para esta área de pesquisa. Na verdade, de acordo com o Google Acadêmico, existem mais de 1.400 publicações que citaram este artigo desde a sua publicação e as 10 publicações mais citadas foram citadas mais de 7.000 vezes⁵. Além disso, 78 artigos que aparecem nas 10 revistas mais renomadas de educação matemática (Williams; Leatham, 2017) fizeram referência a este artigo. Para um campo de estudos relativamente jovem em educação matemática (a pesquisa empírica realizada sobre proposição de problemas começou a ser desenvolvida apenas nos últimos 20-30 anos), este é um alcance bastante extenso para um único artigo. O grande número de citações deste artigo não surpreende, visto que se trata de um trabalho original sobre a pesquisa de proposição de problemas. De fato, foi o primeiro artigo a fornecer várias perspectivas sobre a proposição de problemas e a pesquisa em proposição de problemas.

Silver (1994) levantou seis temas em “On Mathematical Problem Posing”. Neste capítulo, descrevemos esses seis temas e, em seguida, examinamos os avanços na pesquisa de proposição de problemas a partir da perspectiva da proposição de problemas como uma atividade cognitiva, como algo a ser ensinado e como algo para ensinar através (Stanic; Kilpatrick, 1988). Decidimos usar essas três perspectivas para identificar os avanços que foram feitos na pesquisa em educação matemática sobre proposição de problemas por, pelo menos, duas razões: (1) essas três perspectivas demonstraram sua utilidade para discutir a resolução de problemas e a pesquisa em resolução de problemas e, em paralelo, para conceituar proposição de problemas e a pesquisa em proposição de problemas (Cai; Leikin, 2020); e (2) os seis temas levantados por Silver podem ser mesclados com essas três perspectivas. Neste capítulo, quando discutimos os avanços, tentamos observar onde os temas do artigo de Silver se manifestaram no estado da arte, traçando assim a influência do artigo na literatura.

CONCEITUAÇÃO DE PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Antes de descrevermos os seis temas de Silver, descrevemos primeiro uma conceituação de proposição de problemas paralela à conceituação de resolução de problemas de Stanic e Kilpatrick (1988). Stanic e Kilpatrick propuseram três categorias – a resolução de problemas como uma atividade cognitiva, como algo a ser ensinado e como algo a ser ensinado através– na qual a pesquisa sobre resolução de problemas, do passado e do presente, pode ser classificada. Da mesma forma, Schroeder e Lester (1989) discutiram três abordagens para o ensino de resolução de problemas: ensinar sobre, para e via resolução de problemas. Esses modos de pensar sobre resolução de problemas sugerem um conjunto paralelo de perspectivas para a pesquisa sobre proposição de problemas: proposição de problemas como uma atividade cognitiva, proposição de problemas como um objetivo de aprendizagem em si mesmo e proposição de problemas como uma abordagem de ensino (Cai; Leikin, 2020).

⁵ Os dados foram coletados em março de 2023

Proposição de problemas como atividade cognitiva refere-se ao processo de propor problemas matemáticos – isto é, “o processo pelo qual, com base na experiência matemática, os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e as formulam como problemas matematicamente significativos” (Stoyanova; Ellerton, 1996, p. 518). Ao considerar proposição de problemas como uma atividade cognitiva, os pesquisadores querem entender como os alunos constroem interpretações pessoais de situações específicas e depois propõem problemas baseados nessas situações. Ao examinar este processo, o pensamento dos alunos – particularmente o seu conhecimento matemático acerca da proposição de problemas – pode ser revelado. Assim, desta perspectiva, os pesquisadores podem tanto examinar os processos cognitivos específicos envolvidos na proposição de problemas, bem como sondar o escopo mais amplo do entendimento e pensamento matemático que os alunos exibem quando propõem problemas numa situação matemática em particular (Silver; Cai, 1996).

Proposição de problemas como objetivo de aprendizagem refere-se ao desenvolvimento de habilidades de proposição de problemas. Nesta perspectiva, o objetivo é ajudar os indivíduos, incluindo alunos e professores, a aumentar a sua capacidade de propor problemas matemáticos de alta qualidade. Ao se engajarem em tarefas de proposição de problemas no ensino da matemática, os alunos podem desenvolver as suas habilidades de proposição de problemas, e o desenvolvimento de habilidades de proposição de problemas é, nesta perspectiva, visto como um dos objetivos do ensino de matemática. De fato, a proposição de problemas pode ser usada como uma medida dos resultados da aprendizagem dos estudantes (Cai *et al.*, 2013).

Proposição de problemas como abordagem de ensino refere-se à ideia de ensinar matemática através da proposição de problemas. Embora o desenvolvimento de habilidades de proposição de problemas possa ser um objetivo deste tipo de ensino, esta perspectiva enfatiza engajar os estudantes em tarefas e atividades de proposição de problemas para ajudá-los a alcançar tanto objetivos de aprendizagem cognitivos como não cognitivos, além de desenvolver habilidades de proposição de problemas. Por exemplo, um tópico matemático pode ser introduzido com uma situação-problema que incorpore aspectos essenciais do tópico e os alunos podem explorá-lo e começarem a desenvolver seus entendimentos, propondo problemas matemáticos baseados na situação-problema (Chen; Cai, 2020). Ou a proposição de problemas pode ser incorporada ao ensino como forma de auxiliar os estudantes a desenvolver suas identidades como exploradores da matemática e promover disposições positivas em relação à matemática (Silver, 1994, 1997).

Ao descrever estas três perspectivas, nós temos a intenção de usá-las como auxílio para organizar uma análise do impacto do artigo de Silver em múltiplos aspectos da educação matemática. Por exemplo, ao rever os vinte artigos de pesquisa mais citados que foram elaborados a partir dos temas do artigo “On Mathematical Problem Posing”, notamos como cada artigo se situou com relação a essas três perspectivas. Baseado em nossa codificação, quatorze artigos tratam proposição de problemas como uma atividade cognitiva, dez tratam como objetivo de aprendizagem e quatro tratam como uma abordagem de ensino. É importante notar que as três não são perspectivas inteiramente separadas e, às vezes, a proposição de problemas se expande em mais de uma perspectiva na pesquisa e prática real.

Por exemplo, quando professores usam proposição de problemas para ensinar um tópico matemático em particular aos seus estudantes, parece claro que a proposição de problemas está sendo conceituada como uma abordagem de ensino. Contudo, ao mesmo tempo em que os professores usam proposição de problemas dessa forma, eles também podem tentar entender o pensamento matemático dos seus estudantes enquanto eles se engajam com a tarefa de proposição de problemas. Neste sentido, os professores estão tratando a proposição de problemas como uma atividade cognitiva – uma atividade que pode proporcionar uma janela para o pensamento matemático dos estudantes. Além disso, uma vez que os estudantes têm proposto alguns problemas, o professor pode engajá-los em uma discussão dos problemas propostos. Como parte da discussão, o professor pode comparar os problemas propostos, examinar a matemática presente neles, e discutir o nível de sofisticação e complexidade demonstrada neles. Ao fazer isso, o professor está destacando as habilidades de proposição de problemas dos estudantes, talvez para ajudar a alavancar essas habilidades para a classe inteira. Aqui, proposição de problemas é, em parte, o próprio objetivo de aprendizagem. Dessa forma, pesquisas e práticas envolvendo proposição de problemas podem abranger múltiplas perspectivas mesmo quando o foco principal é claramente conectado a uma das três perspectivas.

OS SEIS TEMAS DE SILVER NO ARTIGO “ON MATHEMATICAL PROBLEM POSING”

Ao escrever “On Mathematical Problem Posing”, Silver se dirigia a uma comunidade de pesquisa que estava, de forma ampla, começando a considerar em profundidade o construto da proposição de problemas e suas inúmeras ligações com diferentes aspectos do pensamento e da aprendizagem matemática. Assim, além de definir a proposição de problemas como “a geração de novos problemas e reformulação de problemas dados” (Silver, 1994, p. 19). Silver discutiu várias conexões entre a proposição de problemas e outras construções importantes para o campo. Ao fazê-lo, ele estabeleceu seis temas através dos quais o campo poderia reconhecer e desenvolver o significado potencial de investigar questões sobre a proposição de problemas. Os seis temas de Silver são: propor problemas como (1) uma característica de criatividade ou habilidade matemática excepcional, (2) um tipo de instrução orientada para a investigação, (3) uma característica proeminente da atividade matemática, (4) um meio de melhorar a resolução de problemas dos estudantes, (5) uma janela para o entendimento matemático dos alunos e (6) um meio de melhorar o interesse dos alunos em relação à matemática. Esses seis temas, que Silver identificou com base no estado da arte da pesquisa em proposição de problemas na época, representam conexões entre a proposição de problemas e uma faixa extraordinariamente ampla de áreas significativas da educação matemática. Contudo, podemos organizar estes temas dentro de uma conceituação de proposição de problemas descrita acima: Tema 1 é principalmente relacionado à proposição de problemas como objetivo de aprendizagem; temas 3 e 5 são principalmente relacionados à proposição de problemas como atividade cognitiva; e os temas 2, 4 e 6 são principalmente relacionados à proposição de problemas como uma abordagem de ensino.

Nesta seção, nós resumimos brevemente essas conexões de acordo com as categorias nas quais Silver costumava apresentá-las.

Proposição de Problemas como uma Característica da Criatividade ou Capacidade Matemática Excepcional

Silver discutiu a conexão entre proposição de problemas e capacidade e criatividade matemática. Ele explicou que estudantes que têm um alto nível de capacidade matemática podem propor problemas mais complexos que estudantes que possuem um nível de capacidade menor. A criatividade dos estudantes ao propor problemas está também relacionada às capacidades de propor problemas inovadores. Embora estudantes com alta capacidade matemática tendam a propor problemas mais complexos, isso não significa que a aprendizagem baseada em proposição de problemas deve ser limitada apenas a ensinar a esses estudantes “talentosos”. Em vez disso, proposição de problemas pode tornar a matemática mais acessível para todos. Por exemplo, estudantes podem usar a proposição de problemas como uma abertura para reformular um problema e torná-lo acessível para suas próprias experiências. Além disso, visto que a proposição de problemas é conectada com a criatividade e capacidade matemática, é válido considerar usar a proposição de problemas para medir e desenvolver ainda mais essas capacidades nos estudantes. Silver elaborou esta conexão em outro artigo amplamente citado (Silver, 1997).

De fato, Silver (1997) não apenas proporcionou um relato histórico do uso da proposição de problemas para medir a criatividade, mas também propôs uma relação entre engajar estudantes na proposição de problemas e seu desenvolvimento da fluência, flexibilidade e originalidade criativa observando que a criatividade matemática “está intimamente relacionada com o conhecimento profundo e flexível na [matemática]; está frequentemente associada a longos períodos de trabalho e reflexão, ao invés de insights rápidos e excepcionais; e é suscetível a influências instrucionais e experienciais” (Silver, 1997, p. 75). Fluência criativa refere-se à capacidade de ter muitas ideias em resposta a um comando-*prompt* (ou seja, de criar muitos problemas para uma determinada tarefa de proposição de problemas). A flexibilidade na proposição de problemas refere-se ao número de diferentes tipos de problemas que são propostos. E a originalidade criativa refere-se ao quão incomum é uma ideia (ou seja, quão improvável um problema particular seja proposto). Silver (1997) argumentou que a proposição de problemas oferece oportunidades para desenvolver todas essas três características da criatividade.

Proposição de Problemas como um Tipo de Ensino Orientado para a Investigação

Silver (1994) mostrou a seguir como a proposição de problemas satisfaz três características diferentes associadas ao ensino baseado em investigação:

- (a) ajudar os estudantes a construir regras, teorias ou princípios gerais que já são conhecidos, (b) ajudar os estudantes a construir teorias ou princípios genuinamente originais e (c) ensinar os estudantes a resolver problemas através do uso de técnicas de autoquestionamento, autorregulação e de habilidades metacognitivas (Silver, 1994, p. 21).

Observando que há muitos programas diferentes que oferecem o ensino baseado em investigação, todavia frequentemente encontrados entre a elite econômica, Silver argumentou que a proposição de problemas é um meio de oportunizar o ensino baseado em investigação de alta qualidade a todos os estudantes, sem a necessidade de materiais

curriculares de alto custo. Em particular, isto significa que a proposição de problemas pode beneficiar grupos historicamente marginalizados, que muitas vezes não tiveram acesso a programas de ensino baseados em investigação. Embora Silver expressasse o desejo de que todos os estudantes tivessem acesso ao ensino baseado na investigação através da proposição de problemas, ele clamou por mais pesquisas dos efeitos do ensino baseado na investigação sobre os estudantes. Ele também observou a necessidade de mais pesquisas sobre as conexões entre a proposição de problemas e a capacidade dos estudantes de resolver problemas.

Proposição de Problemas como uma Característica Proeminente da Atividade Matemática

Aqui, Silver expandiu a ideia de Polya que proposição de problemas é uma atividade comum entre os matemáticos. Durante milênios, matemáticos têm proposto e resolvido problemas para si mesmos ou para outros. Assim, engajar aprendizes na atividade de propor problemas reflete uma conexão potencialmente forte para a disciplina de matemática. Silver notou que este aspecto da proposição de problemas se alinha com recomendações do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* para estudantes dos anos 9–12, de serem capazes de formular seus próprios problemas. Além disso, Silver argumentou que proposição de problemas seria também relevante para o ensino de matemática que tem a meta de preparar os estudantes para tipos de problemas matemáticos não estruturados que eles encontrarão no mundo real – preparando-os para serem “usuários inteligentes da matemática, a fim de resolver problemas de importância ou de interesse para eles” (p. 23). Ao invés de focar no papel da proposição de problemas na disciplina de matemática, este argumento é fundamentado na pesquisa que mostrou que estudantes que resolvem problemas não estruturados inseridos em um contexto natural (como na matemática aplicada) se engajam em comportamentos de formulação e reformulação de proposição de problemas, que eles normalmente não usariam para resolver problemas matemáticos escolares bem estruturados (Lesh, 1981; Lesh et al, 1983). Assim, a proposição de problemas é uma característica tanto da atividade matemática, tal como surge da disciplina de matemática, como também aparece na forma pela qual resolvidores de problemas atacam os problemas do mundo real.

Proposição de Problemas como um Meio para Melhorar a Resolução de Problemas dos Estudantes

Silver notou que um dos motivos mais citados pelo interesse de proposição de problemas como um elemento do currículo e do ensino é o seu potencial de ajudar os estudantes a se tornarem melhores resolvidores de problemas. Isto ecoou a afirmação de Kilpatrick (1987) de que proposição de problemas pode ser um bom indicador de quão bem os estudantes podem resolver os problemas. Silver citou diversos exemplos desta aplicação de proposição de problemas, tais como usar proposição de problemas para auxiliar estudantes a analisar problemas de modo mais completo, para melhorar a capacidade dos estudantes de aplicar seus conhecimentos e habilidades para resolver problemas e ajudar os estudantes a desenvolver esquemas poderosos de resolução de problemas. Entretanto, na época que Silver estava escrevendo, a base de pesquisas para conectar proposição e resolução

de problemas era relativamente pequena. Ele descreveu alguns estudos que ofereceram resultados mistos em relação a essa conexão, às vezes demonstrando uma associação entre a capacidade de resolução de problemas e a qualidade dos problemas propostos, algumas vezes falhando em encontrar essas conexões, e ele clamou por mais pesquisas para esclarecer a natureza da conexão.

Proposição de Problemas como uma Janela no Entendimento Matemático dos Alunos

Outra característica da proposição de problemas descrita por Silver é o seu potencial para revelar o pensamento matemático dos alunos como, por exemplo, encorajá-los a explicitamente matematizar situações-problema. Silver observou que os pesquisadores têm utilizado a proposição de problemas desta forma para compreender melhor o entendimento conceitual de matemática dos alunos (por exemplo, Hart, 1981) e para fazer inferências sobre o seu conhecimento matemático (por exemplo, Ellerton, 1986). Ao descrever os resultados da pesquisa nesta área, Silver destacou que a proposição de problemas proporciona uma janela para o entendimento matemático dos alunos, mas também apresenta uma reflexão da natureza da matemática escolar que os estudantes têm experienciado. Em particular, Silver notou com preocupação que a pesquisa baseada na proposição de problemas descobriu que alguns estudantes frequentemente não se preocupam em realizar conexões entre a matemática no problema e seus referentes no mundo real (por exemplo, tratar a fração para representar um número de pessoas). Neste sentido, proposição de problemas pode elucidar as atitudes e disposições dos estudantes em relação à matemática, assim como suas capacidades de resolver problemas.

Proposição de Problemas como um Meio de Melhorar o Interesse dos Estudantes em Relação à Matemática

Silver expandiu ainda mais a conexão entre a proposição de problemas e a disposição dos alunos em relação à matemática. Ele observou que a proposição de problemas dá aos estudantes a oportunidade de gerar problemas envolventes derivados de seus próprios interesses e que podem também envolver interesses de seus pares. Além disso, o processo de propor problemas em si pode também estimular o interesse dos estudantes. Visto que ansiedade matemática é um problema não trivial para educação matemática, Silver notou que proposição de problemas parece ter a capacidade de fazer a matemática menos intimidadora (por exemplo, Moses *et al*, 1990) e pode auxiliar estudantes a desenvolver um afeto positivo em relação à matemática (por exemplo, Healy, 1993). Embora existam poucas evidências de que estudantes não gostem de proposição de problemas e desenvolveriam disposição ainda mais negativa com relação à matemática por causa disso, Silver alertou que existem alguns casos, tais como estudantes que já são bem sucedidos no ensino da matemática no modo “normal”, que poderia ser plausível que os estudantes possam rejeitar a nova forma de ensino, cujas expectativas nem sempre são tão claras.

AVANÇOS NA PESQUISA EM PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Todos os seis temas levantados por Silver em “On Mathematical Problem Posing” foram retomados e investigados por pesquisadores nos últimos 30 anos. Aqui, nós examina-

mos alguns progressos que foram feitos, focando nas três perspectivas da proposição de problemas: como atividade cognitiva, como objetivo de aprendizagem e como abordagem de ensino. Nossa pesquisa aqui é necessariamente breve, mas nós direcionamos o leitor às várias outras revisões do campo que foram conduzidas desde 1994. Por exemplo, Cai *et al* (2015) conduziu uma revisão abrangente das 10 áreas de pesquisa que se referem a proposição de problemas matemáticos. Outros pesquisadores também já levantaram novas questões e direções para pesquisa em proposição de problemas (por exemplo, Singer *et al*, 2013).

Nos últimos anos, Cai e Leikin (2020) revisaram pesquisas especificamente focadas no afeto e proposição de problemas matemáticos, e Cai e Hwang (2020) revisaram pesquisas sobre professores aprendendo a ensinar matemática através da proposição de problemas. Baumanns e Rott (2021) conduziram uma revisão sistemática de 241 artigos em proposição de problemas com foco específico sobre situações de proposição de problemas. No geral, embora nos baseemos nestas revisões anteriores, orientamos a nossa discussão sobre os avanços na pesquisa de proposição de problemas, focando-nos nos avanços relacionados às três perspectivas sobre a proposição de problemas.

AVANÇOS NA PESQUISA EM PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COMO ATIVIDADE COGNITIVA

Entendimento Matemático e a Capacidade de Propor Problemas

Um foco inicial de pesquisa enraizado na perspectiva da proposição de problemas como uma atividade cognitiva era examinar os tipos de problemas que alunos e professores são capazes de propor (ver Cai, 2015). Uma descoberta abrangente deste corpo de investigação é que os professores (tanto em atuação como em formação inicial) e os alunos em vários níveis educativos são capazes de propor problemas matemáticos válidos baseados nas situações-problema dadas, embora tipicamente uma proporção relativamente pequena dos problemas propostos nestes estudos não são problemas matematicamente válidos. Até mesmo os estudantes que tradicionalmente têm dificuldade com a matemática, como alunos matriculados em cursos de reforço ou cursos de matemática básica são capazes de propor problemas matemáticos importantes e complexos (Silber; Cai, 2021). De fato, Silber e Cai descobriram que estudantes que receberam notas como D ou F propuseram problemas matemáticos de complexidade similar aos estudantes que receberam A no curso.

Como observou Silver (1994), os pesquisadores também fizeram uso da proposição de problemas em estudos centrados na cognição para obter *insights* sobre o entendimento matemático dos participantes. Por exemplo, Kotsopoulos e Cordy (2009) usaram proposição de problemas como avaliação formativa com alunos do sétimo ano para monitorar o progresso deles em relação aos objetivos de aprendizagem em seus experimentos. Pesquisadores também usaram proposição de problemas para avaliar o entendimento conceitual de frações dos professores em formação inicial (Tichá; Hospesová, 2013; Yao *et al*, 2021) e em serviço (Ma, 1999). Ao analisar os problemas propostos pelos participantes, os pesquisadores puderam identificar erros e confusões conceituais sobre o significado de divisão de fração. Além disso, o exame dos problemas propostos pode proporcionar *insights* para o entendimento matemático dos propositores que pode não ser revelado por outros instru-

mentos. Por exemplo, em um estudo recente, Yao *et al* (2021) usaram tarefas envolvendo cálculos, uma tarefa de resolução de problemas com desenho e uma tarefa de proposição de problemas para avaliar o entendimento do conceito de divisão de fração de 345 professores de matemática em formação. O envolvimento na tarefa de proposição de problemas parece ter encorajado professores em formação a explorar situações de divisão de fração mais conceitualmente, dando-lhes assim a oportunidade de exibir seu entendimento conceitual. Estas descobertas sugerem que a atividade de proposição de problemas é propícia para o desenvolvimento do entendimento conceitual dos professores em formação ou sua tendência para fazer uso desse entendimento de tal modo que não podem ser observadas fora da proposição de problemas. Em resumo, a proposição de problemas tem sido efetivamente usada como uma janela para o entendimento matemático de alunos e professores.

Relações entre Proposição de Problemas e Resolução de Problemas

Outra pesquisa que esboça a perspectiva da proposição de problemas como atividade cognitiva, como Silver sugere, examinou a relação entre proposição e resolução de problemas em detalhes. De fato, Silver (1997) localizou a conexão entre criatividade e proposição de problemas dentro de uma interação entre proposição e resolução de problemas. Por exemplo, Silver e Cai (1996) descobriram que os estudantes de ensino médio que foram bons resolvidores de problemas (em tarefas de resolução de problemas abertos) tenderam a propor mais e mais problemas matemáticos complexos que os resolvidores de menor desempenho. Em seguida, Cai (1998) reforçou a evidência desta ligação com uma amostra transnacional de estudantes estadunidenses e chineses e um conjunto em paralelo de tarefas de proposição de problemas e resolução de problemas.

Posteriormente, Cai e Hwang (2002) compararam o desempenho na proposição e resolução de problemas de alunos estadunidenses e chineses do sexto ano, focando-se nos detalhes das suas estratégias de resolução de problemas e nas características específicas dos problemas propostos. Eles descobriram uma conexão entre a resolução e a proposição de problemas dos estudantes chineses que pareciam ser baseadas em uma estratégia abstrata de formação de padrões, embora uma conexão similar não foi encontrada com os estudantes estadunidenses. Uma análise de acompanhamento com alunos da sétima série dos EUA (Hwang; Cai, 2003), que estavam mais suscetíveis em usar estratégias abstratas de resolução de problemas que os estudantes do sexto ano, encontraram uma conexão paralela. Estudantes que usaram estratégias de resolução de problemas mais abstratas tenderam a estar mais suscetíveis a proporem problemas que vão além das informações fornecidas na situação-problema. Essa conexão foi ainda mais explorada por Kar *et al* (2010), que verificou a correlação significativa entre resolução e proposição de problemas para professores em formação da educação básica.

Mais recentemente, Xie e Masingila (2017) exploraram a interface entre a resolução, a proposição e a visualização de problemas. Elas empregaram uma série de tarefas que alternavam entre propor problemas para uma situação dada, em seguida resolver um problema envolvendo a situação e, finalmente, propor mais problemas com a mesma situação. Os professores em formação fizeram associações entre os conceitos contidos nos problemas propostos e a resolução para tais problemas. Além disso, as atividades alternadas parecem

desenvolver a capacidade de visualização dos participantes e o processo de resolução de problemas encorajou proposição de problemas de alto nível.

Em resumo, pesquisadores têm usado várias maneiras de examinar as conexões entre proposição de problemas e resolução de problemas e têm mostrado que há uma relação robusta entre ambas.

Características da Tarefa de Proposição de Problemas: Situações-Problema e Comandos

Outra área de pesquisa de proposição de problemas nesta categoria, embora não discutida no artigo de Silver (1994), é a pesquisa provando os efeitos que as características da tarefa de proposição de problemas têm na cognição da proposição de problemas. Estas características da tarefa incluem a natureza da situação-problema e os comandos da proposição de problema (Cai, 2022; Cai *et al*, 2022). Pesquisa sobre os efeitos das características da tarefa é particularmente importante para informar a concepção de tarefas eficazes de proposição de problemas para uso instrucional. Ao nível de concepção de tarefas instrucionais é essencial identificar as características de tarefas de proposição de problemas efetivas – tarefas que engajem estudantes e extraíam problemas propostos proveitosos. Contudo, dado que esta pesquisa revelou diferenças no desenvolvimento da proposição de problemas dos estudantes ao longo dos anos escolares (Cai, 2003; Guo *et al*, 2021), as características de tarefas importantes podem variar dependendo do público alvo dos estudantes. Além disso, pequenas mudanças nas características das tarefas podem produzir grandes diferenças na cognição de proposição de problemas. Por exemplo, Yao *et al* (2021) descobriu que a inclusão de qualquer dica conceitual em uma situação de proposição de problema baseada na divisão de frações influenciou fortemente as respostas dos professores em formação para exibir seu entendimento conceitual.

No que diz respeito às situações de proposição de problemas, os pesquisadores identificaram características específicas de interesse, tais como a utilização de um contexto do mundo real ou puramente matemático, os tipos de representações utilizadas e a abertura da situação. Numa tarefa de proposição de problemas, a situação-problema fornece contexto e dados que os alunos podem utilizar na formulação dos seus próprios problemas. Situações-problema podem envolver contextos do mundo real ou puramente matemático. Em ambos os casos, estudantes podem fazer conexões entre as suas próprias experiências e a situação-problema no processo de propor um problema. Um contexto puramente matemático pode fornecer uma oportunidade para estudantes explorarem as características abstratas da matemática e relacioná-las ao seu conhecimento já existente. E um contexto da vida real pode fornecer uma oportunidade para os estudantes abstraírem características matemáticas do contexto. Situações-problema podem também representar informações dadas de múltiplas formas, incluindo palavras, números, tabelas e figuras, aproveitando, assim, a capacidade dos alunos de interpretar e usar essas representações. English (1998) descobriu que a proposição de problemas de estudantes melhorou quando as situações-problema envolviam um contexto informal, como uma figura, que permitia mais liberdade para explorar do que um contexto formal e simbólico. Em última análise, a escolha da situação-problema proporciona o potencial para que os problemas propostos pelos alunos se conectem ao objetivo

de aprendizagem matemática desejado (por exemplo, um conceito específico) e molda os tipos de problemas que os alunos provavelmente propõem. Na verdade, como o processo de proposição de problemas encoraja o propositor a examinar profundamente a situação-problema, a escolha da situação-problema define o território que os alunos irão explorar à medida que propõem.

A abertura da tarefa de proposição de problemas pode influenciar como os estudantes fazem progresso em direção aos seus objetivos de aprendizagem. Stoyanova e Ellerton (1996) caracterizaram três níveis de abertura: livres, semiestruturada e estruturada. Estes níveis não pretendem ser uma estrutura hierárquica carregada de valores; contudo diferentes níveis de abertura podem oportunizar vários níveis de entrada em uma tarefa de proposição de problema. Situações de proposição de problemas livres não fornecem restrições na estrutura ou resolução do problema, independente do contexto. Ter uma situação de problema livre pode proporcionar aos alunos um ponto de entrada baixo, ao mesmo tempo em que mantém um teto alto para a complexidade e sofisticação dos problemas propostos. Situações de proposição de problemas semiestruturadas são indicadas para aproveitar o conhecimento prévio dos alunos através da estrutura do problema ou da resolução. Situações de proposição de problemas estruturadas são indicadas para atrair o conhecimento prévio dos alunos ao fornecer tanto uma estrutura específica de problema quanto uma estrutura específica da resolução. Situações estruturadas podem ser divididas em problemas rotineiros e não-rotineiros a depender de se o estudante possui acesso à estrutura de resolução específica ou não. Situações de problema rotineiro e não-rotineiro fornecem experiências diferentes para os estudantes (Baumanns; Rott, 2021).

Leung e Silver (1997) especificamente investigaram o efeito das características das situações na proposição de problemas de professores em formação. Em particular, eles examinaram o efeito sobre os problemas propostos pela presença de informações numéricas específicas na situação-problema. Leung e Silver descobriram que a performance de proposição de problemas foi melhor quando a situação-problema continha informações numéricas específicas do que quando não tinham. Zhang *et al* (2022) replicaram e expandiram o estudo de Leung e Silver, focando na proposição de problemas de estudantes do ensino fundamental. Zhang *et al* (2022) conceituaram três estágios da proposição de problemas: entender a tarefa, construir o problema e expressar o problema. Eles novamente descobriram que fornecer informações numéricas específicas na situação de proposição de problemas estava associada a uma melhor performance de proposição de problemas, mas apenas no entendimento da tarefa e na construção dos estágios do problema. A performance dos estudantes ao expressar os estágios do problema não mostrou diferenças significativas em relação ao fornecimento de informações numéricas específicas.

Outra pesquisa contemplou o comando de proposição de problemas – como alguém é solicitado a propor um problema – incluindo se fornecendo ou não uma amostra de problema proposto influencia a cognição de proposição de problemas (Cai *et al.*, 2022). O comando em uma tarefa de proposição de problemas é o que permite que os estudantes saibam o que é esperado deles. Tal como acontece com a situação-problema, o comando influencia tanto os tipos de problemas que os alunos propõem como os tipos de ideias matemáticas com as quais eles provavelmente se conectarão (Cai *et al.*, 2022). O comando pode

deixar a tarefa de proposição de problemas muito aberta ou pode restringir o que o propositador é capaz de fazer. Em uma análise de tarefas de proposição de problemas em livros didáticos chineses e estadunidenses, Jiang e Cai (2014) classificaram cinco tipos de tarefas, cada uma das quais envolvem um comando diferente para o aluno: reformulação de um determinado problema propondo um problema semelhante, propor problemas adicionais após encontrar um determinado problema, propor um problema que pode ser resolvido com uma determinada operação, propor um problema que complementa informações fornecidas e descrever uma situação para corresponder a uma determinada representação matemática. Algumas características do comando podem ter várias influências diretas na cognição de proposição de problemas. Por exemplo, a inclusão de uma amostra de problema proposto no comando pode tornar significativamente mais provável que o estudante irá propor um problema paralelo à amostra dada (Jiang; Cai, 2014). Jiang e Cai (2014) observaram que, além das amostras dos problemas promoverem a proposição de problemas similares, tais amostras pareciam impulsionar a proposição de problemas complexos. Além disso, Silver e Cai (2017) descobriram que incluir uma resposta desejada para um problema proposto pareceu encorajar os professores em formação a perceberem com mais meticulosidade os conceitos matemáticos nas tarefas de proposição de problemas.

AVANÇOS NA PESQUISA EM PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COMO OBJETIVO DE APRENDIZAGEM

Existem pelo menos três áreas de avanço na pesquisa que tratam a proposição de problemas como um objetivo de aprendizagem nos últimos 30 anos: (1) pesquisa envolvendo a proposição de problemas como uma medida de resultados de aprendizagem, (2) pesquisa envolvendo preparação de professores para propor melhores problemas e (3) pesquisas envolvendo a preparação de estudantes para propor melhores problemas.

Proposição de Problemas como uma Medida de Resultados da Aprendizagem

Tendo em vista que os pesquisadores documentaram que o sucesso dos alunos na resolução de problemas está associado às suas capacidades de proposição de problemas, a proposição de problemas tem sido utilizada como uma medida deste tipo específico de resultado de aprendizagem (Cai; Hwang, 2002; Cai *et al.*, 2013; Silver; Cai, 1996). Por exemplo, Cai *et al.* (2013) utilizaram tarefas de proposição de problemas para medir os efeitos na aprendizagem de álgebra dos estudantes de um currículo de matemática do ensino médio baseado em padrões, em comparação com os efeitos de currículos mais tradicionais. Eles confirmaram a associação entre as habilidades dos alunos para resolver e propor problemas para ambos os tipos de currículo. Além do mais, eles avaliaram várias características das respostas dos estudantes para determinar que os estudantes que propuseram problemas exibiram características positivas (tais como refletir a linearidade de um gráfico dado no problema proposto ou incorporando seus problemas propostos em contextos da vida real) eram também poderosos resolvidores de problemas.

Dadas as suas qualidades gerativas, a proposição de problemas tem sido usada como mensuração da criatividade dos estudantes. Vários pesquisadores já forneceram diversos dados empíricos medindo a criatividade no uso da proposição de problemas (por exemplo,

Leikin, 2009; Leikin; Sriraman, 2017; Leung; Silver, 1997; Lubinski; Benbow, 2006; Singer *et al.*, 2017; Van Harpen; Sriraman, 2013; Voica; Singer, 2012). Em seu artigo introdutório de uma edição especial, Silver (2017) forneceu uma visão histórica do desenvolvimento da pesquisa e da prática na criatividade e talento com atenção específica para criatividade e talento na matemática. Considerando a história da utilização da proposição de problemas para medir a criatividade geral, parece natural utilizar a proposição de problemas matemáticos para medir a criatividade especificamente na matemática (por exemplo, Lewis; Colonnese, 2021).

Preparando os Professores para Propor Melhores Problemas

A pesquisa de proposição de problemas de Silver iniciou com os professores como sujeitos (Silver, 1994; Silver *et al.*, 1996), com o foco nos próprios professores proporem problemas matemáticos baseados em situações-problema dadas. A pesquisa subsequente de proposição de problemas relacionada aos professores se estendeu para preparar os professores para propor melhores problemas.

Visto que as tarefas matemáticas com as quais os alunos se engajam nas aulas moldam as oportunidades de aprendizagem que são disponibilizadas, a escolha de tais tarefas é um aspecto crítico do trabalho dos professores. Ou seja, os professores podem aumentar a qualidade das oportunidades de aprendizagem dos alunos através da escolha de tarefas matemáticas valiosas, mesmo quando tais tarefas são baseadas no que normalmente seriam atividades matemáticas rotineiras (Butts, 1980; Crespo, 2003).

Na verdade, Crespo (2003) investigou como os professores de formação inicial podem aprender a propor problemas melhores para seus alunos, descobrindo que sua prática de propor pode evoluir de problemas envolvendo cálculos de uma única etapa para problemas mais ricos e abertos que demandam mais cognitivamente dos estudantes. Além do mais, Crespo e Sinclair (2008) descobriram que a proposição de problemas de professores em formação da educação básica foi aprimorada ao explorar a situação-problema antes de propor e ao desenvolver critérios para a qualidade de problemas propostos. Subsequentemente, Crespo e Harper (2020) descobriram que professores em formação do ensino médio poderiam utilizar um quadro teórico na colaboração e equidade para aumentar a relevância das tarefas em grupo que eles propuseram. Em outra pesquisa, Koichu and Kontorovich (2013) descobriram que os futuros professores em seus estudos propuseram os problemas mais interessantes ao combinar exploração e resolução com as suas proposições de problemas.

Em um projeto de Proposição de Problemas envolvendo professores de matemática do ensino fundamental, Cai e outros colaboradores (Cai *et al.*, 2020, Li *et al.*, 2020) descobriram que professores podem tanto aprender a propor problemas melhores e desenvolver maior confiança nas suas habilidades de usar proposição de problemas para ensinar matemática. De fato, após participarem de uma série de *workshops* de proposição de problemas, o desempenho e as visões dos professores de matemática do ensino básico em exercício sobre o ensino da matemática através da proposição de problemas apresentaram mudanças positivas. Professores participantes foram capazes de engajar-se sucessivamente com múltiplas tarefas de proposição de problemas.

Preparando os Estudantes para Serem Melhores Propositores de Problemas

Similar à preparação de professores para propor melhores problemas, outra linha de pesquisa em proposição de problemas tem olhado diretamente para o desenvolvimento das capacidades de propor problemas dos estudantes. English (1998) descobriu que os estudantes foram capazes de melhorar a expansão e o nível de desafio dos problemas que eles propuseram quando eles tiveram a experiência resolvendo tais problemas, bem como quando lhes foi dado o comando por contextos informais como figuras. Um estudo exploratório de estudantes do ensino fundamental na China (Cai; Hwang, 2021) também focou em ajudar estudantes a se tornarem melhores propositores de problemas (enquanto que seus professores estiveram simultaneamente aprendendo sobre ensinar através de proposição de problemas). Dados iniciais revelaram que após um ano, estudantes no grupo de proposição de problemas performaram significativamente melhor nas tarefas de proposição de problemas (Cai; Hwang, 2021). Enquanto isso, Lewis e Colonnese (2021) usaram uma estrutura de “Tarefa de três atos”, combinando questionamento e exploração generativa com materiais manipulativos para ajudar os estudantes a ampliar suas capacidades de propor problemas.

AVANÇOS NA PESQUISA SOBRE PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COMO ABORDAGEM DE ENSINO

Mudar o locus de geração de problemas, de ser inteiramente centrado no professor para incluir também os alunos, representa uma mudança significativa para a abordagem de ensino de muitos professores (Silver, 1994). Os avanços da pesquisa em proposição de problemas como uma abordagem de ensino ou aprendizagem baseada em proposição de problemas inclui problemas maiores de (a) descrever e analisar como é na prática ensinar matemática através da proposição de problemas e (b) entender como professores podem aprender a ensinar matemática através da proposição de problemas.

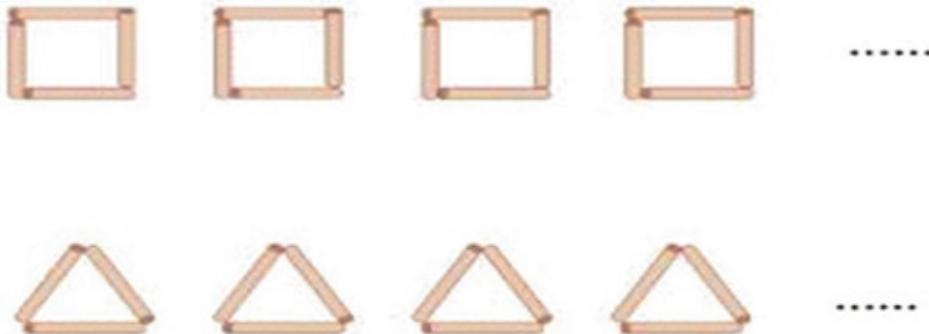
Como é Ensinar Matemática Através da Proposição de Problemas

Visto que ensinar matemática através da proposição de problemas não é uma prática comum, não há necessidade de exemplos desse tipo de ensino, tanto de uma perspectiva da pesquisa (para melhor entender as características importantes) bem como de uma perspectiva prática (ter modelos dos quais os professores podem adquirir conhecimento desta técnica). Existem alguns esforços para descrever como proposição de problemas pode ser empregada na sala de aula para promover a criatividade (Silver, 1997) e há também tentativas de aprimorar o conhecimento e crença de professores em formação inicial sobre a matemática através da proposição de problemas (Toluk-Uçar, 2009). Uma pesquisa mais recente nessa área focou em trabalhar com professores para documentar casos de lições que focam na proposição de problemas (Cai, 2022; Chen; Cai, 2020; Xu; Cai, 2020; Zhang; Cai, 2021). Esses casos fornecem *insights* para várias características do ensino de proposição de problemas, incluindo (1) como esboçar tarefas instrucionais e atividades que envolvam proposição de problemas, (2) como lições podem ser planejadas, baseadas em atividades de proposição de problemas e as oportunidades que elas fornecem, (3) como proposição de problemas pode ser incorporada em uma aula já existente para melhorar a qualidade das oportunidades de aprendizagem ou criar novas oportunidades, (4) como proposição de problemas pode ser

usada para ajudar professores a entender o pensamento e a compreensão matemática dos seus estudantes e (5) como os problemas que os estudantes propõem podem ser abordados pelos professores para direcionar a aula para os objetivos de aprendizagem. Deve-se notar que, apesar de cada uma dessas características representar um evento importante no ensino, elas não são mutuamente excludentes, mas sim inter-relacionadas.

Para dar uma ideia de como pode ser o ensino da matemática através da proposição de problemas, consideramos brevemente o estudo de caso de Xu (Xu; Cai, 2020), uma jovem professora de matemática da educação básica aprendendo como ensinar a matemática através da proposição de problemas. Esse estudo de caso descreve sua adaptação de uma aula, “Usando letras para representar relações quantitativas mais complexas”, presente na unidade de resolução de simples equações no livro didático do quinto ano. Professora Xu ensinou essa lição anteriormente, mas ela percebeu que o foco foi muito procedimental. Além disso, os estudantes tiveram dificuldades resolvendo problemas que envolviam relações quantitativas complexas. Como um aquecimento para a aula baseada na proposição de problemas, professora Xu guiou os estudantes a proporem problemas ou descreverem situações que poderiam ser resolvidas ou representadas pelas expressões 5×8 e $120 - 30$. Em seguida, ela mostrou aos estudantes a equação $1200 - 3x = ?$ e lhes pediu para proporem problemas matemáticos relacionados. Ou seja, ela queria que os estudantes propusessem problemas que pudessem ser representados e resolvidos usando a equação dada. Os estudantes tentaram propor vários problemas e a professora selecionou e discutiu um dos problemas propostos pelos estudantes: Uma garrafa grande de bebida tem 1200 g e se serviram 3 copos pequenos. Cada copo tem capacidade de ter x g. Quantas g de bebida restaram na garrafa após servir os copos?

Figura 1 – A tarefa de proposição de problemas da professora Xu em sala de aula



Fonte: Xu e Cai (2020)

A próxima tarefa de proposição de problemas da professora está relacionada à figura 1. Ela apresentou a figura e solicitou aos estudantes que propusessem problemas matemáticos baseados na figura. Após os estudantes compartilharem e discutirem os seus problemas, a professora apresentou uma extensão do problema baseado em um padrão levemente mais complexo para que os estudantes continuassem pensando. Ela então concluiu após resumir e destacar os principais pontos da aula. De modo geral, nesse estudo de caso, a professora Xu forneceu múltiplas oportunidades para que seus estudantes propusessem problemas que permitiram que eles conectassem o conhecimento existente com a representação simbólica nas equações. Os leitores podem verificar em Cai e Hwang (2022) para uma discussão mais detalhada dessa aula.

Como os Professores Aprendem a Ensinar Matemática Através da Proposição de Problemas

Há um rápido crescimento no corpo da pesquisa investigando como os professores podem aprender a ensinar matemática através da proposição de problemas. Um recurso comum para a aprendizagem profissional do professor é um conjunto de materiais curriculares, como livros didáticos e manuais. Por exemplo, professores participantes na *lesson study* no Japão se envolvem em um processo de pesquisa preparatório chamado *kyouzai kenkyuu* na qual eles investigam o alcance de materiais de ensino que incluem livros didáticos e outros materiais curriculares (Doig; Groves, 2011; Melville; Corey, 2021). Similarmente, os professores chineses frequentemente estudam seus próprios livros didáticos como parte de sua capacitação profissional (Fan *et al.*, 2004).

Contudo, o estado atual da inclusão da proposição de problemas em vários livros didáticos é mínimo. Por exemplo, Cai e Jiang (2017) compararam como as tarefas de proposição de problemas foram incluídas nos livros didáticos do ensino fundamental da China e dos Estados Unidos. Eles concluíram que nenhum dos livros incorporava proposição de problemas de modo substancial, apenas com pequenas proporções (menos de 4%) de tarefas instrucionais que envolvem proposição de problemas. Além disso, a distribuição de tarefas de proposição de problemas era inconsistente em relação às séries e às áreas dos conteúdos matemáticos. Em última análise, isso significa que, por agora, materiais curriculares estão menos prováveis a serem um auxílio robusto para a aprendizagem do professor sobre proposição de problemas. A pesquisa sobre como professores podem aprender a ensinar através da proposição de problemas precisa olhar além dos materiais curriculares existentes.

Alguns pesquisadores investigaram como as experiências de desenvolvimento profissional podem auxiliar professores a desenvolver suas capacidades de ensinar matemática através da proposição de problemas. Por exemplo, Cai e colaboradores (Cai *et al.*, 2020; Cai; Hwang, 2020, 2021; Li *et al.*, 2020; Zhang; Cai, 2021) apresentaram um estudo longitudinal do desenvolvimento profissional em proposição de problemas em múltiplos distritos escolares por toda a China. O programa incluiu cursos de verão em vários dias, por alguns anos. Nesses cursos, os professores aprenderam sobre proposição de problemas, envolvendo tanto a própria proposição de problemas bem como o pensamento sobre os tipos de proposição de problemas que os estudantes poderiam propor, lições projetadas e revisadas que incorporaram tarefas de proposição de problemas e aulas de proposição de problemas estudadas projetadas por outros professores (Cai; Hwang, 2021).

Resultados iniciais desta pesquisa corroboram as observações gerais de que o desenvolvimento profissional focado em ensinar através de proposição de problemas parece ajudar os professores a se sentirem mais confiantes ao usar proposição de problemas em suas próprias salas de aula para melhorar as suas capacidades de prever como os estudantes vão responder às tarefas de proposição de problemas e fomentar a construção de entendimento ainda mais sofisticado das vantagens e desafios de ensinar através da proposição de problemas (Cai *et al.*, 2020; Cai; Hwang, 2020). De fato, o estudo de Li *et al.* (2020) sugere que qualquer esforço para integrar o ensino de proposição de problemas na matemática em sala de aula deve atender à visão dos professores sobre as vantagens de ensinar através de proposição de problemas e especialmente as suas visões de desafios encontrados no percurso.

De fato, para pesquisadores e *designers* de experiências de desenvolvimento profissional, será importante encontrar caminhos para ajudar os professores a superar os desafios que eles veem como parte do ensino com proposição de problemas. Além disso, um número de professores que têm participado de *workshops* de desenvolvimento profissional colaborou com os pesquisadores para escrever casos de ensino de proposição de problemas – estudos de caso de implementação de proposição de problemas em aulas específicas como o caso da professora Xu descrito acima (Xu; Cai, 2020) – que servem para compartilhar o que eles aprenderam sobre ensinar matemática através da proposição de problemas com outros professores (Zhang; Cai, 2021).

Cai e Hwang (2021) também argumentaram que, para proposição de problemas ser realmente inserida no currículo de matemática nas escolas, professores precisarão aproveitar seus papéis como ressignificadores do currículo para modificar os seus materiais curriculares e adaptá-los à proposição de problemas. De fato, faz sentido construir prática de proposição de problemas em cima de práticas comuns existentes. Isto permite que o professor tenha vantagem das tarefas mais simples, tal como transformar tarefas de resolução de problemas, em seus materiais curriculares, em tarefas de proposição de problemas apenas removendo algumas informações do problema ou excluindo a questão do enunciado do problema. Alguns materiais curriculares já incluem rotinas de ensino ao longo de seu texto. Por exemplo, o currículo de Matemática Ilustrativa inclui uma rotina de ensino chamada de “questões de cocriação”, que é o professor apresentando aos estudantes uma situação-problema e lhes solicita proporem problemas baseados na situação.

CONCLUSÕES E UM OLHAR PARA O FUTURO DAS PESQUISAS EM PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

É seguro dizer que “On Mathematical Problem Posing” impulsionou a pesquisa sobre a proposição de problemas. Silver tanto ajudou na formação da pesquisa em proposição de problemas como apontou direções importantes que a pesquisa em proposição de problemas poderia explorar. É encorajador ver em nossa breve revisão de literatura que há avanços marcantes na pesquisa de proposição de problemas desde o artigo de Silver (1994) e nós antecipamos que continuará a ter avanço nos anos que virão. Nossa previsão é corroborada pela observação de que, internacionalmente, ainda há poucas atividades em proposição de problemas nos livros didáticos mesmo quando as orientações curriculares têm clamado para dar aos estudantes a oportunidade de propor problemas matemáticos (Cai; Jiang, 2017). Há muito espaço para o progresso contínuo incorporar proposição de problemas nas experiências matemáticas dos estudantes.

Ao longo dos anos, um número de pesquisadores continuou sintetizando pesquisa em proposição de problemas e sugerem direções futuras para pesquisa (Cai *et al.*, 2015; Cai; Hwang, 2020; Cai; Leikin, 2020; Silver, 2013; Singer *et al.*, 2013). Não pretendemos aqui repetir as discussões das sínteses anteriores. Em vez disso, estreitamos o nosso olhar para nos concentrarmos em três áreas específicas de pesquisa sobre a proposição de problemas matemáticos construídos nestes escritos anteriores porque acreditamos que, entre as muitas áreas de pesquisa relacionadas com a proposição de problemas, estas áreas estão maduras para um progresso que poderia significativamente mover o campo inteiro adiante.

Processos Afetivos e Cognitivos da Proposição de Problemas

A primeira área específica de pesquisa que gostaríamos de destacar novamente se preocupa com os processos da proposição de problemas. Contudo, acreditamos que é importante ir além dos processos cognitivos para atender tanto ao processo afetivo como ao processo cognitivo da proposição de problemas (Cai; Leikin, 2020). Está claro que há aspectos importantes do processo de proposição de problemas que requerem atenção. Por exemplo, Akay e Boz (2010) estabeleceram que proposição de problemas pode ter uma influência positiva na própria eficácia da compreensão matemática. Na pesquisa de resolução de problemas, a área de educação matemática tem uma base de conhecimento bem desenvolvida sobre processos cognitivos e afetivos pertinentes (McLeod; Adams, 1989; Schoenfeld, 1985; Silver, 1985). Contudo, na pesquisa de proposição de problemas, apesar dos pesquisadores identificarem estratégias gerais ou heurísticas que os estudantes podem usar para propor problemas (Brown; Walter, 1983; Cai; Cifarelli, 2005; Christou *et al.*, 2005; Cifarelli; Cai, 2005; English, 1998; Koichu, 2020; Leung; Silver, 1997; Rott *et al.*, 2021; Silver; Cai, 1996) e comecem a documentar múltiplos processos afetivos na proposição de problemas matemáticos (coletivamente, o que Schindler e Bakker, 2020, descrevem como “campo afetivo”), ainda não há um análogo geral da proposição de problemas para estruturas bem estabelecidas para resolução de problemas (Garofalo; Lester, 1985; Polya, 1957; Schoenfeld, 1985).

Alguns pesquisadores (Cai *et al.*, 2022) têm clamado por pesquisas sobre processos afetivos e cognitivos de proposição de problemas com um foco particular em variáveis, processos e produtos das tarefas. Eles especificamente destacam a necessidade de pesquisar sobre as seguintes questões: Como características diferentes de situações-problema e comandos influenciam a proposição de problemas dos sujeitos? Que processos afetivos e cognitivos envolvem a proposição de problemas dos sujeitos, baseados em situações-problema e comandos com características diferentes? Além disso, eles recomendam que essas questões de pesquisa sejam exploradas em diferentes níveis, como níveis individuais, em pequenos grupos ou na sala inteira.

Ensinando Matemática Através da Proposição de Problemas

Um dos objetivos principais da pesquisa educacional é melhorar a aprendizagem dos alunos. A melhoria do ensino pode acontecer em vários níveis, como nacional, estadual, distrital ou escolar. Contudo, uma das áreas mais eficazes para a melhoria do ensino pode estar ao nível da aula. Neste nível, parece haver um forte potencial para a proposição de problemas proporcionar mais oportunidades de aprendizagem de alta qualidade aos alunos através da integração da proposição de problemas na aula.

Se os professores incorporarem tarefas de proposição de problemas valiosas nas suas aulas de matemática, surgem pelo menos duas questões: (1) Como podem as respostas dos alunos às tarefas de proposição de problemas fornecerem aos seus professores *insights* úteis sobre o pensamento matemático dos alunos? e (2) Como podem os professores fazerem uso eficaz desses *insights* com os problemas propostos pelos alunos na aula? Certamente, quanto mais informação os professores obtiverem sobre como os alunos pensam e o que sabem, mais serão capazes de utilizar essa informação para criar oportunidades de aprendizagem eficazes para todos os seus alunos. Como notado acima, os pesquisadores de proposição de

problemas usaram tarefas de proposição de problemas para entender e avaliar o pensamento dos estudantes (Cai; Hwang, 2002; English, 1998; Silver; Cai, 1996). Por exemplo, no estudo de Kotsopoulos e Cordy (2009) com estudantes do sétimo ano, os pesquisadores foram capazes de usar os diários de proposição de problemas dos estudantes para achar uma janela necessária do entendimento dos objetivos de aprendizagem dos estudantes.

E uma vez que os professores obtiverem informações sobre o entendimento matemático dos estudantes através da proposição de problemas, como eles vão usar os problemas propostos pelos estudantes efetivamente para configurar o debate em sala de aula e auxiliar os estudantes a aprenderem? Estudantes podem propor diferentes tipos de problemas, incluindo os que são irrelevantes para os objetivos matemáticos da aula e os que são difíceis de resolver, mesmo se eles forem relevantes, prender-se a eles pode atrapalhar a aula. Professores devem tomar decisões importantes sobre quais problemas discutir no momento, como discutir esses problemas e quais reservar para depois. Um problema chave aqui é decidir se um problema proposto tem potencial de auxiliar a turma a fazer progresso em relação aos objetivos específicos de aprendizagem da aula. Zhang e Cai (2021) analisaram 22 casos de ensino de proposição de problemas para entender como professores, nestes casos, fizeram uso dos problemas propostos pelos estudantes. Eles descobriram um padrão consistente dos professores tomando decisões intencionais sobre quais problemas usar baseados na relevância dos problemas para seus objetivos de ensino. Contudo, isso requer uma grande ação por parte do professor – saber quais problemas podem destacar o conceito matemático chave em mão – ou seja, ver o potencial matemático nos problemas propostos. Embora algum pensamento possa ser feito de antemão ao planejar a aula e antecipar os tipos de problemas que os estudantes vão propor, o campo não tem um entendimento abrangente de como o professor vai lidar com os problemas propostos pelo estudante. Uma análise mais aprofundada de lições autênticas de proposição de problemas, seja por meio de casos de ensino ou de exemplos gravados em vídeo, pode ser um caminho pelo qual o campo aborda esta área (Cai, 2022).

Aprendizagem Profissional dos Professores para Ensinar Matemática Através da Proposição de Problemas

Visto que o ensino através da proposição de problemas exige uma tomada de decisão instrucional significativa, tanto no planejamento como na implementação de aulas de proposição de problemas, os professores necessitarão de uma preparação adequada. Tal como está, embora os professores sejam bastante capazes de propor problemas por eles mesmos, aprender como engajar os seus alunos em proposição de problemas produtiva que sirva aos objetivos de aprendizagem de uma aula de matemática exigirá uma significativa aprendizagem profissional do professor. A aprendizagem dos professores envolve tanto o desenvolvimento do conhecimento dos professores de proposição de problemas e como este pode ser utilizado nas aulas de matemática e no desenvolvimento de crenças produtivas sobre a proposição de problemas. Em última análise, o objetivo é transformar a aprendizagem dos professores em mudanças substanciais no seu ensino em sala de aula, para incluir a proposição de problemas com o objetivo de melhorar a aprendizagem dos estudantes. A pesquisa tem mostrado consistentemente a importância das crenças dos professores na aprendizagem profissional dos professores e no ensino de sala de aula (Philipp,

2007; Richardson, 1996; Thompson, 1992) e isto não é menos verdade para aprender a ensinar matemática através da proposição de problemas. Em particular, a crença dos professores acerca das vantagens e desafios da proposição de problemas como ferramenta de ensino vai configurar sua adoção e implementação (Cai *et al.*, 2020). Mais pesquisa é necessária para articular as especificidades de quais conhecimentos e crenças professores devem desenvolver para efetivamente usar proposição de problemas para ensinar matemática tão bem quanto tipos de experiências de aprendizagem profissional apoiam melhor esse desenvolvimento.

Um caminho promissor para desenvolver e compartilhar esse tipo de conhecimento matemático foi mencionado acima. Casos de ensino de proposição de problemas – casos meticulosamente documentados de ensino de matemática através de proposição de problemas – podem ser um artefato eficaz e tangível tanto para auxiliar a aprendizagem do profissional como para disseminar o que foi aprendido (Cai *et al.*, 2023). Em particular, isso é possível quando os professores por si mesmos desempenham um papel principal no desenvolvimento e escrita de tais casos. A aprendizagem baseada no caso é utilizada como uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do professor (Smith; Friel, 2015; Stein *et al.*, 2000). Por exemplo, na China, Cai e seus colaboradores (Cai *et al.*, 2021; Zhang; Cai, 2021) se engajaram com pesquisa na proposição de problemas nas quais professores do ensino fundamental que estão aprendendo a ensinar matemática através da proposição de problemas se engajam em *workshops* de desenvolvimento profissional e colaboram com pesquisadores professores e grupos dentro das escolas para desenvolver casos de ensino de proposição de problemas.

Os casos que estes professores estão desenvolvendo são mais do que simples planos de aula ou relatórios sobre a implementação de uma aula (Zhang; Cai, 2021). Eles incluem componentes múltiplos que capturam um instante do ensino, bem como da teoria e experiência subjacente às decisões instrucionais nele contidas. O primeiro componente explica os objetivos de aprendizagem matemática da aula, incluindo uma descrição do que significa entender o tópico do conteúdo e uma análise matemática que situa o conteúdo dentro da estrutura matemática do currículo. O segundo componente é uma análise cognitiva dos objetivos e do conteúdo de aprendizagem, com foco nas dificuldades potenciais dos alunos e no entendimento e conhecimento prévio que os alunos precisam para ter sucesso na aula. O terceiro componente é uma descrição dos principais componentes da aula, focado em cada tarefa instrucional, com uma justificativa para cada tarefa de proposição de problemas que explica o propósito da tarefa e o que os alunos devem aprender com ela e detalhes sobre a implementação, incluindo respostas potenciais dos alunos (por exemplo, problemas propostos) ideias sobre como o professor poderia lidar com essas respostas e reflexões específicas de experiências com a implementação da aula. O caso de ensino termina com uma reflexão que resume como a aula promoveu o entendimento matemático dos alunos e fornece alguma orientação a outros professores sobre o que prestar atenção ao ministrar uma aula deste tipo. Os casos de ensino (e todos os quatro componentes) podem ser interativamente e continuamente melhorados conforme as lições são implementadas repetidamente, para que incorporem o melhor daquilo que os professores e pesquisadores aprendem à medida que trabalham para refinar as aulas e unidades.

Mesmo que recursos como casos de ensino possam apoiar uma aprendizagem significativa dos professores sobre o ensino através da proposição de problemas, a pesquisa sobre a aprendizagem profissional dos professores não produziu evidências robustas de que a aprendizagem dos professores, de modo geral, tenha o efeito desejado na aprendizagem dos alunos. De fato, os pesquisadores analisaram mais de 1.300 estudos que abordaram o efeito do desenvolvimento profissional nos resultados de aprendizagem dos alunos, considerando difícil detectar a tradução da aprendizagem profissional em ganhos de alcance dos estudantes (Guskey; Yoon, 2009; Yoon *et al.*, 2007). Alguns pesquisadores criticaram o rigor do *design* em estudos que examinam a relação entre aprendizagem profissional do professor e melhorias na aprendizagem do estudante. Por exemplo, Yoon *et al* (2007) descobriram que apenas nove pesquisas de 1.300 estudos que eles revisaram atenderam aos padrões *What Works Clearinghouse* (WWC) de rigor no *design*.

De fato, uma razão pela qual a relação complexa entre a aprendizagem profissional do professor e as melhorias da aprendizagem do estudante é desafiadora para estudar é porque a relação é incorporada parcialmente dentro do fenômeno do ensino em sala de aula, que é, em si mesma, um fenômeno dinâmico e complexo. No caso de ensinar através da proposição de problemas, nós destacamos a importância de atender às mudanças intencionais no ensino em sala de aula que possa mediar a relação entre a aprendizagem profissional do professor e os ganhos no alcance dos estudantes. Em particular, propomos não apenas que o desenvolvimento e refinamento dos casos de ensino possam servir como mecanismo para aprendizagem do professor, mas também como os casos de ensino em si mesmos possam atuar como objetos tangíveis e dinâmicos que armazenam informações sobre a qualidade das aulas (e suas melhorias contínuas) que podem ser compartilhadas dentro e ao longo das comunidades. Neste sentido, professores se engajam em uma aprendizagem profissional enquanto eles contribuem e modificam os casos de ensino, e os casos de ensino armazenam e tornam acessíveis detalhes suficientes sobre uma aula aprimorada para transmitir o que é necessário para apoiar a execução e a melhoria da aula. Este nível de informação detalhada deve incluir as justificativas para mudanças e melhorias que fazem a proposição de problemas efetiva na aula. Atualmente, nós estamos engajados em um projeto para construir um sistema de aprendizagem profissional que inclua o desenvolvimento e melhorias dos casos de ensino de proposição de problemas com professores de matemática do ensino médio (Cai *et al.*, 2021). Nosso objetivo é longitudinalmente investigar o compromisso de apoiar os professores a ensinar através da proposição de problemas para enriquecer a prática de ensino dos professores e melhorar a aprendizagem dos alunos. É nossa esperança que mais pesquisadores se engajem neste trabalho prático para melhorar o ensino e fomentar uma aprendizagem profunda de matemática dos estudantes.

REFERÊNCIAS

Akay, H.;; Boz, N. (2010). The effect of problem posing oriented analyses-II course on the attitudes toward mathematics and mathematics self-efficacy of elementary prospective mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 35(1), 6.

Baumanns, L.;; Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59–76.

- Brown, S. I.,; Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. The Franklin Institute Press.
- Butts, T. (1980). Posing problems properly. In S. Krulik; R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 23–33). National Council of Teachers of Mathematics.
- Cai, J. (1998). An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 10, 37–50.
- Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(5), 719–737.
- Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Education; Didactique*, 16, 31–50.
- Cai, J.,; Cifarelli, V. V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 27(3), 43–72.
- Cai, J.,; Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 401–421.
- Cai, J.,; Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391.
- Cai, J.,; Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: Conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 1–14.
- Cai, J.,; Hwang, S. (2022). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin, C. Christou, A. Karp, D. Pitta-Pantazi,; R. Zazkis (Eds.), *Mathematical challenges for all*. Springer.
- Cai, J.,; Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(8), 1521–1540.
- Cai, J.,; Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 287–301.
- Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B.,; Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 57–69.
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C.,; Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. Ellerton,; J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). Springer.

- Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L.,; Song, N. (2020). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research*, 102, 101404.
- Cai, J., Muirhead, F., Cirillo, M.,; Hwang, S. (2021). *Supporting teachers to teach mathematics through problem posing: An early-stage longitudinal study [NSF Grant Proposal]*. University of Delaware.
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R.,; Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez,; N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.
- Cai, J., Hwang, S., Melville, M.,; Robison, V. (2023). Theories for teaching and teaching for theories: Artifacts as tangible entities for storing and improving professional knowledge for teaching. In A. Praetorius; C. Y. Charalambous (Eds.), *Theorizing teaching*. Springer.
- Chen, T.,; Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D.,; Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149–158.
- Cifarelli, V. V.,; Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3–4), 302–324.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 243–270.
- Crespo, S.,; Harper, F. (2020). Learning to pose collaborative mathematics problems with secondary prospective teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101430.
- Crespo, S.,; Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395–415.
- Doig, B.,; Groves, S. (2011). Japanese lesson study: Teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 77–93.
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems – A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261–271.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83–106.
- Fan, L., Chen, J., Zhu, Y., Qiu, X.,; Hu, Q. (2004). Textbook use within and beyond Chinese mathematics classrooms: A study of 12 secondary schools in Kunming and Fuzhou of China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai,; S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 228–261). World Scientific.

Garofalo, J.,; Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163–176.

Guo, Y., Yan, J.,; Men, T. (2021). Chinese junior high school students' mathematical problem-posing performance. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 1–13.

Guskey, T. R.,; Yoon, K. S. (2009). What works in professional development? *Phi Delta Kappan*, 90(7), 495–500.

Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics* (pp. 11–16). John Murray.

Healy, C. C. (1993). *Creating miracles: A story of student discovery*. Key Curriculum Press.

Hwang, S.,; Cai, J. (2003). A perspective for examining the link between problem solving and problem posing. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty,; J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th conference of PME-NA* (Vol. 3, pp. 103–110). Center for Research and Development Group, University of Hawai'i.

Illustrative Mathematics. (n.d.). Supporting English-language learners. https://curriculum.illustrativemathematics.org/HS/teachers/supporting_ell.html

Jiang, C.,; Cai, J. (2014). An analysis of mathematical problem-posing tasks in Chinese and US reform textbooks. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol,; D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 393–400). PME.

Jiang, C.,; Cai, J. (2015). An investigation of questions on the sixth grade students' mathematical problem posing. In K. Beswick, T. Muir,; J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 113–120). PME.

Kar, T., Özdemir, E., İpek, A. S.,; Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1577–1583.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Erlbaum.

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, 102, 101428.

Koichu, B.,; Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71–86.

Kotsopoulos, D.,; Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 259–274.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman,; B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Sense.

- Leikin, R.,; Sriraman, B. (2017). *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond*. Springer.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235–264.
- Lesh, R., Landau, M.,; Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh; M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 264–343). Academic Press.
- Leung, S. S.,; Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5–24.
- Lewis, W. M.,; Colonnese, M. W. (2021). Fostering mathematical creativity through problem posing and three-act tasks. *Gifted Child Today*, 44(3), 141–150.
- Li, X., Song, N., Hwang, S.,; Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 325–347.
- Lubinski, D.,; Benbow, C. P. (2006). Study of mathematically precocious youth after 35 years: Uncovering antecedents for the development of math-science expertise. *Perspectives on Psychological Science*, 1(4), 316–345.
- Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 520–540.
- McLeod, D. B.,; Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Melville, M.,; Corey, D. L. (2021). Kyouzaikenkyuu: An exploration of Japanese mathematics teachers' daily planning practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09493-5>
- Moses, B., Bjork, E.,; Goldenberg, E. P. (1990). Beyond problem solving: Problem posing. In T. J. Cooney; C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 82–91). National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.2307/749544>
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Information Age.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (2nd ed., pp. 102–119). Macmillan.

Rott, B., Specht, B.,; Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM*. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3>

Schindler, M.,; Bakker, A. (2020). Affective field during collaborative problem posing and problem solving: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 303–324. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09973-0>

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of “out loud” problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 171–191.

Schroeder, T. L.,; Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. *New Directions for Elementary School Mathematics*, 31, 42.

Silber, S.,; Cai, J. (2017). Pre-service teachers’ free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(2), 163–184.

Silber, S.,; Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students’ mathematical problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 1–13.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, 97(3), 75–80.

Silver, E. A. (Ed.). (2013). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Routledge.

Silver, E. A.,; Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521–539.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S.,; Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 293–309.

Singer, F. M., Ellerton, N.,; Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1–7.

Singer, F. M., Sheffield, L. J.,; Leikin, R. (2017). Advancements in research on creativity and giftedness in mathematics education: Introduction to the special issue. *ZDM*, 49(1), 5–12.

Smith, M. S.,; Friel, S. N. (Eds.). (2015). *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching*. Information Age.

Stanic, G. M. A.,; Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. In R. I. Charles; E. A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). National Council of Teachers of Mathematics.

- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A.,; Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Stoyanova, E.,; Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). Macmillan.
- Tichá, M.,; Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133–143.
- Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166–175.
- Van Harpen, X. Y.,; Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201–221.
- Voica, C.,; Singer, F. M. (2012). Creative contexts as ways to strengthen mathematics learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 33, 538–542.
- Williams, S. R.,; Leatham, K. R. (2017). Journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 369–396.
- Xie, J.,; Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 101–118.
- Xu, H.,; Cai, J. (2020). Fostering the development of students' thinking in teaching "Using letters to represent quantitative relationship" through collaborative learning and problem posing. *Elementary Mathematics Teachers*, 2020(2), 14–16. [in Chinese].
- Yao, Y., Hwang, S.,; Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 1–13.
- Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W.-Y., Scarloss, B.,; Shapley, K. (2007). *Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement* (Issues; Answers Report, REL 2007–No. 033). U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Regional Educational Laboratory Southwest.
- Zhang, H.,; Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: Insights from an analysis of teaching cases. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 1–13.
- Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z.,; Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM–Mathematics Education*, 54, 497–512.

Histórico

Recebido: 08 de agosto de 2024.

Aceito: 10 de novembro de 2024.

Publicado: 31 de dezembro de 2024.

Como citar – ABNT

CAI, Jinfa; HWANG, Stephen; MELVILLE, Matthew. Pesquisa sobre Proposição de Problemas Matemáticos: Trinta Anos de Avanços a partir da Publicação "On Mathematical Problem Posing". **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 52, e2024010, 2024. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024010.id737>

Como citar – APA

Cai, J., Hwang, S., & Melville, M. (2024). Pesquisa sobre Proposição de Problemas Matemáticos: Trinta Anos de Avanços a partir da Publicação "On Mathematical Problem Posing". *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (52), e2024010. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n52.e2024010.id737>

Número temático organizado por

Héctor José García Mendoza  