

Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade

Specialized mathematical knowledge revealed by prospective mathematics teachers on the topic of proportionality

Conocimiento matemático especializado revelado por futuros profesores de matemáticas sobre el tema de la proporcionalidad

Roberta dos Santos Rodrigues¹  

Francisco Eteval da Silva Feitosa²  

RESUMO

O pensamento proporcional vai além da simples noção de proporcionalidade, destacando-se por sua relevância tanto na aprendizagem da matemática quanto em sua aplicação em diferentes campos do conhecimento. Este artigo apresenta os resultados de uma avaliação diagnóstica realizada com sete futuros professores de Matemática, com o objetivo de descrever seus conhecimentos matemáticos sobre proporcionalidade. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujos dados foram coletados por meio de um instrumento avaliativo fundamentado nas categorias de problemas envolvendo pensamento proporcional propostas por Lesh, Post e Behr, e analisados à luz do modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Os resultados revelam que os participantes possuem conhecimento restrito ao uso do algoritmo da "regra de três", apresentam dificuldades na compreensão da proporcionalidade inversa e demonstram fragilidades conceituais, o que evidencia a necessidade de fortalecer a formação inicial para favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado voltado ao ensino da proporcionalidade.

Palavras-chave: Pensamento proporcional; Formação de professores; MTSK; Resolução de problemas.

ABSTRACT

Proportional thinking goes beyond the mere notion of proportionality, standing out for its relevance both in mathematics learning and in its application across different fields of knowledge. This article presents the results of a diagnostic assessment conducted with seven prospective mathematics teachers, aiming to describe their mathematical knowledge about proportionality. It is a qualitative study, in which data were collected through an assessment instrument based on the categories of problems involving proportional reasoning proposed by Lesh, Post, and Behr, and analyzed considering the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. The results reveal that the participants' knowledge is limited to the use of the "rule of three" algorithm, show difficulties in understanding inverse proportionality, and demonstrate conceptual weaknesses, highlighting the need to strengthen initial teacher education to foster the development of specialized mathematical knowledge for teaching proportionality.

Keywords: Proportional thinking; Teacher instruction; MTSK; Problem solving.

RESUMEN

El pensamiento proporcional va más allá de la noción de proporcionalidad, destacándose por su relevancia tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en su aplicación en diferentes campos del conocimiento. Este artículo presenta los resultados de una evaluación diagnóstica realizada con siete futuros profesores de Matemáticas, con el objetivo de describir sus conocimientos matemáticos sobre proporcionalidad. Se trata de una investigación cualitativa, cuyos datos fueron recolectados mediante un instrumento de evaluación basado en las categorías de problemas que implican pensamiento proporcional propuestas por Lesh, Post y Behr, y analizados a la luz del modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Los resultados revelan que los participantes poseen un conocimiento limitado al uso del algoritmo de la "regla de tres", presentan dificultades en la comprensión de la proporcionalidad inversa y evidencian debilidades conceptuales, lo que resalta la necesidad de fortalecer la formación inicial para promover el desarrollo del conocimiento matemático especializado orientado a la enseñanza de la proporcionalidad.

Palabras clave: Pensamiento proporcional; formación de profesores; MTSK; resolución de problemas.

¹ Licenciada em Matemática (UFAM). Discente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM-UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Genebra, 4, Qd. 25, Conj. Campos Elíseos, Planalto, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69045-380. E-mail: roberta.rodriques@ufam.edu.br.

² Doutor em Matemática (UFAM). Docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM-UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Rua das Oliveiras, 9, Novo Israel, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69039-305. E-mail: sfeitosa@ufam.edu.br.

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental destaca a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais da Matemática, as quais são consideradas importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático e devem ser tratadas, no ambiente escolar, como objetos de conhecimento (Brasil, 2018). Segundo esse documento norteador, o tema proporcionalidade está presente em todas as unidades temáticas – Números, Grandezas e Medidas, Álgebra, Geometria e Probabilidade e Estatística – e, mais especificamente para o Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes desenvolvam o pensamento proporcional por meio da exploração de situações que permitam representar a variação entre grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas, além de analisar e identificar o tipo de variação envolvida – seja ela diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional (Brasil, 2018).

No entanto, não obstante a sua relevância, Lamon (2012, 2016) aponta que as ideias de proporcionalidade são pouco assimiladas, principalmente porque são ensinadas de forma mecanizada na sala de aula, sem promover uma compreensão profunda do pensamento proporcional subjacente. Silvestre e Ponte (2012) relacionam a rigidez no pensamento proporcional dos estudantes à limitada diversidade das tarefas matemáticas apresentadas em sala de aula. Dessa forma, Magina, Spinillo e Lautert (2020) enfatizam a necessidade de os professores ampliarem seus conhecimentos sobre problemas de estrutura multiplicativa – da qual os problemas envolvendo proporcionalidade fazem parte – e de proporem em sala de aula uma maior variedade de situações.

Além disso, tanto os professores em exercício quanto os na formação inicial têm dificuldades em ensinar conceitos relacionados à proporcionalidade (Burgos *et al.*, 2018). Segundo esses autores, uma das principais dificuldades apontadas em estudos é que os professores frequentemente utilizam o algoritmo de multiplicação cruzada (regra de três) para resolver problemas, sem avaliar se essa abordagem é adequada à situação em questão. Este método algorítmico, além de ser mal compreendido pelos estudantes (Post; Behr; Lesh, 1995) também é geralmente utilizado mais para evitar o pensamento proporcional do que para favorecê-lo (Lesh; Post; Behr, 1988).

As dificuldades mencionadas refletem o que Fuentes Leal (2020) descreve como uma *tensão* entre a relevância e a presença transversal da proporcionalidade no currículo escolar e os obstáculos persistentes em sua compreensão e aplicação ao longo da trajetória educacional dos alunos. Considerando que estudos indicam que o professor exerce a maior influência sobre a aprendizagem dos estudantes (Darling-Hammond, 2000; Boyd *et al.*, 2009; Hill; Chin, 2018), torna-se essencial desenvolver investigações voltadas à formação docente. Ou seja, para que os estudantes desenvolvam competências e consigam superar tais dificuldades, é fundamental que o professor possua um conhecimento aprofundado sobre os conteúdos que pretende ensinar.

Diante do exposto, evidencia-se a relevância de investigações que abordem o conhecimento matemático de futuros professores no campo da Educação Matemática. Nesse contexto, este estudo busca responder à seguinte questão: que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de Matemática ao responderem a uma ava-

liação diagnóstica sobre proporcionalidade? Para isso, tem como objetivo apresentar e analisar os resultados dessa avaliação, identificando os aspectos do conhecimento matemático especializado evidenciados pelos participantes acerca do tópico proporcionalidade.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresentamos uma visão geral sobre o pensamento proporcional, destacando sua complexidade, abrangência e relevância tanto no campo da Matemática quanto no contexto escolar. Abordamos ainda o modelo teórico-analítico Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), que será utilizado como ferramenta para a análise dos conhecimentos manifestados pelos professores participantes desta pesquisa. Por fim, articulamos o objeto matemático foco do estudo com o modelo, de modo a situá-lo na perspectiva do MTSK e a evidenciar as relações entre o conceito e o subdomínio do conhecimento docente investigado.

Proporcionalidade

A proporcionalidade integra o denominado Pensamento Proporcional (Bianchini; Lima, 2023), o qual, de acordo com Lesh, Post e Behr (1988), pode ser considerado uma das bases fundamentais da Matemática. Embora seu alcance vá além da mera compreensão das relações proporcionais, esse tipo de pensamento abarca o estudo das proporções (Lamon, 2012), e seu desenvolvimento adequado é apontado como uma “condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade” (Falvo; Jucá, 2022, p. 139).

Scheller e Bonotto (2020) destacam que o pensamento proporcional envolve compreender adequadamente a existência de uma relação constante entre duas grandezas – ou seja, a invariância –, bem como perceber que essas grandezas se modificam simultaneamente – a chamada covariância. Da mesma forma, Lamon (2012) aponta que o pensamento proporcional inclui tanto a habilidade de ampliar ou reduzir escalas quando necessário, quanto a capacidade de justificar conjecturas sobre as relações envolvidas em contextos de proporcionalidade, seja direta ou inversa.

Maranhão e Machado (2011), ao realizarem uma meta-análise sobre investigações acerca do pensamento proporcional, sintetizam esse tipo de pensamento em cinco descritores essenciais: (i) reconhecer a diferença entre situações proporcionais e não proporcionais; (ii) distinguir variáveis diretamente proporcionais daquelas inversamente proporcionais; (iii) empregar multiplicação e divisão na resolução de problemas de proporcionalidade; (iv) realizar comparações tanto numéricas, envolvendo números racionais, quanto qualitativas; e, por fim, (v) considerar a ideia de covariação, superando uma concepção restrita que reduz a proporcionalidade a algoritmos e procedimentos mecânicos.

Além disso, em alinhamento com a concepção de Vergnaud (1994), segundo a qual o conhecimento se constrói a partir da interação do sujeito com a situação-problema, Lesh, Post e Behr (1988) propõem uma classificação que organiza as diferentes situações que demandam a mobilização do pensamento proporcional em sete distintas categorias, as quais ressaltam múltiplas dimensões tanto da proporcionalidade quanto do pensamento propor-

cional (Falvo; Juca, 2022): problema de valor omissivo; problema de comparação; problema de transformação; problema de média; problema de conversão; problema envolvendo unidades de medida e números; e problema de translação.

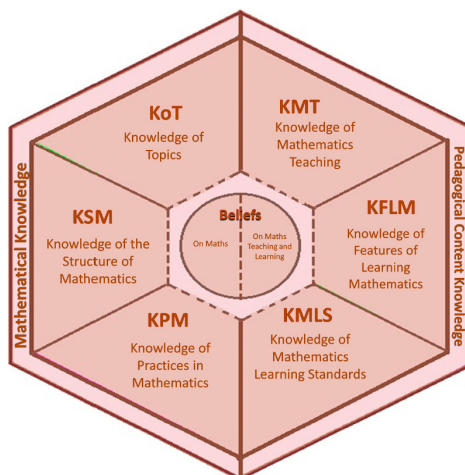
No entanto, determinados tipos de problemas, como aqueles que envolvem a conversão entre diferentes sistemas de representação, raramente aparecem nos livros didáticos e tampouco são foco recorrente das investigações sobre o tema, uma vez que consistem em ações dinâmicas cuja tradução em linguagem escrita é desafiadora. Ainda assim, tais problemas são comuns no cotidiano e refletem processos frequentemente utilizados pelos estudantes ao resolverem tarefas relacionadas à proporcionalidade (Lesh; Post; Behr, 1988).

Diante da ausência desses problemas nos materiais didáticos, torna-se essencial que o professor possua conhecimentos específicos sobre eles, considerados inerentes à prática docente em matemática. Assim, adota-se uma perspectiva que valoriza as particularidades do conhecimento profissional do professor de matemática, especialmente no que diz respeito à sua natureza especializada e ao domínio do conteúdo, com ênfase no tema da proporcionalidade. Para este trabalho, elegemos o modelo teórico Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo *et al.*, 2018) e suas dimensões, que serão explorados a seguir.

Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK

Devido a relevância da investigação a respeito do conhecimento do professor, nas últimas décadas desenvolveu-se propostas de modelos teóricos que se aprofundam em aspectos específicos desse conhecimento, dentre os quais o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo *et al.*, 2018). O MTSK é estruturado em dois domínios principais, cada qual composto por três subdomínios: o Mathematics Knowledge – MK, que diz respeito ao conhecimento que o professor possui sobre a matemática enquanto disciplina científica no contexto educacional, e o Pedagogical Content Knowledge – PCK, que engloba os saberes vinculados ao ensino e à aprendizagem do conteúdo matemático. Além disso, há ainda o domínio das Beliefs, que compreende as crenças e percepções do professor a respeito tanto da matemática quanto sobre o seu processo de ensino e aprendizagem (Figura 1).

Figura 1 – Domínios e subdomínios do modelo MTSK.



Fonte: Carrillo *et al.* (2018).

Aqui, em razão do foco que adotamos, discutimos apenas o conteúdo do conhecimento referente ao KoT, o qual se refere ao conhecimento profundo do conteúdo matemático em si, isto é, conhecer os conteúdos matemáticos e seus significados de maneira fundamentada e sempre com um nível de profundidade, organização e estruturação maior do que se espera dos estudantes (Ma, 1999). Esse subdomínio é composto por quatro categorias, que são caracterizadas a seguir.

A categoria de **Definições, propriedades e fundamentos** refere-se ao conhecimento matemático do professor sobre o tópico proporcionalidade, o qual deve ser sempre mais profundo que o do estudante (Carrillo *et al.*, 2018). Abrange o conhecimento do que caracteriza duas grandezas serem diretamente ou inversamente proporcionais, por exemplo. Além disso, esta categoria também contempla o domínio sobre as propriedades e fundamentos que são associados a um tema específico, como o conhecimento das propriedades de razões equivalentes, que são úteis na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade.

A categoria **Fenomenologia e aplicações** envolve, de um lado, o conhecimento das diversas situações em que o professor pode contextualizar a proporcionalidade, atribuindo-lhe significado e promovendo a construção de saberes matemáticos, incluindo aquelas relacionadas à origem do próprio conceito (Carrillo *et al.*, 2018). Um exemplo seria o professor conhecer os diferentes tipos de problemas que dão sentido ao conceito de proporcionalidade. Por outro lado, essa categoria também engloba o domínio sobre as aplicações práticas desse tópico, como, por exemplo, a utilização do conceito de escala no contexto do trabalho com plantas baixas em projetos de construção.

A categoria **Registros de representação** diz respeito às diversas maneiras que o professor pode empregar para expressar um conceito, processo ou procedimento, incluindo representações gráficas, algébricas, aritméticas, pictóricas, em linguagem natural, entre outras. Além disso, abrange o domínio sobre a notação e a terminologia adequadas a essas formas de representação (Carrillo *et al.*, 2018). Por exemplo, envolve a capacidade do professor de apresentar as relações multiplicativas entre duas grandezas proporcionais utilizando esses diferentes registros, assim como de representar uma razão por meio de frações, tabelas ou gráficos.

Já a categoria **Procedimentos** abrange o conhecimento sobre algoritmos, sejam eles convencionais ou alternativos, incluindo como executá-los, quando são apropriados, além dos fundamentos matemáticos que justificam seu uso — o que estabelece uma conexão com as propriedades e definições associadas — e as características do objeto matemático resultante (Carrillo *et al.*, 2018). Por exemplo, essa categoria contempla o domínio sobre quais situações requerem o uso de estratégias baseadas em raciocínio multiplicativo ou aditivo, bem como a compreensão do fundamento da conhecida “regra de três”, explicando por que esse método é adequado para resolver problemas que envolvem proporcionalidade.

METODOLOGIA

Este estudo, que é um recorte de uma pesquisa maior no nível de mestrado acadêmico, possui um enfoque teórico interpretativo a partir de uma abordagem qualitativa, visto que buscamos analisar e compreender o conhecimento matemático especializado

mobilizado por um grupo de futuros professores ao responderem um questionário diagnóstico. Nossas ações vão ao encontro do pensamento de Stake (2011) quando diz que o termo “qualitativa” significa que a forma de pensar nesse tipo de pesquisa fundamenta-se principalmente na percepção e na compreensão humana. Além disso, a pesquisa tem o delineamento de estudo de caso instrumental (Stake, 2005), no qual o caso é escolhido com a expectativa de que contribua para uma melhor compreensão de um contexto mais amplo, oferecendo percepções valiosas sobre o tema em questão, que, neste caso, é o conhecimento matemático especializado do professor para o ensino de proporcionalidade.

Os participantes deste estudo são 7 (sete) professores de matemática em formação inicial, cursando o 3º período (2º ano) da Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Amazonas – UFAM. Todos os participantes são bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID e estão estagiando em escolas da rede pública de ensino da capital do estado, sendo que 4 (quatro) estagiam em turmas de 7º e 8º ano (12 e 13 anos) e 3 (três), em turmas de Ensino Médio (15 a 17 anos).

De modo geral, com a aplicação desse questionário diagnóstico, buscamos compreender o conhecimento dos participantes sobre a resolução dos diferentes tipos de problemas que dão significado ao conceito de proporcionalidade, bem como identificar as distintas estratégias por eles mobilizadas para esse fim (Scheller; Bonotto, 2020; Spinillo, 1994). Pretendemos ainda investigar se eles demonstram uma atitude crítica na escolha de abordagens adequadas a cada situação proposta (Burgos *et al.*, 2018).

O questionário era composto por nove questões, sendo uma conceitual enquanto as demais eram problemas formulados segundo as sete categorias de problemas envolvendo o pensamento proporcional (Lesh; Post; Behr, 1988). Cada uma das questões possui uma intencionalidade específica relacionada com determinados conhecimentos que compõem as categorias do subdomínio KoT, o qual buscamos investigar. Neste trabalho **são** analisadas duas questões (Quadro 1), as quais estão descritas abaixo.

Quadro 1 – Questões do Questionário Diagnóstico analisadas neste recorte.

1. O que você entende por:
a) Proporcionalidade?
b) Proporcionalidade direta? Dê um exemplo de uma situação em que as variáveis são diretamente proporcionais.
c) Proporcionalidade inversa? Dê um exemplo de uma situação em que as variáveis são inversamente proporcionais.
2. Mantendo uma velocidade, um carro percorre 250 km em 3 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas? Em um outro trecho, sabe-se que se o carro andar a 80 km/h, levará 5 horas para percorrer este trecho. A que velocidade o carro deverá andar se quiser percorrer esse trecho em 4 horas?

Fonte: Elaboração pelos autores.

Sendo assim, a questão 1 visa aceder ao conhecimento dos participantes acerca das definições de proporcionalidade, proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa (KoT – Definição), assim como ao conhecimento de identificar situações que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais (KoT – Fenomenologia e aplicações) através dos exemplos dados. Para essa questão, foi dada a orientação que os participantes poderiam uti-

lizar esquemas, palavras, cálculos, figuras etc. para expressarem o que entendem por esses conceitos (KoT – Registros de representação).

Na questão 2, com vistas a aceder a uma grande gama de conhecimentos dos participantes, solicitou-se que eles: identificassem as grandezas envolvidas na situação, visto que esse conhecimento é transversal ao conceito de proporcionalidade e essencial para reconhecer e compreender conceitualmente a relação entre as quantidades; indicassem se há uma situação de proporcionalidade envolvida (KoT – Fenomenologia e aplicações) e, se houver, justificar o porquê; e resolver o problema proposto, explicando o seu raciocínio e descrevendo o processo que usaram para resolvê-lo através de esquemas, palavras, cálculos etc. (KoT – Procedimentos).

Isso posto, os problemas apresentados nessa questão pertencem à categoria Problema de valor omisso (Lesh; Post; Behr, 1988), na qual, relativamente às duas magnitudes envolvidas, são conhecidas três quantidades, digamos A, B e C e, recorrendo à relação $A/B = C/D$, deve-se determinar a quantidade D. Essa questão visa aceder ao conhecimento da diferença entre situações que envolvem variáveis diretamente proporcionais e inversamente proporcionais (KoT – Fenomenologia e aplicações), visto que ela **é composta por uma situação que** contém proporcionalidade direta e uma que envolve proporcionalidade inversa, e ao conhecimento das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos).

Para a análise dos dados produzidos pelos participantes, foi adotada a técnica de análise de conteúdo (Bardin, 2011), estruturada em três etapas: pré-análise – na qual foi realizada a organização do *corpus* de dados, composto pelas respostas escritas e pelas transcrições das entrevistas, e leitura flutuante com o objetivo de identificar manifestações do conhecimento relacionado às categorias do KoT dos participantes –, exploração do material – procedeu-se à codificação e categorização dos dados, com base em um sistema de categorias previamente definido a partir do referencial teórico adotado, os quais foram organizados em subcategorias que expressem tanto as evidências de conhecimento robusto quanto as fragilidades identificadas nas respostas dos participantes – e tratamento dos resultados, inferência e interpretação – os dados categorizados foram analisados à luz dos objetivos da pesquisa e do referencial teórico, buscando-se identificar padrões, tendências e possíveis lacunas no conhecimento matemático especializado dos participantes. As interpretações são discutidas em relação às implicações para a formação inicial de professores de matemática e para o ensino de conceitos relacionados à proporcionalidade.

Essa abordagem se mostra adequada ao caráter qualitativo e interpretativo do estudo, uma vez que possibilita a sistematização e a compreensão aprofundada dos dados produzidos a partir das respostas dos participantes ao questionário diagnóstico e das transcrições das entrevistas. Com vistas a assegurar a validade e a confiabilidade da análise, foi realizado um processo de dupla codificação independente, seguido de reuniões de consenso entre os pesquisadores para resolução de eventuais divergências na classificação dos dados.

ANÁLISES E RESULTADOS

Esta seção apresenta a análise dos resultados da avaliação diagnóstica aplicada aos participantes, focando nos conhecimentos sobre proporcionalidade. A interpretação dos dados, baseada nas categorias de Lesh, Post e Behr (1988) e no modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2018), revela as manifestações do pensamento proporcional e suas implicações para a aprendizagem e aplicação da matemática.

Na letra a) da questão 1, esperava-se que os participantes interpretassem a proporcionalidade como uma relação entre partes – as quais podem ser quantidades ou conjuntos – através de uma das seguintes diferentes formas de comunicar o conceito de proporcionalidade identificadas por Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017): (i) Como uma razão constante entre duas partes, denotada por $a/b = a:b$ (a está para b) (Ben-Chaim; Keret; Ilany, 2007); (ii) Como uma igualdade entre razões (sustentada pelo teorema de Tales), denotadas por $a/b = c/d$ (a está para b, assim como c está para d) (Imenes; Lellis, 2005); (iii) Como relações cujos elementos de um conjunto pudessem corresponder respectivamente aos elementos de outro conjunto, multiplicados ou divididos por uma constante, denotadas por uma função do tipo linear.

Já nas letras b) e c) dessa mesma questão, esperava-se que os participantes citassem a principal diferença entre uma relação proporcional direta e uma relação proporcional inversa. Uma forma seria, considerando o cenário (iii): tomando a grandeza como uma função da grandeza, dizemos que é diretamente proporcional à quando é uma função crescente de, e que se multiplicarmos por um número natural, o valor correspondente de também fica multiplicado por, enquanto numa relação inversamente proporcional, é uma função decrescente de e, ao multiplicarmos por um número natural, o valor correspondente de fica dividido por (Lima, 1988). Além disso, foi pedido que dessem exemplos de situações envolvendo cada um dos tipos de relação a fim de que pudéssemos evidenciar se eles conheciam o que as caracteriza.

Dito isso, a partir das análises dos questionários, tem-se que apenas um participante (A) fez referência à razão como pertinente a uma relação envolvendo proporcionalidade, cuja resposta à entrevista deu indícios de que conhece a proporcionalidade conforme o cenário (iii) (KoT – Definição), cujo foco está nas relações multiplicativas.

Pesquisadora: Na letra a) da questão 1, o que que tu quiseste dizer com “de modo semelhante? Quando tu colocas assim “quando duas grandezas se diferenciam de modo semelhante”.

Participante (A): Conforme elas são diretamente ou inversamente, elas vão crescer ou se dividir dependendo da [faz sinal de aspas] razão de proporcionalidade.

Quanto ao entendimento sobre proporcionalidade direta e inversa, o participante manteve sua conceituação, detalhando os elementos que caracterizam cada tipo de relação e dando exemplos de situações pertinentes a elas (KoT – Fenomenologia e aplicações). Isso pode ser observado em sua resposta escrita ao questionário sobre proporcionalidade direta (Figura 2).

Figura 2 – Conceitualização de proporcionalidade direta pelo participante A.

Quando duas grandezas crescem ^{ou diminuem} igualmente mantendo uma razão.

Fonte: dados da pesquisa.

Dessa forma, a ideia que esse participante tem sobre proporcionalidade vai ao encontro de Imenes e Lellin (2005, p. 20) quando afirmam que, no caso da proporcionalidade direta, “[...] generalizando, multiplica-se um valor de A por qualquer número K, o mesmo acontece com o valor correspondente de B” (KoT – Definição). Por outro lado, duas participantes (B e F), apesar de não conhecerem a definição de proporcionalidade, demonstraram ter a ideia de proporcionalidade essencialmente como uma igualdade entre frações (Figura 3) – ao invés de uma igualdade entre razões, como indica o cenário (ii) –, o que pode ser evidenciado também na fala de uma delas na entrevista quando diz:

Participante (B): O que que eu tinha pensado, quando era diretamente proporcional, né. Quando, por exemplo, no caso o numerador e o numerador eram o mesmo, e o denominador e o denominador também era o mesmo. Só que eu acho que não é. Mas aí foi só na base de achismo.

Figura 3 – De cima para baixo, resposta à letra a) da questão 1 pela participante F e à letra b) da questão 1 pela participante B.

são duas frações iguais, tipo algo assim $\frac{5}{80} = \frac{4}{64}$ = se simplificamos
 acho $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ são exatas mas se por a caso desse: $\frac{1}{15} = \frac{1}{16}$ não seria
 exata, logo seria $\frac{1}{15} \neq \frac{1}{16}$
 não sei também, mas acredito que as relações não
 diretamente proporcionais, quando ocorrem o que
 aconteceu na questão 6.

Fonte: dados da pesquisa.

Apesar da semelhança estrutural, a diferenciação entre os conceitos de fração e razão já vem sendo discutida na literatura. Abdounur (2019) observa que a proposição geométrica/musical $A:B::C:D$ (notação de razão) é semanticamente distinta, mas estruturalmente similar à proposição aritmética $A/B = C/D$ (notação de fração). Além disso, ver a razão apenas como uma fração pode levar a erros procedimentais, como alertam Onuchic e Allevato (2008), para que não se transponham as propriedades dos números racionais, como a soma de frações, para a soma de razões, quando realizadas como vetores, por exemplo. Dessa forma, essas respostas escritas e faladas relacionando a proporcionalidade à igualdade entre frações, e não entre razões, revelam uma fragilidade no KoT – Definição das participantes, cuja origem pode estar relacionada ao tratamento mecanizado priorizado no ensino de proporcionalidade (Oliveira; Cyrino, 2015). Tal abordagem relaciona esse conceito à notação de igualdade entre duas frações para posterior aplicação do procedimento de regra de três, sem apresentar o motivo de tal aplicação, deixando de estabelecer conexões entre as grandezas envolvidas.

Prosseguindo com a análise das respostas, evidenciou-se uma compreensão que a literatura traz como recorrente no pensamento tanto de estudantes quanto de professores (Costa; Allevato, 2015; Galvão; Souza; Poggio, 2015; Onuchic; Allevato, 2015), isto é, a ideia de que quando se tem duas grandezas e ambas aumentam ou ambas diminuem, significa que existe situação de proporcionalidade (Costa; Allevato, 2015), ou seja, não há referência à constante de proporcionalidade, responsável por constituir tal relação como uma função linear, o que evidencia uma fragilidade no KoT – Definição. Esse fato pôde ser observado tanto a partir das suas respostas à definição de proporcionalidade e à diferenciação entre proporcionalidade direta e inversa – visto que atribuíram essa diferença apenas à “mudança de sentido” na relação (Figura 4) –, quanto pelos exemplos construídos (Figura 5), o que foi confirmado a partir de suas respostas às entrevistas.

Figura 4 – Resposta às letras b) e c) da questão 1 pela participante C.

Proporcionalidade direta: As duas variáveis seguem o mesmo "sentido".

Proporcionalidade inversa: (S) As variáveis seguem "sentidos" opostos, no caso, se uma aumenta, a outra diminui.

Fonte: dados da pesquisa.

Figura 5 – Exemplos construídos pela participante C para proporcionalidade direta e pelo participante E para proporcionalidade inversa, respectivamente.

Exemplo: Se eu tenho x vacas, e elas produzem y litros de leite, ao aumentar meu número de vacas, elas produzirão mais litros de leite.

São proporções que dependem do outro ou seja, 10 trabalhadores terminam uma obra em 5 dias, se diminuir o número de trabalhadores, os dias irão aumentar.

Fonte: dados da pesquisa.

Participante (C): Por exemplo um tanque tem um ralo, ele, sei lá, esvazia em 30 minutos. Se tiver mais de um, tiver dois, eu acho, talvez o tempo possa reduzir na metade.

Pesquisadora: Se tiver dois ralos, o tempo reduz à metade?

Participante (C): É.

Pesquisadora: Hum... esse é um ponto interessante. Ele aumenta, o outro diminui, beleza. Mas aí tem mais uma coisinha. Se tu tiveres dois ralos, tu disseste pra mim que o tempo diminui pela metade...

Participante (C): É, não, não sei se era pela metade, eu só...

Pesquisadora: Tu não tens certeza se era pela metade?

Participante (C): É, eu só imaginei assim pra tentar explicar, né, o inverso.

No trecho acima a participante C deu indícios de que sabia que grandezas inversamente proporcionais covariam segundo uma constante, embora ao final do diálogo afirme que foi apenas um valor aleatório, não sabendo se o resultado seria realmente aquele nem se havia “algo a mais” que caracterizasse uma relação inversamente proporcional além dos

“sentidos opostos” que seguem as grandezas, segundo trecho de sua resposta ao questionário (Figura 4), mostrando uma fragilidade no KoT–Definição.

Para Vergara, Estrella e Vidal-Szabó (2020), essas afirmações, apesar de insuficientes do ponto de vista da definição, são evidências da natureza qualitativa do pensamento dos participantes, isto é, um pensamento com base mais intuitiva e que se dá por meio do uso de linguagem informal, o qual se distingue do pensamento de natureza quantitativa, por este estar ancorado predominantemente na razão numérica e na identificação de relações proporcionais expressas por meio de propriedades matemáticas.

O participante E, ao tentar responder à questão 1, fez conceitualizações confusas e/ou circulares (Figura 6), demonstrando uma fragilidade no seu conhecimento, visto que a não-circularidade é um dos atributos essenciais à construção de uma definição (Escudero *et al.*, 2014). Não obstante, quando solicitado que explicasse melhor o que havia pensado para cada alternativa, suas afirmações foram ao encontro do raciocínio dos participantes acima, ou seja, sem fazer referência à constante de proporcionalidade. Além do mais, percebeu o equívoco no seu exemplo de proporcionalidade direta, corrigindo que, na verdade, a relação velocidade-tempo é inversamente proporcional (KoT – Fenomenologia e aplicações), utilizando o argumento de que para percorrer um trecho em um intervalo de tempo menor, a velocidade precisa ser maior, o que caracterizaria uma relação proporcional inversa (apesar de esse argumento não ser suficiente para tal).

Figura 6 – De cima para baixo, resposta do participante E às letras a), b) e c) da questão 1.

Uma divisão em partes iguais.

São proporções que são diretamente proporcionais, tanto de um lado como no outro. Velocidade — hora

São proporções que dependem do outro ou seja, 10 trabalhadores terminam uma obra em 5 dias, se diminuir o número de Trabalhadores, os dias irão aumentar

Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, três participantes (B, D e G) relacionaram proporcionalidade apenas à regra de três (Figura 7), demonstrando uma fragilidade no KoT – Definição e atestando, mais uma vez, o impacto de uma abordagem mecanizada com ênfase somente no procedimento de regra de três sem uma real compreensão do que se está a fazer (Lesh; Post; Behr, 1988; Schliemann; Carraher, 1997; Tinoco, 1996).

Figura 7 – De cima para baixo, resposta das participantes B e G à letra a) da questão 1 e da participante D à letra b) da questão 1.

a. Proporcionalidade?

Não lembro de modo, o máximo que consigo lembrar foi da regra de 3.

a. Proporcionalidade?

Entendo a regra de três

algo relacionado a regra de três
tipo: Se 4 cametas custam 2 reais. Qual
o valor de 8 cametas?

essa questão não foi facilmente resolvida
por regra de três.

Fonte: dados da pesquisa.

Na questão 2, com respeito à identificação das grandezas envolvidas em cada situação que compõe a questão, apenas o participante A conseguiu identificá-las corretamente, além de que, a partir de sua resposta à entrevista, pôde-se evidenciar que ele conhece o conceito de grandeza e consegue defini-lo. Dos demais, dois identificaram a unidade de medida das grandezas ao invés das grandezas propriamente ditas (C e E), e os quatro restantes (B, D, F e G) não conseguiram identificá-las, seja porque não sabiam o que era grandeza ou porque não se recordavam do conceito. Esse cenário vai ao encontro do que evidencia o estudo de Rodrigues, França e Rodrigues (2024) quando mencionam as dificuldades dos estudantes participantes do seu estudo em identificar as grandezas e o tipo de relação entre elas, o que será percebido mais adiante. Segundo Lamon (2012), a análise e identificação da relação entre as grandezas numa relação proporcional é essencial para compreender sua natureza multiplicativa, assim como a covariação entre elas (Maranhão; Machado, 2011).

Com relação à identificação se o problema envolvia uma relação proporcional ou não, além da justificativa, cinco participantes afirmaram que havia sim uma situação envolvendo proporcionalidade, enquanto duas (participantes B e G) não responderam ao comando, afirmando não lembrarem o que era proporcionalidade, apesar de terem resolvido as situações. Esse resultado vai ao encontro do que apontam Galvão, Souza e Poggio (2015), ao observarem que os estudantes podem responder corretamente não por compreenderem o conceito de grandezas proporcionais, mas por dominarem procedimentos como a taxa unitária, a regra de três ou a decomposição em parcelas, sem relacioná-los à proporcionalidade.

Dos que responderam afirmativamente, os participantes A e C justificaram com o argumento de que quando uma das grandezas do problema aumenta, a outra também aumenta (Figura 8), o que é insuficiente para caracterizar uma situação de proporcionalidade, demonstrando uma fragilidade no conhecimento pertencente ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

Figura 8 – De cima para baixo, justificativa do participante A e da participante C para caracterizar uma situação de proporcionalidade na questão 2.

a) Sim, conforme o espaço pode aumentar, logo o tempo para conclusão aumenta.

b) Sim, porque se ele dirigir por mais horas, ele também vai percorrer mais quilômetros, e vice-versa.

Fonte: dados da pesquisa.

Essas justificativas mais uma vez afirmam a ideia incompleta de que quando se tem duas grandezas e ambas aumentam ou ambas diminuem, então há situação de proporcionalidade (Costa; Allevato, 2015). As participantes B e F, para justificarem o porquê de a situação envolver proporcionalidade, mobilizaram o seguinte raciocínio: como a situação permite o uso do procedimento regra de três, logo ela envolve uma relação de proporcionalidade, o que se pode retirar do seguinte trecho da entrevista com a participante F quando lhe foi solicitado que explicasse a sua resposta ao questionário:

Pesquisadora: [...] então tu pensaste assim: essa situação aqui consigo resolver com regra de três, então tem proporcionalidade?

Participante (F): No começo, como eu tava tentando descobrir ainda o que era proporcionalidade, eu achei que era isso, aí tipo mais pra cá [aponta para as questões seguintes] que já foi desenvolvendo coisa, mas aqui no começo eu achava o que, que proporcionalidade era regra de três, eu achava isso.

Por fim, o participante E justificou sua resposta afirmativa apenas com a frase “relação entre quilômetro e hora”, e, quando solicitado que explicasse melhor seu pensamento, sua fala foi confusa e pouco esclarecedora:

Participante (E): Bom, pelo que eu consegui extrair da questão, eu consegui entender que o que ele queria saber é mais ou menos qual seria a velocidade que ele percorreria em um trecho com uma hora maior, né, uma hora menor na verdade, então eu relacionei, fiz o cálculo, né, relacionei entre quilômetro, a velocidade e o tempo que ele ia percorrer, aí eu consegui, tipo, achei que seria essa relação de espaço-tempo.

A fala acima corrobora com os estudos de Costa e Ponte (2008), visto que revela uma situação recorrente entre os participantes deste estudo, isto é, embora percebam as relações numéricas, eles têm dificuldades em explicar o raciocínio utilizado para resolver o problema, muitas vezes se valendo de argumentos confusos ou superficiais como “usei regra de três”, sem realmente dar uma explicação que justifique o uso do procedimento. Esse cenário caracteriza uma fragilidade no KoT – Procedimentos, visto que os participantes mostram não conhecer as condições necessárias e suficientes para usar os algoritmos com os quais procederam, além de seus fundamentos matemáticos (por que eles são utilizados dessa maneira) – o que implica também uma consequente fragilidade na categoria que abrange o conhecimento relacionado às propriedades e seus fundamentos.

Já com respeito à resolução do problema, registramos três cenários. No primeiro cenário, quatro participantes (B, D, F e G) resolveram corretamente a primeira situação, que envolvia uma relação diretamente proporcional, fazendo uso do procedimento “regra de três” (KoT – Procedimentos). Entretanto, esses mesmos participantes, ao configurarem a proporção para usar a regra de três no segundo problema, não detectaram tratar-se de uma re-

lação inversamente proporcional e prosseguiram na resolução de forma análoga à primeira situação, chegando ao resultado 64 Km/h (Figura 9).

Figura 9 – Resolução da participante D à questão 2.

$$\begin{array}{lcl}
 250 \text{ km} & \rightarrow & 3 \text{ h} \\
 \boxed{x} \text{ km} & \rightarrow & 5 \text{ h} \\
 3 \cdot x = 250 \cdot 5 \\
 3x = 1250 \\
 x = \frac{1250}{3} \\
 x = 416,6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lcl}
 250 \text{ km} & \rightarrow & 5 \text{ h} \\
 80 \text{ km/h} & \rightarrow & 4 \text{ h} \\
 5 \cdot x = 80 \cdot 4 \\
 5x = 320 \\
 x = \frac{320}{5} \\
 x = 64
 \end{array}$$

Fonte: dados da pesquisa.

A partir da resposta desses participantes, evidencia-se uma fragilidade no KoT – Definição (relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações), visto que não conseguiram reconhecer situações que envolvem proporcionalidade direta ou inversa. Isso indica desconhecimento da diferença entre variáveis diretamente e inversamente proporcionais, bem como do impacto dessa distinção na estratégia de resolução do problema (KoT – Procedimentos), conhecimento considerado um dos descritores do pensamento proporcional (Maranhão; Machado, 2011). Esse fenômeno também se manifesta em suas próprias explicações, quando afirmam que a única diferença entre as duas situações está nas grandezas envolvidas – espaço-tempo e velocidade-tempo – sem perceber, entretanto, a diferença na relação entre elas, informação essencial para resolver a questão corretamente.

No segundo cenário, dois participantes (E e C), por falta de atenção na leitura do enunciado da segunda situação do problema, confundiram a grandeza velocidade com espaço e a resolveram como se envolvesse uma relação diretamente proporcional, resultando em 64 Km (Figura 10).

Figura 10 – Da esquerda para a direita, resolução dos participantes E e C à segunda situação da questão 2.

$$\begin{array}{lcl}
 5 & \text{---} & 80 \\
 4 & \text{---} & x \\
 5x = 320 \\
 x = \frac{320}{5} \\
 x = 64 \text{ km}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \text{Km} \quad \text{h} \\
 80 \quad 5 \\
 x \quad 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 5x = \frac{320}{5} \\
 x = 64
 \end{array}$$

• Utilizei regra de três porque não consegui identificar sobre o movimento de resolver.

Fonte: dados da pesquisa.

Contudo, esclarecido o equívoco durante a entrevista, foi-lhes perguntando se percebem a diferença entre as duas situações, para o que respondem que uma envolvia uma relação diretamente proporcional (espaço-tempo) e a outra uma situação inversamente proporcional (velocidade-tempo) (KoT – Fenomenologia e aplicações), usando a justificativa

que se o tempo diminuiu, a velocidade vai ter que aumentar. No entanto, apesar dessa percepção, ambos afirmaram que isso não impactaria na sua forma de resolução, apenas que a unidade de medida mudaria para Km/h na resposta final.

Pesquisadora: Ele disse que a 80 Km/h ele levará 5 horas pra percorrer um trajeto. Aí ele quer saber qual é a velocidade que ele teria que usar para percorrer esse mesmo trajeto em 4 horas. Ou seja, ele quer percorrer em menos tempo.

Participante (C): Sim.

Pesquisadora: A velocidade vai aumentar.

Participante (C): Vai.

Pesquisadora: Mas... tu achas que mudaria alguma coisa na tua resolução? Se tu tivesses visto certo a informação, tu achas que mudaria algo, ou não?

Participante (C): Eu acho que não, porque mesmo se eu não percebesse antes, né, eu ia continuar botando isso aqui nos quilômetros e isso aqui nas horas, do jeito que eu fiz [apontando para a regra de três que utilizou].

Um ponto a destacar foi a falta de uma atitude crítica diante do resultado encontrado, pois, apesar de ambos verificarem que, como o tempo para percorrer o trecho diminuiu, então a velocidade terá de aumentar, nenhum questionou o fato de 64 Km/h, a velocidade encontrada, ser menor que 80 Km/h (a velocidade que consta no enunciado do problema). Essa ausência de questionamento demonstra a importância de estimular nos estudantes uma postura crítica, conforme destacam Allevato e Onuchic (2021), para que não apenas apliquem procedimentos mecânicos, mas reflitam sobre a coerência e plausibilidade dos resultados, desenvolvendo um entendimento mais profundo e significativo do problema.

O terceiro cenário é composto por um único participante (A) o qual, além de perceber a diferença entre as relações proporcionais presentes nas duas situações (KoT – Definição), resolveu-as corretamente. Durante a resolução, o participante A completou sua resposta sobre a identificação se o problema envolvia ou não uma relação proporcional (KoT – Fenomenologia e aplicações), justificou o porquê de esta ser diretamente ou inversamente proporcional, e qual o impacto disso na sua estratégia de resolução em ambas as situações (KoT – Propriedades e fundamentos) (Figura 11). Além disso, ele foi o único que não fez uso de regra de três para resolver a situação, mas sim da estratégia escalar (Spinillo, 1994) – proveniente da sua conceitualização de proporcionalidade citada anteriormente – através do qual descobriu o fator escalar, isto é, por quanto o valor inicial de uma grandeza foi multiplicado para chegar à nova quantidade, que será o mesmo valor pelo qual ele vai multiplicar (ou dividir, quando inversamente proporcional) o valor inicial da outra grandeza a fim de determinar o valor de (KoT – Procedimentos). No caso deste participante, na segunda situação, ao invés de multiplicar 80 por $5/4$ para determinar o valor de , ele fez algo equivalente, que foi multiplicar o por $4/5$ para chegar a 80, e sua justificativa para esse procedimento foi saber que o valor de seria maior que 80.

Figura 11 – Resolução do participante A à questão 1.

c) Primeiro se põe as grandezas em tabela e que se pede

Km	h
$\frac{5}{3} \times 250$	$3 \times \frac{5}{3}$
x	5

se as horas aumentam, logo o espaço percorrido sera maior.

Diretamente proporcionais.

ou seja, o 250 cresce nessa razão.

$250 \cdot \frac{5}{3} = \frac{1250}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \approx 416$

ou um carro mantendo uma razão logo a outra cresce mantendo a mesma razão

Outro problema = Velocidade e tempo

Km/h	h
$\frac{40}{5} \times x$	$5 \times \frac{4}{5}$
x	4

Inversamente proporcional

Se as horas abaixam ele precisa ser mais

Velocidade

$\frac{4x}{5} = 80$

$4x = 80 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{400}{4} = 100 \text{ km/h}$

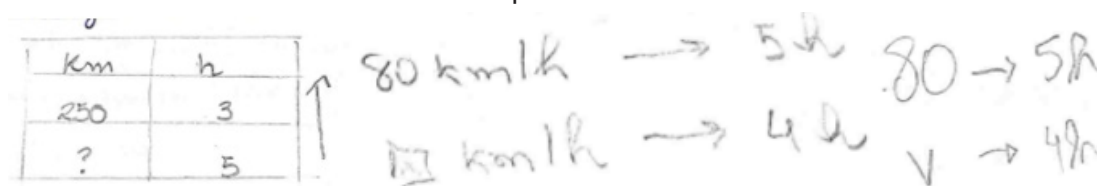
Matrícula: _____ Período: _____

Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, vale destacar que há diferentes modos de representação para relações proporcionais entre grandezas, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas (Galvão; Souza; Poggio, 2015). Dito isso, chama-se a atenção para o esquema utilizado pelo participante A para expressar a relação proporcional entre as grandezas envolvidas (Figura 11), o qual é comumente empregado na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, consistindo em uma estrutura tabular simplificada, sem as linhas de grade, a qual na primeira linha contém as siglas das grandezas ou de suas respectivas unidades de medida, e, abaixo delas, os valores correspondentes (KoT – Registros de representação). A participante G representou as grandezas de maneira semelhante, porém mantendo a unidade de medida ao lado das quantidades, não em uma linha separada (KoT – Registros de representação). A participante C recorreu ao mesmo esquema, porém elaborando uma tabela mais estruturada (Figura 12), a qual também se configura como uma das formas de representação mais recorrentes para expressar relações proporcionais entre grandezas, por meio do ordenamento sistemático de seus valores (KoT – Registros de representação).

O registro dos demais participantes aproxima-se mais de um diagrama por conta do uso de setas para representar as relações entre as grandezas (KoT – Registros de representação), apesar de a maioria deles apresentarem-se incompletos visto a falta da unidade de medida de uma das grandezas, quando não das duas (Figura 12). Segundo Brabo (2020), o uso de setas para representar a variação entre grandezas em tarefas que envolvem proporcionalidade constitui um obstáculo didático, frequentemente reproduzido por professores que ainda não superaram essa prática nem desenvolveram formas mais adequadas de comunicar o conceito. Isso ocorre porque os estudantes tendem a associar as setas aos valores numéricos, e não às grandezas que elas representam.

Figura 12 – Da esquerda para a direita, esquemas da participante C e dos participantes D e B para a questão 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Esses resultados sugerem tanto uma familiaridade prévia com certos formatos de representação quanto lacunas no domínio do conhecimento sobre registros matemáticos adequados e completos para o tratamento de situações envolvendo proporcionalidade. No Quadro 2 a seguir, apresentamos uma síntese dos conhecimentos especializados relacionados às categorias do KoT revelados a partir das respostas dos participantes do estudo a uma avaliação diagnóstica no contexto da proporcionalidade.

Quadro 2 – Conhecimento especializado revelado pelos participantes ao responderem a uma avaliação diagnóstica no contexto de proporcionalidade

Categorias do KoT	Indicadores de conhecimento	Participante						
		A	B	C	D	E	F	G
Definição, propriedades e fundamentos	Definição de proporcionalidade, proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa.	X						
	Por que duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, e qual o impacto disso na estratégia de resolução.	X						
Fenomenologia e aplicações	Reconhecer a diferença entre situações proporcionais e não proporcionais;	X		X ⁱ	X ⁱ	X ⁱ	X ⁱ	
	Reconhecer situações que envolvem relações diretamente e inversamente proporcionais.	X		X ⁱ		X ⁱ		
Procedimentos	Estratégia escalar (E); Algoritmo de “regra de três” (R).	E	R	R	R	R	R	R
Registros de representação	Representação dos valores das grandezas em estrutura tabular simplificada (S). Representação dos valores em tabela (T). Representação dos valores em diagrama (D).	S	D	T	D	D	D	S

Fonte: elaborado pelos autores.

A maioria dos participantes revela um conhecimento predominantemente algorítmico com respeito à proporcionalidade. Apenas um deles fez uso de uma estratégia que não fosse a aplicação da regra de três, sendo este também o único que conseguiu identificar corretamente o tipo de relação proporcional presente em cada uma das duas situações que compunham a questão 2, justificando suas afirmações e a estratégia escolhida. Esse resultado vai ao encontro de Spinillo (1994) quando afirma que o nível de entendimento demonstrado pelos sujeitos ao utilizar essas estratégias varia: enquanto a estratégia escalar costuma ser aplicada com compreensão, a regra de três, embora amplamente ensinada no ambiente escolar, é muitas vezes empregada de maneira mecânica, sem a devida compreensão das relações que a fundamentam.

Além disso, não podemos afirmar com certeza que os participantes, com exceção de A, mobilizaram o conhecimento que os permite identificar uma situação proporcional, além de diferenciar situações que envolvem relações diretamente ou inversamente proporcio-

nais, visto suas definições incompletas e justificativas insuficientes. Por fim, mobilizaram o conhecimento de registros de representação tabular e diagramático para expressar os valores das grandezas envolvidas.

Por fim, identificamos algumas dificuldades encontradas pelos participantes com relação à proporcionalidade, que incluem: definição de proporcionalidade, proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa; relevância da constante de proporcionalidade; reconhecer situações diretamente e inversamente proporcionais; e variedade de estratégias que podem ser mobilizadas em problemas que envolvem proporcionalidade. Além disso, importante destacar a dificuldade dos participantes em justificar suas afirmações e o passo a passo de suas estratégias de resolução.

CONCLUSÕES

Esse estudo visa apresentar os resultados de uma avaliação diagnóstica realizada com professores de matemática em formação inicial, a fim de identificar o conhecimento matemático especializado revelado acerca do tópico proporcionalidade. De forma ampla, a aplicação deste questionário diagnóstico teve como objetivo investigar o conhecimento dos participantes com relação à resolução de diferentes categorias de problemas que dão sentido ao conceito de proporcionalidade. Além disso, buscamos reconhecer as variadas estratégias por eles utilizadas nesse processo, assim como verificar se os participantes revelam uma postura reflexiva ao selecionar abordagens adequadas para cada situação apresentada.

De modo geral, os dados evidenciam que o conhecimento dos participantes sobre proporcionalidade apresenta um caráter predominantemente algorítmico, tendo, em sua maioria, recorrido à regra de três para resolver o problema proposto. Dessa forma, nota-se uma baixa variedade de estratégias de resolução para problemas envolvendo proporcionalidade, salvo um dos participantes que fez uso da estratégia escalar para resolver tanto a situação que envolvia grandezas diretamente proporcionais quanto a que envolvia grandezas inversamente proporcionais. Além disso, apesar de problemas do tipo valor omitido serem os mais recorrentes quando se trata de proporcionalidade, todos os participantes que recorreram à regra de três enganaram-se durante resolução da segunda situação da questão 2, visto que não identificaram tratar-se de uma relação inversamente proporcional, ou seja, uma aplicação mecânica do algoritmo, sem uma análise prévia da relação entre as grandezas, impactou no sucesso da solução dos participantes.

Além disso, pôde-se observar que, com exceção de um dos participantes, os demais não apresentaram evidências claras de domínio conceitual que lhes permitisse identificar corretamente situações de proporcionalidade, bem como distinguir entre relações de proporcionalidade direta e inversa, o que ficou evidente pelas definições imprecisas e justificativas insuficientes apresentadas. Quanto aos esquemas para representar os valores das grandezas envolvidas e a relação entre elas, os participantes mobilizaram conhecimentos dos registros de representação tabular (formato completo e simplificado) e diagramático.

Quanto às dificuldades observadas, as mais recorrentes referem-se à definição de proporcionalidade (direta e inversa), à compreensão da importância da constante de proporcionalidade para caracterizar uma relação proporcional, ao reconhecimento de diferen-

tes tipos de situações que envolvem proporcionalidade e à utilização de distintas estratégias para resolução de problemas desse campo, predominando métodos mecânicos e que não implicam uma compreensão conceitual da relação entre as grandezas envolvidas. Destaca-se também a fragilidade dos sujeitos ao justificar suas respostas e detalhar os procedimentos adotados durante a resolução das questões, expressando falas confusas ou incoerentes.

O recorte do questionário diagnóstico analisado neste estudo mostrou-se adequado para revelar o conhecimento matemático pertencente ao KoT dos professores em relação à proporcionalidade, mais especificamente com respeito a seu conhecimento conceitual e sobre estratégias de resolução de problemas do tipo valor omissivo. Como encaminhamento para pesquisas futuras, recomenda-se investigar as dificuldades identificadas, visando desenvolver contextos formativos que promovam o desenvolvimento desse conhecimento matemático especializado e a superação das fragilidades aqui apontadas.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM) por meio do “Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu Posgrad/Fapeam/2024-2025”.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. O experimento de Pitágoras com o monocórdio: uma abordagem histórico-didática. CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 4., 2019, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: Realize Editora, 2019. p. 1-12. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57030>. Acesso em: 20 mai. 2025.

ALLEVATO, Norma Suely; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2021.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BEN-CHAIM, David; KERET, Yaffa; ILANY, Bat-Sheva. Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer Netherlands, v. 10, p. 333-340, 2007. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-007-9052-x>. Acesso em: 10 jun. 2025.

BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de. **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

BOYD, Donald J.; GROSSMAN, Pamela L.; LANKFORD, Hamilton; LOEB, Susanna; WYCKOFF, James. Teacher preparation and student achievement. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 31, n. 4, p. 416-440, 2009.

BRABO, Madson Sanches. Obstáculos didáticos no ensino de regra de três: refletindo a prática docente. CONGRESSO ONLINE NACIONAL DE ENSINO DE QUÍMICA, FÍSICA, MATEMÁTICA E BIOLOGIA, 1., 2020, Goiânia. **Anais...** Goiânia: Cientus Educação, 2020. p. 1-3.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 jun. 2025.

BURGOS, María; BELTRÁN-PELLICER, Pablo; GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educación e Pesquisa**, v. 44, n. e182013, 2018. <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013>

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; MONTES, Miguel; CONTRERAS, Luis; FLORES-MEDRANO, Eric; ESCUDERO-ÁVILA, Dinazar; VASCO, Diana; ROJAS, Nielka; FLORES, Pablo; AGUILAR-GONZÁLEZ, Álvaro; RIBEIRO, Miguel; MUÑOZ-CATALÁN, María Cinta. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

COSTA, Manoel dos Santos; ALLEVATO, Norma Suely. Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais...** República Dominicana: IACME, 2015, p. 141-152. Disponível em: https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/439/203. Acesso em: 04 out. 2025.

COSTA, Sara; PONTE, João Pedro da. O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico. **Revista da Educação**, v. 16, n. 2, p. 65-100, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/4074>. Acesso em: 26 mai. 2025.

DARLING-HAMMOND, Linda. Teacher quality and student achievement. **Education Policy Analysis Archives**, v. 8, n. 1, 2000. <https://doi.org/10.14507/epaa.v8n1.2000>

FALVO, Silvia Rocha; JUCÁ, Rosineide Sousa. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022. Disponível em: <http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/816>. Acesso em: 10 jun. 2025.

ESCUDERO, Isabel María; GAVILÁN, José María; SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria. Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 1, p. 7-32, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/260944281_Una_aproximacion_a_los_cambios_en_el_discurso_matematico_generados_en_el_proceso_de_definir. Acesso em: 08 out. 2025.

FUENTES LEAL, Christian Camilo. **El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: un estudio de caso**. 2020. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, 2020. Disponível em: <https://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/>

handle/10272/19324/El_conocimiento_especializado_del_profesor.pdf?sequence=2. Acesso em: 10 jun. 2025.

GALVÃO, Maria Elisa; SOUZA, Vera Helena; POGGIO, Ana Maria. Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais...** República Dominicana: IACME, 2015, p. 175-186.

HILL, Heather C.; CHIN, Mark. Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. **American Educational Research Journal**, v. 55, n. 5, p. 1076-1112, 2018. <https://doi.org/10.3102/0002831218769614>

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 1-30, 2005. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10510/6913>. Acesso em: 10 jun. 2025.

LAMON, Susan J. Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In: LESTER, F. (Ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Volume 1**. Information AGE, 2016. p. 629-667.

LAMON, Susan J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teacher**. New York: Routledge, 2012. <https://doi.org/10.4324/9781003008057>

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.) **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118. Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/read/34041654/lesh-post-behr-raciocinio-proporcional-pt-pdf>. Acesso em: 10 jun. 2025.

LIMA, Elon Lages. Grandezas Proporcionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1987, PUC-São Paulo. **Anais...** São Paulo: Atual Editora LTDA, 1988. p. 27-44. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/eneml.pdf>. Acesso em: 22 mai. 2025.

MA, Liping. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999. Disponível em: https://www.academia.edu/12089767/Knowing_and_Teaching_Elementary_Mathematics. Acesso em: 04 out. 2025.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Sintria Labres. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **REMATEC**, v. 15, n. 36, p. 78-94, 2020. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/83>. Acesso em: 09 mai. 2025.

MARANHÃO, Cristina; MACHADO, Silvia. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, v. 27, n. 1, p. 141-156, 2011. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400010>

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 59, p. 947-967, 2017. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05>

OLIVEIRA, Laís Maria; CYRINO, Márcia Cristina. Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...** Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely. As diferentes “personalidades” do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/279495445_As_Diferentes_Personalidades_do_Numero_Racional_Trabalhadas_atraves_da_Resolucao_de_Problemas. Acesso em: 04 out. 2025.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis, Brasil. **Anais...** Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

POST, Thomas; BEHR, Merlyn; LESH, Richard. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

RODRIGUES, SÍntia Paola; FRANÇA, Maria Eduarda; RODRIGUES, Renata Viviane. Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2024, Natal. **Anais...** Natal: SBEM, 2024. p. 1-15. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/498/341>. Acesso em: 12 jun. 2025.

SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa. Estratégias de resolução de situação problema de modelagem matemática e o pensamento proporcional: um estudo com estudantes de pedagogia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 197-223, 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7704/6331>. Acesso em: 10 jun. 2025.

SCHLIEMANN, Analucia D.; CARRAHER, David. W. **Razões e Proporções na vida diária e na escola**. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/313846666_Razoes_e_proporcoes_na_via_diaria_e_na_escola. Acesso em: 10 jun. 2025.

SILVESTRE, Ana Isabel; PONTE, João Pedro da. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 8, n. 20, p. 70-97, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/6556/1/12-Silvestre-Ponte%2520INTERACCOES.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2025.

SPINILLO, Alina Galvão. Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, v. 5, n. 1, p. 109-114, 1994. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644341/11760>. Acesso em: 10 jun. 2025.

STAKE, Robert Edward. **Pesquisa qualitativa**: estudando como as coisas funcionam. Tradução: Karla Reis. Porto Alegre: Penso, 2011.

STAKE, Robert Edward. **Qualitative case studies**. New York: Oxford University Press, 2005.

TINOCO, Lúcia A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundação, Instituto de Matemática/UFRJ, 1996.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H. E CONFREY, J. (Ed.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59. Disponível em: https://archive.org/details/isbn_9780791417638. Acesso em: 10 jun. 2025.

Histórico

Recebido: 24 de junho de 2024.

Aceito: 04 de outubro de 2024.

Publicado: 06 de novembro de 2025.

Como citar – ABNT

RODRIGUES, Roberta dos Santos. Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 53, e2025018, 2025. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2025.n53.e2025018.id767>

Como citar – APA

Sobrenome, A. A. (2025). Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, (53), e2025018. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2025.n53.e2025018.id767>