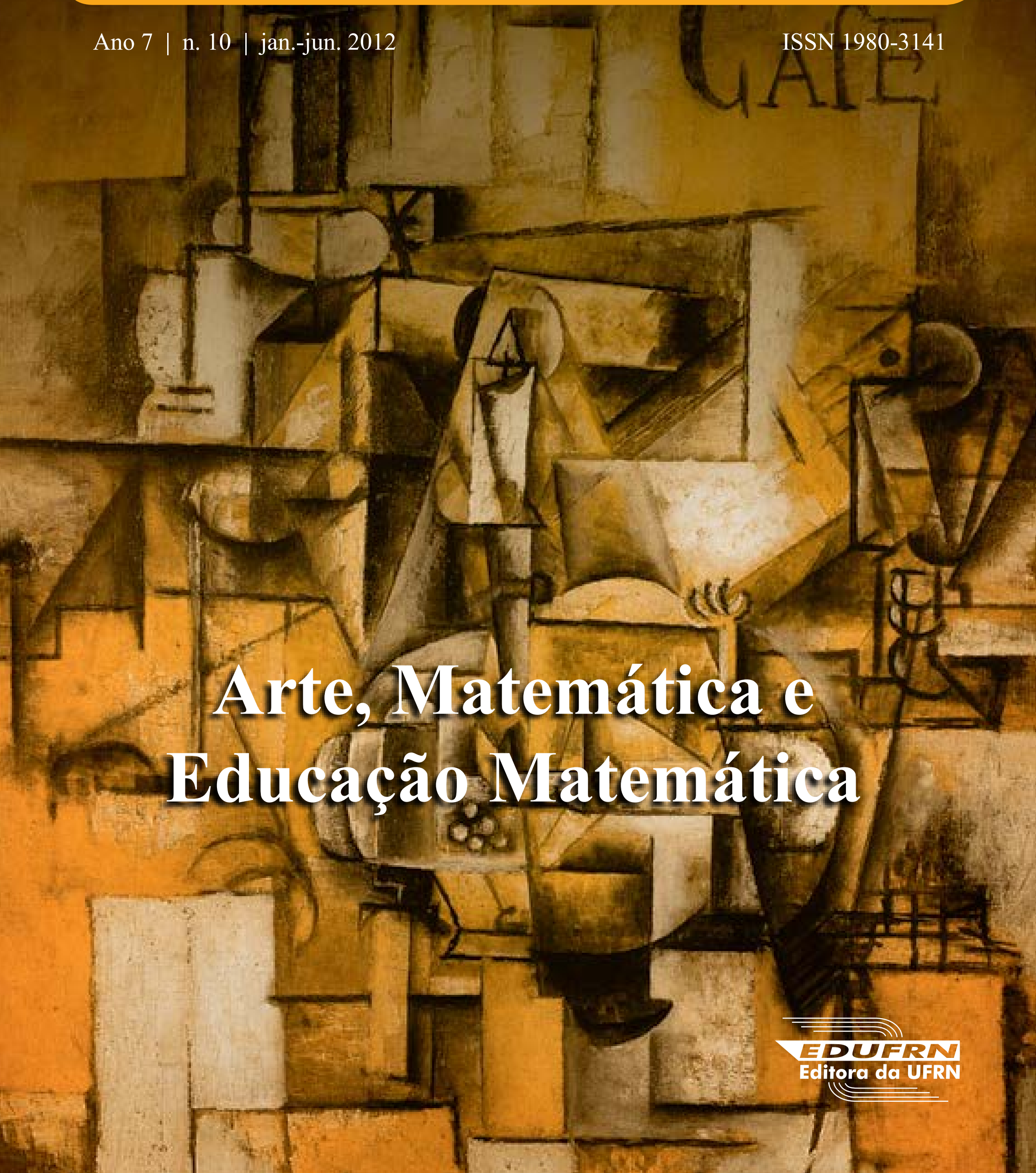
REMATEC

Revista de Matemática, Ensino e Cultura

Ano 7 | n. 10 | jan.-jun. 2012

ISSN 1980-3141



Arte, Matemática e Educação Matemática

EDUFRN
Editora da UFRN

Revista de Matemática, Ensino e Cultura
Ano 7 | n. 10 | jan.-jun. 2012
ISSN 1980-3141

Divisão de Serviços Técnicos
Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura / Universidade Federal do Rio Grande do Norte. – Ano 1 n. 1 (jul./nov. 2006). – Natal, RN: EDUFRN – editora da UFRN, 2006. 124p.: il.

Descrição baseada em Ano 7, n. 10 (jan./jun. 2012)
Periodicidade Semestral.
ISSN: 1980-3141

1. Matemática – Ensino - Periódico. 2. Matemática – História – Periódicos. 3. Ensino e cultura – Periódicos. I. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. II. Título.

RN/UF/BCZM CDD 510.172
CDU 51:37(05)

A responsabilidade pelos artigos assinados cabe aos autores.

Endereço para envio de artigos, resenhas, sugestões e críticas: revistarematec@gmail.com

REMATEC
revista de matemática, ensino e cultura

Arte, Matemática e Educação Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Índice

Editorial

Este número temático da Revista de Matemática, Ensino e Cultura foi impulsionado pelo desejo em tornar visível a produção acadêmica que tem tomado como objeto de pesquisa algumas relações entre Arte e Matemática, estabelecendo um diálogo com a Educação Matemática. Contudo, tal número não é para ser visto apenas como divulgação de trabalhos que vêm sendo desenvolvidos no Brasil mas, sobretudo, como uma provocação por tentar demarcar as fronteiras entre arte e matemática nos limites com a Educação Matemática.

É certo que o tema sobre matemática e arte tem sido bastante debatido no âmbito da pesquisa, e que isto não é fruto da contemporaneidade, mas provém das discussões dicotômicas entre arte e ciência no período renascentista. A pintura, por exemplo, que passou a ter na sua base de criação, um desenho cuidadosamente calculado, medido, tornou-se criação intelectualizada, ao ponto de demandar o *status* de ciência.

Mas o que é arte, hoje? Dizer o que seja arte não é coisa simples mas, ao menos, podemos dizer, junto com Jorge Coli[1], que arte são certas manifestações da atividade humana reconhecidas como tal no âmbito da nossa cultura. Em um dos casos, arte pode ser pintura, escultura, música, arquitetura, ou qualquer outra manifestação para a qual nosso sentimento seja admirativo. Portanto, o fato é que arte, hoje, se pauta em outras perspectivas teóricas, outras formas de se relacionar com o mundo, com o universo artístico e com o artista.

No âmbito da educação, a questão do porque e do como arte pode ser profícua para o desenvolvimento de cidadãos criativos, sensíveis, críticos, tem levado muitos pesquisadores a produzir resultados[2], provocando um movimento denominado arte-educação. Isto, ao ressonar na Educação Matemática, vê-se desenhadas diretrizes curriculares que valorizam a relação da arte com a Matemática, com o intuito de travar novos caminhos para ensiná-la mas, também, para conceber esta disciplina na interdisciplinaridade com as demais áreas de conhecimento.

Então, o que emerge nesta primeira edição temática sobre o tema é a potencialidade da arte em sua relação com a Educação Matemática, problematizando o ensino, a aprendizagem e a formação de professores.

O artigo intitulado *Práticas do olhar na pintura do Renascimento: contribuições para a Educação Matemática* adentra na história da técnica da perspectiva para contribuir com a educação matemática. As autoras discutem uma prática de olhar racional, geométrica e monocular, instaurada no Renascimento

1 Coli, J. *O que é arte*. São Paulo: Brasiliense, 2006.

2 Como, por exemplo, Duarte Jr., J. F. *Por que arte-educação?* Campinas, São Paulo: Papirus, 2007; Fritzen, D. e Moreira, J. *Educação e Arte*: as linguagens artísticas na formação humana. Campinas, São Paulo: Papirus, 2008.

italiano, demonstrando-a em algumas pinturas daquela época, e defendendo que as relações entre arte e Educação Matemática vão além do ensino de conceitos matemáticos.

Sentimentos de semelhança: das Artes à Matemática trata de conceitos artísticos e matemáticos desenvolvidos em uma experiência didática com alunos do Ensino Fundamental. A ideia de que a Matemática pertence ao domínio do inteligível e a arte do sensível é provocada. Os autores concluem que razão e emoção mostram-se inseparáveis para a construção do sentimento de semelhança matemático.

Tomando o livro didático com um lugar de pesquisa, o artigo intitulado *Aportes mútuos na relação entre simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais* analisa como matemática e arte são articuladas em abordagens escolares. Particularmente, o estudo se dá em torno da simetria e das artes visuais, refletindo sobre leitura de imagem, contextualização e fazer artístico.

O artigo intitulado *O uso de materiais concretos digitais para o ensino e aprendizagem de simetria no ensino fundamental* também aborda o conceito de simetria, porém, numa abordagem de ensino envolvendo formas da natureza e construções. Os autores se baseiam nos níveis propostos por Van Hiele e com o uso de materiais concretos desenvolvem uma sequência didática com alunos do 3º ano do Ensino Fundamental. Eles concluem que arte visual e matemática possuem uma relação na medida em que o professor se envolve em atividades que promovem a interdisciplinaridade.

A evidência da contribuição de questões interdisciplinares na Educação Matemática é dada no artigo *Matemática e arte: incursões na interdisciplinaridade*. Propondo um entrelaçar entre artes visuais e computação gráfica, os autores discutem sobre como um ensino de função complexa pode ser contextualizado, agradável e dinâmico, e com potencialidades de maior entendimento e criação de conceitos.

De um estudo sobre os frisos, o artigo intitulado *As transformações geométricas e os frisos* reflete sobre a riqueza dos padrões para a contextualização das transformações geométricas, considerando uma dimensão artística no processo de ensino e aprendizagem. O desenvolvimento de sequências didáticas e o uso do *software* Cabri-Géomètre-II foram utilizados para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetria central.

Por fim, o artigo intitulado *O octógono artístico, sagrado e geométrico na Capela de São João Batista em Belém do Pará*, considera o trabalho do arquiteto italiano, José Antonio Landi, que viveu na região Amazônica na segunda metade do século XVIII. Em uma abordagem que articula aspectos da história e da arquitetura, o artigo faz alusão àquilo que é sagrado, mas também artístico e geométrico. O autor defende a exploração investigatória do patrimônio histórico, cultural e arquitetônico para a organização de problematizações matemáticas transversalizantes, podendo ser discutidas junto à Educação Matemática.

Cabe-nos, portanto, o agradecimento a todos os autores que encaminharam à REMATEC contribuições para esta edição temática, sendo eles constantes nesta edição ou não. Por fim, vale dizer que esperamos que este número da revista seja o primeiro de tantos outros possíveis que virão contribuir para a edificação desta tendência que se configura: Arte, Matemática e Educação Matemática.

Iran Abreu Mendes

Cláudia Regina Flores

PRÁTICAS DO OLHAR NA PINTURA DO RENASCIMENTO: CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRACTICES OF LOOKING AT THE PAINTING OF THE RENAISSANCE: CONTRIBUTIONS TO MATHEMATICS EDUCATION

Cláudia Regina Flores
Débora Regina Wagner
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC - Brasil

Resumo

A história e a arte podem contribuir para o entendimento das práticas de olhar. Este artigo tem como propósito relacionar arte e Educação Matemática por meio da história da técnica da perspectiva, em particular, a perspectiva central. Apoia-se nos estudos da cultura visual, destacando o conceito de visualidade. Discute-se sobre uma prática de olhar racional, geométrica e monocular instaurada no Renascimento italiano. Por fim, obras plásticas renascentistas são analisadas para demonstrar que as relações entre arte e Educação Matemática vão além do ensino de conceitos matemáticos. Conclui-se, que o estudo de práticas de olhar pode possibilitar entendimentos acerca da visualização em Matemática.

Palavras-chave: Arte, Educação Matemática, Visualidade, Técnica da Perspectiva.

Abstract

The history and art can contribute to the understanding of practice looking. This article aims to relate art and mathematics education through the history of the technique of perspective, in particular, the central perspective. It builds on studies of visual culture, highlighting the concept of visuality. It discusses about a practice to look rational, geometric and monocular that was introduced on the Italian Renaissance. Finally, Renaissance paintings are analyzed to demonstrate that the relationship between art and mathematics education goes beyond the teaching of mathematical concepts. It is concluded that the study of the practices of looking can be useful to understanding of mathematical visualization.

Keywords: Art, Mathematics Education, Visuality, Technique perspective

Introdução

Este artigo busca inserir-se no debate sobre Arte e Educação Matemática, considerando-se a história da técnica da perspectiva para praticar o olhar em perspectiva em obras plásticas do Renascimento.

Os aportes teóricos que sustentam este trabalho são oriundos dos estudos da Cultura Visual. Inserir-se nestes estudos, entre outras razões, implica compreender que as experiências visuais e as práticas de olhar criam modos específicos de olhar que se relacionam com o que vemos. Tais práticas não podem ser consideradas ingênuas, mas repletas de técnicas, estratégias, que sendo elaboradas culturalmente e no âmbito da história, constituem modos específicos de olhar.

Assim, este trabalho tem como hipótese que o entendimento pela história e pela arte de uma prática de olhar, que é geométrica, técnica e racional, possibilitará refletir não só sobre a problemática do visual na educação matemática, mas também criar metodologias e estratégias de análise para o trabalho com a arte e a matemática.

Para tanto, as pinturas são tomadas como um lugar em potencial para se analisar a relação entre o ver, conceber o espaço em perspectiva, e suas representações, uma vez que as práticas artísticas são o manifesto da problemática e o suporte da realização da técnica da perspectiva.

Este artigo está articulado em três seções. Na primeira seção definem-se os aportes teóricos que sustentam este trabalho, apresentando os fundamentos e conceitos de Cultura Visual, particularmente o conceito de Visualidade. Na segunda seção, discute-se alguns aspectos da história da construção da técnica da perspectiva central criada por Alberti, associada à construção de um modo de olhar e de representar que se instituiu ao longo do tempo, permeando nossas práticas até os dias atuais. Na terceira seção, faz-se um enlace entre a técnica criada e aplicada na arte plástica do Renascimento e a Matemática. Isso tem o propósito de se trabalhar sobre alguns exercícios que caracterizam esta proposta de estudo, provocando reflexões para uma nova perspectiva acerca da arte e da visualização no contexto da Educação Matemática.

Cultura Visual e Visualidade

A riqueza da experiência visual pós-moderna já não pode mais ser analisada por nossas estruturas analíticas sedimentadas. Portanto, a problemática da imagem e o modo de análise provocaram o surgimento do novo campo de estudos denominado de Cultura Visual. Trata-se de um campo de estudos interdisciplinares que visa atravessar as fronteiras das estruturas acadêmicas tradicionais existentes, numa proposta que vai além da leitura de imagens centradas no formalismo perceptivo e na semiótica, para centrar seus questionamentos e respostas na interação com o visual, com as mídias visuais e suas influências na vida cotidiana

das pessoas e como tal, deve ser vista como "uma tática, não uma disciplina acadêmica" (MIRZOEFF, 1999).

Assim, cultura visual é uma estratégia para entender a vida contemporânea com o foco centrado nas experiências da vida cotidiana, mas que também se relaciona com o estudo histórico das formações discursivas da vista. Em cada cultura e época criam-se modos de ver que passam a ser considerados como o modo verdadeiro de olhar e desenhar as coisas.

Hernández (2007), afirma que "a expressão cultura visual refere-se a uma diversidade de práticas e interpretações críticas em torno das relações entre as posições subjetivas e as práticas culturais e sociais do olhar". (p.22). Em seus estudos, para tratar de cultura visual, Hernández (2007) acrescenta a expressão "compreensão crítica" fundamentada na pluralidade de modelos de análise (semiótica crítica, desconstrucionista, intertextual, hermenêutica, discursiva), buscando contribuições para a constituição de um novo sujeito do conhecimento. Este sujeito entendido como crítico e performativo, capaz de refletir sobre o modo que as manifestações da cultura visual refletem as relações de poder em diversos aspectos da vida. Nestas circunstâncias, o "olhar" passa a ser entendido como fator determinante na construção dos sentidos e da subjetividade no mundo contemporâneo, ocupando lugar de destaque no contexto das práticas culturais e das representações visuais.

Flores (2010) provoca um debate sobre a possibilidade de se pensar outros patamares teóricos para articular visualização e arte na educação matemática, acentuando "cultura visual e visualidade como estratégia teórica e metodológica e como uma dimensão importante que abrange práticas do olhar na constituição de formas e experiências do olhar em matemática."(p. 291).

A noção de visualidade serve para entender que as práticas visuais constroem nossas formas de olhar de maneira social, cultural e histórica. Corroborando com as ideias de Foster (1988)[3], Flores (2010) ressalta que aquilo que vemos não é determinado simplesmente pela configuração orgânica do olho, mas que o conjunto olho físico e olhar, são construções sociais e culturais que dão forma ao nosso mundo e determinam o modo pelo qual percebemos e nos relacionamos com ele.

Deste modo, podemos entender que as manifestações visuais, as artes plásticas, os desenhos arquitetônicos, entre outras, vão muito além da operação física do olho humano, elas derivam das experiências visuais vividas por cada pessoa ou grupo de pessoas, do espaço e do tempo em que estão imersas, vinculadas a aspectos históricos, sociais e culturais em uma relação que dá sentido e constrói as práticas do olhar.

3 FOSTER, H. *Vision and visuality*. Seattle: Bay Press, 1988.

A perspectiva e a visão monocular

As imagens produzidas, especialmente no contexto da arte, são bons exemplos para verificar diferentes modos de representar criados pelos homens. Para Sturken e Cartwright (2001), as artes nos revelam muito mais do que mudanças no estilo estético, elas manifestam diferentes tipos de visão de mundo. Um exemplo desta afirmação é o surgimento da técnica da perspectiva no início do século XV, no Renascimento italiano, que provocou mudanças tanto na maneira de representar o mundo, como também criou uma forma de visão racionalizada, monocular, perspectivada.

A elaboração de uma técnica, dita científica e geométrica, para representar a realidade permitiu que o artesão aprimorasse o olhar e suas ações, definindo um ponto de vista para a representação. A técnica da perspectiva, como suporte para realizar o novo modelo de representação do real, cria um espaço geométrico, racional, ligado à teoria filosófica de René Descartes: o perspectivismo cartesiano.

A malha quadriculada criada por Leon Battista Alberti[4] é um exemplo da perfeição do emprego do perspectivismo como método correto para representar o visível. Por uma visão racional de mundo, desenha-se uma grade cartesiana que se refere à organização do espaço em três eixos. Cada eixo encontrando o outro de modo a formar 90°, produz um espaço tridimensional. O emprego de uma malha quadriculada, ensinada por Alberti, permitiu ao pintor representar o espaço através de uma "janela", onde o espaço era enquadrado, geometricamente medido, e o olhar ficava preso e centrado em um único ponto central. A figura 1 é um desenho que demonstra como é feito a malha quadriculada utilizando o método de Alberti.

Vale aqui ressaltar que muito mais do que uma técnica visual, a perspectiva, com suas bases calcadas no racionalismo, foi um fator determinante para a constituição de uma nova visualidade na sociedade ocidental européia. O olhar clássico, olhar monocular, fundamentou uma nova prática e estabeleceu-se como hábito e verdade para ver e representar.

Enfim, como diz Kosminsky (2008), "(...) a cultura visual moderna não teria se construído sem que o olhar tivesse sido precedido por uma racionalização, fundamentada na convenção da perspectiva e divulgada pela invenção da gravura" (p. 286).

A ideia de se compreender a construção deste olhar instaurado há séculos atrás e que se faz, ainda hoje, como o efeito e o suporte para olhar e para representar figuras, como discute Flores (2007), aponta caminhos para pensar, tanto as

4 Leon Battista Alberti nasceu em Gênova na Itália, no ano de 1404. É considerado um dos mais ilustres representantes da arquitetura italiana. Destacou-se como teórico, matemático, arquiteto, urbanista, cartógrafo e prático. Entre suas obras mais famosas está à Igreja de São Francisco em Rimini, o projeto das Igrejas de São Sebastião e Santo André em Mântua, o Palácio Rucellai e à fachada da Igreja de Santa Maria Novella ambas em Florença. Alberti escreveu o primeiro Tratado dedicado aos ensinamentos da perspectiva, denominado *De Pictura* (1435).

relações que se podem imprimir para a Arte e a Matemática, como também, sobre questões associadas à visualização no contexto da educação matemática. De um lado, o entendimento da técnica e o desenho dela em obras plásticas permitem a elaboração de atividades didáticas que relacionam matemática e arte, de outro, provoca a compreensão de aspectos visuais que se fazem presentes no processo de construção e entendimento de conceitos geométricos.

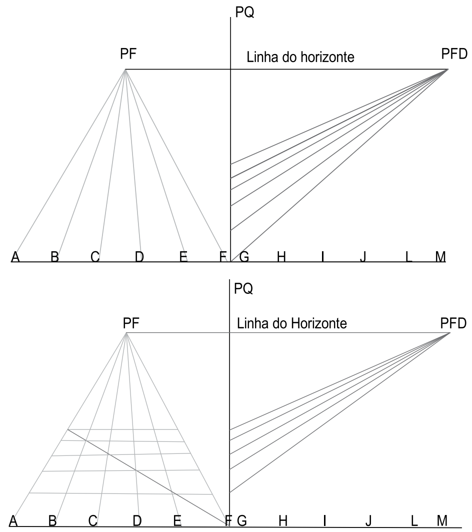


Figura 1. Desenho da técnica da perspectiva segundo Alberti

O olhar monocular e a verdade da imagem

Flores (2007) ao propor a técnica da perspectiva como "(...) um diagrama sugestivo, uma hipótese de trabalho para ajudar a pensar sobre o olhar e o representar as imagens tridimensionais." (p.42), está sugerindo uma estratégia metodológica para tratar da arte e da matemática com propósitos educacionais. Esta metodologia desloca a atenção para a aprendizagem de conceitos por meio da arte, e situa-se no âmbito da compreensão da técnica da perspectica como possibilidade para a construção de um olhar geométrico, bem como, para o desenho de figuras geométricas.

Um passo importante é, então, analisar os conceitos geométricos presentes na base da técnica da perspectiva albertiniana. Isso para compreender quais conceitos matemáticos, e quais elaborações de visão, deram condições para a criação das pinturas neste período[5].

5 Um estudo mais detalhado sobre este tema foi feito na dissertação de Mestrado de Débora Regina Wagner, defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, em fevereiro de 2012.

Os conceitos matemáticos que Alberti lança mão para tratar da teoria da perspectiva são aqueles centrados na geometria de Euclides, tais como: ponto, linha, superfície, círculo, ângulo, raios. Estes conceitos, em sua elaboração com a técnica da perspectiva, geram modelos para a visão. Particularmente, da definição de três tipos de raios (extremos, médios, cêntrico), Alberti concebe a noção de *pirâmide visual*. Para ele, "(...) a pintura é a intersecção da pirâmide visual representada com arte por linhas e cores numa dada superfície, de acordo com uma certa distância e posição do centro e o estabelecimento de luzes." (Grayson[6], 2009, p. 83)

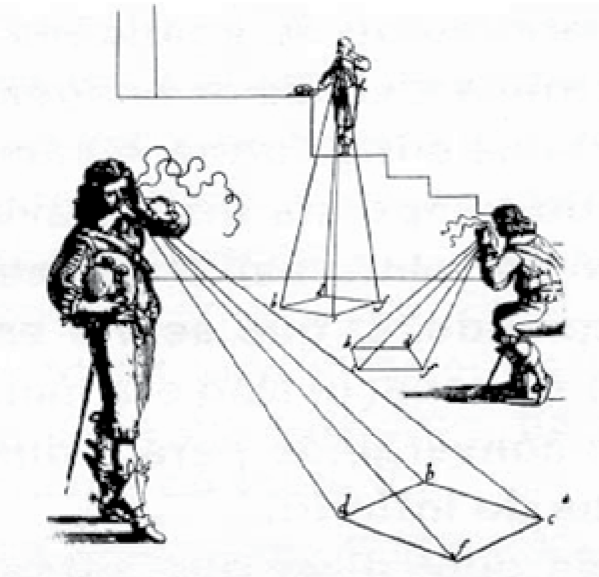


Figura 2. Abraham Bosse, Les Perspecteurs. Gravura da Manière universelle de M. Desargues pour traiter la perspective, 1648. Fonte: DAMISCH, H., 1993.

Esta pirâmide, contudo, vai ditar o modelo de visão renascentista, ou seja, olho centrado num ponto, que examina as proporções, as linearidades, as distâncias e a organização racional de um espaço metricamente quadriculado.

Assim, o espaço pictural harmônico passa a ser a ordem de uma verdade social e cultural. Como perceber isso numa imagem?

Tomemos como exemplo o afresco pintado por Leonardo da Vinci (Fig. 3), entre os anos de 1495 e 1497, e intitulado *A Última Ceia*, analisado em Wagner (2012).

6 Cecil Grayson é organizador e autor dos comentários do tratado Da Pintura, de Alberti.

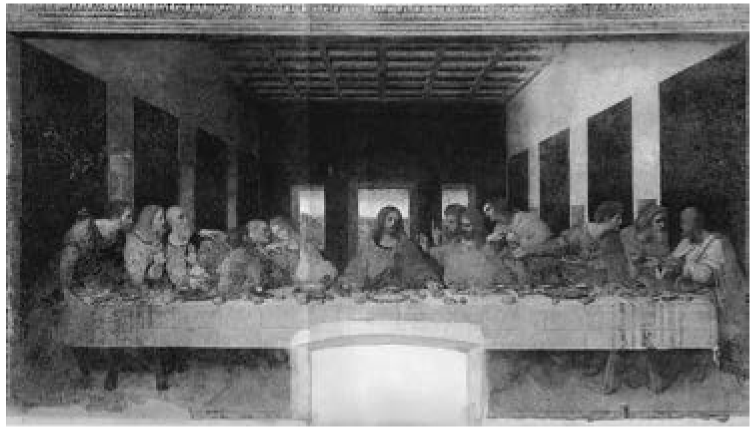


Figura 3. Leonardo da Vinci. *A Última Ceia*.
Fonte: PRETTE, Maria C., 2008.

Traçam-se retas perpendiculares ao plano do quadro (retas azuis) e percebe-se que as mesmas convergem para o olho direito de Cristo, encontrando, assim, o lugar do ponto de fuga central. Disto defini-se o lugar da linha do horizonte representada em vermelho na imagem (Figura 4).

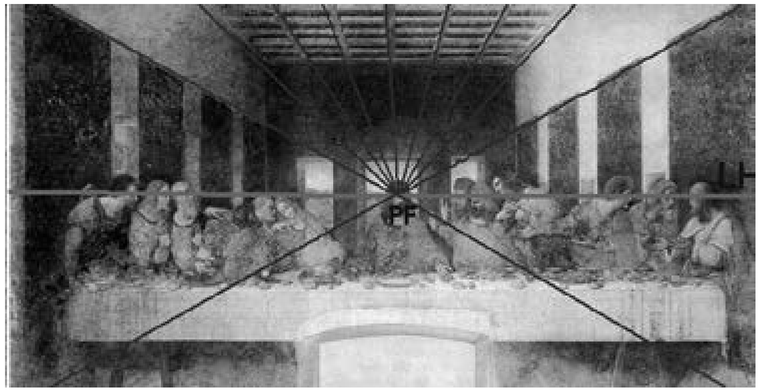


Figura 4

Para traçar o quadriculado do teto é preciso encontrar o ponto de fuga das diagonais. Segundo Parramón (1993), este ponto está situado na linha do horizonte, ao lado do ponto de vista central, a uma distância igual a três vezes a metade da largura do espaço que delimita o teto. O encontro das diagonais com as retas perpendiculares (A, B, C, D, E, F, G) marca o lugar onde as retas horizontais (retas vermelhas) devem partir para formar o quadriculado do teto (Figura 5).

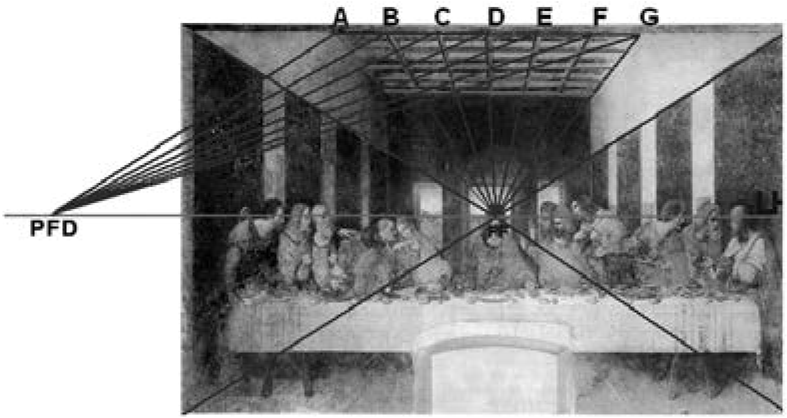


Figura 5

O uso da técnica da perspectiva, ou de conceitos que estão na base desta técnica, garante a construção de um espaço harmônico, equilibrado. Os personagens pintados na cena são posicionados a partir do traçado geométrico, assim como todo o desenho da arquitetura. Isso leva à ideia de harmonia que perpassa por toda a pintura.

Vale dizer aqui que, não é certo que Leonardo tenha desenhado sua pintura a partir da técnica de Alberti. Isso aqui só está nos servindo como uma sugestão, um diagrama de trabalho como dito anteriormente, para tratar não só de conceitos matemáticos por meio da arte, mas também notar os modos de olhar que foram elaborados pelo modelo de visão perspectiva.

Um outro exemplo, também analisado por Wagner (2012), é o afresco intitulado *A Escola de Atenas* (1510) de Rafael (Figura 6).

Figura 6. Rafael. A Escola de Atenas.
Fonte: PRETTE, Maria C., 2008.

Propõe-se traçar as diagonais do retângulo AC e BD (Fig. 7). Em seguida traça-se os segmentos de retas EF e IJ passando pelo ponto médio formado pelas retas diagonais. Desta maneira, dividi-se a imagem em quatro quadrantes e tem-se uma primeira percepção da composição de um espaço simétrico, portanto harmônico.

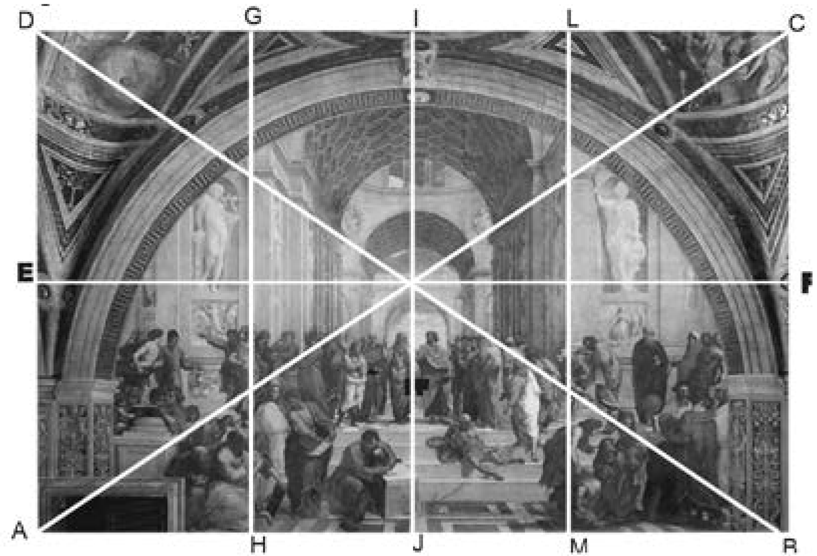


Figura 7

Ainda na figura 7, marca-se os segmentos GH e LM que estão situados a uma mesma distância do segmento central IJ. Com isto pode-se notar que a organização do espaço, e a disposição dos personagens nele, não foi uma escolha aleatória, mas bem medido, calculado, pensado e geometrizado. Isso porque toda a composição do quadro se dá por meio de uma harmonia, uma distribuição simétrica, tendendo a uma perspectiva central.

Partindo, ainda, do ponto H, traça-se a semi-reta HN, paralela ao segmento AC, e a partir do ponto M, traça-se a semi-reta MO, paralela ao segmento BD. Com estes traçados obtém-se um losango regular central, representado em azul, que delimita o espaço dos personagens principais da cena (ver figura 8). Ligando-se os pontos HI e MG, obtém-se ainda, uma pirâmide de base quadrangular dentro do losango. A construção destas figuras geométricas regulares no centro da composição pictórica fornece a ideia de equilíbrio do espaço e toda a pintura.

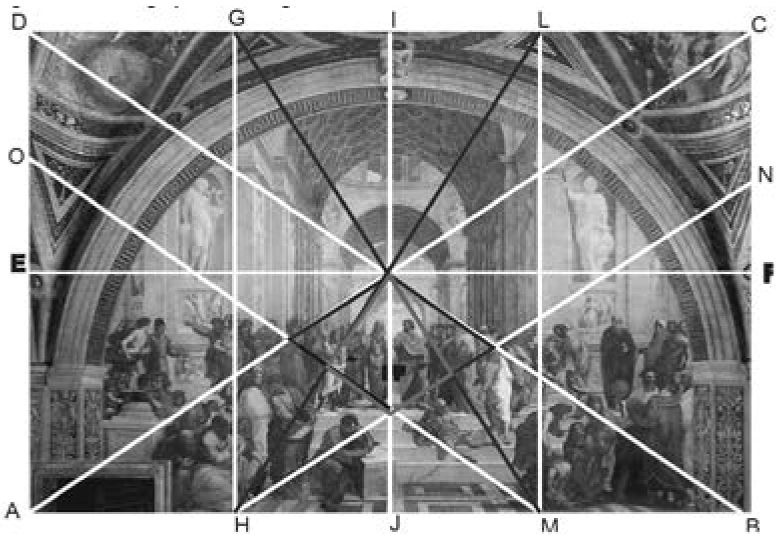


Figura 8

Da mesma forma como no exemplo anterior, vale dizer aqui que tais traçados na pintura só nos servem para criar na imagem a ideia matemática de harmonia. Isso não significa que o pintor teria usado os mesmos passos que usamos. De toda forma, o fato é que a composição de uma pintura do Renascimento cria a ideia de um espaço controlado, mas perfeitamente organizado e harmônico. Isso se fazia importante, pois a realização da pintura deveria se aproximar do real o mais perfeito possível. Tais ideias podem ser exploradas na educação matemática por meio da arte.

Considerações finais

A proposta de aliar a história da técnica da perspectiva, arte e educação matemática, por meio da prática do olhar técnico, permite tecer contribuições para a educação matemática nos seguintes sentidos:

Para perceber que o uso de saberes matemáticos, numa pintura, por exemplo, é resultado de articulações culturais para tornar a obra um objeto de arte.

Para refletir que a constituição do olhar empregado no ensino da matemática tem sua fecundação na técnica da perspectiva, que desenvolveu um olhar e um representar especificamente sob um ponto de vista e uma organização racional do espaço.

Para entender que a visualização matemática pode estar ligada antes aos aspectos de formação cultural e discursiva da vista, do que, simplesmente, por uma atividade física do olho.

Para permitir abordagens metodológicas pelo uso da arte na educação matemática, ultrapassando o simples ensino de conceitos matemáticos, e indo em busca dos conceitos considerados verdades na organização espacial e na elaboração do olhar.

Por fim, cabe dizer que este é um trabalho em construção, mas que está na trilha do pressuposto que a matemática é fruto de uma construção social, histórica, cultural, e que sua relação com a arte pode ser profícua na medida em que elaboramos novas compreensões para a arte e para o olhar para a arte.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brasil, pelo apoio financeiro concedido às autoras para a realização dos estudos que permitiram a elaboração deste trabalho.

Referências

ALBERTI, Leon B. **Da Pintura.** 3. ed. Tradução Antônio da Silva Mendonça. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2009.

DAMISCH, Hubert. **L'Origine de la Perspectiva**. Paris: Flammarion, 1993.

FLORES, Cláudia R. **Olhar, saber e representar**: sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Editora Musa, 2007.

FLORES, Cláudia R. Cultura Visual, Visualidade, Visualização Matemática: balanço provisório, propostas cautelares. **Revista Zetetiké**, Unicamp, v. 18, p. 277–300, 2010.

HERNÁNDEZ, F. **Catadores da Cultura Visual.** Tradução Ana Duarte. Porto Alegre: Mediação, 2007.

JAY, M. Scopic regimes of modernity. In: FOSTER, H. (Ed.). **Vision and visuality**. Seattle: Bay Press, 1988.

KOSMINSKY, Dóris C. **O olhar inocente é cego**: a construção da cultura visual moderna. 2008. 306f. Tese (Doutorado em Artes e Design) PUC, Rio de Janeiro, 2008.

MIRZOEFF, Nicholas. **An introduction to visual culture**. London/New York: Routledge, 1999.

PRETTE, Maria C. **Para entender a arte**: história, linguagem, época, estilo. Tradução Maria Marguerita de Luca. São Paulo: Globo, 2008.

STURKEN, M. & CARTWRIGHT, L. **Practices of Looking:** an introduction to visual culture. Oxford/New York: Oxford University Press, 2001.

WAGNER, D. R. **Arte, Técnica do Olhar e Educação Matemática**: o caso da perspectiva central na pintura clássica. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

Cláudia Regina Flores – UFSC – Brasil
E-mail:crf@mbox1.ufsc.br

Débora Regina Wagner – UFSC – Brasil
E-mail: dede_wagner@yahoo.com.br

SENTIMENTOS DE SEMELHANÇA: DAS ARTES À MATEMÁTICA

FEELINGS OF SIMILARITY: THE ARTS OF MATHEMATICS

Renato Borges Guerra
Márcia de Nazaré Jares Alves Chaves
Universidade Federal do Pará – UFPA - Brasil

Resumo

Este trabalho constitui parte de uma pesquisa que buscou compreender o fazer artístico para o desenvolvimento de ‘sentimentos matemático de semelhança’ em alunos do Ensino Fundamental**.** Inspirado pela Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud foi desenvolvido uma experiência piloto de ensino por meio de uma sequência didática envolvendo fazeres da arte que comungam os conceitos artísticos e matemáticos de semelhança. O estudo revelou que, embora a matemática seja considerada no domínio inteligível e a arte no domínio sensível, a razão e a emoção mostram-se, por vezes, inseparáveis para construção do sentimento de semelhança matemático.

Palavras-chave: Ensino de Arte, Matemática, Campos Conceituais, Semelhança.

Abstract

This work is part of a study that sought to understand the artistic development of ‘feelings of similarity’ in the mathematical sense, in elementary school students. Inspired by the theory of Vergnaud Conceptual Fields was developed a pilot experience of teaching by a teaching sequence involving doings of art that share the artistic and mathematical concepts of similarity. The study revealed that while mathematics is considered intelligible and art in the field in the sensitive matter, reason and emotion show up, sometimes inseparable for the construction of feeling like a mathematician.

Keywords: Teaching Art, Mathematics, Fields Concept, Similarity.

Introdução

A noção de semelhança é, em geral, vista como um conceito matemático aplicado aos fazeres das engenharias, das arquiteturas e das Artes e, com freqüência, se constitui em dificuldade aos alunos do ensino básico, inclusive do superior, quando solicitados a justificar se dois objetos são semelhantes no sentido matemático, muito embora possam demonstrar, às vezes, certa habilidade no uso de propriedades matemáticas dessa noção em situações específicas dessa disciplina.

Em particular, quando trabalhamos com alunos da 8ª série de uma escola pública, sujeitos de nossa investigação, a análise realizada por meio de questões relacionadas ao conceito matemático de semelhança mostrou que os sujeitos apresentavam dificuldades em explicitar conhecimentos que envolviam essa noção, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental preconize, em vários ciclos desse nível, o estudo de semelhança.

Segundo a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990, p.20), os alunos em geral não são capazes de explicar ou expressar em linguagem natural seus teoremas-em-ação, ainda que sejam capazes de resolver certas tarefas (situações)

> Não só alunos, qualquer pessoa muitas vezes é incapaz de colocar em palavras coisas que faz muito bem, conhecimentos que tem. Há um hiato, entre a ação e a formalização da ação. Agimos com o auxílio de invariantes operatórios sem expressá-los ou sem sermos capazes de expressá-los. A análise cognitiva dessas ações muitas vezes revela a existência de potentes teoremas e conceitos-em-ação implícitos. Esse conhecimento, no entanto, não pode ser, apropriadamente, chamado de conceitual, pois o conhecimento conceitual é necessariamente explícito. (MOREIRA, 2004, p.23),

Mas, o próprio conhecimento explícito, cientificamente apropriado, tem componentes implícitos. Nem todo conhecimento implícito é apropriado, mas é indispensável para o desenvolvimento do conhecimento explícito; o conhecimento implícito vai-se modificando e/ou novos conhecimentos implícitos vão sendo aprendidos, não necessáriamente de um modo racional e sistemático até se alcançar a "propriedade" necessária para a emergência de um conhecimento explícito apropriado[7]

Nesse sentido, a teoria dos Campos Conceituais não só permite a análise da evolução de um campo conceitual como também sugere como nortear o desenvolvimento de ações de ensino que envolva um campo conceitual, principalmente co-disciplinar como o de semelhança, por meio de diferentes situações, inclusive da apreciação, de leitura de imagens, fixas e móveis, contextualização e produção artística, pois para Vergnaud

7 Esta ideia, aliás, aparece claramente em alguns filósofos da ciência. Polanyi, filósofo das matemáticas, expressa que as premissas da ciência, sejam procedimentos ou crenças, são observadas "tácitamente" (implícitamente na linguagem que aqui utilizamos) na prática científica: "Como em qualquer habilidade — nadar, andar de bicicleta, etc. — as premissas das mesmas não podem ser "descobertas" ou mesmo "compreendidas" sem que tenhamos praticado tais habilidades. Tais premissas só podem ser explicitadas a posteriori" (POLANYI, 1973, p. 162, apud. ABRANTES, 1998). Também em Kuhn, para quem "a natureza e as palavras (definições e regras explícitas) são aprendidas conjuntamente" (KUHN, 1970, p. 191).

> os verdadeiros conceitos são basicamente relacionais e referem-se a um conjunto de situações, invariantes operatórios e suas propriedades, que podem ser expressas por diferentes representações lingüísticas e outras representações simbólicas (VERGNAUD, 1998, p. 177)". De outro modo, os conceitos podem ser definidos como um tripleto de conjuntos (VERGNAUD, 1990, p. 145; 1997, p. 6), O = (S,I,R), onde S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, I é um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito que permitem ao sujeito analisar e dominar as situações do primeiro conjunto e R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc), que servem para representar de forma explícita os invariantes operatórios. O primeiro desses conjuntos é o referente do conceito, o segundo o significado e o terceiro o significante. (GRECA E MOREIRA, 2003, p. 5).

Mais precisamente, Vergnaud aponta que um verdadeiro conceito é construído por meio de relações não necessariamente objetivas, estabelecidas pelo sujeito entre uma classe de situações por ele enfrentada e os invariantes operatórios e, ainda, entre esses invariantes operatórios e as representações simbólicas usadas por ele para explicitar esses invariantes operatórios. A não objetividade das relações significa que não se pode reduzir o significado aos significantes e nem às situações (VERGNAUD, 1990, p.146), pois não se pode tratar o conceito isolado das situações já que é por meio das distintas situações vivenciadas pelo sujeito que se revelam distintos aspectos ou 'faces' do conceito presentes nessas situações e essas relações engendradas é que significam o conceito para o sujeito.

Assim, tendo em conta a necessidade do desenvolvimento de conhecimentos implícitos e que suas verbalizações são o instrumento cognitivo indispensável para sua transformação em conceitos e teoremas científicos (VERGNAUD,1994, p. 47), nos faz pensar que explorar esse conceito em suas distintas matizes é necessário para prover de vivências o aluno, a fim de que este se aproprie dos primeiros passos dessa noção no fazer da matemática, das artes e das ciências, pois as situações reais abrangem um conhecimento prévio como precursor de novos conhecimentos, em que o aluno se apóia para aprender, através de uma variedade de situações de experiências, maturidade e aprendizagem. (VERGNAUD, 1990, p. 135).

Nesse contexto, nos perguntamos se as situações artísticas podem promover o desenvolvimento de sentimentos de semelhança, aqui entendido como conhecimentos implícitos que permitam aos alunos reconhecer a possibilidade de existência de uma relação de semelhança entre duas figuras dadas. Seguindo, nos perguntamos "Que situações, no ensino das Artes, podem promover o desenvolvimento desses sentimentos matemático de semelhança"? , e ainda, "Que aspectos da noção de semelhanças podem ser revelados no fazer artístico e descrito na língua natural pelos alunos?". Para responder a tais questionamentos antes se torna necessário refletir sobre a noção de semelhança nas Artes e na matemática.

O conceito de semelhança: das Artes à Matemática

Rudolf Arnheim (1991, p. 70), teórico da Psicologia da forma, explica que "a semelhança nas artes visuais é um pré-requisito para se notar as diferenças", e na intenção de evidenciar esse argumento, apresentamos a seguir, a obra do artista plástico Luiz Antonio Felkl intitulada 'O Próximo e o Distante'(figura 01) para a mostra 'Sintaxe da Figura', na qual ele adota como estratégia, a auto referencialidade de seu próprio modelo plástico. Esse artista utiliza a figura humana como elemento motor, tanto feminino quanto masculina, a partir de três escalas de pequeno formato - uma maior, outra média e a terceira menor. Verifica-se que de uma imagem pré-fabricada pelo próprio artista provêm as outras. O uso de uma forma estável ajuda a relação perceptiva das diferenças de plano ou mesmo de grupos dentro do grupo maior, As semelhanças fisionômicas, de posturas, das vestes são propositais, justamente para destacar o que lhe interessa como discurso conceitual.

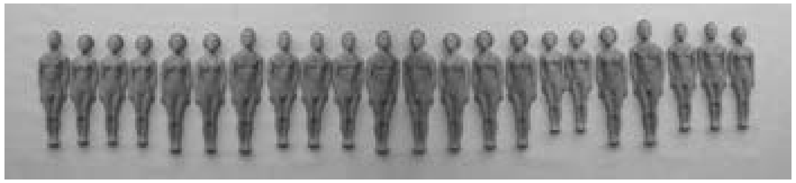


Figura 01. O Próximo e o Distante.
Fonte: Bolsadearte

Como tal, nas artes, a noção de semelhança remete à ideia de repetição premeditada de formas, cores, tons, linhas. Conforme Parramon[8] (1988, p. 48), "trata-se de repetir e distribuir pelo quadro as mesmas semelhanças, como a semelhança de cor que nada mais é que o uso de uma cor com suas várias tonalidades" (...) "criar ecos que prolonguem a dominante da cor", como exemplo do auto-retrato pintado por Vicent Van Gogh (figura 02), o qual utiliza uma dominante de cor verde-claro.

8 Artista plástico espanhol e teórico da linguagem visual.

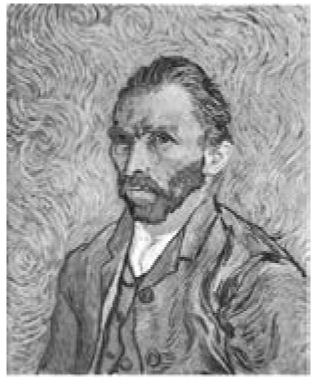


Figura 02. Autorretrato de Van Gogh
Fonte: Parramon (1988)

Na semelhança de formas, tem-se como exemplo a obra de El Greco ' A Ressurreição de Cristo' (figura 03), na qual o artista representa figuras alongadas repetidas em toda obra. Esse fator de semelhança também se apresenta no volume, na execução e no estilo, trata-se da famosa Lei da repetição, graças a qual se consegue mais harmonia, mais ordem dentro da variedade compositiva. Parramon (1988) chama a atenção para a aplicação da analogia de semelhanças, ou lei de repetição, desses dois artistas de épocas diferentes mostrando com isso uma unidade maior dentro da variedade.

Figura 03. A Ressurreição de Cristo - El Greco
Fonte: Parramon (1988)

Nesse caminhar, de unidade, a noção matemática de semelhança parece se revestir, mesmo com a sofisticação evidenciada pela recorrência de outros conceitos matemáticos historicamente distantes das situações que lhe possam dar sentido nas artes como, por exemplo, a definição dada por Lima (1991) a seguir: Definição 1: Uma transformação $T: \Pi \rightarrow \Pi$ é uma semelhança de razão r se para todo par de pontos X e Y em π o comprimento do segmento ligando X'=T(X) e Y'=T(Y) é igual a r vezes o comprimento do segmento ligando X a Y. Os pontos X' e Y' são denominados homólogos. Dizemos que F e F' são duas figuras semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma semelhança entre os pontos de F e os pontos de F'. Ou seja, se X e Y são pontos quaisquer de F e X'=T(X) e Y'=T(Y), são seus correspondentes em F', então X'Y'= r XY.

A noção de semelhança corresponde à ideia natural de "mudança de escala", isto é, ampliação (razão r>1) ou redução (razão r<1) de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções (Figura 4).

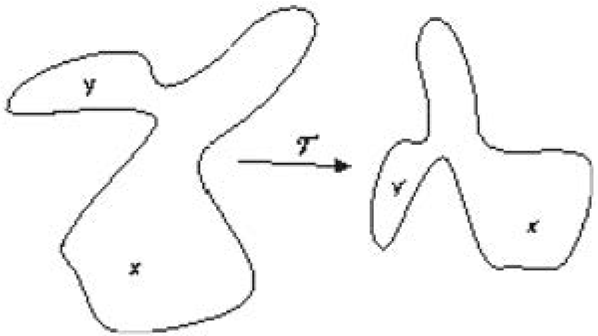


Figura 04

Grosso modo, essa noção matemática de semelhança traz consigo a ideia de repetição, já apontada nas artes, que se evidencia pela manutenção da forma e com variação do tamanho por proporcionalidade, mas segundo Maciel (2004), essa ideia remonta às civilizações antigas com os egípcios:

> Encontramos que os antigos egípcios por volta de 3.200 a.C. usavam a redução e a ampliação de um desenho por meio do método científico conhecido como método dos quadrados: depois de traçarem a figura considerada em um quadriculado, reproduziam-na em certa escala. A nova figura desenhada era uma transposição da figura esboçada anteriormente. Em seguida eram determinados pontos de coincidência entre os quadrados e o desenho, de tal modo que o desenhista não cometeria erros de proporção... [ ] Entre o esboço e o desenho final ampliado, havia uma razão geométrica de semelhança que envolvia conceitos de homotetia, semelhança e proporcionalidade (MACIEL, 2004, p. 04).

Mais precisamente, o método egípcio dos quadrados para reduzir ou ampliar imagens se constitui a partir da construção de quadrados multiplicando por um mesmo número r as dimensões dos quadrados correspondentes da figura inicial, como ilustrado pela a figura X, buscando manter a proporção e, nesse sentido, a definição matemática podemos compreender, grosso modo, como uma "descrição ideal" da técnica egípcia dos quadrados para aumentar ou reduzir uma figura com proporção (figura 05).

→

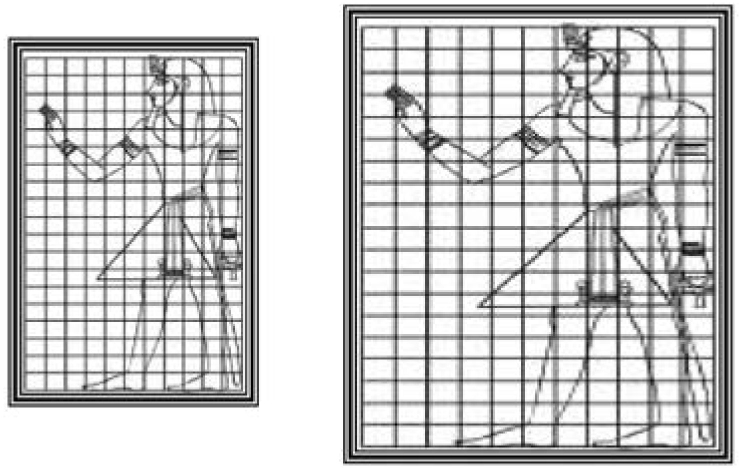


Figura 05. Padrão quadriculado usado para iniciar desenho

Fonte: HAUSER, Arnold. História Social da Literatura e da Arte. 1982. v.1. p. 61.

Assim, as proporcionalidades exatas, no sentido matemático, são encontradas também nas artes, em pinturas e esculturas, como acontecia em todas as escolas de artes do antigo mundo egípcio em que se demonstrava a beleza artística através da perfeita proporção das formas. O conceito matemático de semelhança mobiliza o conceito de proporção, ou seja, para que a figura seja semelhante a outra é preciso que tenha justa proporção ou, como refere Ostrower[9] (1989,p.280), a proporção é a justa relação das partes entre si e de cada parte com o todo.

A noção de semelhança matemática de figuras geométricas também se manifesta em clássicas obras de arte por meio da fórmula da seção áurea com

9 Artista plástica, teórica, escritora e professora de artes visuais.

sua proporção determinada, como usada por Georges Seurat (1883-84) quando recorreu à técnica da simetria dinâmica usando retângulos de ouro nas suas pinturas, como podemos observar na figura 06 a seguir:

Figura 06. Baignade (1883 – 84) George Seurat
Fonte: Index 2000

Desse modo, podemos dizer, as semelhanças nas Artes que se evidenciam por repetições de diferentes aspectos, sem proporcionalidades, com quase-proporcionalidades ou com proporcionalidades não-matemáticas como as que se manifestam por diferentes tons de uma cor (Auto Retrato de Van Gogh), ou o de repetição de formas alongadas nas figuras em uma obra ('A Ressurreição de Cristo' de El Greco), por suas complexidades, parecem não admitir uma síntese (descrição) matemática que se mostre útil para essa ciência, o que justifica, por assim dizer, grosso modo, a tomada da forma reduzida pela matemática de repetição de forma com proporcionalidades exatas que, embora ainda complexo, é adequado para seus fins.

Nesse contexto, nos parece que a noção de semelhança das artes pode fazer emergir a noção reduzida de matemática, restrita à proporcionalidade geométrica, ou seja, que o fazer das artes pode levar paulatinamente ao conhecimento explícito matemático de semelhança.

Assim, postulamos que o fazer das artes pode se tornar promotor de conhecimentos implícitos no aluno, necessários para o desenvolvimento do conhecimento explícito, por meio de releituras de imagens - que não é necessariamente uma cópia, mas o acréscimo de um toque pessoal e uma nova maneira de ver e sentir, uma criação com base em um referencial (que é a imagem) sem que ela perca a sua essência - aliada à dinâmica de construção e uso das transformações de semelhanças, levando os alunos paulatinamente a adquirirem o que compreendemos como "sentimentos de semelhança matemática" que lhes permitam expressar em linguagem natural, com incertezas, "parecem ser semelhantes" quando em frente, por exemplo, a dois retângulos, ou, com a certeza,

"não são semelhantes" quando em frente a figuras não semelhantes como, por exemplo, um quadrado e um losango com ângulos internos não retos.

Mais precisamente, podemos inferir que a noção de semelhança das artes, em sua complexidade, inclui entre outros aspectos os de semelhança matemática que se fazem distinguir de modo preciso nos fazeres artísticos como a repetição de forma e a proporcionalidade. Tais aspectos tornam-se então respostas parciais aos questionamentos secundários por nós formulados inicialmente e encaminham a situações nas artes que consideramos em nossa experiência no ensino de modo a responder a nossa questão principal.

Experiências de Ensino de Artes Plásticas com Matemática

Nossa experiência-piloto foi realizada em 24 aulas em uma turma de 25 estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública, na cidade de Belém do Pará, durante o 1º bimestre de 2007, com objetivo de construir um conhecimento estético que pudesse fazer emergir 'sentimentos de semelhança matemática' por meio de uma seqüência envolvendo variedades de situações progressivas, do primeiro ao último encontro, envolvendo os aspectos supramencionados de repetição e proporção.

Iniciamos com um passeio com a turma fora da sala de aula observando, na área da escola e depois em suas residências, flores, folhas, árvores, troncos, arbustos, pedras, nuvens, a fim de os alunos catalogassem, classificando as formas encontradas em regulares, considerando as formas geométricas estudadas na escola, para serem apresentadas na aula seguinte. As exposições sobre a coleta feita contribuíram para a turma se manifestar dizendo que "as formas da natureza não são certinhas, por isso acham que não são regulares", exemplificadas pelas figuras 07 e 08.

Figura 07
Fonte: Estudante

Figura 08
Fonte: Estudante N

Continuando, foi apresentado à turma um objeto desconhecido, mas que as formas catalogadas foram-lhe evocadas: os Fractais[10], que significa quebrar e refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares, complexos. O aspecto repetitivo da forma está presente na folhagem de uma samambaia que pode ser observada como uma réplica em miniatura do todo, não idêntico, porém semelhante na estrutura.

Como motivação foi apresentada imagens construídas com fractais em computador, em particular as formas irregulares da natureza, para releituras de imagens de forma manual, com a utilização do lápis e do desenho de formas regulares como quadrado, triângulo, retângulo e círculo, em papel quadriculado, utilizando-se recortes de formas geométricas em papel cartão colorido (exposto sobre a mesa com uma variedade de cores à escolha de cada um), explorando o uso do fractal que, como era esperado, poderiam despertar nos estudantes o aspecto de repetição.

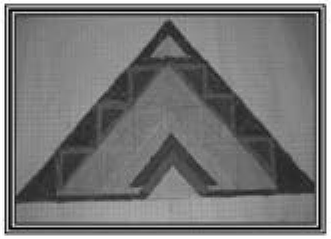


Figura 09
Fonte: Estudante R

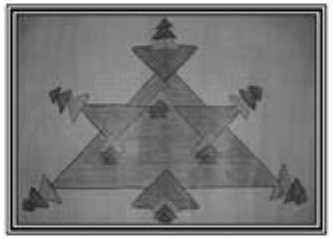


Figura 10
Fonte: Estudante

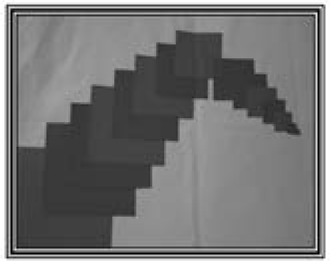


Figura 11
Fonte: Estudante H

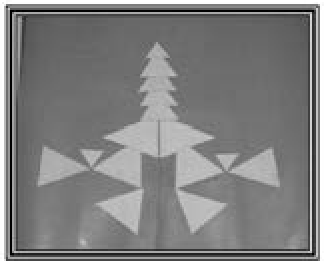


Figura 12
Fonte: Estudante N

10 "Termo criado por Benoît Mandelbrot, matemático francês nascido na Polônia, que descobriu a geometria fractal na década de 70, a partir do adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*. São objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo (repetitivo), apresentando auto-semelhança e complexidade infinita".

As produções dos estudantes expostas nas figuras 09, 10, 11, e 12 parecem confirmar nossas expectativas na medida em que o aspecto de repetição e proporcionalidade, mesmo que ainda não apontada, já se faz presente.

Ao término da atividade, os trabalhos foram expostos dentro da própria sala de aula, para que a turma pudesse visualizar suas produções e comentar sobre o que existia em comum nas suas produções construídas como fractais. Eles então observaram e descreveram o que viam se manifestando com:

> -Estudante D: "Existe repetição nas formas";
> -Estudante R: "Essas formas estão reduzidas ou aumentadas e com suas formas distribuídas de um lado iguais ao outro lado";
> -Estudante S: "Existe um equilíbrio na maioria das obras".

Na produção dos estudantes inspirada nos fractais, foram observados elementos simétricos presentes em algumas de suas produções. Sendo então, selecionadas e apresentadas à turma, no momento seguinte, para o reconhecimento da presença de simetria e como forma de exemplificar esse conceito presente em obras de arte, como nas obras de Escher, Limite Circular I e III (figura 13).

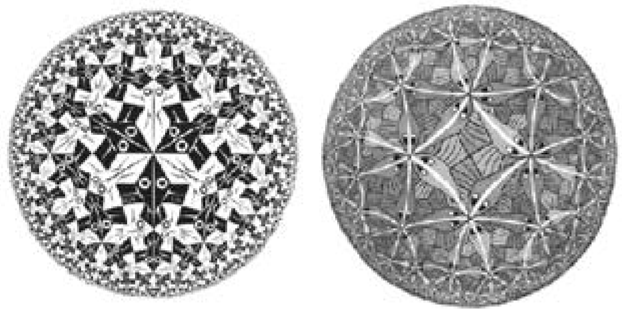


Figura 13. M. C. Escher. Limite Circular I e Limite Circular 3, xilogravuras, 1958
Fonte: (Ernst, B. 1991, p. 108 e 109)

Após a apresentação dessas obras, foi explorada a ideia de simetria, como um tipo de composição em que a imagem é composta por formas semelhantes, justapostas e espelhadas e, portanto, um olhar, uma situação a mais a ser vivenciada com semelhanças.

Após a exposição e leitura da obra de Escher, foi feita a contextualização, em que foi observado que o autor reduz gradualmente o tamanho das figuras até que alcance, pelo menos teoricamente, o limite do formato infinitamente pequeno, conceito marcante em muitos dos seus trabalhos. Após este momento, a aula foi ilustrada com outras imagens com aspecto simétrico, presente na natureza e de pormenores da arquitetura, também nas artes, na música, na dança, na matemática, na arquitetura, por meio da exibição em DVD ‘Simetrias, da série Arte Matemática, produzido pela TV Cultura, e de imagens fixas.

Após a apreciação e contextualização das imagens simétricas, foi solicitado à turma que produzissem individualmente composições simétricas, com o objetivo de reforçar o aspecto de repetição e, dessa forma, iniciar de modo mais geral o conceito de semelhança de imagens. Essas imagens estão apresentadas nas figuras 14,15 e 16 a seguir.

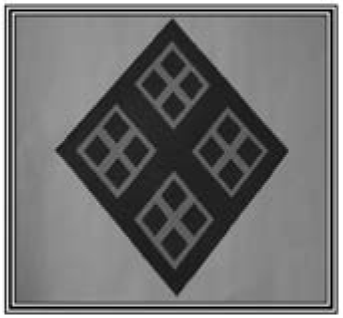


Figura 14: Estudante Q

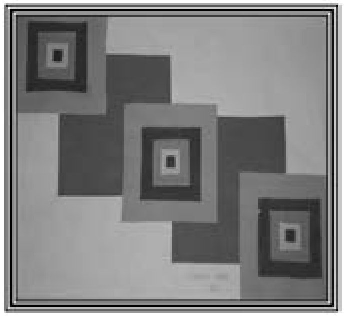


Figura 15: Estudante F

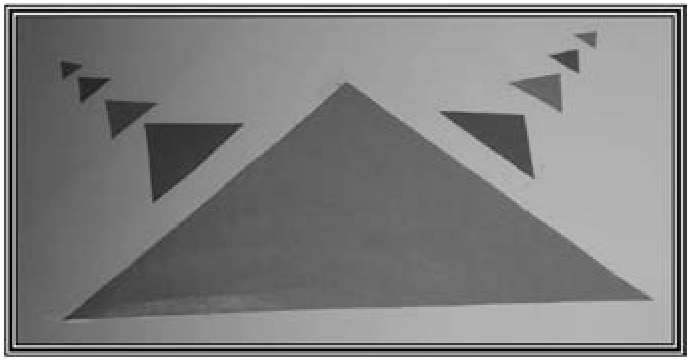


Figura 16 - Estudante E

Após a visualização, apreciação e construção de obras simétricas, surgiu a necessidade de observação das proporções das formas com o objetivo de trabalhar a ‘justa relação das partes entre si e de cada parte com o todo’. Dessa forma, buscamos contextualizar o conceito de semelhança através da história de sua origem e uso por meio da técnica de ampliação e redução que levam definitivamente a noção de semelhança matemática.

Para isso, na atividade seguinte foi trabalhado o método dos quadrados egípcios (de redução e ampliação), em duplas de estudantes: um ampliava e o outro

reduzia a mesma imagem, com o objetivo de trabalhar a proporção e semelhança de imagens, como podemos visualizar nas figuras 17 e 18.

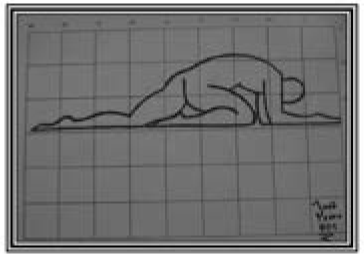


Figura 17: Estudante H

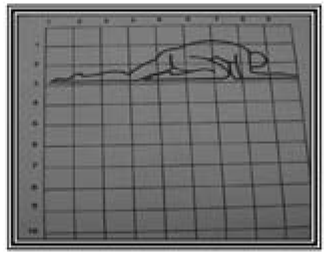


Figura 18: Estudante I

Após essa atividade, alguns estudantes, por iniciativa própria, resolveram continuar ampliando e reduzindo imagens escolhidas por eles, utilizando o método dos quadrados egípcios, como mostramos na figura 19.

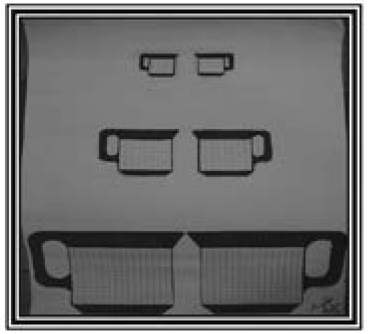


Figura 19 - Estudante E

Com o propósito de ilustrar que a visualização da repetição de forma não é simples e pode levar a equívocos, tomamos garrafas de uma marca de refrigerante em tamanho grande e pequeno para serem visualizadas e analisadas por eles conforme suas formas, que, após um tempo, em maioria, responderam ‘parecem que são semelhantes’.

Em seguida, solicitando que pegassem as garrafas, e observassem o tamanho das tampas e seus gargalos, verificaram assim que, apesar de serem muito parecidas, não existe uma ‘justa relação das partes’, ou seja, não são proporcionais, pois as garrafas possuem seus gargalos do mesmo tamanho, ou melhor, a tampa da garrafa pequena cabe na garrafa grande ou vice-versa.

Assim, mostrou-se que nem sempre quando dois objetos aparentam ter a mesma forma são semelhantes, ou seja, não são semelhantes no sentido matemático se tem a mesma forma, mas não são proporcionais.

Os sentimentos de semelhança matemática se fizeram sentir por meio de repetição de forma e da proporção nas produções do fazer artístico dos nossos sujeitos e ratificados quando postos à frente de figuras com manifestações na língua natural por expressões do tipo que se segue:

-Sim, são semelhantes, porque, apesar dos tamanhos diferentes, são iguais.

-Parece que são semelhantes, porque tem a mesma forma, só muda o tamanho.

-Sim, são semelhantes, porque são iguais, embora em tamanhos diferentes.

-Parece que são semelhantes, porque tem a mesma forma, só muda de tamanho.

-Sim, são semelhantes, porque são iguais, mas de tamanhos diferentes.

-Parece que são semelhantes, porque há a mesma forma nas duas imagens, apenas com tamanhos diferentes.

No entanto, mesmo ao constatarmos o índice significativo de (98%) manifestações em conformidade com nossos objetivos de construção de invariantes operatórios de repetição de forma com proporcionalidade, torna-se importante destacar manifestações encontradas em um pequeno grupo (7,8%) de respostas em nossa experiência que não conseguiram explicitar em linguagem natural esses invariantes mesmo que seus fazeres artísticos revelassem a presença deles.

A Teoria dos Campos Conceituais nos dá uma compreensão sobre esse pequeno grupo que revela não ter habilidade para explicar ou expressar na linguagem natural seus conhecimentos implícitos, mesmo tendo aplicados com propriedade nas tarefas práticas propostas em nossa experiência. Segundo Moreira (2004. p. 24) não se pode esperar que, no ensino formal, o aluno, mesmo mediado pelo professor, adquira conhecimentos e aprendizagem expressivos em apenas dois ou três meses de exposições teóricas de disciplinas. De nada serve tentar contornar as dificuldades conceituais, elas são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas, mas isso não ocorre de uma só vez, novas propriedades e novos problemas devem ser estudados ao longo de vários anos para que os estudantes os dominem progressivamente, ou seja, no processo de apreensão desses campos conceituais, os estudantes vão adquirindo concepções (verbalização) e competências (resoluções de problemas), que se caracterizam como os aspectos procedimentais e declarativos que se constituem em ferramentas essenciais para a descrição e análise da lenta conquista da complexidade dos campos conceituais.

Considerações finais e novos encaminhamentos

Nossa experiência mostra que parece ser possível promover o desenvolvimento de conhecimentos implícitos pelo aluno na dinâmica de construção e uso de transformações de semelhanças por ele construídas, de modo a levá-los paulatinamente a significar a noção matemática de semelhança como ‘sentimentos de semelhança matemática’ que, por meio de observações de imagens, possam fazer afirmações do tipo “parecem ser semelhantes” com a consciência que a necessária proporcionalidade exata não está claramente visível, a menos que esteja previamente assegurada.

Além disso, nossa investigação parece demonstrar que o domínio da técnica egípcia contribui para a apropriação da descrição matemática de semelhança de figuras não apenas restrita a figuras da geometria e oportunamente pode mostrar que, se, por um lado, as construções de figuras semelhantes nas artes pode se constituir em uma prática rotineira, por outro, o construir ou verificar se duas figuras são ou não semelhantes, no sentido matemático, não é nada fácil e, freqüentemente, até impossível de ser realizado.

Assim, se faz notar que a descrição de semelhança matemática não é adequada para verificação de semelhança, como a de dois círculos que sentimos que são semelhantes, e de fato os são, mas exigem outros caminhos para comprovar como faz Lima (1991) quando recorre à noção de homotetia. No entanto, tal descrição matemática de semelhança pode se mostra útil para mostrar a não semelhança como de dois retângulos que podem nos parecer semelhantes, pela repetição de forma e que por não apresentarem dimensões dos lados homólogos proporcionais não serem semelhantes.

Isso encaminha novas investigações sobre o papel da compreensão de semelhança das artes na formação de professores de matemática, pois evidencia razões de ser no currículo de matemática do estudo de critérios que permitam identificar se duas figuras são, ou não, semelhantes, por exemplo, não só para a construção de objetos outros matemáticos como o teorema de Pitágoras, mas também para mostrar que a restrição do estudo a critérios de verificação de figuras geométricas semelhantes, a exemplo dos triângulos, que ganham especial ênfase no ensino fundamental, não evidencia as impossibilidades de verificações de semelhanças, em geral, entre duas figuras quaisquer, inclusive para as ditas geométricas.

Além disso, outros conceitos relacionados, como o da proporcionalidade, mostram-se mais complexos e nos obrigou, nesse caso, a recorrer a expressão do tipo “proporcionalidades exatas” quando restrita a matemática, revelando facetas outras desse conceito não expostos nos estudos dessa disciplina, mas importantes quando da aplicação da matemática a situações reais.

Nesse sentido, e tendo em conta que a experiência foi realizada na disciplina de artes, julgamos também necessário encaminhar experiências na disciplina matemática de modo a compreender o quão próximo pode ser o ensino dessas duas disciplinas explorando conceitos comuns em suas faces distintas, à luz também de novos referenciais teóricos como a matemática Humanística difundida por Alvin White, que epistemologicamente objetiva ensinar e guiar estudantes pelo uso da imagem, da história e de outras conexões interdisciplinares.

Referências

ARNHEIM, R. **Gestalt psychology and artistic form**. Aspects of form. In: Symposium in Nature and Art. Bloomington: Indiana University press, 1991.

BOLSADEARTE. http://bolsadearte.com.br/exposição. Acesso em 02/05/2008.

ERNST, B. **The Magic Mirror of M. C. Escher**. England: Tarquin, 1978.

ESCHER, M. C. **Gravuras e Desenhos**. Tradução Maria Odete Conçalves Koller Hamburgo: Taschen, 1994.

ESCHER, M. C. http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Escher.htm. Acesso em 15/12/2007.

GRECA, I.; MOREIRA, M. A. **Conceptos: naturaleza y adquisición**. Textos de Apoio do Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências da Universidade de Burgos/UFRGS. Actas del PIDEC, 2003.

HAUSER, A. **História Social da Literatura e da Arte**. Tradução Walter H. Greenen. São Paulo: Mestre Jou, v.1. 4. Ed, 1982.

INDEX 2000. **Artistas Matemáticos, Matemáticos Artistas**. http://www.educ.fc.pt/icm2000/icm33/index.html. Acesso em 20/10/2007.

Interdisciplinary Teaching Strategies in the Word of Humanistic Mathematics. www.mi.sanu.ac.yu/vismath/tennant1/index.html. Acesso em 11/11/2006.

LIMA, E. L. **Medidas e Formas em Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Coleção do Professor de Matemática.

MACIEL, A. C. **O Conceito de Semelhança: Uma proposta de ensino**. (Tese de Mestrado). São Paulo: PUC, 2004.

MOREIRA, M. A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud**: O ensino de Ciências nesta área. Porto Alegre. Instituto de Física da UFRGS, 2004.

PARRAMÓN, J. M. **Assim se compõe um quadro**. Barcelona: Parramón, 1988.

OSTROWER, F. **Universos da Arte**. 9. Ed. Rio de Janeiro: Campos, 1989.

OSTROWER, F. **Criatividade e processos de criação**. 10. Ed. Petrópolis: Vozes, 1994.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *In:* **Recherches en *Didactique des Mathématiques***. v. 10, n. 2. 3. La Pensée Sauvage, 1990. p. 133-170.

VERGNAUD, G. et al. Epistemology and psychology of mathematics education. In: NESHER, P. & KILPATRICK, J. (Eds.). **Mathematics and cognition**: a research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H. and CONFREY, J. (1994). (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**, 1994.

Renato Borges Guerra - UFPA - Brasil
E-mail: rguerra@ufpa.br

Márcia de Nazaré Jares Alves Chaves - UFPA - Brasil
E-mail: marciajares@gmail.com

APORTES MÚTUOS NA RELAÇÃO ENTRE SIMETRIA E ARTES VISUAIS EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS

CONTRIBUTIONS IN MUTUAL RELATIONSHIP BETWEEN SYMMETRY AND VISUAL ARTS IN MATHEMATICS TEXTBOOKS OF EARLY YEARS

Luciana Ferreira dos Santos
Rosinalda Aurora de Melo Teles
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE – Brasil

Resumo

Neste artigo, discutimos alguns avanços, entraves e aportes mútuos na relação entre simetria e artes visuais em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do ensino fundamental. Para analisar como estas duas áreas de conhecimento se articulam nas abordagens escolares, mapeamos 200 atividades extraídas de 17 coleções de livros didáticos. Refletimos sobre a contribuição do uso das artes visuais para o ensino da simetria a partir dos aspectos relacionados ao ensino de artes, tais como: leitura de imagem, contextualização e fazer artístico explorado nestas atividades. Constatamos que articulação entre artes visuais e simetria acontece nos livros didáticos através de diversas modalidades artísticas que exploram elementos como o eixo de simetria.

Palavras-chave: Artes Visuais, Simetria, Interdisciplinaridade, Educação Matemática.

Abstract

In this article we discuss some progress, barriers and investments in mutual relationship between symmetry and visual arts in mathematics textbooks for the early years of elementary school. To analyze how these two areas of knowledge are articulated in the school approaches, we mapped 200 activities drawn from 17 collections of textbooks, and reflect on the contribution of the use of visual arts for teaching symmetry from the aspects related to teaching the arts, such as image reading, contextualization and making art explored in these activities. We found that coordination between visual arts and symmetry happens in the textbooks through different forms that explore artistic elements as the axis of symmetry.

Keywords: Visual Arts, Symmetry, Interdisciplinary, Mathematics Education.

Introdução

Reformas educacionais têm buscado integrar diversas áreas de conhecimento como resposta às recentes mudanças da sociedade e das necessidades do educando, mas, principalmente, porque necessitamos de novas formas de pensar e utilizar Arte e Matemática. Uma vez que, essas disciplinas são consideradas essenciais para o desenvolvimento da criticidade e criatividade humana:

> A troca de percepções e pontos de vistas, diálogos entre ambas, ao longo do tempo tem favorecido o desenvolvimento do pensamento crítico, autonomia intelectual, a sensibilidade e a criatividade. Com isso, facilita-se ao indivíduo e à coletividade o pleno exercício de suas funções sociopolíticas, culturais e produtivas, colaborando com a construção de sociedades cada vez mais juntas e humanas (FAINGUELERNT e NUNES, 2006, p.11).

Certamente, não existe uma doutrina, talvez haja até um certo ceticismo a respeito dessa integração. Entretanto, é inegável a necessidade de compreendermos a articulação entre estas áreas de conhecimento nos diferentes universos da educação, tais como a prática do professor; a construção de significado e conhecimento para o aluno; assim como os recursos utilizados para realização do ensino-aprendizagem.

Desta forma, investigamos os livros didáticos de Matemática dos anos inicias, com a finalidade de identificarmos a possibilidade de trabalhar o conteúdo da simetria com as artes visuais. Escolhemos os livros didáticos por serem um material didático presente em todas as escolas e lares do Brasil. Além disso, o livro didático exerce a função de instrumento de intercâmbio e inter-relação social, uma vez que permite a comunicação no tempo e no espaço, ao mesmo tempo em que se apresenta como fonte de informação de professores e alunos (ROMANATTO, 2004).

A presença de obras de arte e a contextualização dessas obras em livros didáticos de Matemática garantem uma integração interessante, pois o aluno poderá ler e interpretar obras de arte, conhecer a história, a cultura do país e do mundo, tal como fazer arte ao mesmo tempo em que se apropria de conteúdos matemáticos como a simetria.

Deste modo, o artigo pretende discutir avanços, entraves e aportes mútuos na relação entre artes visuais e simetria em livros didáticos de matemática para anos iniciais do ensino fundamental.

A reciprocidade das artes visuais e simetria ao longo do tempo

A história da Arte apresenta evidências que apontam a utilização intuitiva ou não da simetria nas artes. As pinturas rupestres, criadas pelas marcas do homem pré-histórico, já apresentavam figuras com regularidade e simetria (BOYER, 1974,

p. 4-5). Tais aspectos, também podem ser vistos na arte aborígine. Por milhares de anos, os aborígines criaram pinturas nos corpos e cascas de árvores e esculpiram em madeiras, usando como elementos gráficos círculos, semicírculos e espirais, linhas simples que apresentavam em sua composição a simetria.

Os grandes artistas de antigas civilizações, como a grega, e a arte arquitetônica dos grandes mestres da Idade Média também apresentam obras simétricas. Fainguelernt e Nunes (2006) afirmam que os árabes, a partir de um quadrado simples e linhas pintadas, apresentam uma multiplicidade de padrões repetidos e repletos de simetria. Na arte islâmica, identificamos, no século VII, mosaicos que apresentam desenhos repetidos em azul e verde intensos, como no Domo da Rocha, em Jerusalém. De acordo com Fainguelernt e Nunes (2006), a arte islâmica influenciou o holandês Maurits Cornelis Escher, nascido em 1898, que aplicou a geometria dos mosaicos muçulmanos em seus desenhos de repetições matemáticas, que hoje são difundidos em todas as escolas de artes visuais do mundo. Os povos indígenas brasileiros também apresentam ornamentos (como chapéus, cestos, peneiras), nos quais mostram diferentes trançados e figuras geométricas com conceitos simétricos.

Movimentos da Arte Moderna e Pós-moderna também fizeram uso da simetria ou ausência dela para construir suas obras. Um exemplo disso é o cubismo, movimento que surgiu em 1907, com a tela *Les Demoiselles d'Avignon*, de Pablo Picasso (1881–1973). O movimento fundado por Picasso e George Braque propunha "a liberdade para compor e recompor as formas da realidade" (FAINGUELERNT E NUNES, 2006, p. 22). Assim, a representação do mundo nas pinturas cubistas não tinha compromisso algum com o real. As principais características do movimento eram a geometrização das formas, a renúncia à perspectiva e a representação do volume colorido sobre superfícies planas com ausência de simetria. Mondrian contribuiu para a criação de um novo movimento, o Neoplasticismo ou Abstracionismo Geométrico, em que as composições de cores e formas resultavam numa expressão geométrica. Mas é preciso lembrar o Abstracionismo Lírico que busca simplesmente a livre expressão das formas e cores, fugindo da realidade concreta.

No Brasil, a abstração surge com a Arte Moderna, mas apresenta maior ênfase em meados dos anos 50. O abstracionismo geométrico no Brasil teve como principais representantes Waldemar Cordeiro, Geraldo de Barros, Lothar Charoux, Ivan Serpa, Lygia Clark, Hélio Oiticica e Franz Weissmann, dentre outros. Milton Dacosta é um artista brasileiro que produzia figuras humanas geometrizadas, tendo como referência o cubismo, mas na década de 1950 aderiu ao Abstracionismo Geométrico. Suas obras apresentavam grande rigor matemático, sobressaindo nelas uma nítida simetria de reflexão.

De acordo com Weyl (1997, p.25) o artista realiza intuitivamente as leis matemáticas que têm origem na simetria da natureza. Ainda conforme esse autor,

"raramente a assimetria é mera ausência de simetria. Mesmos nos desenhos assimétricos, pode-se sentir a simetria como norma da qual se desvia sob a força de caráter não formal". Ao entendermos a simetria como elemento de referência para produção artística, seja esta orgânica ou abstrata, no espaço bidimensional ou tridimensional, tomar a arte como ponto de partida para o trabalho com simetria é uma forma de significar o conteúdo, de estabelecer laços entre campos de saber.

No entanto, precisamos compreender o ensino da arte como área de conhecimento baseado na proposta triangular de Ana Mae Barbosa, que o entende como um sistema aberto de abordagem da Arte, seu ensino e sua história. Identificamos três campos de conhecimentos articulados: o ler, o fazer e o contextualizar, que se apresentam como relevantes para Educação Infantil; Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos, por compreender a Arte como construção histórica, social e cultural (SE/PCR, 2002, p. 18).

Não esperamos que a arte perca o seu espaço específico como disciplina no currículo, mas que seja trabalhada por meio de experiências interdisciplinares que transitem por todo currículo, enriquecendo a aprendizagem de outros conhecimentos e disciplinas (BARBOSA, 2008). A arte pode ser uma disciplina transversal, "arte como um elemento humano agregador que, interpenetrando outras disciplinas, facilita a aprendizagem pela qualidade cognitiva dos gestos, do som, do movimento e da imagem (HERBET READ, apud BARBOSA, 2008, p. 25)". Para que isso aconteça, é necessário que a prática educativa no ensino da arte seja recriada. A diversidade de linguagens artísticas que influencia de forma positiva no desenvolvimento cultural e crítico dos sujeitos deve ser incorporada à prática do professor, já que "não podemos entender a cultura de um país sem entender sua arte" (BARBOSA, 2008, p. 17).

Conceituando simetria

A simetria é um conteúdo que está inserido no campo da geometria das transformações. Uma transformação geométrica "é uma aplicação bijectiva entre duas figuras do mesmo plano ou em planos diferentes, de forma que a partir de uma figura geométrica se forma outra com a mesma congruência e semelhança (BILAC, 2008)".

Conforme Coxeter (1961 apud BILAC, 2008), as transformações geométricas podem ser definidas como uma correspondência um a um de pontos P – > P', na qual, para cada ponto no plano ou no espaço, associa-se outro. Pesquisadores como Lopes e Nasser (1996), Mabuchi (2000), Mega (2001) e Ripplinger (2006) definem a simetria como "movimentos rígidos", por fazerem as figuras apenas mudarem as suas posições.

As transformações geométricas se subdividem em movimentos rígidos - isometria (reflexão, translação, rotação e combinações) e homotetia (ampliação e redução de imagens). Nosso estudo dos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais teve como foco os três tipos de isometrias:

- A translação, caracterizada por um vetor que define ao mesmo tempo a direção, o sentido e o tamanho da translação (deslizo);
- A rotação, que acontece quando todos os pontos do plano se movimentam girando a mesma medida do ângulo em torno de um ponto que se designa como ponto central;
- A reflexão, caracterizada por seu eixo de simetria, uma reta D, cuja reflexão é transformação do plano que qualquer ponto P do plano associa ao ponto P', tal que o eixo D da reflexão seja a mediatriz do segmento [PP'].

Na literatura, identificamos diversas definições que passam uma ideia intuitiva acerca do conteúdo da simetria. Weyl em seu livro *La simetría* (1997, p. 16), afirma que a palavra simetria, "na linguagem corriqueira, significa algo bem proporcionado, equilibrado, indicando assim, uma espécie de concordância entre várias partes que se integram com um todo".

Para Bellingeri, Dedò, Sieno e Turrini (2003, p.33) simetria "tem a ver com os ritmos, com alguma coisa que se repete; mas o que se repete pode fazê-lo de modos diferentes, e por isso a matemática preocupa-se em entender, caracterizar, enumerar, comparar, classificar estes modos distintos".

Entendemos que os movimentos produzem tipos diferentes de transformações isométricas, presentes em nosso cotidiano, podendo ser trabalhados nos anos iniciais do ensino fundamental através de atividades interessantes e contextualizadas.

Procedimentos metodológicos da pesquisa

A pesquisa, conforme anunciado anteriormente, tem como objetivo discutir avanços, entraves e aportes mútuos na relação entre simetria e artes visuais em livros didáticos de Matemática para anos iniciais do Ensino Fundamental.

O fenômeno a ser investigado necessitou de uma abordagem de pesquisa com um caráter qualitativo e quantitativo, por considerarmos que "os conjuntos de dados quantitativos e qualitativos não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia" (DESLANGE, 1994, p. 22). Utilizamos como procedimento para a análise dos dados coletados, etapas do método de análise de conteúdo, sistematizado a partir dos estudos de Bardin em 1970.

A escolha da análise de conteúdo justifica-se pelo fato de ela possibilitar a organização, categorização e interpretação sobre a abordagem quantitativa e

qualitativa. Embora a análise de conteúdos constitua-se de diferentes técnicas (análise da enunciação; análise da expressão; análise de relações; análise de avaliação; entre outros), em detrimento à especificidade do nosso objeto de pesquisa que envolvia o enunciado e imagem, nos restringimos às operações básicas que constituem o método de Análise do conteúdo: (1) a pré-análise; (2) a exploração do material; (3) o tratamento dos resultados obtidos e a interpretação dos resultados, a partir da inferência.

Executamos tais operações da seguinte forma:

(1) <u>Pré-análise</u>: em nossa pesquisa, consistiu na organização, na coleta e na escolha dos livros didáticos a serem submetidos à análise; também na formulação de hipóteses e objetivos, na elaboração de indicadores e na edição de material;

(2) <u>Exploração do material</u>: nesta etapa, realizamos a codificação e a enumeração das atividades, bem como a categorização por coleção, volume e modalidades artísticas;

(3) <u>Tratamento dos resultados e interpretação</u>: executamos a síntese, a seleção dos resultados e a interpretação dos dados a partir da fundamentação teórica.

Assim, foi possível identificar e analisar os conteúdos expressos superficialmente nos dados coletados, bem como os conteúdos intrínsecos a esses dados (conteúdo dinâmico, estrutural e histórico).

Discussão dos resultados

O estudo trata-se de um recorte de um trabalho amplo, no qual analisamos categorias relacionadas ao conteúdo da simetria (propriedades, eixos de simetria, tipos de figuras e tipos de simetria), e categorias referentes ao ensino das artes visuais que têm como base a abordagem triangular de Ana Mae Barbosa, estruturada a partir de três campos de conhecimento: a leitura de imagens, a contextualização e o fazer artístico. Neste artigo, realizamos a discussão a partir dessas categorias de ensino das artes visuais para entender como as articulações são estabelecidas com a simetria em livros didáticos de Matemática para anos iniciais.

Leitura

Realizamos o mapeamento em 17 coleções de livros didáticos de Matemática, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD em 2010 com circulação nas escolas públicas até 2012. Identificamos 200 atividades. Nestas, a leitura está presente em 194 atividades, distribuída em diferentes modalidades artísticas – pintura, desenho, gravura, padrões, arquitetura – com exceção das atividades de construção livre de figuras simétricas. Podemos observar a distribuição percentual das atividades de simetria e artes visuais, conforme o tipo de leitura, no gráfico a seguir.

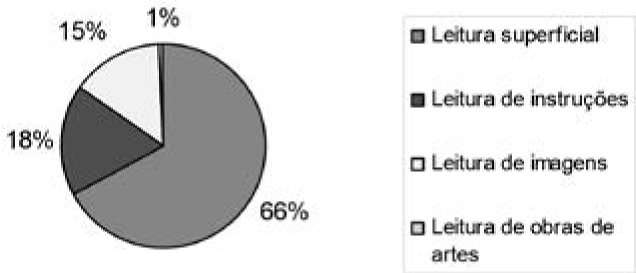


Figura 1. Gráfico: Distribuição das atividades de simetria e artes visuais, conforme as formas de leitura de imagens.

Observamos que a leitura superficial de imagens está presente em 66% das atividades. Esse tipo de leitura não solicita do aluno nenhuma modalidade de apreciação estética, além de apresentar uma série de lacunas, no que diz respeito ao ensino da arte visual, pois as imagens são desenhos estereotipados, produzidos por adultos. Embora os desenhos sejam de coleções de livros didáticos diferentes, possuem muitas semelhanças, minimizando as possibilidades das crianças alimentarem o próprio repertório de imagens.

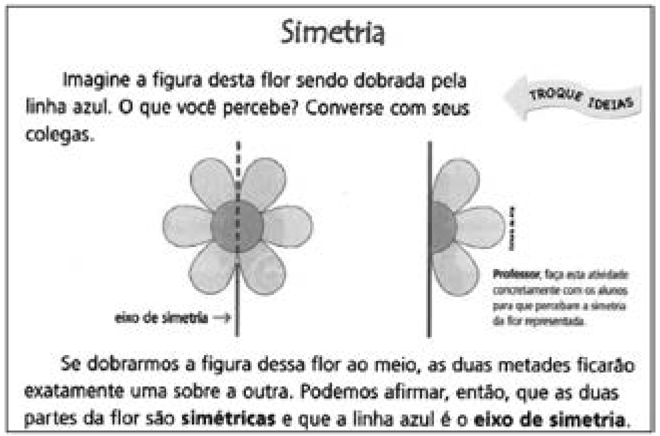


Figura 02. BORJORNO, José R. e AZENHA, Regina. **Pode contar comigo**. São Paulo, Editora FTD, 2008, v.3, p.75.

Podemos observar na imagem acima, que os desenhos não despertam nos alunos a consciência, a criticidade e novos modos de sensibilidade, como propõe Martins, Piscosque e Guerra (1998), um aspecto também defendido por Ana Mae Barbosa (2008), por compreender que a leitura realiza-se por meio da interpretação crítica e articulada ao contexto. Além disso, apresenta lacunas na conceituação da simetria, por não fazer referência ao tipo de simetria, à equidistância entre pontos, possível de ser estabelecida ao dobrar a figura, e nem ao fato de que a reflexão é caracterizada por seu eixo de simetria. Encontramos atividades com padrões que, sob o ponto de vista matemático, são superficiais, pois a exploração restringe-se à identificação intuitiva da simetria sem discutir as propriedades matemáticas presentes nas imagens.

Figura 03. BARROSO, Juliane. M. (org.). **Projeto Pitanguá matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna. 2008. v. 2, p. 217.

Por apresentar dois tipos de simetria, a atividade exposta anteriormente poderia explorar conceitos como regularidade, sentido, direção e outros aspectos a serem evidenciados numa atividade com simetria de translação. Assim como, por apresentar reflexão, há possibilidade de identificar o eixo de simetria e equidistância entre pontos. Mas realiza-se apenas a comparação das duas imagens. Diante do exposto, é necessário indagar: a identificação das diferenças entre os azulejos será suficiente para que o estudante aproprie-se de todos os conceitos de simetria aqui citados?

Sob o ponto de vista da arte, embora as imagens sejam de azulejos, algo muito presente em monumentos culturais como igrejas, casarões e outros ambientes, a leitura não solicita do aluno tipo algum de análise estética como estudo das formas, cores e volumes, sendo também superficial.

Na leitura de instruções, que corresponde a 18%, assim como na leitura superficial, os alunos não realizam qualquer análise estética, pois as imagens têm apenas a função de instruir o aluno no desenvolvimento da atividade. Identificamos esse tipo de leitura nas dobraduras e pinturas com borrão de tinta. Ainda que essa técnica possibilite a exploração dos elementos de visualidade (cores e formas), assim como trançado do eixo de simetria e eqüidistância, a leitura de instruções restringe-se aos desenhos que ilustram os comandos para fazer as dobraduras ou orientam passo a passo como o aluno produzir o borrão de tinta. Podemos observar a seguir:

Janice fez a figura de um trevo-de-quatro-folhas recortando apenas uma folha do trevo!

Ela dobrou o papel em duas partes iguais por uma linha horizontal. Depois, dobrou de novo por uma linha vertical. Ficaram quatro partes.

Por último, ela desenhou uma das folhas do trevo e recortou.

2. Repita o mesmo procedimento de Janice para fazer um trevo-de--quatro-folhas. Depois, cole o trevo em seu caderno.

Figura 04. AIDAR, Márcia. **Ler mundo – matemática**. São Paulo: Editora Scipione, 2008, v.3, p.145.

A leitura de imagens corresponde a 15%. Apresenta-se uma obra desenvolvida por um artista ou grupo étnico, num dado contexto histórico-cultural, ou uma obra arquitetônica, mas não se faz análise das obras. Esse tipo de leitura é identificado nas modalidades *Pintura*, *Arquitetura*, nos *Padrões*, nos quais encontramos a leitura de imagem nos contextos da tapeçaria e artesanatos indígenas. Em algumas atividades, o educando é direcionado a perceber e analisar aspectos matemáticos presentes na obra de arte, como as formas geométricas e regularidades. Apesar de não explorar elementos de visualidade do artesanato, a atividade repertoria o aluno com imagens para uma produção posterior.

Arte feita com simetria

Pessoas que trabalham com artesanato usam muito as noções de simetria em suas criações. Um exemplo disso são os artesãos da cidade de Chichicastenango, que fica num país chamado Guatemala. Essa cidade é conhecida pelas lindas cores de seu artesanato têxtil. O tapete ao lado foi feito nessa cidade.

Figura 05. BARROSO, Juliane. M. (org.). Projeto Pitanguá Matemática. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna. 2008. v. 3, p.127.

Encontramos atividades que apresentavam reproduções de esculturas e arquitetura. Apesar de serem imagens que trazem a possibilidade de se realizar uma apreciação analítica e fazer-se um julgamento das qualidades estéticas e diferenças presentes nas diversas obras apresentadas, a leitura se limita à identificação de um eixo imaginário. Contudo, não seria interessante que o autor explicitasse que a obra original possui um plano de simetria e não um eixo? A distinção entre eixo e plano de simetria é sugerida pelo Guia do Livro Didático (BRASIL, 2007) e considerada importante na conceituação de simetria.

Considerando que se trata de um livro, cujo objeto de estudo é a simetria, a possibilidade de ler, interpretar e explorar aspectos referentes a obras de arte, como diferenças de estilos entre os pintores, entre as cerâmicas, as formas, linhas e volumes dispostos nas duas pinturas, assim como as cores e as padronizações das cerâmicas. O livro torna as atividades interessantes do ponto de vista do ensino e aprendizagem da simetria, pois não será um conteúdo distante do cotidiano e da cultura do aluno. Todavia, as imagens precisam de fato ser de obras de arte para que a criatividade, criticidade e sensibilidade dos educandos sejam aguçadas.

Contextualização

No universo das 200 atividades mapeadas nos livros didáticos analisados, encontramos, com contextualização, apenas 20 atividades em oito coleções. Embora seja consenso que a contextualização implica conhecer arte por meio de um estudo da história e leva o aluno ao entendimento do contexto, tempo e espaço nos quais a obra de arte foi criada. Nas atividades que conectam simetria e artes visuais que contemplam a contextualização, são apresentadas informações insuficientes sobre as imagens, o que dificulta a compreensão do contexto em que as mesmas foram produzidas.

Podemos visualizar, no gráfico a seguir, a disparidade entre as atividades que apresentam algum tipo de contextualização das imagens e as atividades que não possuem qualquer tipo de contextualização. Verificamos que, nas atividades que apresentam contextualização, predominam as legendas (5% das atividades). Embora estejam longe do que esperamos de uma atividade contextualizadora de obras de arte, elas identificam a produção artística através do título, ano, nome do artista e local onde a obra pode ser encontrada. Identificamos, em 4% das atividades, informações resumidas sobre o povo, o local em que a obra foi realizada. Apenas 1% do total de atividades apresenta a biografia do autor e informações sobre a obra de arte.

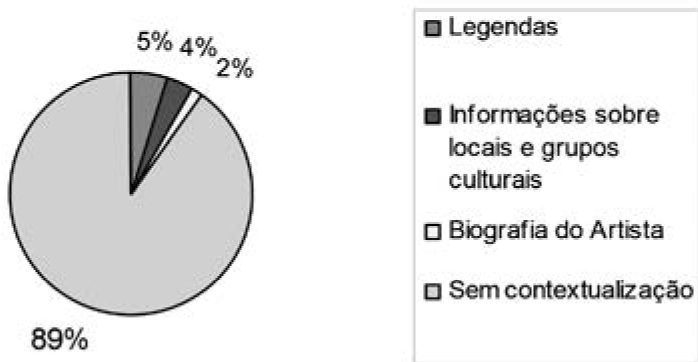


Figura 06. Gráfico: Distribuição das atividades com contextualização nos livros didáticos

Nas modalidades *desenhos* e *dobraduras*, a contextualização é um aspecto praticamente inexistente. Identificamos apenas um desenho que teve como contextualização uma atividade anterior de arquitetura.

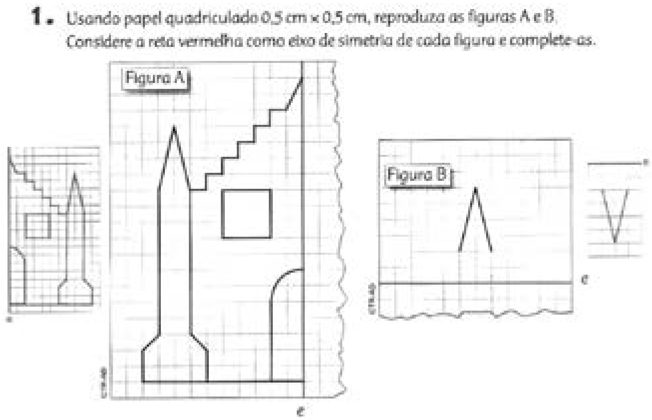


Figura 07. MUNHOZ, Ainda; NAZARETH, Helenalda. et al. **Fazer, compreender e criar em matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora IBEP, 2008, v. 5, p. 51.

Nas dobraduras, foram abordadas as técnicas de origami e kirigami, artes de origem oriental que se espalharam pelo mundo e foram incorporadas por muitas culturas orientais e ocidentais. Não percebemos, contudo, referência alguma ao contexto histórico e sociocultural no qual as artes tiveram origem. De modo geral, as atividades restringem-se às instruções de como dobrar e cortar o papel.

Segundo Barbosa (2002), a contextualização estabelece um diálogo com a obra, facilitando a leitura das imagens. Dessa forma, o aluno terá acesso a imagens de outras épocas. A contextualização pode ser realizada com os desenhos de outras crianças, se os livros apresentarem obras de crianças. No caso das dobraduras, há possibilidade de o livro trazer informações do tempo e lugar de origem, as diferenças entre as técnicas de origami e kirigami, e a importância delas para a cultura oriental. Percebemos alguns indícios de contextualização em 10 atividades, o que corresponde percentualmente a 5% do total. Essas atividades apresentam legendas que acompanham as imagens nas modalidades *pintura*, *arquitetura* e *modalidades mistas*.

Figura 08.REAME, Eliane; MONTENEGRO, Priscila. **Linguagem Matemática**. São Paulo: Editora Saraiva, 2008. v. 5, p. 168.

A atividade acima apresenta duas obras de arte. Na escultura (figura 8, à direita), há informações sobre o nome, o ano em que escultura foi produzida, o tipo de material utilizado, o autor da obra e as suas dimensões. A legenda respeito da pintura de Brennand (figura 8, à esquerda) informa apenas sobre o autor e o tipo de material, ou seja, não há homogeneidade quanto à quantidade e natureza das informações nas legendas, uma apresenta mais informações do que a outra.

Embora, saibamos que as legendas são subsídios fundamentais para identificarmos a obra de arte, elas não são suficientes para contextualizar as imagens, pois, segundo Zagonel (2008), para que a contextualização aconteça, o aluno precisa de elementos, como: tempo, espaço, contexto, biografia do autor da obra. Dessa forma, poderá situar o produto artístico no meio em que vive ou naquele em que foi gerado.

A contextualização é um forte elemento para conhecermos e estabelecermos um diálogo entre diferentes épocas, povos e culturas. Barbosa (2002) afirma que, sem a contextualização, corremos o risco de, do ponto de vista da arte visual, limitarmo-nos a, sem dialogarmos, adicionarmos à cultura dominante alguns elementos relativos a outras culturas. Encontramos três atividades de gravura (2% do total), que realizam a contextualização através do texto biográfico do artista, com informações sobre ele e fatos que influenciaram sua obra. Há atividades que apresentam informações sucintas sobre a vida de Escher e os lugares que o influenciaram a utilizar simetria em suas obras. Vemos uma intenção clara dos autores em promover a interdisciplinaridade do conteúdo da simetria com a história da Arte. Segundo Arslan e Iavelberg (2006), a biografia do autor é o principal enfoque para abordar a história da arte. Além disso, através da imagem e biografia de Escher, obtemos informações sobre outros locais e culturas, onde a simetria é articulada à arte visual. As autoras ressaltam, contudo, que o texto biográfico pode conduzir o leitor a uma interpretação "anedótica" se não estabelecer uma conexão entre a biografia à obra de arte.

Barbosa (1998) aponta que a contextualização não se limita a ensinar ao aluno apenas a biografia ou história do autor, mas desenvolve também a capacidade de formular suposição, avaliar e justificar as informações que contextualizam a obra. Entendemos que, para desenvolver essas capacidades, é necessária uma reorientação na forma como simetria e artes visuais estabelecem laços de reciprocidade nos livros didáticos, assim como na abordagem que o professor faz do livro didático.

Fazer artístico

Esta categoria discute como o livro didático oportuniza o desenvolvimento do potencial criativo do aluno, a capacidade de elaboração de imagens e experimentação de recursos, técnicas e de novas formas de expressar. Do total de atividades analisadas, 126 (63%) oportunizam o fazer artístico em modalidades artísticas (desenho, pintura, dobradura, padrões e modalidades mistas). O gráfico a seguir apresenta a distribuição dessa categoria por modalidade artística.

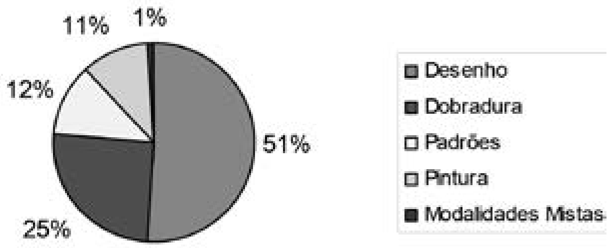


Figura 08. Gráfico: distribuição do Fazer Artístico por modalidade.

Os dados apontam a modalidade "desenho" em metade das atividades que solicitam dos educandos o fazer artístico, mas há algumas ressalvas em relação ao modo como essa categoria é abordada nessa modalidade e em algumas atividades com padrão. A cópia de desenhos de adultos é muito estimulada nos enunciados das atividades, como se os desenhos simétricos fossem privilégio dos adultos. Podemos observar isso na atividade a seguir:

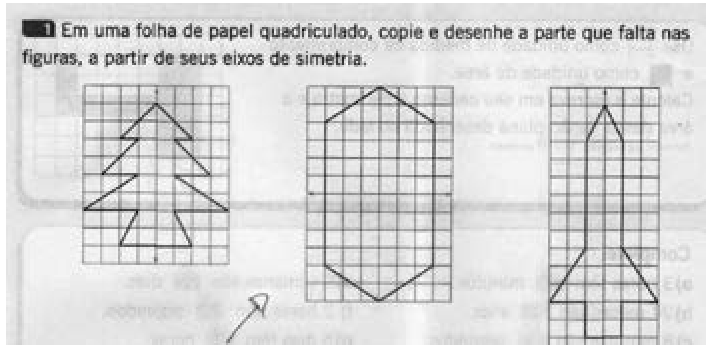


Figura 09. DANTE, Luiz R. **Aprendendo sempre matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2008, v.4, p. 167.

Necessariamente, o educando não precisa copiar a figura, pois ele pode criar na malha outros desenhos simétricos. Observar desenhos simétricos para fazer intervenções gráficas neles pode ser uma atividade interessante, mas ressaltamos que uma intervenção gráfica é diferente de copiar, pois promove um mergulho na imagem, leva o aprendiz a pensar criticamente sobre ela, enquanto a cópia não exige qualquer esforço mental. Como afirma Pillar (2006), a cópia promove o aprimoramento técnico, sem transformação do que é copiado.

O fazer artístico pode ser um grande aliado para que o aluno entenda aspectos da simetria. Ao elaborar uma figura simétrica em malha quadriculada, por exemplo, a criança precisa considerar questões referentes à conservação de forma, ângulos e distância, dependendo do nível de escolarização, a perpendicularidade. Caso seja uma translação, o aluno precisa pensar sobre a direção do deslocamento, a conservação de distância entre uma figura e outra a ser deslocada. Nesse sentido, a arte contribui para o desenvolvimento do estudante, dando sentido à aprendizagem da matemática. Do mesmo modo, as propriedades da simetria oportunizam a composição de uma obra de arte, a ordem, a regularidade e a estética, seja nas imagens simétricas, seja nas assimétricas.

Observamos que a modalidade *dobradura* corresponde a 25% do total, enquanto a *pintura* está presente em 11% das atividades propostas. Tais modalidades trazem a possibilidade de os alunos vivenciarem, em vários momentos, o invento, a descoberta e a criação. Há, contudo, propostas com instruções que limitam a criatividade dos alunos. Não seriam fundamentais momentos nos quais os alunos possam experimentar as múltiplas possibilidades de dobrar e cortar o papel?

Nos *padrões*, que representam 11% das atividades de produção artística, identificamos atividades que apresentavam imagens antes da proposta e produção, oportunizando que o aluno ampliasse o seu repertório, pois estimulavam a capacidade de elaboração de novas imagens. Iavelberg (2008) recomenda que o nível de conhecimento acerca de imagens do aluno seja ampliado por obras de arte e desenhos de outras crianças. Identificamos atividades de *pintura*, nas quais o fazer artístico restringia-se a pintura de figuras prontas. De acordo com Martins, Picosque e Guerra (1998), este é um vestígio da concepção tradicional de ensino de artes, segundo a qual fazer arte é pintar desenhos prontos, elaborado por adultos. É o que podemos observar na atividade registrada a seguir.

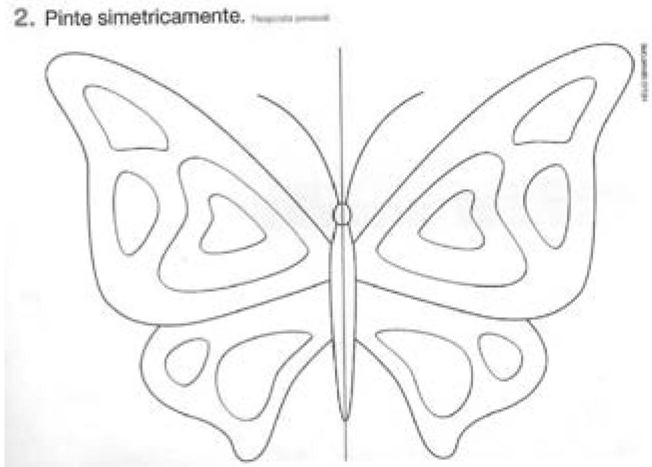


Figura 10. MILANI, E, et al. **Projeto conviver – matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 2008, v.1, p. 185.

Arslan e Iavelberg (2006), na discussão sobre intervenção gráfica, apontam que este trabalho é apreciado pelos alunos, porque não exige esforço cognitivo, pois basta preencher a imagem com cores, uma vez que esta já está pronta. Essas autoras ressaltam, contudo, que a criação de imagens também é muito apreciada pelos alunos, quando proposta como desafio. Em contrapartida, encontramos atividades de pintura que incentivam a produção livre. É o que podemos observar na atividade em que há uma leitura da pintura *O barco ateliê*, de Claude Monet. Nessa atividade, espera-se que o aluno identifique a inversão da imagem refletida e a linha da água como divisão da própria figura. Depois, é proposto que o estudante produza uma pintura com a imagem refletida.

Figura 11. AIDAR, Márcia. **Ler mundo – matemática**. Editora Scipione: São Paulo, 2008, v.5, p.19.

Essa categoria mostra que quantidade não indica qualidade. Embora o aluno tenha, nos livros didáticos de matemática, a possibilidade de relacionar-se com o fazer artístico através de seis modalidades artísticas, há poucas possibilidades de construção do novo, de interpretação e recriação. Encontramos, porém, indícios de produção livre subsidiada por imagens. O estímulo à apreciação de obras feitas pelas crianças e jovens em sala de aula traz a arte para a realidade a que a escola pertence e contribui para estimular o olhar observador e crítico da comunidade estudantil. Com relação à interdisciplinaridade com o conteúdo de simetria, o fazer artístico implica a construção de uma figura. Para isso, o aluno tem que considerar as propriedades do tipo de simetria abordado. Para construir, por exemplo, uma faixa simétrica, o aluno é estimulado a deslocar a figura, conservar a forma, a distância entre uma e outra, manter a direção. Nesse sentido, os laços de colaboração entre Artes Visuais e Simetria são estabelecidos. A questão é que essas propriedades precisam ser explicitadas ao longo dos volumes para que o conhecimento seja construído.

Considerações finais

Neste artigo, foi possível delinear como os campos de conhecimento de ensino das artes visuais são trabalhados nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais. Constatamos que os aportes mútuos entre simetria e artes visuais acontecem por meio da abordagem triangular de Ana Mae Barbosa.

Identificamos que a leitura de imagem acontece de forma superficial, em atividades que envolvem desenhos, dobraduras, arquitetura, gravuras e pinturas. Contudo, as atividades, em sua maioria, privilegiam desenhos estereotipados e adultos, não estimulando qualquer tipo de análise visual. Mas poderiam ser explorados os elementos de visualidade, como cores, formas e linhas. Sob o ponto de vista matemático, a leitura de imagens não propicia a reflexão sobre os conceitos da simetria como: tipo de simetria, equidistância e eixo de simetria dentre outras propriedades.

Quanto à contextualização, é um campo de conhecimento pouco tratado nas atividades. Identificamos indícios, como legendas e informações sobre o grupo cultural que produziu a obra, mas poucas foram as atividades que apresentaram a biografia do artista e reflexões que motivassem os alunos a julgarem, refletirem sobre o contexto e as razões de produção da obra de arte. Encontram-se, nos livros didáticos, informações sobre o local, o povo e a etnia que produziram o artesanato ou a arquitetura, mas elas são insatisfatórias, pois são conhecimentos concisos sobre a obra. As atividades que promoveram a contextualização foram aquelas que apresentaram o texto biográfico dos artistas, mas essas informações são resumidas.

Enfim, a contextualização é uma ação importante no ensino da arte, visto que possibilita ao aluno perceber como simetria e artes visuais estabeleceram laços ao longo da história e pode ser fundamental para que o aluno encontre sentido e significado em aprender matemática e artes. No que diz respeito ao fazer artístico, embora presente em várias atividades, encontramos poucos exercícios que estimulassem o potencial criativo dos alunos. As atividades, em sua maioria, solicitavam a cópia de desenhos adultos, desprezando a capacidade do aluno de elaborar imagens através do próprio repertório ou do livro didático. A proposta Triangular considera que os três campos de ensino da arte devem estar interligados em todos os momentos do ensino da arte e da matemática. No entanto, constatamos que isso não ocorre, pois predomina o fazer artístico em detrimento da leitura e contextualização. Para Ana Mae Barbosa, a abordagem dessas ações em momentos distintos compromete a epistemologia do ensino da arte.

Consideramos que a presença dos campos de conhecimento de ensino das artes visuais aponta a possibilidade de uma abordagem da Matemática de forma criativa e crítica. Contudo, isso implica na necessidade de investigar se a formação do professor prepara-o para lidar com a interdisciplinaridade presente nos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais.

Referências

ARSLAN, L. M. & IAVELBERG, R. **Ensino de Arte**. São Paulo: Thompson Learning, 2006.

BARBOSA, A. M. **As mutações do conceito e da prática**. In: BARBOSA, A. M. (Org.). Inquietações e mudanças no ensino da arte. (pp.15-22). São Paulo: Cortez, 2008.

BARBOSA, A. M. Interterritorialidade na arte-educação e na arte. In: BARBOSA, A. M. & AMARAL, L. (Org.). **Interterritorialidade**: mídias, contextos e educação. São Paulo: Edições SESC SP, 2008.

BARBOSA, A. M. **Tópicos Utópicos**. Belo Horizonte: C/Arte, 1998.

BARBOSA, A. M. **Arte: perspectivas multiculturais**. A multiculturalidade na educação estética. http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2002/mee/meetxt3 Acesso em 21 de mar. de 2009.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 5. ed. Lisboa: Edições 70, 2009.

BELLINGERI et al. **O ritmo das Formas**. Lisboa: Atractor, 2003.

BILAC, Cristina Ulian. **Possibilidades de aprendizagem de transformações Geométricas com o uso do Cabri-géomètre**. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. v. 6. Arte. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. **Guia do Livro Didático** – Matemática: Séries/anos iniciais do Ensino Fundamental. PNLD. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. **Guia do Livro Didático** – Matemática: Séries/anos iniciais do Ensino Fundamental. PNLD. Brasília: MEC, 2010.

DESLANGE, S. F. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2000.

FAINGUELERNT, E. K; NUNES, K. R. A. **Fazendo Arte com matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IAVELBERG, R. **O desenho cultivado da criança**: prática e formação de educadores. 2. ed. Porto Alegre: Ed. Zouk, 2008.

LOPES, M. L. L; NASSER, L. **Geometria**: na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas** – a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pós-Graduação - Universidade Pontificada de São Paulo. São Paulo/SP, 2000. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/MABUCHI_setsuko.html. Acesso em: 21 de jun. 2008.

MARTINS, M. C. et al. **Didática do Ensino da Arte, a língua do mundo**: poetizar, fruir e conhecer arte. São Paulo: FTD, 1998.

MEGA, É. **Ensino/Aprendizagem da rotação na 5ª série**: um estudo comparativo em relação ao material utilizado. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/elio_mega.pdf. Acesso em: 30 jun. 2008.

PILLAR, A. D. (Org.). **A Educação do Olhar no ensino das artes**. 4. ed. Porto Alegre: Mediação, 2006.

PREFEITURA DA CIDADE DO RECIFE. **Proposta Pedagógica da Rede Municipal de Ensino do Recife**: Construindo Competências. Recife: SE/PCR, 2002.

RIPPLINGER, H. M. G. **Simetria nas práticas escolares**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006. Disponível em: http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/1884/3951/1/Grzybowski%20Ripplinger,H.M..pdf. Acesso em: 10 abr.2008.

ROMANATTO, M. C. **O livro didático**: alcances e limites. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Anais. São Paulo, 2004. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesasredondas/mr19-Mauro.doc. Acesso em: 30 maio 2008.

SANTOS, L. F. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar**: o ensino de Simetria e das artes visuais em livros didáticos de matemática para séries iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco - UFPE. Recife , 2010.

WEYL, H. **Simetria**. Trad. Victor Baranauskas. São Paulo: Edusp, 1997.

ZAGONEL, B. **Metodologia do ensino de artes**. Curitiba: XIBPEX, 2008.

Luciana Ferreira dos Santos - UFPE - Brasil

E-mail: felufak@yahoo.com.br

Rosinalda Aurora de Melo Teles - UFPE - Brasil

E-mail: rosinaldates@yahoo.com.br

O USO DE MATERIAIS CONCRETOS E DIGITAIS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE SIMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

THE USE OF DIGITAL AND CONCRETE MATERIALS FOR TEACHING AND LEARNING OF SIMMETRY IN THE ELEMENTARY SCHOOL

Rodrigo Sychocki da Silva

Daniela Cristina Vargas Lopes

Instituto Federal do Rio Grande do Sul – IFRS – Brasil

Resumo

Neste artigo é apresentado o planejamento, a aplicação e os resultados de uma sequência didática proposta aos alunos do 3º ano do ensino fundamental de uma escola estadual na cidade de Caxias do Sul, no estado do Rio Grande do Sul. O assunto abordado nessa sequência de atividades é a simetria, que pode ser encontrada em diversas formas da natureza e construções. Através dos níveis propostos pela teoria de Van Hiele foi possível desenvolver atividades com o uso de materiais concretos manipulativos e também digitais. Demonstra-se assim a possível relação entre arte visual e matemática, juntamente com a possibilidade do professor propor atividades que promovem a interdisciplinaridade na escola.

Palavras-chave: Ensino, Matemática, Simetria, Van Hiele.

Abstract

In this paper we present the planning, implementation and results of an instructional sequence offered to students in third grade of elementary education at a state school in the city of Caxias do Sul, state of Rio Grande do Sul. The subject matter of these sequence activities is symmetry, which can be found in various forms in nature and buildings. Through the levels proposed by Van Hiele theory of representations was possible to develop activities using concrete materials and manipulatives also digital. Thus demonstrates the possible relationship between visual art and mathematics, along with the teacher's ability to propose activities that promote interdisciplinarity in school.

Keywords: Education, Mathematics, Symmetry, Van Hiele.

Introdução

Este artigo partiu da ideia de mostrar a existência da possibilidade de ensinar conteúdos de matemática através de sequências didáticas elaboradas pelo professor com a atenção necessária para ocorrer uma aprendizagem qualitativa. Nas séries iniciais do ensino básico, é fundamental que o professor tenha a possibilidade de desenvolver conteúdos de matemática através de situações que envolvam os alunos na execução de tarefas. A simetria é pouco ou não é trabalhada com alunos das séries iniciais do ensino fundamental, apesar dos documentos oficiais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propor que os alunos nessa etapa escolar devem:

- Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, *simetrias*, ampliações e reduções. (BRASIL, 1997, p. 56);
- Identificar a *simetria* em figuras tridimensionais. (BRASIL, 1997, p. 60);
- Identificar semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de *simetria*, etc. (BRASIL, 1997, p. 60);
- Possuir sensibilidade para observar *simetrias* e outras características das formas geométricas, na natureza, nas artes, nas edificações. (BRASIL, 1997, p. 62).

A ideia de produzir e aplicar esta sequência de atividades partiu do desconforto encontrado por nós no ensino desse conteúdo em séries iniciais do ensino fundamental. Em diversas escolas do Rio Grande do Sul, na sua maioria públicas, o descaso é visível e ainda é possível encontrar professores que estão "engessados" pelo conteúdo, ou seja, sem a motivação necessária para desenvolver um trabalho que produza resultados efetivos e que contemple o futuro dos seus alunos. A Educação Matemática atualmente, é uma área de estudo que se motiva em apresentar para os professores um conjunto de possibilidades e experiências para diversificar o ensino dos assuntos, tornando a aprendizagem mais qualitativa.

Deste modo, encontramos na simetria a possibilidade de elaborar e aplicar uma sequência de atividades que possibilitou aos alunos compreender que a matemática está relacionada com a arte e com as formas que os cercam no mundo. O ensino da simetria na Matemática parte das noções de espaço e forma, que no âmbito da geometria, sugere-se o seu desenvolvimento nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A fundamentação teórica para argumentar como ocorre a aprendizagem de geometria, em especial a de simetria, é feita através dos níveis propostos pela teoria de Van Hiele, onde nota-se que o desenvolvimento do conteúdo passa por

cinco níveis ou estágios: visualização ou reconhecimento, análise, ordenação e classificação, dedução formal e rigor.

A metodologia de pesquisa utilizada nesta proposta foi a pesquisa qualitativa, onde o professor-pesquisador se posiciona diante da situação-problema e através de uma sequência de experimentos realizados com a turma inteira procura modificar a sua prática docente com a finalidade de influenciar o processo de aprendizagem dos seus alunos. Para ocorrer a pesquisa qualitativa foi estabelecido um plano de ação, caracterizando assim um desenho de pesquisa qualitativa, proposto por Flick (2009). Esse desenho de pesquisa consiste em estabelecer uma série de metas e objetivos que devem ser alcançados durante a aplicação da sequência de atividades. Caso isso não ocorra, a proposta deve ser readequada de acordo com as dificuldades apresentadas pelos alunos ainda durante a sua realização.

Fundamentação teórica

Freudenthal (1973, p. 407) afirma que:

> A Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender matematizar com a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possa de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta.

Com base na citação acima, percebe-se a importância do professor das séries iniciais da escola em proporcionar aos alunos o ensino da Matemática, em especial na geometria, de uma maneira que possibilite desenvolver os conceitos matemáticos da melhor forma possível. A sequência de atividades propostas para o ensino de simetria, apresentadas neste artigo, procura demonstrar que é possível desenvolver a interdisciplinaridade e promover ao final das atividades uma aprendizagem efetiva do assunto pelos alunos.

Segundo Rodrigues (2007), o modelo da teoria de Van Hiele definido por Dina van Hiele Geldof e seu marido Pierre Marie van Hiele, tendo por base as dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda, identifica o comportamento na aprendizagem como o nível de maturidade geométrica do aluno. Pode-se dizer que o modelo geométrico pode ser usado para orientar na formação e também para avaliar as habilidades dos alunos. A principal característica do modelo proposto pelos Van Hiele é que os alunos avancem de acordo com uma seqüência de etapas através da compreensão dos conceitos, onde ao mesmo tempo aprendem geometria.

Em Lorenzato (1995), encontramos os aspectos que caracterizam o modelo proposto pela teoria de Van Hiele, que concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica, ou também níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, com as seguintes características: em um nível inicial de visualização, as figuras são avaliadas somente pela sua aparência. Neste nível podem ser encontrados os alunos que apenas conseguem reconhecer ou reproduzir figuras através das formas e não pelas suas propriedades.

No nível seguinte, que consiste em realizar análises, os alunos percebem as características das figuras e descrevem algumas propriedades delas; no próximo nível, caracterizado pela ordenação, as propriedades das figuras são organizadas logicamente e a construção das definições se baseia na percepção do aluno pelo necessário e do suficiente. Nesta etapa, as demonstrações podem ser acompanhadas, mas dificilmente elaboradas pelos alunos. Nos dois níveis seguintes estão os alunos que constroem demonstrações e que comparam sistemas de representações, capazes de organizar a sua aprendizagem.

Ainda é possível identificar as seguintes características na teoria de Van Hiele que são pertinentes neste texto, tais como:

- A memorização não é considerada ao caracterizar os níveis;
- Os níveis são sequenciais, isto é, a criança avança de um nível para outro sem saltar etapas;
- Os níveis podem ser considerados discretos e globais, ou seja, uma criança pode estar no mesmo nível em diferentes contextos;
- As crianças que estão em um determinado nível não podem interagir ou compreender o ensino em níveis mais elevados;
- O desenvolvimento do pensamento da criança de um nível para outro é consequência do ensino e das suas experiências de aprendizagem, não possuem relação com os aspectos da maturidade.

Através dos níveis propostos pela teoria de Van Hiele juntamente com a realidade escolar baseada muitas vezes nas dificuldades na aprendizagem de matemática pelos alunos, encontramos os subsídios teóricos necessários para elaborar e aplicar uma sequência de atividades destinadas aos alunos do ensino fundamental e que tratem de simetria.

Nota-se, portanto que o ensino de simetria, assim como de outros assuntos da matemática, deve acontecer por meio de um processo formativo que estabelece relações de interdisciplinaridade e colaboração entre os conteúdos e áreas de conhecimento. Neste caso, a interdisciplinaridade é uma tendência que precisa ser incorporada às propostas dos livros didáticos e no planejamento do professor, por

trazer, dentre outros benefícios, as relações entre o conteúdo matemático e o seu contexto de uso.

Procura-se nesta sequência promover a aprendizagem de conceitos de matemática, desenvolver a interdisciplinaridade através do reconhecimento na presença de matemática nas artes e ainda potencializar a aprendizagem dos alunos através do uso da tecnologia digital.

Metodologia

Denzin e Lincoln (2005, p. 3), citado por Flick (2006, p. 16), apresentam uma definição inicial sobre o que é pesquisa qualitativa:

> A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve a postura interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem.

As observações feitas pelo professor sobre como os alunos reagem diante das situações propostas e os métodos pedagógicos utilizados em aula constituem importantes recursos durante o momento da aplicação das atividades e futura análise e interpretação dos dados coletados. Logo, neste trabalho envolvendo o conteúdo simetria, sentimos a necessidade de elaborar um plano de ação antes da execução da proposta. Com isso surge a importância de analisar o elemento desenho de pesquisa envolvido na proposta. Um desenho elaborado adequadamente na pesquisa é o principal instrumento para planejar as atividades e garantir a qualidade dos seus resultados. Ragin (1994, p. 191), define a expressão *desenho de pesquisa* da seguinte forma:

> O desenho de pesquisa é um plano para coletar e analisar as evidências que possibilitarão ao investigador responder a quaisquer perguntas que tenha feito. O desenho de uma investigação toca em quase todos os aspectos de uma pesquisa, desde os detalhes minuciosos da coleta de dados até a seleção de técnicas de análise de dados.

Neste artigo, concebe-se que o desenho da pesquisa deve ser reflexivo e ocorrer durante todas as etapas no processo de investigação. Em todas as etapas, deve-se considerar a presença de vários elementos que estão envolvidos que possuem relações mútuas e que ocorrem durante o desenvolvimento do trabalho, onde cada elemento desempenha um papel importante e único durante a execução da pesquisa. Maxwell (2005, p.5) resume através de um esquema, conforme a figura 1, os componentes envolvidos na execução da pesquisa e propõe que o conceito de desenho da pesquisa utilizado pelo pesquisador leve em consideração diferentes abordagens.

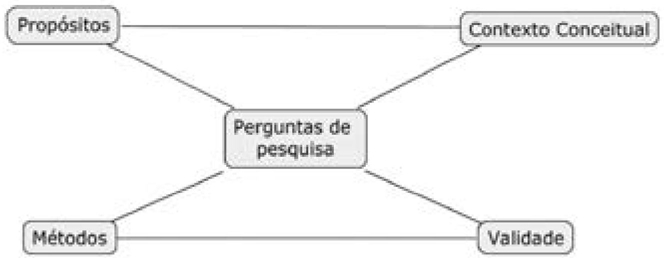


Figura 1. Modelo interativo de desenho da pesquisa proposto por Maxwell (2005).

No presente artigo, nota-se a importância do esquema mostrado anteriormente no que diz respeito à construção e elaboração das atividades para ser utilizadas com os alunos. A interatividade proposta por Maxwell (2005) sugere que o professor-pesquisador em suas atividades na sala de aula deve estar constantemente desenvolvendo métodos para validar os questionamentos criados durante o momento de aprendizagem dos seus alunos.

Através de contextos conceituais foi possível elaborar a pesquisa realizada por meio de uma sequência de atividades envolvendo o conteúdo simetria, que permitiu validar os questionamentos e inquietações criados inicialmente pelo professor-pesquisador e por meio do método pedagógico escolhido, promover a aprendizagem dos alunos.

Em busca de desenvolver uma proposta para o ensino da simetria, durante o desenho de pesquisa escolhemos utilizar para a execução das atividades uma adaptação da concepção de Engenharia Didática proposta por Artigue (1996). A metodologia proposta pela Engenharia Didática se caracteriza pela existência de uma sequência didática que possibilita existir uma relação entre o professor, aluno e a Matemática envolvida. A Engenharia Didática proposta por Artigue é constituída de fases: inicialmente há uma análise preliminar; após ocorre a construção e análise a *priori* das situações a serem aplicadas; e na etapa final ocorre a experimentação, análise a *posteriori* e avaliação dos resultados obtidos.

Inicialmente, ocorreu uma revisão da literatura já produzida sobre o ensino de geometria, em especial a simetria. Recorremos aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), versão destinada ao ensino fundamental, para analisar a proposta sugerida pelas diretrizes na abordagem desse tema em sala de aula. O

planejamento das atividades ocorreu após a análise feita sobre os documentos oficiais, onde também havia sido feita uma analise preliminar da turma de alunos que receberiam a sequência de atividades.

A análise de alguns trabalhos já executados dentre eles SANTOS (2010), LORENZATO (1995), juntamente com proposta das diretrizes nacionais convergem para o mesmo ponto, onde sugerem que o professor ao elaborar as suas atividades, pense em uma possibilidade de diminuir o abismo encontrado entre as disciplinas, ou seja, promova a interdisciplinaridade em suas aulas. A principal ideia é que o planejamento do professor siga além das orientações dadas pelos livros didáticos e que ele consiga desenvolver a matemática de uma forma que o aluno perceba a presença e importância dessa ciência em seu cotidiano.

A proposta de trabalho apresentada neste texto foi aplicada durante quatro semanas com alunos do terceiro ano do ensino fundamental, no ano de 2011, em uma escola estadual na cidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul. A ideia era criar e aplicar uma sequência de atividades de caráter interdisciplinar que envolvesse os alunos na apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos.

Para realizar a análise a *posteriori* e validação do estudo principal, utilizamos como fonte de informações as atividades produzidas pelos alunos que foram armazenadas em arquivos impressos e fotografias, junto com as observações feitas pelo professor-pesquisador durante a aplicação da seqüência didática. Neste artigo, conforme o esquema mostrado pelo mapa conceitual na figura 2, é apresentada uma análise a partir dos materiais produzidos pelos alunos, além do uso dos registros nas observações realizadas durante o momento da aula.

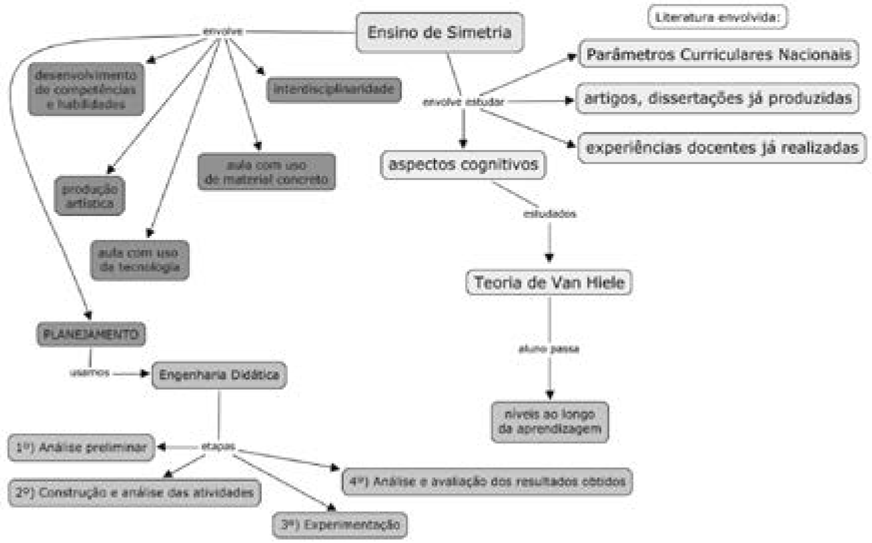


Figura 2. Mapa conceitual resumo da proposta do artigo.

O encaminhamento da proposta

Inicialmente, a primeira aula foi realizada no laboratório de informática, onde para introduzir o assunto, propomos uma pesquisa na internet sobre as obras de M.C. Escher[11]. Percebe-se nessa atividade que alguns alunos já conseguiam identificar e destacar intuitivamente as obras que apresentavam a noção de simetria o que acabou induzindo os demais a fazerem o mesmo. Nessa atividade não foi abordada a simetria rigorosamente, apenas foi proposto que os alunos intuitivamente reconhecessem uma possível simetria nas obras de M.C. Escher.

Nesse contato inicial dos alunos com o assunto, eles estão desenvolvendo o reconhecimento e visualização sobre o assunto. Não há neste momento a apresentação formal do conceito matemático de simetria, esta atividade é apenas uma forma dos alunos intuitivamente reconhecer essa possível característica em obras artísticas.

Essa atividade torna-se importante no início da sequência didática, pois possibilita desenvolver a autonomia do aluno em coordenar o caminho de sua aprendizagem. É importante observar que essa atividade além de possuir caráter interdisciplinar, quando o professor inicia a prática desse tipo de atividade desde as séries iniciais, ele desenvolve nos alunos a capacidade de realizar pesquisas, coletar material e classificar o material obtido, despertando o senso crítico dos alunos.

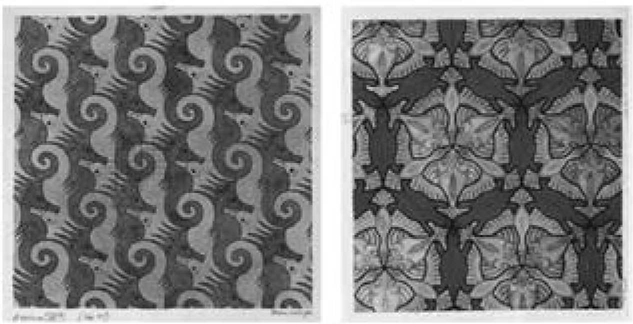


Figura 3. Exemplos de imagens encontradas pelos alunos na atividade inicial.
Disponível em: http://www.mcescher.com/

Após esse contato inicial, em sala de aula, trabalhamos a simetria em uma atividade artística envolvendo papel sulfite e tinta guache. A ideia dessa segunda atividade proposta consiste em determinar o eixo de simetria em uma folha de

11 Maurits Cornelis Escher foi um artista holandês conhecido mundialmente pelas suas produções artísticas que tendem a representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e padrões geométricos.

papel, no qual pode ser na horizontal ou vertical, e em seguida faz-se vários pingos de tinta, dispostos aleatoriamente, em apenas um dos lados do eixo, então se dobra o lado “limpo” sobre aquele que recebeu a tinta, abrindo-se em seguida para poder observar o resultado.

Alguns alunos tentaram identificar as formas que apareceram em sua obra tais como borboletas, sol, flores, entre outras mostradas na figura 4. Na referida atividade, os alunos começaram a desenvolver novos registros de representação para o assunto simetria, que começaram a ser comparados com os registros anteriormente criados na pesquisa das obras de M. C. Escher.

Esse momento foi importante para os alunos, pois eles iniciam o processo de apropriação dos conceitos envolvidos, ou seja, eles começam a transição entre o primeiro e segundo nível proposto pela teoria de Van Hiele. Através da análise das figuras criadas, os alunos começam ter a confirmação do que é a simetria do ponto de vista matemático. Com essa confirmação, os alunos estavam por conta própria analisando as propriedades presentes nas figuras, estabelecendo intuitivamente o eixo de simetria em cada uma delas e classificando as figuras em dois grupos distintos: o grupo de figuras com a propriedade da simetria e o outro grupo de figuras que não apresentavam simetria.

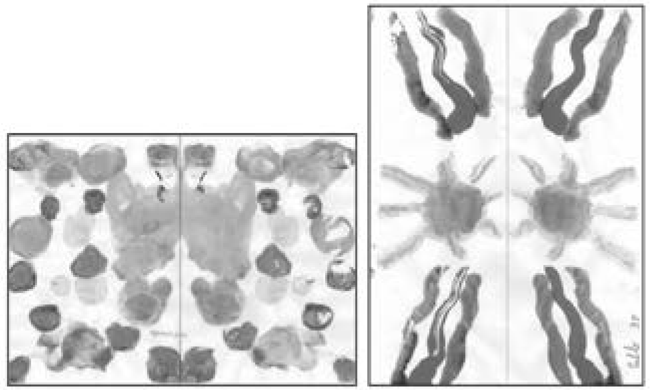


Figura 4. Exemplo de produção dos alunos na atividade do pingo.

Após essas duas atividades, abordamos o conceito de eixo de simetria e identificamos a sua presença em algumas figuras encontradas na arquitetura, natureza, obras artísticas, entre outras. Os alunos não demonstraram dificuldade em encontrar o eixo de simetria presente nas imagens, pois com a formação do registro da noção de eixo de simetria, eles foram capazes de iniciar a abstração da ideia matemática de simetria. Surgiu durante a execução dessa atividade a hipótese que a turma, em sua maioria, estava em transição para o terceiro nível de Van Hiele.

Percebe-se que nesse momento da sequência de atividades os alunos, na sua maioria, já estavam abstraindo as noções e procurando justificativas para seu raciocínio, seja através de suas próprias palavras ou utilizando-se de exemplos acessíveis como o armário de duas portas presente na sala de aula, as janelas e até mesmo os desenhos formados no assoalho da sala, confirmando que eles estavam inseridos no terceiro nível da teoria de Van Hiele.

Na sequência de atividades, a próxima etapa foi fazer a construção de gatos e cães através de dobraduras de papel, enfatizando a presença da simetria e os demais conceitos já abordados em sala de aula. Os alunos identificaram corretamente os elementos envolvidos na proposta, sendo que os rostos dos animais criados por eles, apresentavam a harmonia artística e a presença explícita de simetria nos seus elementos, conforme mostra a figura 5.

Figura 5. Produção dos alunos na atividade das dobraduras em papel.

Na semana seguinte foi proposta uma atividade sobre a criação de mosaicos. Foi dito aos alunos que os mosaicos constituem uma forma de arte decorativa criada há muitos anos, onde são utilizados diversos tipos de materiais. A beleza encontrada nas obras dos alunos consiste na harmonia e presença do conceito de simetria. A regularidade das formas encontradas neles produz um aspecto visual agradável para as pessoas, por isso que são encontrados abundantemente em construções e obras artísticas.

Com isso, a motivação inicial foi procurar imagens de exemplos de calçadas e vitrais de igrejas que possuíssem o conceito de simetria. Os alunos não possuíram dificuldade em encontrar exemplos de mosaicos. Em seguida, cada aluno, utilizando uma malha quadriculada, deveria construir um exemplo de mosaico, destacando o eixo de simetria, a organização das formas presente, suas cores, etc.

Consideramos que essa atividade foi importante durante a sequência, pois ao iniciar o trabalho com malha quadriculada nos anos iniciais do ensino fundamental, o professor proporciona aos alunos a oportunidade de desenvolver a noção de plano cartesiano e também de coordenadas cartesianas. Essas noções são

importantes para iniciar mais tarde o estudo das funções e seus gráficos durante o ensino médio.

Acreditamos que a criação de mosaicos nas séries iniciais do ensino fundamental é uma proposta de atividade interessante para o professor aplicar com os alunos, uma vez que desenvolve conceitos de matemática importantes e necessários para o aluno reconhecer a matemática como uma ciência presente no seu cotidiano e, além disso, desenvolve a autonomia, responsabilidade e produtividade dos mesmos. Os resultados obtidos com essa atividade foram satisfatórios, percebe-se que os alunos conseguiram criar mosaicos que apresentassem conceitos de matemática, através da simetria, e harmonia artística. Neste momento, destacamos que de acordo com a teoria de Van Hiele, os alunos encontram-se no quarto nível, onde eles já são capazes de compreender as estruturas dedutivas e organizar as propriedades percebidas nas figuras.

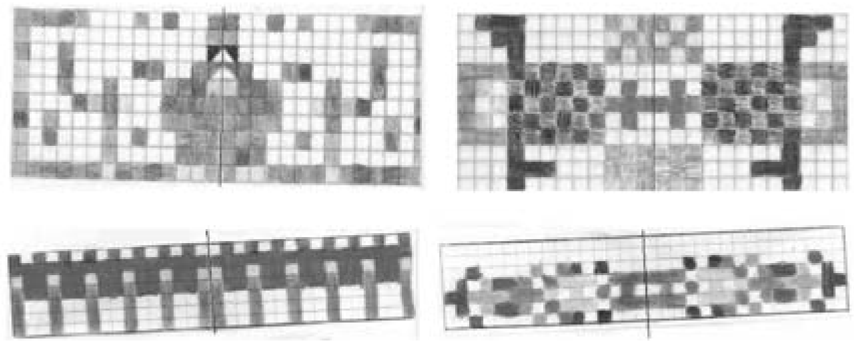


Figura 6. Alguns mosaicos produzidos pelos alunos.

A etapa final das atividades consistiu no uso de aplicativos disponíveis no *site* do MDmat[12]. A ideia era aplicar o uso da tecnologia para verificar se ocorreu a apropriação dos conceitos de matemática desenvolvidos durante a sequência de atividades. No ambiente virtual foram utilizados com os alunos dois objetos: simetria com bolinhas e o simetrizador.

O objeto de simetria com bolinhas foi importante para verificar a compreensão do conceito de simetria e suas propriedades em malha quadriculada, além de reforçar a ideia de localização no plano cartesiano. Esse objeto é uma tipo de jogo interativo, onde o aluno realiza a construção solicitada e após concluir verifica a validade de suas hipóteses na construção. O uso desse objeto possibilitou as condições necessárias para os alunos se apropriar dos conteúdos de matemática envolvidos nas atividades até o presente momento.

12 MDmat é a sigla de Mídias Digitais para Matemática, que é um ambiente virtual desenvolvido por um grupo de pesquisa da UFRGS orientado pelo professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

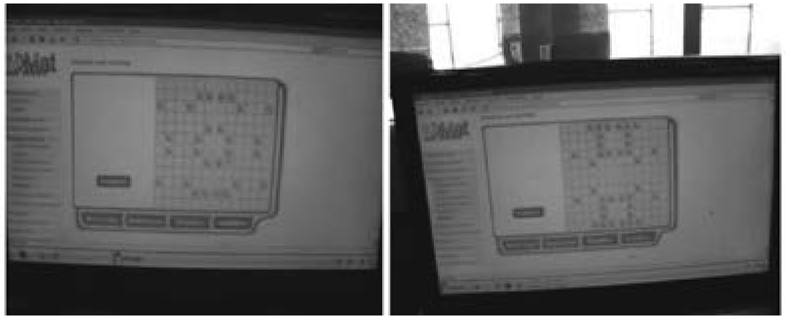


Figura 7. Atividade com o objeto Simetria com Bolinhas.

O simetrizador é um objeto que permite o aluno realizar a construção de mosaicos utilizando figuras geométricas simples ou desenhos mais elaborados, possíveis de ser encontrados na obra de M. C. Escher. Neste objeto os alunos demonstraram através de duas construções que se apropriaram do conceito matemático de simetria, eixo de simetria, reflexão horizontal e reflexão vertical.

Sendo a turma onde as atividades foram aplicadas ser constituída por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, percebeu-se que não houve dificuldade no uso dos objetos propostos, uma vez que esse público é constituído por uma geração de alunos que está inserida em um mundo cada vez mais tecnológico e dinâmico.

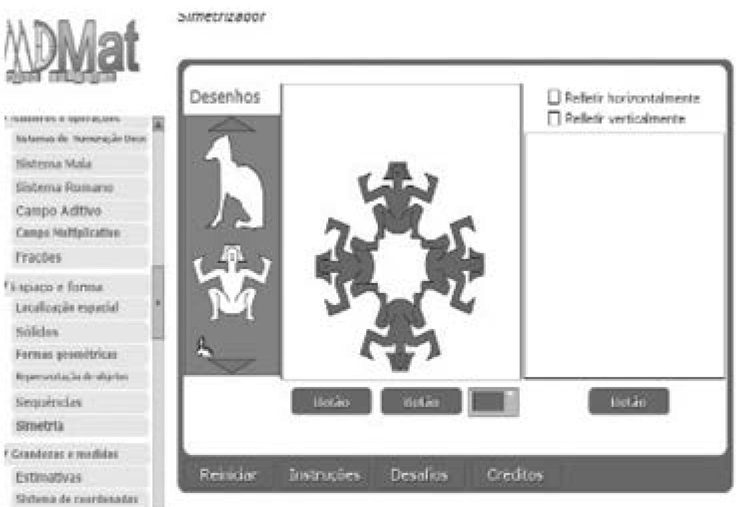


Figura 8 A

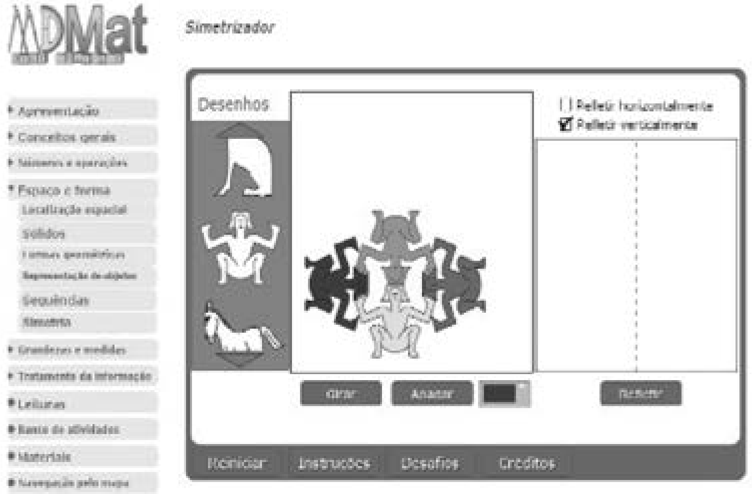


Figura 8 B

Figura 8 A e B. Criações dos alunos utilizando o objeto simetrizador.

No final do ano letivo foi realizada uma atividade avaliativa com a turma, onde foi solicitada uma questão envolvendo simetria. O questionamento proposto foi: *"No quadriculado abaixo está desenhado apenas um lado da figura. Utilizando a simetria complete a figura e descubra um dos símbolos do Natal..."*.

Na figura 9 temos alguns exemplos de respostas fornecidas, onde observa-se o alto índice positivo na resolução do problema pelos alunos, demostrando que eles passaram pelos níveis propostos pela teoria de Van Hiele, onde nota-se que o desenvolvimento do conteúdo abordado passou pelos cinco níveis ou estágios: visualização ou reconhecimento, análise, ordenação e classificação, dedução formal e rigor.

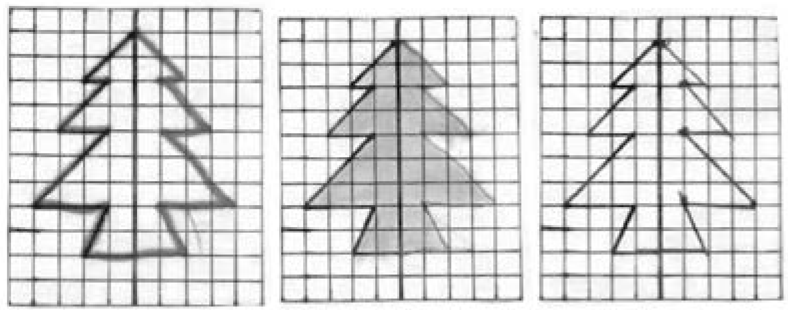


Figura 9. Algumas resoluções dos alunos na questão da avaliação.

Análise posterior e avaliação dos resultados

Ao final das atividades, constata-se que a sequência de atividades aplicadas alcançaram os objetivos inicialmente propostos. Através de um estudo prévio sobre o assunto e a percepção das dificuldades dos alunos em compreender a matemática, nestas atividades desenvolvidas, os alunos demonstraram total compreensão dos conceitos matemáticos abordados.

A relação entre a estética artística encontrada nas obras de M.C. Escher e a matemática serviu como motivação para os alunos desenvolverem as atividades durante as aulas. A partir da interdisciplinaridade, os alunos perceberam a importância dos conceitos matemáticos envolvidos em outras áreas de conhecimento.

O uso dos objetos virtuais escolhidos, o simetrizador e a simetria com bolinhas, foram considerados um ótimo recurso para relacionar a aprendizagem já realizada com atividades envolvendo papel, tinta e dobraduras em sala de aula com a aprendizagem no laboratório de informática. Essa atitude promoveu a potencialização da aprendizagem dos alunos.

A manifestação nítida da aprendizagem ocorrida na aplicação dessas atividades pode ser percebida em vários momentos durante as aulas, onde os alunos aumentaram quantitativamente e qualitativamente a participação e contribuição em aula, com ideias e comentários e também durante o momento da avaliação no final do ano, onde houve alto índice de acerto na questão proposta. Isso leva a considerar que a interdisciplinaridade no tripé: trabalhos artísticos manuais, matemática e uso da tecnologia possibilitaram o sucesso da sequência didática proposta.

Considerações finais

A discussão apresentada neste texto não pode ser considerada encerrada. As pesquisas em educação matemática que envolvem a criação, aplicação e análise dos resultados obtidos em sequências de atividades realizadas na sala de aula são uma possibilidade de mostrar experiências, apresentar possibilidades aos professores-pesquisadores que estão envolvidos diretamente em sala de aula. Neste artigo, procuramos mostrar um possibilidade para o ensino do conteúdo da simetria nas séries iniciais, onde foi possível desenvolver atividades que envolvessem os alunos em produção artística e ao mesmo tempo ocorresse aprendizagem de conceitos matemáticos.

Sugerimos aos colegas docentes, que através da leitura desse texto, considere a possibilidade de inserir em suas aulas a análise dos aspectos cognitivos envolvidos na aprendizagem dos seus alunos. Quando isso começar a ocorrer, o professor se tornará professor-pesquisador e com isso será possível que a sua intervenção proporcione uma aprendizagem mais qualitativa dos seus alunos.

A ideia de desenvolver atividades interdisciplinares e usar tecnologia digital, envolvendo os alunos em um processo de multi-formação pode levar tempo no planejamento do professor, mas certamente os resultados são os melhores possíveis.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUN, J. (Dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.193-217. (Série Horizontes Pedagógicos, 62).

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf . Acesso em 10/11/2011.

CONTADOR, P. R. M. **A matemática na arte e na vida**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade:** história, teoria e pesquisa. 2. ed. Campinas: Papirus, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: Percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. revisada. Campinas. Autores Associados, 2009.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa qualitativa**. Porto Alegre, Artmed, 2009.

FREUDENTHAL, H. Mathmatics as an educational task. Dordrecht: Reidel, 1973, p.407 apud FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

IMENES, L. M. **Geometria dos Mosaicos**. 8. ed. São Paulo: Scipione, 1994.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?**. A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Disponível em: www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0109.doc. Acesso em: 12 nov. 2011.

MAXWELL, J. A. **Qualitative Research Design – An Interaractive Approach**. 2. ed. Thousand Oaks. CA: Sage, 2005.

RAGIN, C. C. **Constructing Social Research**. Thousand Oaks. CA: Pine Forge Press, 1994.

RODRIGUES, A. C. **O Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade

Católica de Brasília, 2007. Disponível em: http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/AlessandraCoelhoRodrigues.pdf . Acesso em: 12 nov. 2011.

SANTOS, L. F. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar**: O ensino da Simetria e das Artes Visuais em Livros Didáticos de Matemática para séries iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). UFPE. Recife, 2010.

Rodrigo Sychocki da Silva - IFRS - Brasil
E-mail: rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br

Daniela Cristina Vargas Lopes - IFRS - Brasil
E-mail: daniela.lopes@caxias.ifrs.edu.br

MATEMÁTICA E ARTE: INCURSÕES NA INTERDISCIPLINARIDADE

MATHEMATICS AND ART: DIVING ON INTERDISCIPLINARITY

Emília de Mendonça Rosa Marques
Aguinaldo Robinson de Souza
Universidade Estadual Paulista – UNESP – Brasil

Ana Maria Breda
Universidade de Aveiro – UA – Portugal

Resumo

A análise complexa é, na atualidade, um objeto matemático fundamental, tendo em vista sua aplicabilidade às mais variadas áreas da Ciência. Este trabalho propõe mais um entrelaçamento interessante desse conteúdo matemático com as Artes Visuais, através da computação gráfica. A apresentação de padrões estéticos, utilizando o método *domain coloring* para a visualização de uma função complexa, mostra que propriedades algébricas e geométricas podem ser "coloridas", o que torna o seu estudo mais humano, contextualizado, agradável e dinâmico, possibilitando maior capacidade de entendimento, absorção e, até mesmo, de criação de conceitos. Este trabalho evidencia, mais uma vez, a contribuição da interdisciplinaridade ao estudo da Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Números Complexos, Artes Visuais, TIC.

Abstract

The complex analysis is, in actuality, a fundamental mathematical object, given its applicability to various areas of science. This paper proposes a more interesting intertwining of mathematical content to the Visual Arts, through computer graphics. The presentation of aesthetic standards, using the "domain coloring" for viewing a complex function, shows that algebraic and geometric properties can be "colored" which makes its study more human, contextualized, pleasant and dynamic, leading to greater ability to understand, to absorb and to create concepts. This work shows the contribution to the interdisciplinarity to study of mathematics.

Keywords: Mathematics Education, Complex Numbers, Visual Arts, ICT.

Introdução

O estudo dos números complexos evoluiu, na história da Matemática, de forma grandiosa e atualmente se faz presente em praticamente todos os grandes ramos desta ciência (ÁVILA, 2000), tais como álgebra, topologia, geometria (analítica, diferencial ou algébrica) e análise (BOYER, 1974). Os números complexos possuem também muitas aplicações importantes como, por exemplo, em dinâmica dos fluídos (SILVA, 2009) e na Mecânica Quântica no estudo dos aspectos energéticos e conformacionais de átomos e moléculas (THALER, 2005). Pesquisas atuais indicam que a análise complexa é um tema central da Matemática com implicações tanto no desenvolvimento da ciência básica como nas suas aplicações (NEEDHAM, 1997).

O método utilizado para a visualização de uma função complexa, denominado de coloração de domínio, (domain coloring), foi descrito inicialmente por Frank Farris (FARRIS, 2012), sendo que atualmente os pesquisadores Poelkey & Polthier (POELKE & POLTHIER, 2009) propuseram um aprimoramento do método para as superfícies de Riemann ramificadas. Este tema de pesquisa tem despertado o interesse da comunidade científica com vistas às suas possibilidades de incursão na interdisciplinaridade buscando um diálogo com a Arte (MATHIMAGERY, 2012). O matemático inglês G. H. Hardy (HARDY, 1940) em uma de suas citações apresenta toda a dimensão estética da Matemática e inspira, ainda hoje, novos talentos:

> A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns, if his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

Uma das contribuições deste trabalho é apresentar alguns padrões estéticos obtidos através da visualização de planos complexos coloridos, aqui referenciados como *quadros*. Estes quadros foram obtidos através do estudo do comportamento de alguns parâmetros presentes nas funções complexas como, por exemplo, o módulo e o número de raízes que as satisfaçam.

O software F(C):

No software F(C): Funções Complexas (SILVA, 2006) são ressaltadas a interpretação das características e as propriedades tanto para a Matemática como para as Artes Visuais, apresentando os números complexos, suas funções e as possíveis aplicações num novo contexto, associado à Computação Gráfica. Tem-se também, como um dos objetivos deste trabalho, a divulgação da produção científica do Grupo de Pesquisa intitulado *Ensino de Ciências e Tecnologia Educacional* da Faculdade de Ciências da UNESP - Campus de Bauru. Espera-se, portanto, que esta contribuição para a área de Ensino de Matemática possa incentivar novos talentos, visto que nas palavras de Lencastre (LENCASTRE, 2003),

> A imagem artística é uma poderosa ferramenta susceptível de explorar novos parâmetros da nossa percepção. Abre-nos a novas significações, novas descobertas, novas conotações. Passamos do «olhar» ao «ver». Assim, enriquece o nosso universo cultural e científico. Acredita-se que esse enriquecimento nas idades da adolescência pode concorrer para o desenvolvimento da percepção visual, de capacidades expressivas e de criatividade, e também para o aperfeiçoamento das suas capacidades cognitivas.

Do ponto de vista artístico, o software pode ser usado para criar um conjunto bastante diversificado de quadros que lembram imagens utilizadas em estamparia e murais, bem como a arte expressionista abstrata e minimalista. Do ponto de vista da Educação Matemática, o mesmo software aliado à geometria dinâmica, de modo muito eficiente através do software GeoGebra (GEOGEBRA, 2012), por exemplo, se torna uma importante ferramenta no ensino da álgebra e geometria dos números complexos, as noções de convergência e continuidade das funções complexas elementares e de suas famílias polinomiais, e ainda noções modernas, como os conjuntos fractais. Desta forma as propriedades algébricas passaram a ter uma dimensão extra mais abrangente e atraente: um conjunto de cores.

O método dos domínios coloridos possibilita uma nova abordagem no estudo das propriedades das funções complexas e suas aplicações, permitindo a descoberta de novos teoremas e propriedades relevantes. Outra possibilidade interessante é a integração entre os métodos de domínio colorido e a geometria dinâmica como uma proposta metodológica para o ensino de funções complexas e suas aplicações (MARQUES, 2012).

Ressalta-se que a ideia básica do método de domínios coloridos é atribuir, de um modo particular e de forma bijetora, a cada ponto do plano complexo uma cor. Dada uma função complexa $f(z)$, avaliamos para cada número complexo, z, pertencente ao conjunto C, a sua cor em $f(z)$ e atribuímos a cor resultante para a pré-imagem do número z. Comparando os planos coloridos iniciais e finais podemos visualizar as propriedades da função complexa $f(z)$.

O software [SILVA, 2008] possibilita ao usuário a produção de imagens a partir das famílias de funções complexas elementares, através da alteração de parâmetros ou das paletas de cores. Esse trabalho é fruto de pesquisas na área de ensino e aprendizagem em Matemática e pretende ressaltar a beleza artística que pode ser produzida por uma função complexa de variável complexa.

Um tema próximo ao desenvolvido neste trabalho é a Polinomiografia (KALANTARI, 2005), introduzida por Bahman Kalantari. A polinomiografia, na definição do autor, é a arte e a ciência da visualização da aproximação dos zeros de polinômios complexos, através da criação de imagens fractais e não-fractais usando propriedades matemáticas de convergência de funções de iteração, sendo o polinomiográfico uma imagem individual.

Propomos, então, neste artigo, um paralelo entre a polinomiografia e o método dos Domínios Coloridos, onde os quadros se equiparam aos polinomiográficos. Observa-se, entretanto, que os quadros podem ser provenientes de polinômios complexos, ou ainda de muitas outras funções complexas, elementares ou não.

Os fractais (MANDELBROT, 1977), que aparecem em vários quadros, referem-se a conjuntos de objetos geométricos auto-similares, que independem de escala. Isto significa que há detalhes sobre todos os níveis de ampliação, não importando qual a escala a ser visualizada, ainda é possível descobrir novos detalhes. Quadros, representando fractais são obtidos de forma simplificada [MARQUES, 2012], através da utilização de funções racionais complexas na variável z como, por exemplo, na figura 1 a seguir, onde é representada a função

$f(z)=\cos^{-1}(z^3)$.

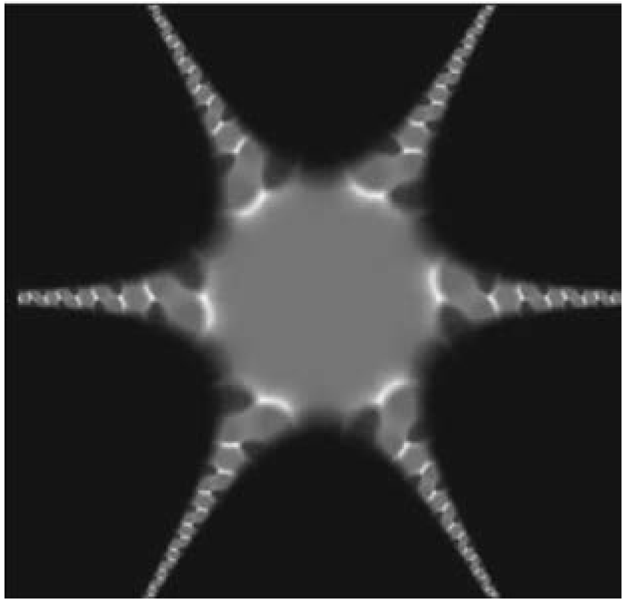


Figura 1 - Quadro obtido pela função $f(z)=\cos^{-1}(z^3)$.

Podemos obter, também, alguns quadros onde as características fractais não são observadas. No quadro apresentado na Figura 2 podemos observar a simetria central com relação ao desenho principal e a repetição do mesmo, ao longo da

diagonal secundária do quadro. Ressalta-se que a imagem mostrada no quadro da Figura 2 foi obtida através da seguinte função complexa:

$$f(z)=\left(\frac{i-1}{2}\right)\mathrm{Im}\left(\tan^4\left(\overline{z\left(\frac{1+i}{5}\right)}\right)+(2+i)\right). \quad (1)$$

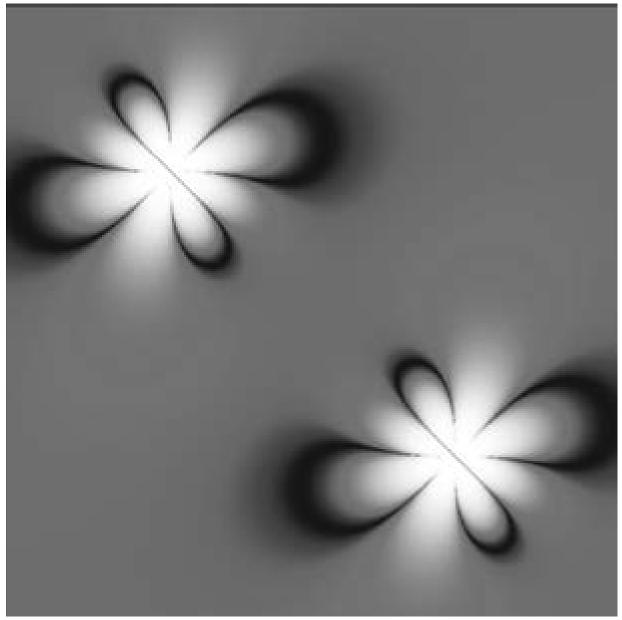


Figura 2. Quadro com simetria central.

Uma exposição de domínios coloridos

Nesta seção são apresentados alguns quadros (figura 03 a 14), criados pelos autores, com a finalidade de apresentar a riqueza de possibilidades de construção dos domínios coloridos. A figura 3(a) apresenta o quadro padrão de Argand-Gauss, também chamado de mapa de cores. Neste quadro as cores foram atribuídas de tal maneira a que cada uma corresponda a um número complexo.

Na figura 3(b) apresentamos um mapa em tons de cinza considerando uma tonalidade para cada grau, sendo que a cor preta representa o ângulo nulo e o branco, o ângulo de 360º. Esse mapa considera apenas o argumento (ângulo) do número complexo, descrito em sua forma trigonométrica.

Nas próximas páginas, o leitor é levado a contemplar e apreciar a beleza das imagens, bem como perceber a diversidade de formas, de cores e de intensidade das tonalidades obtidas através da implementação das funções complexas.

Na tabela 1 apresentamos as funções complexas que deram origem aos variados domínios coloridos.

A próxima seção do artigo será dedicada à apresentação das propriedades geométricas e algébricas que se pode ressaltar em algumas das figuras presentes nos quadros.

Tabela 1. Funções complexas e respectivos domínios coloridos

Quadro (domínio colorido)	**Função**
Figura 03(a) e (b)	$f(z)=z$
Figura 04	$f(z)=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tan^5\left(\frac{(1-i)z}{4}\right)+(1-i)\right)(1+i)$
Figura 05	$f(z)=-i\,\mathrm{Im}\left(\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)^4+\left(\overline{\tan\left(\frac{z}{2}\right)^4}\right)\right)^6(1+i)\right)$
Figura 06	$f(z)=-i\left(\tan\left(\frac{(1+i)z}{10}\right)^3+\left(\overline{\tan\left(\frac{(1+i)z}{10}\right)^3}\right)i\right)^2$
Figura 07	$f(z)=(1-i)\mathrm{Re}\left(\tan^5\left(\frac{zi-z}{10}\right)+\left(\overline{\tan^5\left(\frac{zi-z}{10}\right)}\right)i\right)-\left(\frac{i}{5}\right)$
Figura 08	$f(z)=i\,\mathrm{Im}\left(\tan^3\left(z\left(\frac{1+i}{2}\right)\right)^2-i\tan^3\left(z\left(\frac{1+i}{2}\right)\right)^2\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right)$
Figura 09	$f(z)=i\,\mathrm{Im}\left[\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)^2+(1+i)\right)^3(1+i)\right]$
Figura 10	$f(z)=\arcsin^5\left(z^2\right)$
Figura 11	$f(z)=-\tan^{-2}\left(z^3\right)$
Figura 12	$f(z)=\mathrm{Im}\left(\sin^4\left(\frac{zi-z}{4}\right)+(1+i)\right)$
Figura 13	$f(z)=\left((1-i)\left(\tan\left(\frac{z}{10}\right)^2+\left(\mathrm{Re}\left(\tan\left(\frac{z}{10}\right)^2\right)(1+i)\right)\right)\right)+\left(-\frac{i}{5}\right)$
Figura 14	$f(z)=\frac{1}{2}\ln^{-8}(z)-1$

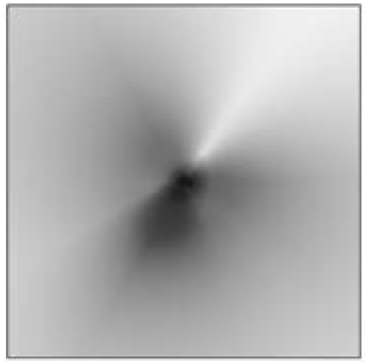


Figura 3(a). Mapa de cores padrão

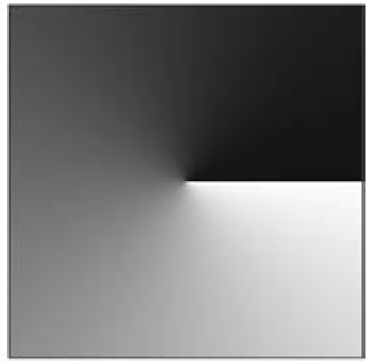


Figura 3(b). Mapa padrão em cinza.

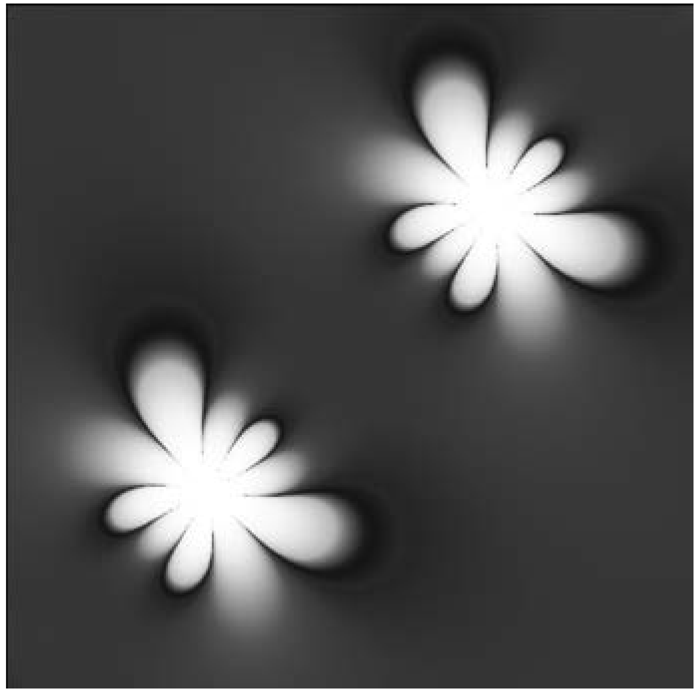


Figura 4. Quadro com a função tangente.

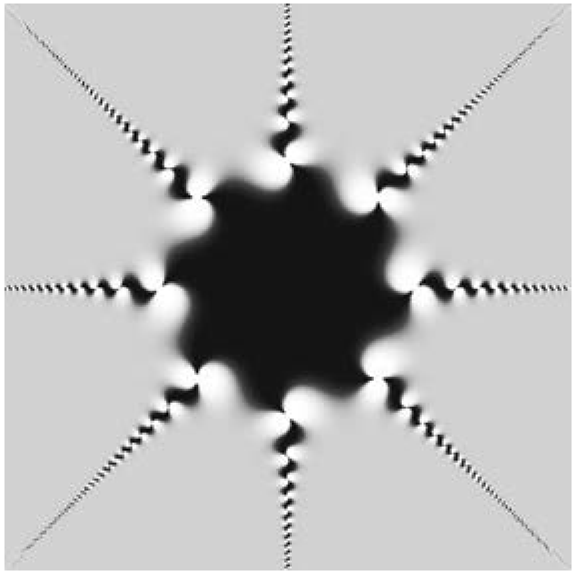


Figura 5. Multiplicação da função por um número complexo.

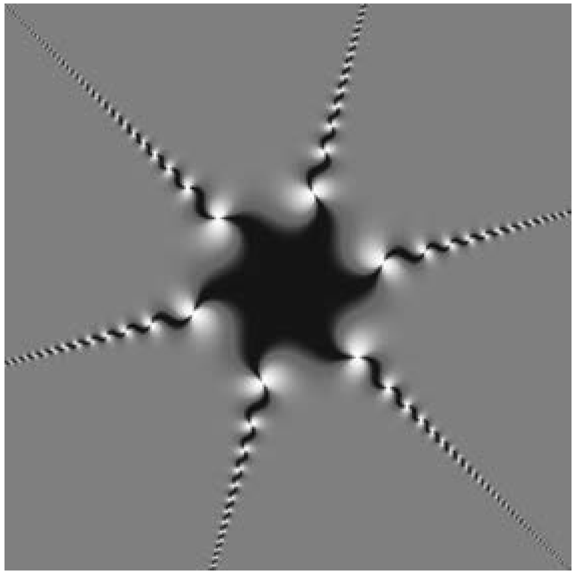


Figura 6. Rotação no mapa de cores em relação à figura 5.

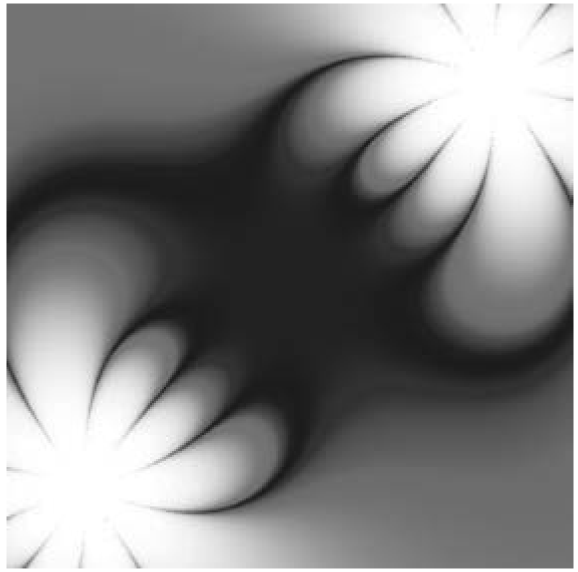


Figura 7. Reta que passa pelo centro do mapa.

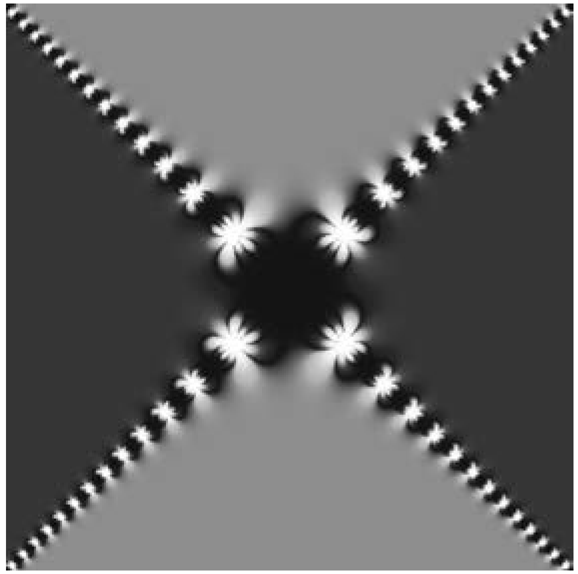


Figura 8. Características fractais.

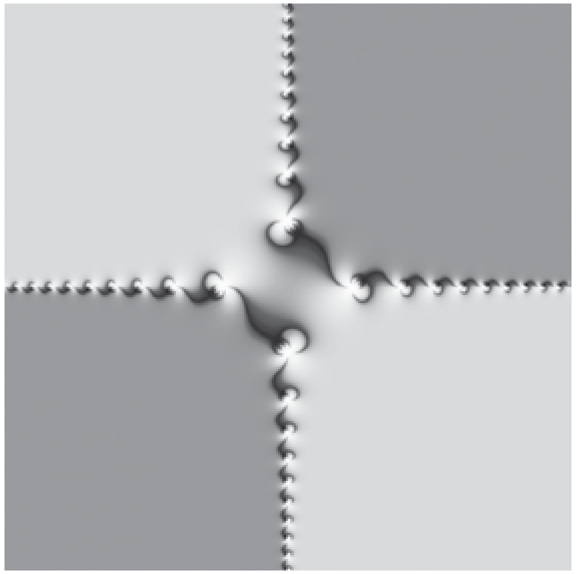


Figura 9. Características fractais.

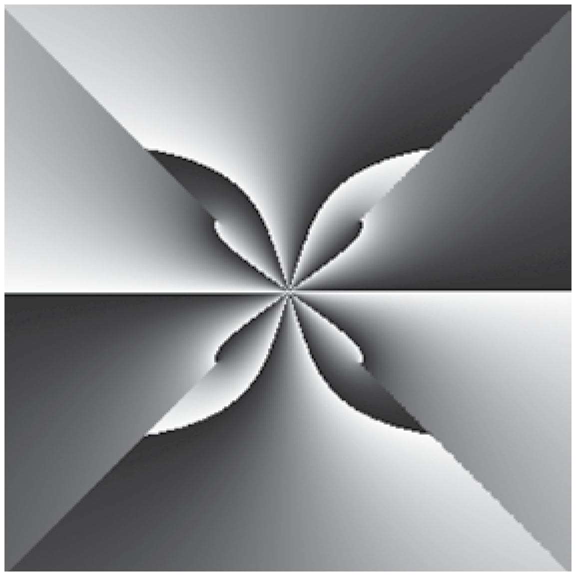


Figura 10. Quadro com simetria central.

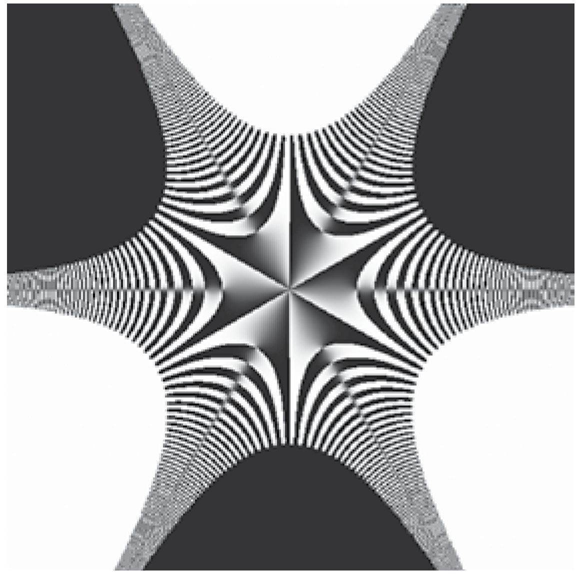


Figura 11. Subdivisão do plano compleco em três regiões.

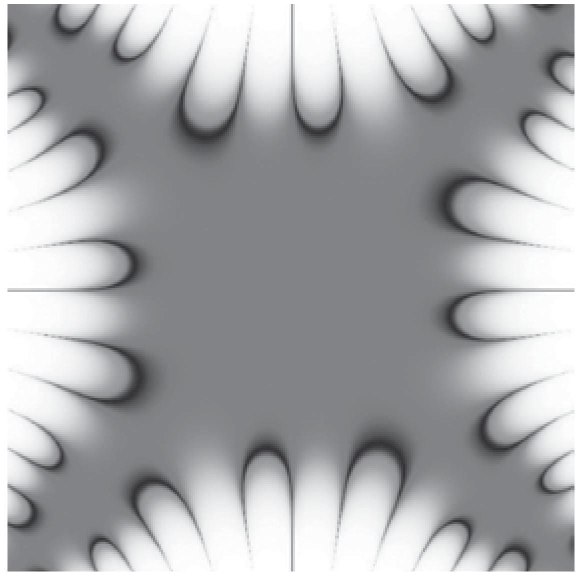


Figura 12. Quadro com apenas números reais.

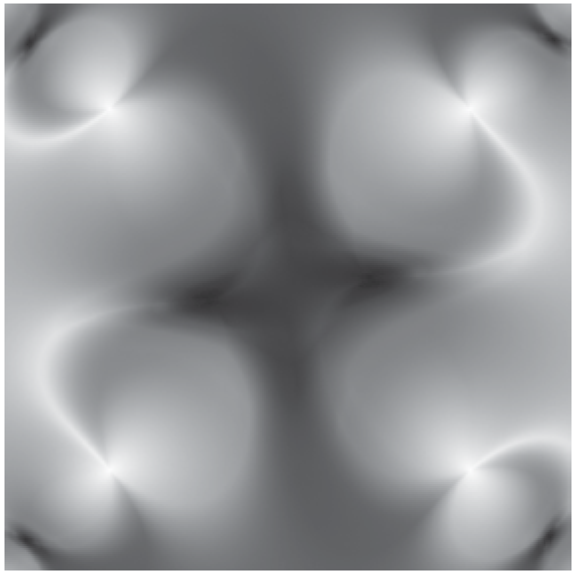


Figura 13. Quandro com suavidade na mudança de cores.

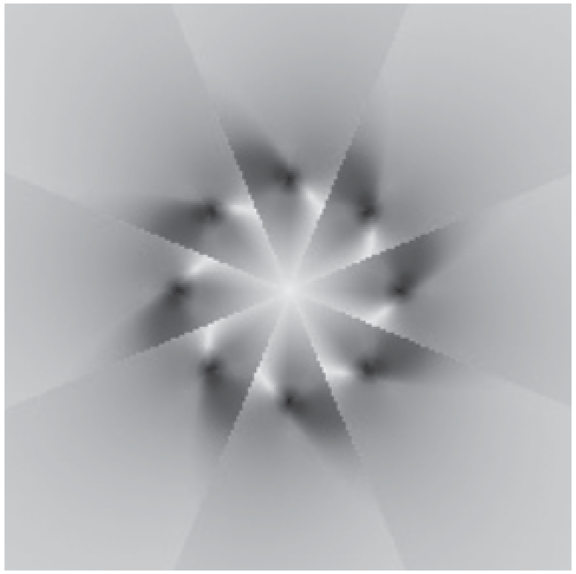


Figura 14. Divisão do plano complexo em oito setores.

Algumas Propriedades Geométricas e Algébricas dos Quadros

A figura 4 apresenta regiões pintadas de amarelo, de azul, de preto e de branco, o que mostra que as imagens da função estão sobre a reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes do mapa de cores apresentado na figura 3(a), a qual é gerada pelo número complexo $1+i$ que multiplica a função Parte Real. O fato de serem cinco regiões pintadas de amarelo está correlacionado com a potência da função tangente, conforme se observa na expressão que gera tal quadro:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tan^5\left(\frac{(1-i)z}{4}\right)+(1-i)\right)(1+i) \qquad (2)$$

O quadro apresentado na Figura 10 foi produzido através da utilização da função complexa $f(z) = \arcsin^5(z^2)$. Para esse quadro foi utilizado um mapa padrão de cores em tons de cinza, mostrado na figura 3(b). Trata-se de um quadro que apresenta a propriedade geométrica da simetria central e não possui características fractais.

Já a criação do quadro mostrado na figura 9 se deu pela utilização do mapa de cores apresentado por Argand-Gauss, apresentado na figura 3(a). A função complexa que o gera é dada pela seguinte expressão:

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\left[\left(\tan\left(\frac{z}{2}\right)^2+(1+i)\right)^3(1+i)\right] \qquad (3)$$

Tal imagem também apresenta simetria central com características fractais, sendo que sua coloração mostra que as imagens produzidas pela função utilizada são números complexos imaginários puros e o nulo, o que pode ser comprovado geometricamente traçando-se uma reta vertical pelo centro do quadro. Essa propriedade pode também ser identificada algebricamente na expressão da função, visto que a mesma é a multiplicação de um número real, dada pela função Parte Imaginária, pelo número imaginário $i = \sqrt{-1}$.

A figura 12 mostra um quadro apenas nas cores atribuídas aos números reais (subconjunto dos complexos), conforme se pode observar no mapa de cores apresentado na figura 3(a), traçando-se uma reta horizontal passando pelo centro do quadro.

Para a obtenção do quadro da figura 6 utilizou-se a seguinte função complexa:

$$f(z) = -i\left(\tan\left(\frac{(1+i)z}{10}\right)^3+\left(\overline{\tan\left(\frac{(1+i)z}{10}\right)^3}\right)i\right)^2 \qquad (4)$$

A coloração desse quadro mostra que as imagens produzidas pela função utilizada são unicamente números reais positivos (semi-reta horizontal partindo do centro da figura 3(a)).

As características fractais desse quadro se apresentam ao longo de três retas que dividem o plano em seis regiões iguais, isto se deve ao fato da função trigonométrica tangente ser composta com um monômio de terceiro grau em z. Já o quadro mostrado na figura 11 apresenta uma subdivisão do plano complexo pelas mesmas retas, entretanto observamos apenas três regiões iguais.

Observa-se que a figura 5 é obtida através de uma pequena variação da função que gera a figura 6, visto que a mesma provém de uma multiplicação da função por um número complexo, cujo efeito geométrico é de rotação no mapa de cores, movimento que ocasiona a mudança de cores; e ainda a alteração da potência da função tangente, passando do terceiro para o quarto grau, o que resulta numa maior divisão do plano complexo em setores iguais.

Numa análise comparativa entre as figuras 13 e 14 observam-se semelhanças e diferenças bastante marcantes. Dentre as semelhanças pode-se ressaltar a simetria central e a quantidade e variedade das cores. Já as diferenças mais acentuadas estão na suavidade da mudança de cores apresentada na figura 13, o que não é verificado na outra figura, e no fato de a figura 14 apresentar a divisão do plano complexo em oito setores iguais, o que não ocorre na figura anterior. Conjectura-se que a suavidade na alteração das cores esteja intimamente ligada à continuidade ou não das funções, o que merece trabalhos futuros de investigação.

As cores das figuras 2 e 7 são as mesmas, sugerindo que as duas funções possuem suas imagens na mesma reta que passa pelo centro e corta o 2º e 4º quadrantes.

Finalmente ressalta-se que as figuras 1, 5, 6, 8 e 9 possuem características fractais evidentes. Este tema está sendo estudado, sendo que a sua comprovação necessita ainda de uma investigação algébrica bastante refinada.

Considerações finais

Os “domínios coloridos” de diferentes funções complexas, apresentados neste trabalho, mostram o colorido que se pode dar ao estudo de propriedades algébricas e geométricas, utilizando um software de computação gráfica. Este fato pode atingir efeitos extraordinários sobre o leitor, tornando-o mais interessado no estudo desses conteúdos, visto que, tanto as Artes como a Matemática são oriundas, desde seus primórdios, das necessidades da humanidade.

Conexões da Matemática e da Arte podem ser observadas durante toda a história humana. O estudo de conteúdos matemáticos, a partir de entrelaçamentos como o aqui apresentado, pode tornar-se mais contextualizado, humano e

dinâmico, o que certamente provoca maior capacidade de entendimento, absorção e criação de conceitos.

O colorido, a simetria e as características fractais dos quadros predispõe o observador a conjecturas podendo levá-lo à busca de comprovações, o que o torna receptivo ao aprendizado. Ressalta-se ainda, a capacidade de encantamento provocado pelo fato de uma única equação matemática possuir a capacidade de causar beleza e emoção.

Desta forma conclui-se que o software F(C): Funções Complexas está se revelando numa ferramenta bastante eficiente e eficaz para o estudo dos conceitos que envolvem a Análise Complexa, pois a torna mais acessível, visual e interessante.

Referências

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2000.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

FARRIS, Fank A. **Visualizing complex-valued functions in the plane**. Disponível em: <http://www.maa.org/pubs/ammcomplements/complex.html>. Acesso em: 12 de jan. 2012.

GEOGEBRA. **Software gratuito para o ensino e aprendizagem da Matemática**. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/>. Acesso em: 12 de jan. 2012.

HARDY, Godfrey Harold. **A Mathematician’s Apology**. Alberta: University of Alberta Mathematical Sciences Society, 1940.

KALANTARI, Bahman. Polynomiography: From the Fundamentals Theorem of Algebra to Art Belgrad, **Leonardo**. v. 8, n. 3, p. 233-238, 2005.

LENCASTRE, José Alberto; CHAVES, José Henrique. A imagem artística como mediadora da aprendizagem. In: **Actas da III Conferência Internacional de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação – Challenges 2003 - 5º Simpósio Internacional em Informática Educativa – 5º SIIE**. Braga: Universidade do Minho, 2003. p. 403-414.

MANDELBROT, Benoit B. **Fractals**: Form, Chance, and Dimensions. San Francisco: W.H. Freeman & Company, 1977.

MARQUES, Emília de Mendonça Rosa; SOUZA, Aguinaldo Robinson de. GeoGebra e o método de Briot & Bouquet para a resolução gráfica de equações cúbicas. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**. São Paulo, v. 1, n.1 p. 65-73, 2012.

MATHIMAGERY. **Mathematical Imagery**. Disponível em: <http://www.ams.org/mathimagery/>. Acesso em jan. 2012.

NEEDHAM, Tristan. **Visual Complex Analysis**. New York: Oxford University Press, 1997.

POELKE, Konstantin; POLTHIER, Konrad. Lifted Domain Coloring. **Computer Graphics Forum**, Oxford, v. 28, n. 3, p. 735-742, 2009.

SILVA, E.L. da. **Construção e validação de um objeto tecnológico de aprendizagem em Matemática para funções de uma variável complexa**. 2006. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual Paulista, UNESP, Bauru, São Paulo, 2006.

SILVA, Edvaldo Lima da; SOUZA, Aguinaldo Robinson de; MARQUES, Emília de Mendonça Rosa. **Números e Funções Complexas**: Representação e Interpretação Gráfica. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008.

SILVA, Edvaldo Lima da; SOUZA, Aguinaldo Robinson de; MARQUES, Emília de Mendonça Rosa. Alguns estudos de fluxo de fluído utilizando software gráfico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. São Paulo, v. 31. n. 03, p. 3502- 3509, 2009.

THALER, Bernd. **Advanced Visual Quantum Mechanics**. New York: Springer Science + Busines Media Inc., 2005.

Emília de Mendonça Rosa Marques
Departamento de Matemática – UNESP/Bauru - Brasil
E-mail: emilia@fc.unesp.br

Aguinaldo Robinson de Souza
Departamento de Química – UNESP/Bauru - Brasil
E-mail: arobinso@fc.unesp.br

Ana Maria Breda
Departamento de Matemática – UA/Aveiro - Portugal
E-mail: amrbreda@gmail.com

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E OS FRISOS

GEOMETRICS TRANSFORMATIONS AND FRIEZES

David Antonio da Costa
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC - Brasil

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar parte dos resultados de uma pesquisa que procurou investigar como o uso dos frisos com a ajuda do software Cabri-Géomètre-II, contribuiu para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetria central. O pressuposto é de que os frisos potencializam o estudo das geometrias das transformações. Os padrões presentes nos frisos são ricos elementos de contextualização das transformações geométricas em uma dimensão artística. Como resultado encontrou-se que a abordagem de diferentes transformações geométricas é favorecida com a introdução de frisos por meio de sequencias didáticas e o uso de alguns recursos tecnológicos.

Palavras-chave: Transformações Geométricas, Frisos, Educação Matemática, Arte.

Abstract

The aim of this paper is to present some results of a survey that investigated how the use of friezes with the help of Cabri-Géomètre-II, helped to articulate and give meaning to the concepts of translation, axial symmetry and symmetry. The assumption is that the friezes help the study of geometry of the transformations. The patterns present in the friezes are rich contextual elements of geometric transformations in artistic dimension. As a result it was found that the approach of different geometrical transformations is favored by the introduction of friezes in a didactic sequence and the use of some technological resources.

Keywords: Geometric Transformation, Friezes, Mathematics Education, Art

Introdução

Este texto apresenta parte da pesquisa realizada por Costa (2005) no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP intitulado "O estudo dos frisos[13] no ambiente informatizado Cabri-Géomètre II.

13 Pastor (1996) define friso como o ladrilhamento de uma região plana limitada por duas retas paralelas. Tal conceito será abordado ainda neste artigo posteriormente.

Muitos estudos tem sido feitos acerca das transformações geométricas. Entre eles podemos citar Mabuchi (2000) que analisou estudos e pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas no ensino fundamental e como tais conteúdos deveriam ser incorporados aos cursos de formação de professores de Matemática. Fernandes (2004) devido as fortes associações com experiências visuais, investigou os processos pelos quais aprendizes cegos se apropriam dos conceitos de simetria e reflexão – algumas das transformações geométricas. Partindo de uma perspectiva vygotskiana, esta autora tem como hipótese que aprendizes cegos têm o mesmo potencial que os videntes para apropriar-se de noções ligadas a esses conceitos. E ainda mais recentemente podemos citar a pesquisa de Salazar (2009) onde se apoia na gênese instrumental na interação com o Cabri 3D para realizar estudos sobre as transformações geométricas. A investigação de Silva (1997) descreve uma proposta de ensino da geometria através de desenhos, tendo como base alguns ornamentos, como faixas, rosetas e mosaicos, utilizando na sua confecção translação, reflexão e rotação. O seu objetivo era elaborar uma proposta de Ensino de Geometria utilizando ornamentos para estimular a criatividade através da metodologia de resolução de problemas, por meio de trabalhos em grupos e ensino pela descoberta.

Seguindo Silva (1997) procurou-se responder a seguinte questão: em que medida o uso dos frisos com o Cabri-Géomètre II contribui para articular e dar significado aos conceitos de translação, simetria axial e simetrai central?

Os frisos e as faixas usados como sinônimos nesta pesquisa se apresentaram como elementos motores articulados dentro de uma dimensão artística. Esta articulação foi feita principalmente por uma releitura das pinturas presentes nas paredes da Pinacoteca Benedito Calixto[14], no município de Santos. Dessa forma, os frisos permitiram uma nova dimensão ao estudo que transcenderia a própria matemática.

Nesta pesquisa, adotou-se o conceito de obra matemática discutido por Chevallard (2001), entendendo-se que todo saber matemático é constituído de pequenas obras e estas devem ser reconstruídas para que se possam dar significados a este saber. Sendo assim as transformações geométricas devem ser problematizadas para poderem ser estudadas.

Segundo Bkouche (1991) o estudo da geometria das transformações pode ser problematizado e abordado de pelo menos cinco formas:

a) movimento (neste caso via translações e rotações);

b) figuras regulares (polígonos regulares e seus respectivos padrões – frisos e pavimentações; poliedros regulares e os cristais)

c) figuras semelhantes (homotetias e semelhanças);

14 O chamado Casarão Branco, sede da Fundação Pinacoteca Benedicto Calixto, construído no início do século XX, é um dos mais significativos conjuntos arquitetônicos da cidade de Santos. Localizado na orla da praia e cercado por edifícios residenciais, abriga nas pinturas internas dos cômodos, trabalhos artísticos magníficos onde a presença das faixas é notória em todos os ambientes.

d) relações provocadas por transformações deformantes (que mudam a forma) entre uma figura geométrica e sua imagem; e

e) representações planas dos objetos (perspectiva cônica e paralela).

Enfatizou-se neste trabalho a abordagem do estudo da geometria das transformações pelas figuras regulares, ou seja, a problematização das figuras regulares (polígonos regulares e seus respectivos padrões – frisos e pavimentações; poliedros regulares e cristais).

O software Cabri-Géomètre II foi utilizado no estudo dos frisos e das transformações geométricas no plano. O uso deste programa permitiu uma abordagem diferenciada em relação ao meio papel e lápis, pois sua principal característica é de permitir a manipulação de figuras sem alterar as propriedades básicas das mesmas, ou seja, seus invariantes.

A caixa de ferramenta “Transformar” contém as ferramentas associadas aos recursos de transformação do Cabri-Géomètre II. Particularmente neste trabalho foram utilizadas apenas a translação, reflexão em reta (ou simetria axial) e simetria central.

Os frisos na arte

> Ignoramos como a arte começou, tanto quanto desconhecemos como teve inicio a linguagem. Se aceitarmos que arte significa o exercício de atividades tais como a edificação de templos e casas, a realização de pinturas e esculturas, ou a tessitura de *padrões*, nenhum povo existe no mundo sem arte. (GOMBRICH, 1999, p.41 – grifo nosso)

Encontra-se na arte diversos exemplos dos padrões, mais especificamente, das transformações geométricas. Seja na pintura, na confecção de máscaras, o dominio dos artífices tribais é deveras surpreendente. Os maoris[15] da Nova Zelândia aprenderam a criar verdadeiras maravilhas em suas obras de talhe (GOMBRICH, 1999, p.44). Nestes entalhes nota-se a presença da *simetria em relação a um eixo vertical.*

Figura 1. Lintel da casa de um chefe maiori, começo do século XIX. Madeira talhada 32 x 82 cm; Museu do Homem, Londres (GOMBRICH, 1999).

15 Os maoris são os povos indígenas da Nova Zelândia.

Poderemos encontrar mais exemplos de objetos que contém os ornamentos. Na realidade, em vários lugares até os dias de hoje, os frisos e as faixas com motivos geométricos são chamados também de "gregas". A Figura 2 apresenta um vaso grego decorado com padrões geométricos simples. Este vaso representa a lamentação por um morto, que jaz em seu esquife, enquanto as carpideiras à direita e à esquerda levam as mãos à cabeça no pranto ritual que era um costume de quase todas as sociedades primitivas.

Figura 2. A lamentação pelo morto, 700 a.C. Vaso grego no estilo Geométrico; altura 155 cm; Museu Arqueológico Nacional, Atenas (GOMBRICH, 1999).

Os frisos estão presentes, além das manifestações em pinturas ou cerâmicas, também na arquitetura. O Coliseu é um exemplo característico da construção romana. O andar térreo é uma variação do estilo dórico, o segundo andar é jônico, e o terceiro e o quarto são meias colunas coríntias. É possível verificar a presença de um grande friso ornamentando o ponto mais elevado desta construção.

Figura 3. O Coliseu, Roma, 80 d.C. Um anfiteatro romano (GOMBRICH,1999)

Sinteticamente, procuramos demostrar que há na cultura em várias épocas e lugares o emprego dos frisos.

A matemática nos frisos

Segundo as possíveis problemáticas nas abordagens do estudo das transformações geométricas nas considerações iniciais, a pesquisa de Costa (2005) adotou aquela que trata dos padrões regulares.

Estes padrões podem ser finitos ou infinitos de acordo com o número de cópias seja finito ou infinito, respectivamente. No entanto, na realidade, encontram-se somente padrões finitos, mas, a capacidade de abstração permite imaginar partes de padrões que se estendem indefinidamente.

Alguns tipos de padrões:

- papéis de parede: padrão com simetria de translação em direções diferentes (independentes);
- frisos ou padrões de faixa: padrões com simetria de translação numa única direção;
- padrões de roseta: o motivo repete-se como se constituísse pétalas de uma flor à volta do caule.

Num papel de parede a repetição do motivo verifica uma propriedade que consiste na existência de duas translações linearmente independentes tais que o desenho final é resultado de todas as transformações geradas por essas translações. O estudo limitou-se a um tipo de padrão, ou seja, os frisos.

Pastor (1996) define friso como o ladrilhamento de uma região plana limitada por duas retas paralelas. Dada uma região R do plano, entende-se por ladrilhamento o conjunto de figuras geométricas (geralmente polígonos) que se podem colocar de maneira que todo ponto da região R pertença exclusivamente a uma destas figuras. Ainda segundo este autor, o conjunto inicial de figuras é chamado de motivo mínimo. O conjunto de isometrias que permite construir o ladrilhamento são subgrupos do grupo de isometrias do plano, pois é sempre possível encontrar um conjunto mínimo de isometrias que caracterize o ladrilhamento, chamado de sistema gerador. Para ele, o ladrilhamento é caracterizado matematicamente por um motivo mínimo e um sistema gerador.

Essa região por onde se definiu o friso possui comprimento infinito, mas largura finita. Sendo assim as únicas isometrias que podem fazer parte destes frisos são:

a) as translações de vetor paralelo às bordas desta região;

b) as rotações de 180º cujo centro eqüidista das bordas da região;

c) as reflexões em reta desde que seu eixo seja uma reta eqüidistante das bordas desta região ou perpendicular a esta reta.

d) as reflexões transladadas com eixo eqüidistante das bordas desta região.

Acredita-se ser relevante a descrição das possíveis isometrias que poderão fazer parte dos frisos por que introduzem as possibilidades de construção que iremos utilizar no nosso estudo do objeto matemático.

Em Alsina (1989) encontra-se definição similar para o friso, no entanto um pouco mais precisa na sua forma de exposição. Este autor introduz a ideia do friso como figuras onde a geometria se põe ao serviço de criar beleza com repetição e ritmo.

> ... No friso se reconhece a ordem e a periodicidade. Seu motivo inicial pode ser muito diverso e eles induzem a pensar em uma infinidade de combinações. Porém o método de geração de friso responde a uma perfeita sincronia de movimentos geométricos em número muito limitado. (ALSINA, 1989, p.83).

De acordo com Alsina (1989), dada uma figura *F* e seja *S(F)* o grupo de simetrias de *F*, isto é, as isometrias que deixam a figura *F* invariante. Diremos que *F* é um friso se as seguintes condições são satisfeitas: a) Existe uma reta *r* (desenhada ou não) que indica a direção de desenvolvimento do friso e que é invariante por todas as isometrias do grupo *S(F).* b) Existe uma translação t_a, por vetor não nulo e direção igual a da reta *r*. As demais translações presentes no friso por vetor não nulo e direção igual a da reta serão múltiplos inteiros da translação t_a deixando o friso invariante.

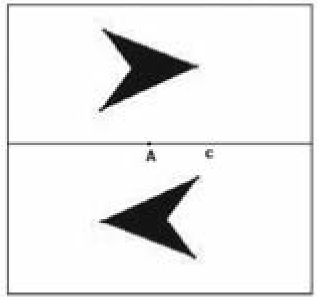
Adotou-se na pesquisa a definição de friso dada por Martin (1982): "Um grupo de frisos de eixo **c** é um grupo de isometrias que fixa uma dada reta **c** cujas translações formam um grupo cíclico infinito." (MARTIN, 1982).

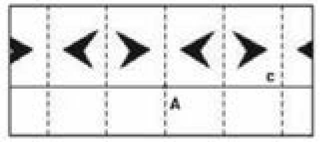
A este objeto matemático, dadas as possibilidades de combinações de transformações geométricas, pode-se verificar (e provar) a existência de apenas sete tipos, ainda que existam infinitas possibilidades de representação.

Consideram-se os grupos de isometrias que fixam uma reta ***c*,** gerados por uma translação. Esses grupos são chamados grupos de faixas ou grupos de frisos com centro ***c***. Seja τ a translação não identidade que fixa a reta ***c***. Escolhe-se um ponto *A* como segue:

a) se o grupo contém rotação de 180º, então *A* é escolhido como o centro de uma das rotações.

b) se o grupo não possui rotação de 180º, mas contém reflexão em retas perpendiculares a *c* , então *A* é escolhido para ser a intersecção de uma dessas retas com *c*.

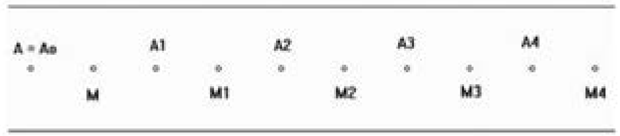




c) para outros casos, o ponto *A* será escolhido para ser qualquer outro ponto de *c*.

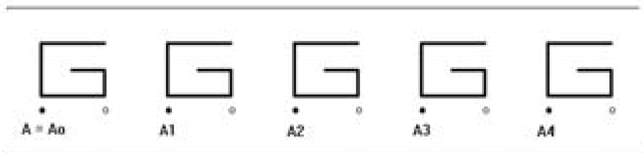
Considera-se a sequencia de pontos A = A_0, A_1, A_2, ... A_i, e a sequencia de pontos M = M_0, M_1, M_2, ... M_i em que M_0 é o ponto médio de A_0 e A_1; M_1 é o ponto médio de A_1 e A_2. Sendo assim, temos que

$$A_i = \tau^i(A),\ \tau^n(A_i) = \tau^n(\tau^i(A) \ = \tau^{n+i}(A)$$

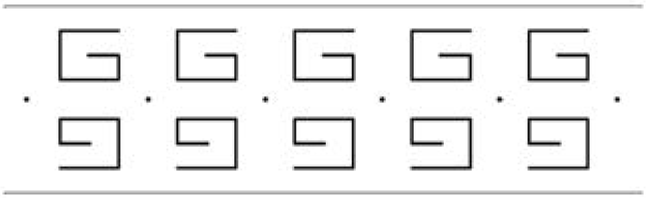


Os grupos de frisos $\mathcal{F}$ são grupos discretos de isometrias que possuem translações τ diferentes da identidade, mas somente em uma direção. Torna-se importante salientar que usaremos a definição de padrão de friso como sendo o *pattern* (padrão), ou melhor, o modelo que se repete, o modelo que se mantém invariante. Ele é usado no contexto de reticulado unidimensional. É possível distinguir os seguintes tipos de grupos de frisos:

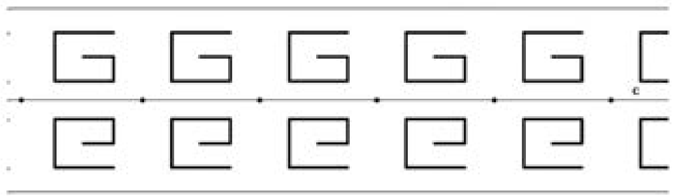
1ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1 = <\tau>$**.** São os grupos de frisos que possuem somente translações. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1$ como seu grupo de isometria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é fixo por uma reflexão transladada (MARTIN, 1982).



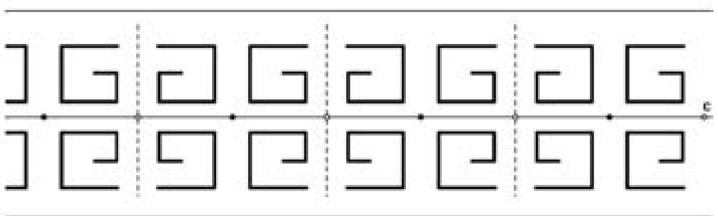
2ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2 = <\tau,\sigma_A>$ São os grupos de frisos gerados por translações e rotações de 180º. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria, mas não tem eixo de simetria (MARTIN, 1982).



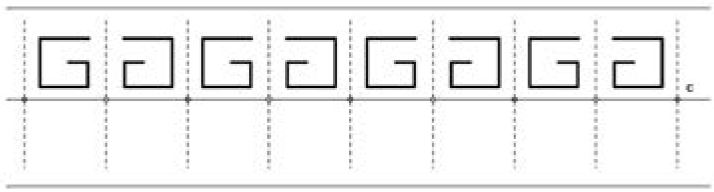
3ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^1 = <\tau,\sigma_c>$. São os grupos de frisos que possuem translações e uma simetria axial cujo eixo é o centro do grupo de friso. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^1$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria e o centro é um eixo de simetria (MARTIN, 1982).



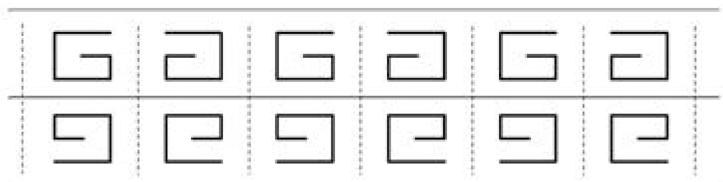
4ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2^1 = <\tau,\sigma_A,\sigma_c>$. São os grupos de frisos que possuem translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação. Estes frisos contêm não só translações, mas também simetria central em pontos alinhados no eixo de centro deste grupo de friso. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2^1$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria e o centro é um eixo de simetria (MARTIN,1982).



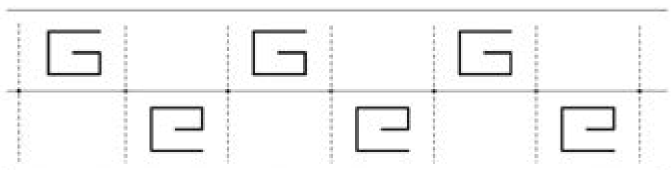
5ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^2 = <\tau,\sigma_a>$. São os grupos de frisos que possuem translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação, diferentemente da 4ª possibilidade apresentada anteriormente, pois nela não há a simetria axial relativa ao eixo de centro c. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^2$ como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria, tem uma reta de simetria, mas o centro não é um eixo de simetria (MARTIN, 1982).



6ª Possibilidade: $\mathcal{F}_2^2 = <\tau,\sigma_A,\sigma_p>$. São os grupos de frisos que possuem translações e simetria axial cujo eixo é perpendicular à direção do vetor da translação. Além disso, também possuem simetrias centrais em relação a pontos médios da intersecção dos eixos perpendiculares a um eixo de centro paralelo à direção do vetor da translação. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_2^2$ como seu grupo de simetria tem um ponto de simetria, tem um eixo de simetria , mas o centro não é uma linha de simetria (MARTIN,1982).



7ª Possibilidade: $\mathcal{F}_1^3 = <\gamma>$ onde γ é a reflexão transladada com eixo *c* tal que $\gamma^2 = \tau$. São os grupos de frisos que possuem somente translações e translação deslizante. Um padrão de friso contendo $\mathcal{F}_1^3$ como seu grupo de simetria, não tem ponto de simetria, não tem eixo de simetria mas é fixo por uma reflexão transladada (MARTIN,1982).



A seguir a figura 4 apresenta um resumo dos sete tipos de frisos Os sete tipos de frisos ou faixas onde τ representa translações, σ representa as reflexões ou simetrias e γ representa a reflexão transladada ou também chamada de translação deslizante (COSTA, 2005).

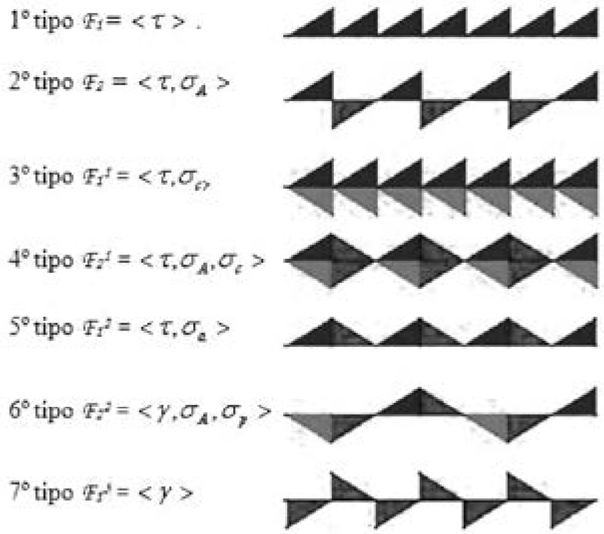


Figura 4. Os sete tipos de frisos ou faixas onde τ representa translações, σ representa as reflexões ou simetrias e γ representa a reflexão transladada ou também chamada de translação deslizante. (COSTA, 2005).

Metodologia e aplicações das atividades

As atividades da pesquisa de Costa (2005) foram divididas em quatro módulos. *Módulo 1*: familiarização do aluno com o programa Cabri-Géomètre II; *Módulo 2*: classificação aleatória de frisos; *Módulo 3*: formação de conceitos relativos às transformações geométricas (translação, simetria axial e simetria central) e; *Módulo 4*: reavaliação da classificação dos frisos ocorridas no módulo 2 e apresentação de alguns exemplos de faixas produzidas pelos próprios alunos.

Tais atividades fundamentaram-se na teoria de Régine Douady (1986). Um saber matemático pode ser visto sob dois aspectos. Por um lado, nível funcional, onde certos conceitos e teoremas matemáticos podem ser usados para resolver problemas, interpretar informações. Neste caso, o saber matemático funciona como *ferramenta* que pode ser adaptada a vários problemas, e várias ferramentas podem ser adaptadas a um mesmo problema. O segundo aspecto é aquele que identifica o saber matemático como elemento de um corpo de conhecimento cientificamente e socialmente reconhecido. O saber matemático é visto, neste caso, como *objeto*.

Esta autora assume como hipótese de trabalho que, para certas noções, uma seqüência de atividades fazendo alternar o aspecto ferramenta da noção visada com o aspecto objeto, seguida de uma institucionalização, e seguida de exercícios variados de familiarização que precisam das noções recentemente institucionalizadas e sua reutilização numa situação nova, pode ajudar na construção de um conhecimento procurado. A esta sequencia de atividades com estas características ela denomina de dialética Ferramenta-Objeto (DOUADY, 1986).

O *Módulo 1* apresentou atividades de familiarização com o Cabri-Géomètre, privilegiando grande parte das construções geométricas básicas. Não foi trabalhado nenhum dos comandos relativos às transformações geométricas.

No *Módulo 2*, foi solicitado aos alunos para estudar quinze faixas e classificá-las mediante elementos comuns entre as mesmas. Eles receberam exemplares impressas em papel plastificado, todas com mesmas dimensões aproximadamente 25 cm de comprimento por 3 cm de largura. A figura 5 ilustra alguns destes modelos de frisos. Receberam também um espelho de mesma dimensão para poderem investigar seus desenhos e conjecturar possíveis relações entre elas. Tais atividades favoreceram os conceitos iniciais das simetrias, pois ao manipularem tanto as faixas, como os espelhos, os alunos apresentaram primeiras conjecturas acerca deste conceito.

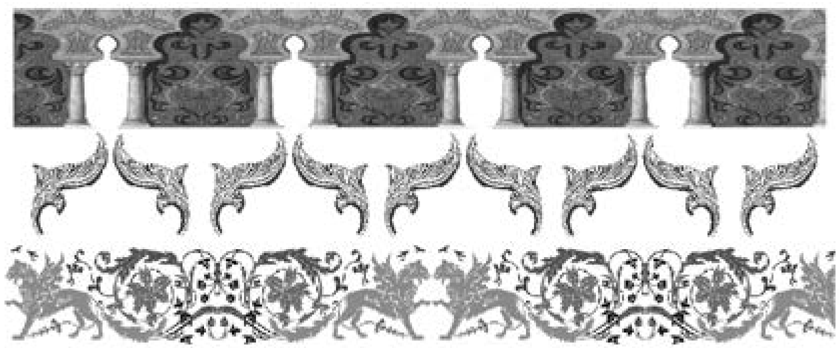


Figura 5. Exemplos de frisos dados aos alunos em atividades no Módulo 2. Exemplos de frisos do tipo $F_1^2 = < \tau, \sigma_a >$ (COSTA, 2005).

O *Módulo 3* foi subdivido em três partes. Em cada uma delas os alunos foram submetidos a atividades que trataram dos conceitos matemáticos de translação, simetria axial e simetria central, respectivamente. Na medida em que se tratava de um determinado conceito, por exemplo translação, os alunos eram submetidos as atividades relacionados com a construção de frisos via Cabri.

Figura 6. Exemplo de uma tela do Cabri para uma atividade envolvendo o conceito de translação (COSTA, 2005, p. 144).

O *Módulo 4* marcou um dos pontos mais importantes da pesquisa. As atividades presentes indicavam aos alunos a reutilização dos novos conhecimentos recém adquiridos em tarefas mais complexas e agora integradas também numa dimensão artística. Do ponto de vista da Dialética Ferramenta-Objeto, os conceitos de translação, simetria axial e simetria central, com suas características e propriedades matemáticas já estudadas e reconhecidas, passariam agora a ser utilizados como ferramentas ao analisar novos frisos.

Para os objetivos traçados no *Módulo 4*, os alunos foram conduzidos à Pinacoteca Benedito Calixto para uma atividade *in loco*. Eles deveriam reconhecer os frisos na pintura interna do casarão. Posteriormente, de posse de algumas fotos do local, nos jardins da casa, estudar estes frisos com o objetivo de verificar quais transformações geométricas estavam presentes.

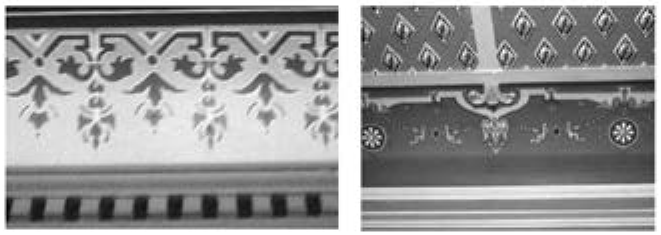


Figura 7. Alguns exemplos de frisos pintados nas paredes da Pinacoteca Benedito Calixto, Santos, SP. (COSTA, 2005).

Ainda como objetivo deste módulo, eles deveriam, no laboratório de informática, criarem algumas faixas por meio do software Cabri-Géomètre II. Dessa forma estariam desenvolvendo sua criatividade artística – no sentido de uma estética – e, ao mesmo tempo, sua criatividade matemática.

Para ilustrar alguns resultados segue um friso construído (figura 8) por uma das duplas de alunos onde se pode ver claramente o uso da translação e simetria axial relativa a eixos, a saber: a) eixos perpendiculares em relação à direção do vetor da translação; b) eixo central, neste caso horizontal, paralelo a direção do vetor. Os alunos utilizaram a simetria central além da translação e da simetria axial.

Utilizando a ferramenta de revisor de construção do Cabri-Géomètre II pode-se observar que a dupla construiu primeiramente um hexágono regular. Posteriormente, um triângulo eqüilátero com vértices coincidentes ao hexágono. Por meio de uma reta contendo um dos pontos do hexágono (Figura 9), essa reta foi utilizada como eixo de simetria para a construção do segundo polígono à direita da figura inicial, utilizando-se uma transformação simetria axial (figura 10).

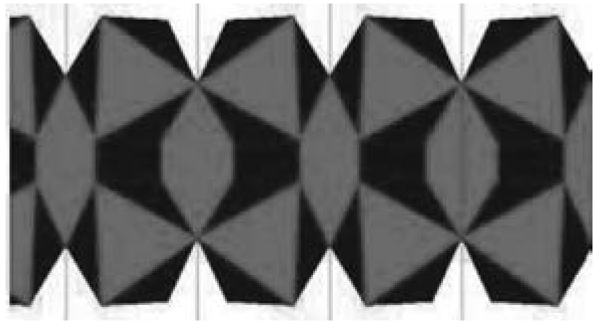


Figura 8. Produção de aluno durante atividade proposta na fase 6 da Dialética Ferramenta-Objeto. Nota-se a articulação das transformações geométricas na construção do friso, mediante o uso da criatividade do aluno. (COSTA, 2005).

Para dar continuidade ao seu trabalho, a dupla criou um ponto nesta reta e formou outro polígono simétrico em relação a este ponto, ou seja, utilizou também a simetria central (figura 11). Constatou-se, pelo estudo da construção utilizada pela dupla uma articulação envolvendo as transformações geométricas estudadas. A produção de seu friso apresenta traços criativos na sua construção.

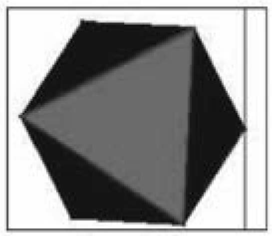


Figura 9

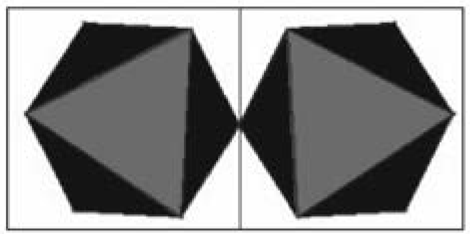


Figura 10

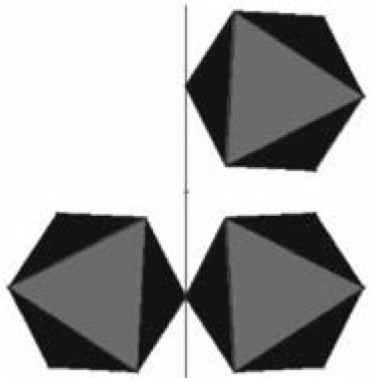


Figura 11

Ainda há outros exemplos de outras produções dos alunos realizadas no Cabri-Géomètre: uma faixa produzida (figura 12) utilizando a construção de um polígono estrelado e, posteriormente, translação por um vetor.

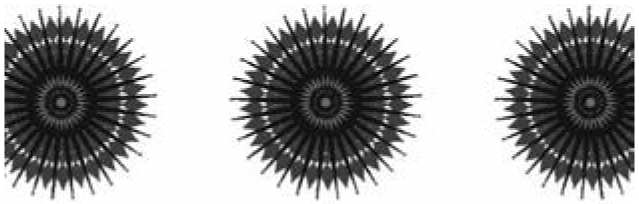


Figura 12

Outro exemplo abaixo indicado na figura 13 evidencia a produção do friso pelo aluno o qual demonstra sua preocupação em mostrar que a transformação geométrica que gerou a faixa foi a translação cujo vetor utilizado foi deixado desenhado.

A análise do arquivo que este aluno gerou no Cabri por meio da revisão de construção mostra que o aluno construiu dois vetores de mesmo módulo e direção, porém com sentidos contrários. A translação ocorreu nos dois sentidos de mesma direção.

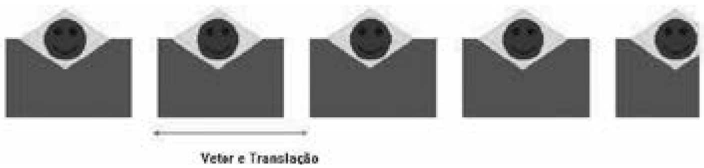


Figura 13. Faixa produzida pelo aluno por meio do uso da ferramenta Translação e vetor desenhado na tela do Cabri (COSTA, 2005, p. 159).

O exemplo da figura 13 nos remete que os alunos não só utilizaram motivos geométricos para o desenvolvimento desta atividade, mas outros que sua criatividade permitiu avançar. A seguir, na figura 14, uma faixa produzida por uma aluna que deixou registrado o vetor utilizado na translação que reproduziu a figura inicial e formou o friso.

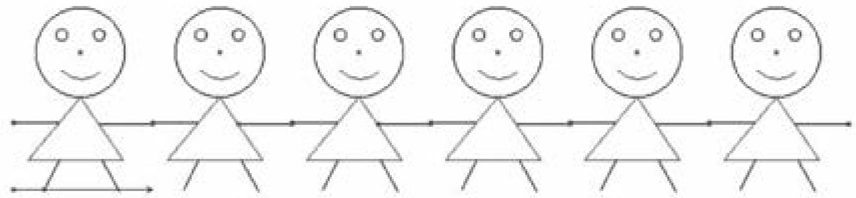


Figura 14. Exemplo de Friso criado por aluno (COSTA, 2005, p 159)

Considerações Finais

Participaram desta pesquisa alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Santos. Estes alunos nunca haviam previamente estudado as transformações geométricas em ambiente escolar. As atividades foram desenvolvidas em duplas.

A escolha dos frisos para articular os conhecimentos das transformações geométricas foi muito importante. Este ente matemático proporcionou várias situações problemas, uma vez que os alunos eram postos à prova na construção de frisos com a transformação geométrica recém vista para finalizar cada ciclo da Dialética Ferramenta-Objeto.

Não obstante, todos os resultados favoráveis obtidos com o uso do Cabri-Géomètre II e os frisos nas atividades envolvendo as transformações geométricas, a pesquisa ainda contemplou o aspecto artístico presente nos frisos.

A visita realizada na Pinacoteca Benedito Calixto, Santos, permitiu aos alunos um retorno espontâneo no reconhecimento das transformações geométricas presentes nos frisos pintados nas paredes do interior deste casarão finamente decorado com pinturas artísticas deste importante artista.

Na avaliação dos frisos produzidos pelos alunos no final da seqüência de atividades, foram encontrados diversos exemplares muito criativos. A evidência nestes exemplares do uso das transformações geométricas como translação, simetria axial e simetria central permitiu o pesquisador afirmar que os frisos, entre outras coisas, permitiram articular e dar significados a estes conceitos.

Referências

ALSINA, C.; PÉREZ, R.; RUIZ, C. **Simetria dinámica**. Madrid: Síntesis, 1989.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**,Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions,v.9.3,p.281-308, 1988.

BALDIN, Y. Y. **Atividades com Cabri-II para cursos de licenciatura em matemática e professores do ensino Fundamental e Médio.** São Carlos: UFSCar, 2002.

BKOUCHE, R . De la geometrie et des transformations. **REPERES – IREM** n. 4, p.134-158, juillet.1991.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental** – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHEVALLARD, Y. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução Dayse Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COSTA, David Antonio da. **O estudo dos frisos no ambiente informatizado Cabri-géomètre**. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. São Paulo, 2005.

DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques**. These de doctorat d' etat. Université Paris VII. Paris, 1984.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v.7, n.2, p.5-31, 1986.

FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. **Uma análise Vygotskiana da apropriação do conceito da simetria por aprendizes sem acuidade visual**. São Paulo, 2004. 229f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática.

GOMBRICH, E. H. **A História da Arte**. 16. ed. Tradução Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações Geométricas**: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

MARTIN, G. E. **Transformation Geometry**. An introduction to simmetry. New York: Springer Verlag, 1982.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1.**Extrait du colloque de la COPIRELEM**. Tours, 2001.

PASTOR, A; Rodriguez, A. **El Grupo de las Isometrías del Plano**. Madrid: Síntesis, 1996.

SALAZAR, Jesus Victoria Flores. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D**: um estudo de transformações geométricas no espaço. 313f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SILVA, Viviane Clotilde. **Ensino de Geometria através de Ornamentos**. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquista Filho. UNESP, Rio Claro, 1997.

David Antonio da Costa - UFSC - Brasil

E-mail: prof.david.costa@gmail.com

O OCTÓGONO ARTÍSTICO, GEOMÉTRICO E SAGRADO NA CAPELA DE SÃO JOÃO BATISTA EM BELÉM DO PARÁ

THE OCTAGON ARTISTIC, GEOMETRIC AND SACRED IN CHAPEL OF SAINT JOHN THE BAPTIST IN BELÉM OF PARÁ

Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN - Brasil

Resumo

Neste artigo aponto alguns aspectos artísticos, sagrados e geométricos que caracterizam o octógono em uma obra arquitetônica de José Antonio Landi, um arquiteto italiano que viveu na região amazônica durante 38 anos na segunda metade do século XVIII, falecendo em Belém (Pará) em 1791. Ao final apresento algumas possibilidades de abordagem didática desses aspectos nas aulas de Matemática. O artigo é parte dos estudos que desenvolvo desde 2007 com a finalidade de apontar caminhos para a exploração investigatória do patrimônio histórico, cultural e arquitetônico da Amazônia na organização de problematizações matemáticas para a elaboração de atividades para o ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Arte. Matemática. História. Ensino de Matemática. Investigação Histórica.

Abstract

In this paper I point out some artistic, sacred and geometrical aspects which characterize the octagon in a José Antonio Landi work architectural, a Italian architect who lived in the Amazon for thirty-eight years during the second half of the 18^{th} century, and died in Belém of Pará in 1791. At the end I present some possibilities of a didactical approach of these aspects in Mathematics classes. The paper is part of the studies I have been developing since 2007 in order to indicate paths to the exploratory investigation of the historical, cultural and architectural patrimony of Amazon in the organization of mathematical matters for the elaboration of activities for the teaching and learning processes of Mathematics in Basic Education[16].

Keywords: Art. Mathematics.History.Teaching of Mathematics.Historical Investigation.

16 In Brazil, the term “Basic Education” corresponds to the years of Kindergarten, Middle School and High School.

Introdução

Em 2007 iniciei um Programa de Pesquisa denominado *Arte, Arquitetura e Matemática na Amazônia Brasileira: outras epistemologias para a Educação Matemática*, cujo foco de estudo centra-se na investigação de práticas culturais históricas e patrimoniais relacionadas à arte, a prática matemática e à arquitetura do século XVIII na Amazônia, com vistas a mobilizar tais práticas para a formação de professores de Matemática e para a Educação Básica. O programa inclui uma dimensão histórico-cultural na Educação Matemática Amazônica com base nos trabalhos de alguns construtores, arquitetos e cientistas da comissão demarcadora de limites da região Amazônica na segunda metade do século XVIII.

A intenção é explorar a criatividade, as técnicas de medição e observação utilizadas nas práticas de demarcação das fronteiras e nas construções arquitetônicas erguidas na região naquele período (c. 1750-1800).

Esse programa subsidiou a elaboração de um livro sobre o tema, cujo produto é fruto de cinco anos de pesquisa e um trabalho de doutorado cujo foco principal é a formação de professores de Matemática a partir da exploração do patrimônio histórico cultural nas aulas de Matemática, constituindo-se em um subprojeto do programa de pesquisa.

Neste artigo aponto alguns aspectos artísticos, sagrados e geométricos que caracterizam o octógono em uma obra de José Antonio Landi, um arquiteto italiano que viveu na região amazônica durante 38 anos na segunda metade do século XVIII, falecendo em Belém do Pará em 1791. Ao afinal apresento algumas possibilidades de abordagem didática desses aspectos nas aulas de Matemática.

No que se refere aos aspectos sagrados da arte explorada neste artigo, baseio-me em historiadores que argumentam sobre o caráter religioso segundo o qual a arte não é essencialmente forma, pois para que uma arte seja chamada sagrada, não só seus temas devem derivar de uma verdade espiritual, também sua linguagem formal deve expressar a mesma origem. Neste sentido, Burckhardt (1987), assegura que nem os temas que essa arte toma da religião, nem os sentimentos devotos dos quais se impregna quando é necessário, nem a nobreza da alma que ali se manifesta, são suficientes para conferir-lhe um caráter sagrado. Só uma arte na qual as formas mesmas refletem a visão espiritual própria de uma religião merece esse nome.

Em minhas ações investigativas focadas na leitura matemática dos aspectos artísticos, sagrados e geométricos da arquitetura setecentista de Belém, priorizei principalmente aspectos que me possibilitassem estabelecer abordagens didáticas para o ensino de Matemática, principalmente referentes à geometria e medidas na Educação Básica. Assim, considero importante identificar e analisar as possíveis conexões entre a história, as práticas e as construções arquitetônicas. Utilizo a investigação histórica como um veículo de problematização matemática para a formação de um professor investigador e para despertar a sua criatividade e curiosidade científica com vistas a dar aos estudantes da Educação Básica uma oportunidade de desenvolver sua aprendizagem de forma mais aberta e transversalizante a partir da problematização de temas ligados a sua própria cultura.

Essas orientações viabilizam a elaboração de pequenos projetos de investigação histórica centrados nas práticas culturais históricas que envolvem cultura matemática na execução da atividade investigatória, bem como na exploração da Matemática subjacente às práticas investigadas. Desse processo em diante identifiquei os eixos de problematização e passei a sua elaboração.

Matemática, arte, simbolismo e suas expressões nas obras arquitetônicas

Em estudos recentes, Pigozzi e Mastroviti (2004) comentam que, aparentemente, a perspectiva parece um elemento de contato que acompanhou a arte do século XIV ao século XVII, quando se tornou a marca característica da transição entre a Idade Média e o Renascimento, isto é, da arte tradicional para o movimento da idade Pós-industrial (do impressionismo a vanguarda). Primeiramente do recurso ao desenho em perspectiva, a representação pictórica era caracterizada por um espaço empírico com proporções e ordem de grandeza conotativa da hierarquia simbólica. Depois, a invenção da perspectiva monocultural ou antropocêntrica com Leon Battista Alberti e Piero della Francesca, onde o espaço da representação é delineado de modo geométrico, segundo proporção científica e consequência racional. Toda a arte figurativa do Renascimento ao Romantismo é construída segundo a visão da perspectiva geométrica e da ordem natural de objetos; cada quadro, cada escultura, cada cenografia é obtida como um desenho projetado sobre um retângulo geométrico, no qual são projetadas as linhas transversais do cone visual considerado e a linha de conjunção no ponto de fuga.

O trabalho preliminar de enquadramento da visão perspectiva é comum ao artista que pinta uma figura como ao arquiteto que desenha o projeto ou a secção de um edifício pelo qual o pintor Giovanni Paolo Panini e o arquiteto Ferdinando Galli Bibiena concluíram a mesma subdivisão geométrica do espaço representado e ambos sabiam a regra da perspectiva geométrica.

Para fazer uma breve descrição histórica da realidade, é importante mencionar que entre os séculos XIV e XVII, cabia ao arquiteto e ao engenheiro militar aprender prioritariamente, entre outras matérias, Geometria Prática (longimetria, planimetria, estereometria e trigonometria), Aritmética e Desenho. No âmbito da Geometria Prática, a longimetria ensinava a medir e representar as distâncias acessíveis, alturas e profundidades; a planimetria a medir e representar a área das superfícies; a estereometria a calcular e representar o volume dos corpos sólidos e a trigonometria ensinava a medir e representar distâncias inacessíveis por triangulação. Já a Aritmética ensinava, de modo geral, a "contar" e "calcular"

(a partir de fins do séc. XV, em Portugal, os cálculos já eram feitos com números arábicos). Por fim, o "Desenho", envolvendo as duas outras matérias, constituía-se na ferramenta indispensável para que o arquiteto ou engenheiro militar pudesse conceber e demonstrar o seu conceito (Cf. MOREIRA, 1982).

O "desenho", dependente tanto da Aritmética como da Geometria, e portanto da Matemática, se materializava num "debuxo", expressando-se através de três espécies de representação, cujas raízes remontam a Vitrúvio, mas que suscitaram diversas interpretações a partir do Renascimento que não cabe aqui aprofundar. Basicamente eram elas a *icnografia* - planta; *ortografia* - elevação frontal e lateral ou perfil (corte perpendicular à linha frontal do edifício); e *scenografia ou sciografia* - perspectiva em escorço (vista do exterior) ou corte (paralelo à linha frontal do edifício, vista do interior).

O pragmatismo dos engenheiros levou-os, a partir do século XVI, com Maggi e Castriotto, a adotar um tipo de "perspectiva militar" em que as medidas do edifício eram representadas em verdadeira grandeza. A esses tipos de representação gráfica somava-se a maquete, ou representação em relevo (de madeira, gesso, barro ou cera).

Todavia, se em Vitrúvio o desenho tinha caráter mais demonstrativo, foi no Renascimento, com Alberti, que o mesmo assumiu a dimensão de raciocínio. Logo no primeiro livro do *"De re aedificatoria"* (1452), Alberti apresenta o alcance desse importante instrumental de raciocínio. O primeiro livro versa sobre *"lineamenta"* (palavra latina que significava "linhas geométricas", traduzida na edição italiana de Cósimo Bartoli por *"disegno"*) e trata da importância de se "predefinir" ("*praedefinire*"), "preconceber" *("praecogitare")*, pré-escrever *("praescribere")* as obras, escolhendo-lhes "*aptum locum*" e "*certum numerum*", ou seja, local adequado e medidas corretas.

São poucos os estudos vinculados ao patrimônio histórico no Brasil que enfocam os conjuntos urbanísticos como um todo, constituídos não somente por edifícios religiosos e prédios monumentais, mas também por construções mais modestas como, por exemplo, as casas enfileiradas que formavam as ruas e as praças e que, em conjunto, apresentavam características de padronização e de uniformidade. A forte característica da arquitetura Amazônica é evidenciada nas obras de urbanização realizadas na segunda metade do século XVIII, como uma das consequências da inserção das comissões demarcadoras de limites territoriais entre a Espanha e Portugal, no referido período, na América do Sul.

A construção dos conjuntos urbanísticos pombalinos envolvia um projeto de caráter coletivo para a cidade, onde também as casas comuns seguiam um padrão que combinava com a arquitetura religiosa e civil, já existentes[17].

17 Organização urbanística das cidades no período em que o Marquês de Pombal exercia o poder administrativo no Reino de Portugal.

A ênfase foi dada para as características formais e simbólicas, através das quais o urbanismo pombalino se fez representar a partir de uma intervenção urbanística na Amazônia que se deu pela atuação do Estado, atendendo necessidades diversas. A intervenção pombalina ocorreu com o equipamento militar, econômico e simbolicamente o foco urbano do então Estado do Grão-Pará e Maranhão para uma conquista regional planejada.

Para a realização dessas tarefas, a Coroa contratou e transferiu para a Amazônia, ao longo da segunda metade do século XVIII, dezenas de técnicos especializados, dentre eles, o arquiteto e naturalista bolonhês Antonio José Landi (1713-1791)[18], que chegou à Amazônia em 1753 na condição de desenhista da Primeira Comissão Demarcadora de Limites entre os domínios de Portugal e Espanha na América do Sul, decorrente do Tratado de Madrid (1750). No rol das obras públicas que Landi desenhou destacam-se a Planta do Armazém de Armas no Colégio dos Jesuítas (1761), o Palácio dos Governadores (1767-1771) e as Frontarias da Casa da Administração da Companhia Geral do Grão-Pará (1773), entre outras. Entretanto, sua contribuição profissional estendeu também às residências particulares e aos edifícios religiosos como a Capela de São João Batista, foco central deste artigo e a Casa de Conferências dos Plenipotenciários[19].

Foto 1. Planta baixa da Casa de Conferências dos Plenipotenciários. Desenho de Landi.

18 Um estudo minucioso a respeito da vida e das realizações arquitetônicas de Landi podem ser encontrados no livro de Isabel Mendonça (2003), intitulado “Antonio José Landi: um artista entre dois continentes”, publicado pela Fundação Calouste Gulbenkian.

19 Tanto a capela de São João Batista como a Casa de Conferências têm a planta baixa no formato de um Octógono. Mais detalhes sobre as matemáticas das obras de José Antonio Landi poderão ser encontradas em Mendes (2012, no prelo).

O aspecto dessas obras não era de sobriedade; ao contrário, eram dotadas de portais elaborados e ornatos arquitetônicos, tais como, colunas, frontões, pórticos, que se apresentavam de maneira monumental e enriquecidas de detalhes. Geralmente estavam situadas nas ruas posteriores às quadras localizadas em frente ao porto (onde a arquitetura embora simplificada, se impunha como um cenário, uma espécie de fachada composta por edificações padronizadas).

Landi nasceu em Bolonha (Itália) em 1713, onde exerceu o cargo de professor de Arquitetura e Perspectiva no *Instituto de Sciencias* da sua cidade natal. Após ser contratado por D. João V como arquiteto, foi para Portugal e, em seguida, nomeado para a comissão demarcadora de limites, organizada para execução do tratado de Madri, de 16 de janeiro de 1750. Landi embarcou em 2 de junho de 1753 para o Pará, chegando lá em 19 de junho do mesmo ano, onde realizou diversas atividades ligadas à arte, desenho e arquitetura residencial, religiosa e urbana na região Amazônica até seu falecimento em 1791.

Suas obras deixadas em Portugal, na Itália e na Amazônia caracterizam uma das primeiras rupturas do cânone barroco então predominante no nosso continente. Dentre suas atividades como naturalista, destacam-se a elaboração de uma História Natural do Grão-Pará, a manutenção de um horto botânico e de um jardim zoológico no engenho de sua propriedade, o Murutucu, e a colaboração na “Viagem Philosophica” de Alexandre Rodrigues Ferreira (1783-1792)[20].

A influência de Ferdinando Bibiena na arquitetura de Landi

A Amazônia sofreu grande influência da política implantada pelo Marquês de Pombal, principalmente na arquitetura erguida na região, pautada no neopaladianismo internacional que caracterizou o trabalho do arquiteto Ferdinando Galli de Bibiena, da Academia Clementina, em Bolonha, transposto em suas obras *L’architettura civile preparata sula geometria* (1711) e reestruturada no livro *Direzioni à giovani student nel desegno dell□aechitettura civile* (1734)[21], cuja elaboração teve a finalidade de contribuir na formação de jovens arquitetos italianos na primeira metade do século XVIII. Landi foi um dos discípulos formados na Academia Clementina de Bolonha, liderada por Bibiena e que deixou no Pará um rico acervo de obras arquitetônicas caracterizadas por uma disciplina neopaladiana, composição marcada pela regularidade da modulação e modernatura, com os ornatos parcimoniosamente usados segundo uma linguagem rococó, notadamente nas portadas e nas janelas.

20 Um estudo acerca da viagem de Alexandre Rodrigues Ferreira foi publicado por Mauro Cezar Coelho sob o título “A epistemologia de uma viagem”. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. (Coleção Contextos da Ciência).

21 Estou desenvolvendo um estudo sobre essas duas obras desde 2007, com a finalidade de apontar relações com as matemáticas presentes na arquitetura de Landi na Amazônia e seus desdobramentos para a Matemática da Educação Básica na região.

Apresento a seguir alguns comentários a respeito dos aspectos investigados nas obras sobre arquitetura escritas por Ferdinando Gali de Bibiena (1711, 1734), visando apontar possíveis aspectos estéticos geométricos característicos da arte matemática, que podem ser tomados como base de investigação e aprendizagem dos estudantes de licenciatura em Matemática e seus desdobramentos na Educação Básica. Os procedimentos adotados para o estudo focaram principalmente a pesquisa bibliográfica dos dois livros de autoria de Bibiena, bem como das imagens referentes às obras de Antonio José Landi e suas conexões com aspectos relacionados ao simbolismo geométrico-religioso, cujos resultados de investigações apresentam, por exemplo, possíveis eixos de exploração matemática para uma abordagem transversalizante da Matemática escolar para os ensinos Fundamental, Médio e Superior na Amazônia brasileira, bem como podendo ser tomado como base para outros estudos similares em outras regiões do Brasil.

Sobre octógonos e octagramas na geometria sagrada e na arquitetura

Estudos relacionados à quadratura do círculo consideram que o octógono é uma forma geométrica mais próxima do círculo do que o quadrado, visto que um polígono regular aproxima-se cada vez mais do círculo na medida em que aumenta o número de seus lados. Sabe-se, portanto, que o círculo pode ser considerado como o limite para o qual tende um polígono regular quando o número de seus lados cresce indefinidamente. Assim, o caráter do limite entendido, no sentido matemático não é o último termo de uma série que tende para ele, mas está fora e além desta série, pois por maior que seja o número de lados de um polígono, este jamais chegará a se confundir com o círculo, cuja definição é essencialmente diferente da dos polígonos (Cf. GUENON, 1995).

Nos diversos polígonos obtidos a partir do quadrado, dobrando cada vez o número de lados, o octógono é o primeiro termo, ou seja, é o mais simples de todos os polígonos e pode ao mesmo tempo, ser considerado como representativo de toda essa série de intermediários. É possível construir um octógono regular com um compasso ou simplesmente dobrar o papel. Para construir um octógono inscrito em uma circunferência, primeiramente inscreve-se um quadrado para obter quatro vértices e em seguida estendem-se as bissetrizes de seus lados para obter mais quatro vértices. Pode-se também construir um octógono com o corte sagrado (figura 1 A e B).

Para construir o octógono, inicialmente faz-se o corte sagrado pela colocação de um ponto de compasso em cada canto de um arco e do quadrado e que passa através do centro do quadrado e intersecta os dois lados adjacentes. Liga-se os pontos onde os arcos cortam os quadrados e se tem um octógono.

Existem outras formas para desenhar uma estrela de oito pontas, ou octagrama, de octógono. Uma dessas maneiras é ligar cada vértice a outro, como mostrado na figura 1A, para obter dois quadrados separados, ou simplesmente estender os lados do octógono. Se os pontos de um quadrado indicam as direções cardinais, então o outro quadrado define os pontos chamados intercardinal. Os quadrados são mostrados frequentemente entrelaçados, como na figura 1A.

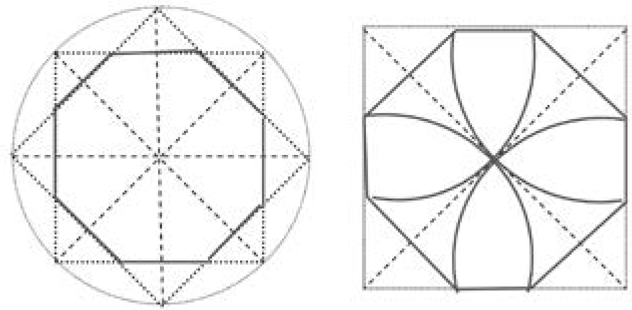


Figura 1 A e B

No que se refere à geometria simbólica, diversos estudiosos justificam a sacralização do octógono devido ao fato de, para obter a forma octogonal é necessário considerar o conjunto de oito direções designadas pelas diversas tradições como os "oito ventos", que no ternário védico representam as deidades que presidem respectivamente os três mundos, *Agni* (fogo), *Vâyu* (vento) e *Aditya* (sol), relacionados às partes inferior e superior que representam os mundos terrestre e celeste.

Outro fator simbólico relacionado ao octógono refere-se ao fato de Jesus Cristo ter ressuscitado no oitavo dia após sua entrada em Jerusalém. Assim, no simbolismo cristão o número oito passa a representar a ressurreição, ou seja, a renovação da vida. Similarmente, o octógono passou a ser considerado o símbolo do batismo, ou seja, da renovação espiritual de uma pessoa. Atribui-se a esta justificativa de muitas pias batismais terem sido construídas na forma octogonal.

Um batistério situado no Centro de Florença foi o local de surgimento do Renascimento italiano, criado por Andréa Pisano em 1336[22], está na igreja de *San Giovanni* (São João), em homenagem a São João Batista cuja história de vida é esculpida na porta sul da referida igreja. Trata-se de um dos batistérios mais velhos de Florença. As paredes são octogonais e foram construídas provavelmente no sétimo século da nossa Era. Talvez esses sejam alguns dos motivos que levaram José Antonio Landi a dar o formato octogonal à nave central da igreja de São João Batista em Belém do Pará.

22 Andrea Pisano (1290 - 1348/1349, também é conhecido como Andrea da Pontedera. Foi um escultor e arquiteto italiano. Andrea é famoso por ter executado a Porta Sul do Batistério de Florença.

Foto 1. O Batistério de São João, de 1336.
Fonte: Google Images

Ferdinando Bibiena, na página 85 do livro *L'Architettura civile, preparata sú la geometria, e ridotta alle prospettive: considerazioni pratiche* (1711), apresenta a sua *operação duodécima*, na qual descreve as orientações para a construção de uma perspectiva para a projeção de um espaço octogonal, conforme mostra a figura 2. As orientações técnicas acompanham as imagens que subsidiavam o exercício construtivo e criativo dos estudantes de arte e arquitetura da academia Clementina de Bolonha, o que demonstra ter influenciado a arquitetura de Landi na projeção da nave da capela de São João Batista, em Belém.

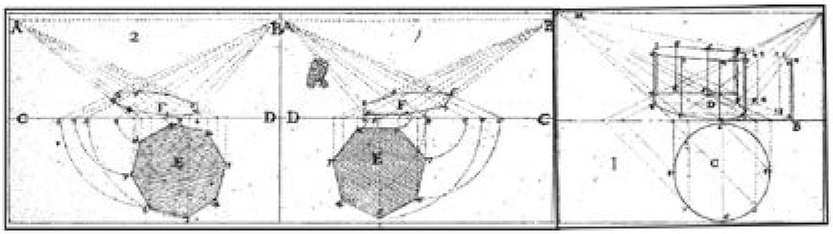


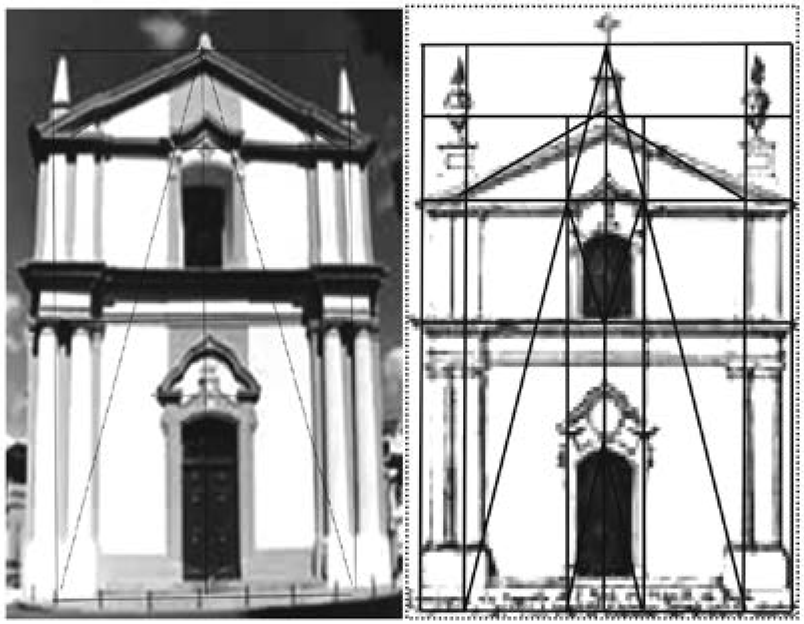
Figura 2. Projeção de um polígono em perspectiva, proposto por Bibiena, Mestre de Landi na Academia Clementina de Bolonha (1711, p. 85).

Na referida operação, Bibiena orienta os procedimentos que os estudantes de arquitetura devem operar para que possam elaborar a projeção de uma figura como um octógono em uma perspectiva tridimensional (BIBIENA, 1711, p. 85). A figura 2, apresentada anteriormente, caracteriza um pouco do movimento orientado por Bibiena no exercício da referida construção geométrica em perspectiva.

Algumas formas geométricas da capela de São João Batista

Alguns motivos já mencionados me levaram a iniciar um estudo histórico acerca das projeções arquitetônicas atribuídas a José Antonio Landi, visando explorar relações matemáticas subjacentes a tais edificações arquitetônicas na região Amazônica no período pombalino e poder acentuar a estética geométrica centrada na proporção harmônica, na arte da simetria e na geometria sagrada de caráter simbólica e religioso.

A obra de Landi na Amazônia foi fortemente influenciada por seu mestre Ferdinando Gali de Bibiena como, por exemplo, na Igreja de São João Batista, as fotos 2 e 3, mostram que algumas relações geométricas podem ser estabelecidas para se abordar práticas que envolvam o conceito de proporcionalidade das formas e dos segmentos que compõem a fachada da Capela.



Fotos 2 e 3. Capela de São João Batista, construída por Landi e um olhar geométrico dados com a finalidade de extrair relações matemáticas a partir da obra.

Observando a imagem da foto 3 (desenho de Landi), pode-se explorar, por exemplo, as congruências entre os triângulos presentes na fachada, bem como acerca das formas retangulares de modo a envolver congruências e proporcionalidades entre áreas das formas planas. É possível mostrar, ainda, outras relações de simetria entre as curvas e outras formas geométricas evidenciadas no desenho da fachada.

A esse respeito, Isabel Mendonça em *António José Landi (1713-1791): um artista entre dois continentes* (2003) menciona que a planta interna da Capela de São João Batista é composta pela justaposição de dois quadrados, o menor dos quais (o da capela mor) se apresenta ladeado por anexos. Trata-se, descrição do projeto octogonal de Landi para a referida planta baixa da capela. É necessário, portanto, descrever sua imagem e as possíveis relações métricas exploradas nessa imagem, com vistas a desdobrar em implicações didáticas para uma abordagem da geometria escolar. Além disso, observei um aspecto extremamente rico para as aulas de Matemática: a possibilidade de explorar a projeção tridimensional do octógono central da nave da capela e sua conexão proporcional com o octógono do centro da cúpula da referida capela. A próxima seção tratará uma pouco mais sobre esses aspectos.

Leitura geométrica do octógono da nave da capela de São João Batista

No interior da capela a nave central inscreve-se um octógono irregular cujos panos maiores rasgados por vãos pouco profundos, com altares, alternam com os menores, vazados por vãos menos elevados e encimados por espelhos moldurados. Pilastras duplas delimitam os panos do prisma octogonal, prolongando-se acima de um entablamento com triglifos e métopas, em faixas duplas que sulcam a cúpula de perfil octogonal que arremata a nave. Quatro dos panos da cúpula são rasgados por lunetas. A capela-mor, unida à nave por arco triunfal de idêntico perfil aos arcos maiores da nave, é coberta por abóbada de berço de lunetas (Cf. MENDONÇA, 2003, p. 477).

Essa é a descrição espacial que estimula a imaginação geométrica no sentido de pensar o complexo interior-exterior que envolve um prisma de base octogonal no centro de energia da nave central e que pode ser explorado em uma atividade investigatória com estudantes do Ensino Médio ou com estudantes de licenciatura em Matemática. A foto 4 dá uma visão do plano da base da capela de modo a nos estimular a imaginação acerca de sua projeção espacial até encontrar-se com a cúpula da capela.

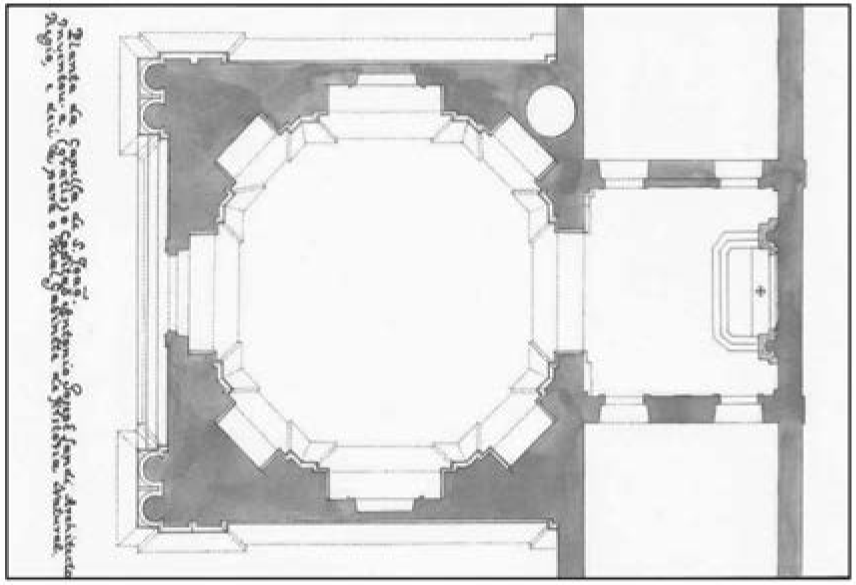


Foto 4. A planta baixa da Capela de São João Batista e o Octógono depositário de energia da Nave. Fonte: Fórum Landi (2007).

Ao observar que o octógono possui diagonais de três comprimentos diferentes denotadas na figura por D, D’ e D”, conforme a figura 2 pode-se verificar algumas relações de proporcionalidade entre as diagonais e o lado do octógono. Uma relação de proporcionalidade destacada na figura é denominada de *Número de prata*. Tal relação é dada da seguinte maneira:

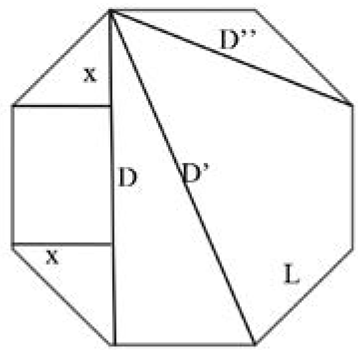


Figura 2. O octógono e suas diagonais.

$2x + L = D$ e $L^2 = 2x^2$. Logo $x = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$

Substituindo x na primeira equação tem-se

$$2.\frac{L}{\sqrt{2}} + L = D\text{, ou seja, } L(\sqrt{2}+1 = D\text{. Portanto, } \frac{D}{L} = 1 + \sqrt{2} = \theta\,,$$

denominado por *Número de Prata*.

Outra proporção explorada em as diagonais D' e o lado L do octógono envolve o teorema de Pitágoras. Ao observar a figura anterior e aplicar o teorema de Pitágoras tem-se que:

$D'^2 = L^2 + D^2$, de onde obtemos $\dfrac{D'^2}{L^2} = 1 + \dfrac{D^2}{L_2} = 1 + \theta^2$ e, portanto, $\dfrac{D'}{L} = \sqrt{1+\theta^2}$.

Outra relação de proporcionalidade a destacar é aquela que envolve os lados paralelos das sucessões de octógonos que podem ser construídos a partir das diagonais do octógono externo de modo que no interior da nave da capela convergem para o centro da nave (figura 3 A e B).

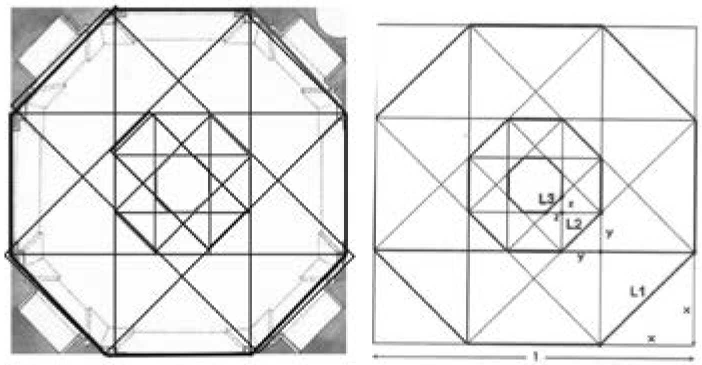


Figura 3 A e B. O octógono central da nave central da capela.

Observando-se os lados L_1, L_2 e L_3 (figura 3B), percebe-se que seus comprimentos estão em uma razão 8/3. Verifica-se, também, que o octógono central é a base de um prisma octogonal que vai da base da nave até o teto da cúpula da capela, o que implica na projeção espacial da capela a partir de sua planta baixa.

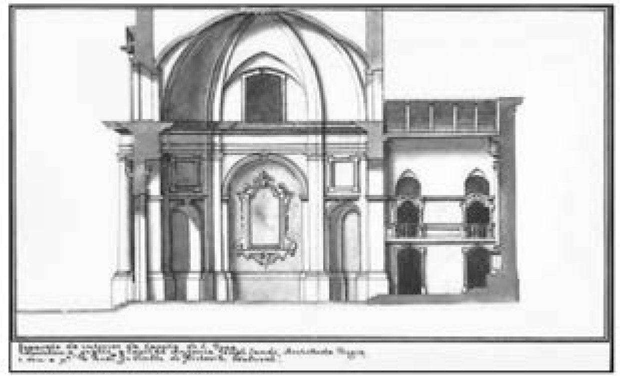


Foto 5. Fachada lateral da Capela de São João Batista. Fonte: Fórum Landi (2007).

Para construir a projeção espacial da nave central da capela a partir do octógono da base, inicia-se pela observação da sua fachada lateral e assim percebe-se as paredes indicando o contorno espacial do prisma octogonal externo. Em seguida, pode-se observar como ocorre a projeção central imaginada a partir do centro da base da nave da capela.

Ao observar a cúpula da capela (foto 6), percebe-se que no centro da mesma está destacado o octógono que se conectará ao da base da nave de modo a estabelecer relações de energia entre o céu e a terra por meio do centro de energia estabelecido pelo octógono central da base da nave. A parte superior da nave central, mostrada na foto 6 contém um octógono central que coincide com o octógono central da parte inferior da nave central (piso), evidenciando a presença do prisma de base octogonal ao qual me referi anteriormente.

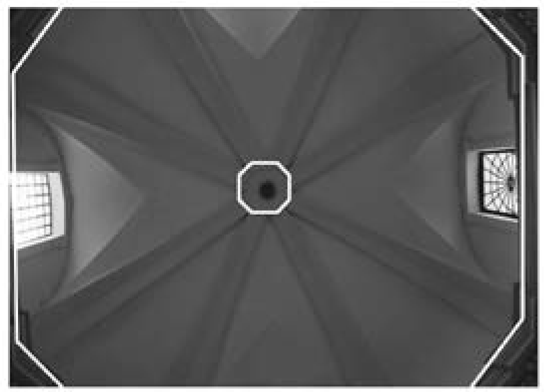


Foto 6. Imagem da cúpula da Capela de São João Batista e o destaque para as formas octogonais que se conectam do chão ao teto. Foto do autor.

Alguns tópicos matemáticos a serem explorados na arquitetura de Landi

Tal geometria pode ser explorada e ensinada nas escolas a partir das artes práticas e das culturas tradicionais e hibridas da Amazônia brasileira desde que se estabeleça uma conexão entre geometria e arte que tenha como foco principal a exploração do espaço. O estudo característico da geometria baseia-se na exploração matemática de pontos, linhas e formas no espaço, enquanto a arte é, frequentemente, relacionada com a apreciação estética do espaço ou com o seu uso para provocar certa manifestação emocional em cada observador (WILLIAMS, 1993).

A partir de uma exploração investigatória do patrimônio histórico-cultural estabelecido no período setecentista, mais especificamente a partir da obra de Landi, é possível obter subsídios que orientem o desenvolvimento de atividades didáticas voltadas ao ensino da Matemática escolar como, por exemplo, a geometria e as relações métricas entre as formas exploradas.

O professor pode explorar a arquitetura do centro histórico de Belém do Pará para a abordagem de formas geométricas planas e especiais, suas propriedades e relações matemáticas, posto que as mais variadas linhas e formas possam ser exploradas nos prédios históricos de Belém e Manaus, bem como de alguns municípios do interior da Amazônia.

Ainda a respeito da exploração investigatória do patrimônio artístico e arquitetônico do século XVIII, poderão ser identificados, analisados e usados na forma de atividades investigatórias, aspectos matemáticos como simetria, medidas de limites e extensão de contornos e superfícies, bem como a comparação dos sistemas de medição (anteriores a Landi, da sua época e de hoje), considerando que na construção do patrimônio arquitetônico foram certamente utilizadas unidades de medida não convencionais, uma vez que os próprios livros de Ferdinando Bibiena, que foram a base da formação de Landi, contêm as mais variadas unidades e sistemas de medidas para a projeção de objetos em perspectiva e para a criação harmônica de ambientes.

Destaco, entretanto, que algumas unidades de medida constituíram-se em unidades padrão de medidas para a construção arquitetônica dos conjuntos urbanos da região amazônica uma vez que ainda não havia um padrão universal de medida estabelecido naquela época. Havia sim, alguns sistemas adotados de acordo com a necessidade e a aproximação maior com a exatidão da medida do objeto a ser medido.

Outro aspecto bastante importante a ser explorado nas atividades escolares a partir desse ambiente patrimonial é a análise das relações de volumes que poderão ser estabelecidas a partir da exploração do espaço arquitetônico. Nesse sentido, o professor poderá criar problematizações acerca de quantas pessoas caberiam em cada espaço.

Os ângulos das paredes e das aberturas nas formas decorativas das fachadas, portas e janelas, bem como suas relações no plano e no espaço, poderão ser realizadas com o uso de instrumentos básicos de desenho como réguas, fitas métricas, compassos e transferidores, ou até mesmo com o uso do *Cabri Geomètre 3D*. Além disso, os professores podem estimular, também, que os estudantes procurem investigar como se configuravam as relações de uso dos antigos métodos de medição – palmo, braça, pé, polegada, etc.

Sobre as Artes, Arquitetura e Matemática

Além da exploração dos aspectos relacionados às relações métricas que envolvem geometria e medidas na exploração investigatória da arquitetura de Landi, os professores de outras áreas de conhecimento, ou até mesmo os de Matemática poderão indagar-se e provocar seus alunos a investigarem quais as relações matemáticas existentes nos estilos arquitetônicos que influenciaram a obra de Landi que poderão estar presentes no conjunto arquitetônico do Centro Histórico de Belém (Bairro da Cidade Velha) como, por exemplo, os estilos Barroco e Neoclássico de Landi, influenciados por Andrea Palladio e Ferdinando Bibiena.

Ao abordar possíveis relações entre Arte, Arquitetura e Matemática a partir das construções atribuídas a Landi, certamente o professor de Matemática estará investindo em uma abordagem didática dos conteúdos matemáticos na qual a transversalidade será a matriz didática da exploração do patrimônio arquitetônico histórico amazônico. Certamente tal abordagem contribuirá para que os estudantes sejam estimulados a visitar o Centro Histórico de Belém, localizado nos bairros da Cidade Velha, Campina e Comércio, de modo a refletir sobre a importância desse patrimônio arquitetônico para a cidade de Belém.

Outro aspecto referente à transversalidade do tema em questão é a compreensão dos aspectos históricos relacionados ao ambiente investigado. Isso porque é com base na exploração educativa do patrimônio arquitetônico que os estudantes poderão compreender melhor como era a atmosfera ambiental, geográfica, política, econômica, social e cultural da época e como esse contexto influenciava no *modus vivendi* daquele período (século XVIII e XIX). Outros aspectos não menos importantes referem-se à compreensão histórica do Período Pombalino; da influência do Iluminismo na região e das causas da expulsão dos jesuítas da Amazônia.

Com relação aos estudos das relações transversalizantes com a Geografia e a Cartografia, os professores poderão explorar aspectos e fatos relacionados à definição dos limites territoriais do Brasil, causa essa decisiva para a vinda de José Antonio Landi, João Angelo Brunelli e outros cientistas para a região amazônica. Nesse sentido, um aspecto significativo a ser investigado é o modelo dos centros urbanos daquela época e suas transformações posteriores, ocasionando alguns dos problemas urbanos que temos hoje.

Reflexões finais

O exercício da leitura e da exploração reflexiva sobre a arte geométrica que envolve as obras arquitetônicas religiosas me fazem assegurar que essas formas de construção arquitetônica transmitem uma qualidade do ser em contexto e épocas conforme o modelo de pensamento estabelecido pela escola de arte ou arquitetura que o propõe. O tema religioso de uma obra de arte pode dar-se, de certo modo, por adição e inclusão sem relação com a linguagem formal da obra, como o prova a arte cristã do Renascimento. Existem obras de arte essencialmente profanas de tema religioso, mas não há, por outro lado, obras sagradas com formas profanas, já que existe uma analogia rigorosa entre a forma e o espírito. Uma visão espiritual se expressa necessariamente mediante certa linguagem formal; se tal linguagem falta, e a arte supostamente sagrada extrai suas formas de qualquer arte profana, não existe uma visão espiritual da realidade.

Neste artigo, enfatizei o valor da expressão matemática nas obras arquitetônicas do século XVIII, projetadas e construídas por José Antonio Landi, com base na exploração investigatória de algumas relações métricas presentes na Capela de São João Batista. Meu propósito foi fazer uma leitura primeira que pudesse apontar possibilidades didáticas para se investigar conceitos, propriedades e relações geométricas com base no contexto investigado e tomá-lo como ponto de partida para uma abordagem significativa da Matemática escolar.

A partir das relações métricas estabelecidas na obra investigada, apontei possibilidades de exploração pedagógica dessa arte geométrica no ensino e aprendizagem matemática dos estudantes, de modo a contribuir para a melhoria do ensino da Matemática integrando *Arte, Arquitetura e Matemática* na Amazônia. Nesse sentido, considero importante refletir sobre o que fazer para concretizar uma possível aliança entre as aulas de Matemática e as atividades que podem envolver a investigação do patrimônio histórico, cultural e arquitetônico e suas relações transversalizantes com outros aspectos do conhecimento produzido e praticado socialmente.

É necessário, entretanto, um exercício de criatividade para explorar os conceitos matemáticos na proposição de tarefas escolares que conectem essas práticas sociais durante as atividades desenvolvidas pelos professores em sala de aula. Essa tomada de decisão deve ser feita conjuntamente entre o professor e os alunos, num espaço que possibilite aos envolvidos a exploração da geometria presente nessas práticas. Certamente, essas explorações matemáticas se concretizarão na criatividade, na imaginação geométrica e na exploração espacial que integre os saberes e práticas culturais.

O professor precisa, de antemão, preparar-se, ampliar seus conhecimentos históricos sobre o assunto, bem como sobre as geometrias envolvidas e as relações métricas possíveis de serem exploradas e associadas aos sistemas de medição utilizados na construção do patrimônio arquitetônico que será investigado por ele e posteriormente investigado pelos alunos.

Minha posição é de que só será possível estabelecer conexões sociocognitivas e culturais que possibilitem a relação entre a arte matemática do patrimônio histórico arquitetônico local e a arte matemática escolar se houver envolvimento pleno por parte do professor na preparação de seu espírito investigatório que o leve a sensibilizar seus alunos e, assim, mobilizar práticas culturais para dentro das salas de aula. Portanto, o professor deve explorar o ambiente, perceber as relações geométricas, fazer primeiro, para depois orientar seus alunos.

Referências

BIBIENA, Ferdinando Gali de. **L'Architettura civile, preparata sú la geometria, e ridotta alle prospettive**. Considerazioni pratiche. Parma: 1711.

BIBIENA, Ferdinando Gali de. **Direzioni à giovani student nel desegno dell'aechitettura civile**. Bolonha, 1734.

BURCKHARDT, Titus. **Mirror of the intellect**: Essays on traditional science & sacred art. Albany, New York: Suny press, 1987.

CIRCUITO LANDI: **Um roteiro pela arquitetura setecentista na Amazônia**. Manual do professor. Belém: Forum Landi, s/d.

FERNANDEZ, Inmaculada; REYS, Maria Encarnación. **Geometria con el hexágono y el octógono**. 2. ed. Granada, ES: Proyecto Sur de Ediciones, 2008.

GUÉNON, René. **Os símbolos da Ciência sagrada**. A importância dos símbolos na transmissão dos ensinamentos doutrinais de ordem tradicional. São Paulo: Ed. Pensamento, 1995.

MENDES, Iran Abreu. **A matemática observada nas obras de Antonio José Landi**. Um estudo histórico investigatório à luz da Matemática. 2012. (No prelo).

MENDES, Iran Abreu (b). Arte e ciência na Amazônia no século XVIII: algumas contribuições de Joseph Antonio Landi e João Ângelo Brunelli. CD-ROM. **Anais do VIII Seminário Nacional de História da Matemática**. Belém: SBHMat, 2009. p. 1-14.

MENDES, Iran Abreu (a). **Ciência, Arquitetura e Matemática na Amazônia do século XVIII a partir da demarcação das fronteiras da região**. Relatório de Pesquisa de Pós-doutorado. Rio Claro: UNESP, 2009.

MENDES, Iran Abreu (b). Arte e ciência na Amazônia no século XVIII: algumas contribuições de José Antonio Landi e João Ângelo Brunelli. Impresso. **Anais do VIII Seminário Nacional de História da Matemática**. Belém: SBHMat, 2009. p. 49-65.

MENDES, Iran Abreu (c). **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu (a). **Ciência, Arquitetura e Matemática na Amazônia do século XVIII a partir da demarcação das fronteiras da região**. Projeto de pesquisa de Pós-doutorado. Rio Claro: UNESP, 2008.

MENDES, Iran Abreu (b). (Org.). **A Matemática no século de Andrea Palladio**. Natal: EDUFRN, 2008.

MENDONÇA, Isabel Mayer Godinho. **António José Landi (1713 – 1791)**. Um artista entre dois continentes. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. (Série Textos Universitários de Ciências Sociais e Humanas).

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. In: **ZDM Mathematics Education** (2010) 42: 381–392. Springer Berlin/Heidelberg, 2010.

PENNICK, Nigel. **Geometria Sagrada**. Simbolismo e intenções nas estruturas sagradas. Tradução Alberto Feltre. São Paulo: Ed. Pensamento, 1980.

PIGOZZI, Marinella; MASTROVITI, Anna Coccioli. **Prospecttiva e Architettura**: trattati e disegni. Del Fondo Antico della bilbioteca comunale Passerini-Landi di Piacenza. A cura di Massimo Baucia. Edizioni TIP.LE.CO, 2004

REIS, Yara Felicidade de Souza. Urbanismo em Belém na segunda metade do século XVIII. **Tese** de Doutorado. São Paulo: FAUUSP, 2005.

WILLIAMS, Julian. Geometry and art. In: NELSON, David; JOSEPH, George Gheverghese and WILLIAMS, Julian. **Multicultural mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1993.

Iran Abreu Mendes

Dep. de Práticas Educacionais e Currículo - UFRN - Brasil

E-mail: iamendes1@gmail.com

As propostas de artigos devem obedecer às seguintes normas de publicação

1) O texto de artigo deve ser inédito e não deve ter sido publicado em outra revista ou estar sendo submetido para publicação em outro periódico. Em caso de artigos já apresentados em congressos ou eventos similares a versão submetida a esta revista deve ser significativa e comprovadamente ampliada em termos teóricos e/ou metodológicos.

2) O artigo deve ser enviado por via eletrônica para revistarematec@gmail.com, aos cuidados dos Editores, e ser encaminhado em duas versões, uma delas com a identificação completa dos autores e, a outra "cega" para os trâmites de avaliação.

3) O texto deve ser elaborado em Microsoft Word (extensão.doc) atendendo às seguintes especificações de formatação e composição:

   a) O texto deverá ser formatado em fonte Times New Roman, corpo 10, recuo 0, espaçamento 0, alinhamento justificado e espaço simples entrelinhas.

   b) O texto deverá ter entre 15 e 20 páginas (15x22cm), margem esquerda 2cm; margens superior, inferior e direita 1,5cm. Apresentar quatro palavras-chave, título em português e inglês, além de resumo e abstract que não ultrapasse 10 linhas.

   c) O texto deverá conter título centralizado com no máximo 16 palavras incluindo conectivos. Os nome(s) do(s) autor(es) e da(s) respectiva(s) instituição(ões) devem ser alinhados à direita, logo abaixo do título.

   d) No final do texto, em ordem alfabética, devem ser incluídas as referências bibliográficas, obedecendo as normas atuais da ABNT.

4) O texto submetido já deve ser apresentado à Revista com revisão vernacular e ortográfica realizada previamente.

5) O texto que tiver imagens deverá ter as mesmas enviadas em documento separado, além daquelas presente no próprio texto. As imagens devem ter resolução formato TIF ou JPEG com 300DPIs.

6) Os textos publicados nesta Revista representam a expressão do ponto de vista de seus autores e não a posição oficial da revista ou dos editores.

7) O texto que não obedecer às normas de formatação será devolvido ao seu autor para reformulação e reenvio.

Índice