

Rematec

Revista Matemática, Ensino e Cultura

ISSN: 1980-3141 | e-ISSN: 2675-1909 | DOI: 10.37084

2022
Número 41

**Relações entre
Filosofia da Matemática
e Ensino de Matemática**

REMATEC

Revista de Matemática, Ensino e Cultura

Relações entre Filosofia da Matemática e Ensino de Matemática

Editores deste Número

Lênio Fernandes Levy

Iran Abreu Mendes

Conselho Editorial

Amílcar Manuel do Rosário Oliveira, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Amílcar Pinto Martins, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Arthur Powell, Rutgers University de Newark, USA
Carlos Aldemir Farias da Silva, Universidade Federal do Pará, Brasil
Cláudia Lisete Oliveira Groenwald, Universidade Luterana do Brasil, Brasil
Cláudia Regina Flores, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil
Claudianny Amorim Noronha, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Edivania Santos Alves, Universidade Federal do Pará, Brasil
Elisabete Zardo Búrigo, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Emmánuel Lizcano Fernandez, Universidad Nacional de Educación a Distancia - Madrid, España
Fredy Enrique González, Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Maracay, Venezuela
Iran Abreu Mendes, Universidade Federal do Pará, Brasil
Isabel Cristina Rodrigues de Lucena, Universidade Federal do Pará, Brasil
Jesus Victoria Flores Salazar, Pontificia Universidad Católica de Lima, Perú
John A. Fossa, Universidade Estadual da Paraíba, Brasil
José Manuel Leonardo Matos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Kaled Sulaiman Khidir, Universidade Federal do Tocantins, Brasil
Luis Carlos Arboleda, Universidad del Valle - Cali, Colombia
Luis Radford, Université Laurentienne, Canadá
Marcelo de Carvalho Borba, Universidade Estadual Paulista - Rio Claro, Brasil
Márcia Maria Alves de Assis, Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Brasil
Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires, Universidade Estadual de Feira de Santana, Brasil
Maria Célia Leme da Silva, Universidade Federal de São Paulo, Brasil
Maria da Conceição Xavier de Almeida, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Maria Cristina Araujo de Oliveira, Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil
Miguel Chaquiam, Universidade do Estado do Pará, Brasil
Pedro Franco de Sá, Universidade do Estado do Pará, Brasil
Rafael José Alves do Rêgo Barros, Instituto Federal da Paraíba, Brasil
Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Teresa Vergani, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Ubiratan D'Ambrosio, Universidade Anhanguera de São Paulo, Brasil
Wagner Rodrigues Valente, Universidade Federal de São Paulo, Brasil

Editores

Iran Abreu Mendes
Carlos Aldemir Farias da Silva

Projeto gráfico e Diagramação

Luis Andrés Castillo Bracho

Instituição Editora



Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática

Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática
(GPSEM/UFPA) Brasil

REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura

Grupo de Pesquisas Práticas Socioculturais e Educação Matemática - GPSEM

Ano 17 | n. 41 | Maio-Ago.

ISSN: 1980-3141

e-ISSN: 2675-1909

Prefixo DOI: 10.37084

Endereço para envio de artigos, sugestões e críticas:

<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec>

Contato:

revistarematec@gmail.com

Indexadores, Base de Dados e Repositórios



		
 Bibliografía Latinoamericana		
	 EUCLIDES JARAMILLO ARANGO	 Academic Scientific Journals
		
		 Sumários de Revistas Brasileiras
 Revistas de livre acesso	 JOURNAL ABSTRACTING AND INDEXING SERVICE	 International Institute of Organized Research (I2OR)
		
		
 DIRECTORY OF OPEN ACCESS SCHOLARLY RESOURCES	 Eurasian Scientific Journal Index www.ESJIndex.org	 Directory of Research Journal Indexing
		
		 The latest Journal Tables of Contents
		
 INTERNATIONAL STANDARD SERIAL NUMBER		

Índice

Editorial

Lênio Fernandes Levy
Iran Abreu Mendes

Artigos

- A questão dos fundamentos entre matemática e filosofia: visão geral introdutória..... 01-19
Gabriele Lolli
- Algumas notas sobre Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática..... 20-32
Antonio Vicente Marafioti Garnica
- Platonismo, De Re e (Filosofia da) Prática Matemática..... 33-62
Marco Panza
- Russell e Frege sobre a Lógica das Funções..... 63-75
Bernard Linsky
- As correntes filosóficas da matemática e suas implicações na formação o professor que ensina matemática: uma análise da produção acadêmica..... 76-91
Cristiane Borges Angelo
- Aprender-Ensinar Matemática numa Perspectiva Formativa..... 92-105
Maria Aparecida Vigianni Bicudo
Luciane Ferreira Mocrosky
Nelem Orłowski Carlos Alves de Almeida Neto
- O lugar da filosofia Matemática de Manoel Amoroso Costa..... 106-118
Iran Abreu Mendes

Homenagem

- O Netz-Works de deduções gregas: uma revisão de The Shaping of Deductions in Greek Mathematics de Reviel Netz..... 119-140
Bruno Latour

Relações entre Filosofia da Matemática e Ensino de Matemática

Lênio Fernandes Levy e Iran Abreu Mendes

A originalidade das contribuições de um matemático profissional não é influenciada, aparentemente, por suas concepções filosóficas, entre elas as concepções identificadas com o ramo da epistemologia. O mesmo se pode considerar em relação ao professor e seus modos de conceber a matemática que ensina e as práticas desenvolvidas no ensino dessa matemática.

As regras do desenrolar criativo estritamente matemático são estabelecidas ou avalizadas, ao que tudo indica, de modo anterior e inflexível, pela respectiva comunidade científica. Mesmo que a matemática acadêmica resulte de fatores culturais os mais diversos possíveis, não existe maneira de um trabalho matemático obter o mínimo de aceitabilidade oficial e, ao mesmo tempo, desviar-se de tais regras, “consideradas objetivas”.

Tende-se, pois, a aceitar a ideia de que não há como este ou aquele tipo de reflexão geral ou filosófica, levada a cabo por um indivíduo a propósito da matemática, exercer ingerência em produtos matemáticos desenvolvidos pelo referido indivíduo.

Tal afirmação já não se pode ser feita, de jeito inexorável, quanto ao ensino e à aprendizagem de matemática.

Um professor, digamos, *platonista* tenderá a desvalorizar metodologias ativas.

Já um docente que advogue em prol da *matemática-criação* será, em tese, flexível no que tange à aplicação dessas metodologias em suas aulas.

O aluno, também, poderá ver-se estimulado a indagar, a estudar e a pesquisar com mais afinco sobre a matemática, uma vez consciente ou defensor da ideia de que, por exemplo, ela resulta de um conjunto de processos sócio-históricos, ao invés de ser algo extra-humano que, muitas vezes, extrapola seu potencial cognitivo e, por extensão, algum afã de participar das aulas e de investigações.

Assim sendo, justifica-se a elaboração de um número temático da REMATEC - Revista Matemática, Ensino e Cultura, voltado para as relações existentes e/ou para as relações engendráveis entre filosofia da matemática e ensino de matemática.

Conhecimentos afetos à *filosofia tradicional da matemática* (filosofia que diz respeito, como sabemos, ao platonismo, ao logicismo, ao intuicionismo e ao formalismo) são capazes de proporcionar subsídios formidáveis quando da dinâmica de ensino e aprendizagem de matemática.

Além disso, cogitar a propósito de *outras filosofias da matemática* é uma possibilidade notável e relativamente pouco explorada pelos docentes, a qual este número temático igualmente busca contemplar.

No primeiro artigo, Gabriele Lolli aborda os períodos em que se estruturaram as formas correspondentes ao rigor das representações do pensamento matemático, desde os primórdios até o século XIX. Em seguida, versa sobre a crise dos fundamentos, sobre as escolas fundacionais (logicismo, formalismo e intuicionismo) e, enfim, sobre as tendências atuais.

No artigo seguinte, Antonio Vicente Marafioti Garnica propõe uma filosofia da educação matemática, elaborada em um movimento que ele próprio chama de *indutivo-descritivo*, originado nas práticas de ação tanto de professores quanto de pesquisadores do ensino de matemática, os quais objetivam produzir, cotidianamente (e, com efeito, acabam produzindo), educação matemática.

No terceiro artigo, Marco Panza expõe sua versão acerca do platonismo para uma filosofia da prática matemática, qual seja a de que a matemática pode ser adequadamente explicada como uma atividade intelectual que trata de conteúdos abstratos individuais sui generis, fixados de modo a serem capazes de nos permitir um acesso epistêmico *de re* a eles. O autor busca deixar claro que sua versão não tem estritamente nada a ver com a existência de tais conteúdos (nem com a veracidade de algumas afirmações sobre eles). Ou melhor, Marco Panza não só não afirma a existência de objetos matemáticos, mas também não a nega.

No quarto artigo, intitulado *Russell e Frege sobre a Lógica das Funções*, seu autor, Bernard Linsky apresenta em ensaio argumentativo por meio do qual estabelece correlações entre a teoria das funções matemáticas de Russell e a explicação de Frege para as funções como entidades “insaturadas”. Russell analisa termos funcionais com funções proposicionais e a teoria de descrições definidas, considerando o papel técnico da teoria das descrições em Filosofia Matemática.

No quinto artigo, sob o título *Aprender-ensinar Matemática numa perspectiva formativa*, as autoras Maria Aparecida Vigianni Bicudo, Luciane Ferreira Mocrosky e Nelem Orłowski, chamam a atenção para possíveis sentidos e significados filosóficos

concernentes à Educação Matemática, numa perspectiva fenomenológica, atribuídos às palavras formação, ensinar e aprender, a partir de um estudo investigativo teórico, realizado pelas autoras, em diálogo com a literatura relacionada ao campo da formação de professores que ensinam matemática.

O sexto artigo intitulado *As correntes filosóficas da matemática e suas implicações na formação o professor que ensina matemática: uma análise da produção acadêmica*, a autora Cristiane Borges Angelo apresenta os resultados de uma pesquisa em bancos de teses e dissertações, que objetivou analisar como a produção acadêmica vem articulando as diferentes correntes filosóficas da Matemática à formação e/ou à prática de professores que ensinam Matemática.

No sétimo artigo intitulado *O lugar da filosofia matemática de Manoel Amoroso Costa*, seu autor identifica um lugar na cartografia da filosofia Matemática onde se mostra possível situar as matrizes filosóficas por meio das quais o matemático brasileiro Manoel Amoroso Costa construiu seus argumentos para apresentar suas ideias fundamentais da matemática nas primeiras décadas do século XX, que permaneceram em movimento nas discussões relacionadas aos fundamentos epistemológicos da Matemática, e contribuem nas discussões realizadas em disciplinas da formação e professores e Matemática, bem como nos estudos situados em cursos de pós-graduação em Educação Matemática, especialmente nos campos da história e filosofia da Matemática em suas relações com o ensino.

No último artigo intitulado *O Netz-Works de deduções gregas: uma revisão de The Shaping of Deductions in Greek Mathematics de Reviel Netz*, apresentamos ao público uma tradução do original publicado pelo autor em 2008, como uma forma de homenagear o autor falecido em outubro de 2022. O artigo se caracteriza por um ensaio revisionista com comentário analítico do autor, a respeito de um livro de autoria de Reviel Netz, que trata das deduções gregas em Matemática. No artigo o autor faz diversas incursões em discussões acerca das filosofias da matemática para justificar os modos como Reviel Netz trata do assunto em seu livro.

Esperamos que esse número temático da Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC, amplie ainda mais o espaço estabelecido pelos editores, para a constituição de ambientes fortalecedores de debates e discussões fundamentadoras de uma formação filosófica de professores de Matemática, Matemáticos e outros interessados nos temas que tratam das relações entre filosofia da Matemática e ensino de Matemática, abordadas neste número da revista.

A questão dos fundamentos entre matemática e filosofia: visão geral introdutória¹

Gabriele Lolli

Dipartimento di Matematica - Università di Torino

gabriele@dm.unito.it

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão filosófica centrada no exame dos fundamentos entre matemática e filosofia, a fim de explicitar um panorama introdutório sobre as escolas filosóficas implicadas nas explicações concernentes às formas de produzir conhecimento matemático e de organizar suas formas de expressão no contexto da formação filosófica do professor de matemática. Trata-se de um ensaio teórico sobre o tema, que aborda inicialmente a filosofia e seus fundamentos, seguindo com os períodos que estruturaram as formas correspondentes ao rigor das representações do pensamento matemático desde os primórdios até o século XIX, a crise dos fundamentos, as escolas fundacionais (logicismo, formalismo e intuicionismo) e as tendências atuais.

Palavras-Chave: Filosofia. Matemática. Fundamentos. Pensamento matemático.

The question of the foundations between mathematics and philosophy: an introductory overview

Abstract

This article presents a philosophical discussion centered in the examination of the foundations between mathematics and philosophy, in order to explain an introductory overview of the philosophical schools involved in the explanations concerning the ways of producing mathematical knowledge and of organizing its forms of expression in the context of the philosophical formation of the mathematics teacher. This is a theoretical essay on the subject, which initially addresses philosophy and its foundations, following the periods that structured the forms corresponding to the rigor of representations of mathematical thought from the beginnings to the 19th century, the crisis of foundations, the foundational schools (logicism, formalism and intuitionism) and current trends.

Keywords: Philosophy. Mathematics. Fundamentals. Mathematical thinking.

La cuestión de los fundamentos entre las matemáticas y la filosofía: una visión general introductoria

Resumen

Este artículo presenta una discusión filosófica centrada en el examen de los fundamentos entre las matemáticas y la filosofía, para explicar un panorama introductorio de las escuelas filosóficas involucradas en las explicaciones sobre las formas de producir conocimiento matemático e de organizar sus formas de expresión en el contexto de la formación filosófica del profesor de matemáticas. Se trata de un ensayo teórico sobre el tema, que inicialmente aborda la filosofía y sus fundamentos, siguiendo los períodos que estructuraron las formas correspondientes al rigor de las representaciones del pensamiento matemático desde los inicios hasta el siglo XIX, la crisis de las fundaciones, las escuelas fundacionales (logicismo, formalismo e intuicionismo) y las tendencias actuales.

Palabras clave: Filosofía. Matemáticas. Fundamentos. Pensamiento matemático.

¹ Este artigo foi traduzido por Iran Abreu Mendes, com fins didáticos para uso na formação de professores de Matemática.

Filosofia e fundamentos

Ao apresentar questões relativas ao exame dos fundamentos, é necessário distinguir o ponto de vista dos filósofos e o ponto de vista dos matemáticos uma vez que as duas perspectivas nem sempre coincidem, até porque têm sua própria tradição na história da filosofia e da matemática.

Por sua natureza, a filosofia está interessada em dar uma justificação e explicação da matemática como uma manifestação da realidade, uma das muitas, cuja consideração se enquadra nas classificações elaboradas pela própria filosofia. A matemática é considerada, sobretudo, uma atividade cognitiva que não se enquadra, por exemplo, no campo da ética. A matemática é examinada tanto na ontologia quanto na teoria do conhecimento².

Na problemática ontológica, nos perguntaremos, por exemplo, quais são as entidades que a matemática investiga e de que natureza. Na teoria do conhecimento, pergunta-se, em vez disso, que tipo de certeza as verdades matemáticas têm (isto é, as afirmações que compõem as teorias matemáticas), e se são verdades, e que tipo de garantia elas têm.

Os dois tipos de questões, ontológicas e epistemológicas, estão ligados e influenciam mutuamente as respostas de várias maneiras. O complexo dessas reflexões é o que constitui a disciplina filosófica conhecida como filosofia da matemática³.

Na história da filosofia em geral, a matemática foi assumida como modelo de conhecimento certo e garantido, e esse papel marcou sua importância filosófica. A certeza das verdades matemáticas era inatacável, e sua garantia absoluta. Portanto, pode-se dizer em primeiro lugar que havia verdades e certezas; primeiro as matemáticas, depois eventualmente outras, por exemplo as metafísicas (a serem obtidas possivelmente com o rigor do estilo matemático). A filosofia tinha apenas que enquadrar esse fato em uma teoria geral do ser ou das habilidades cognitivas humanas, que explicam como as verdades podem existir e como elas podem ser conhecidas (por exemplo, teorias associacionistas de ideias). Isso em geral, com uma soberana indiferença ao que aconteceu na história da matemática, assumida como imutável e, portanto, de fato em referência a uma matemática antiga, precisamente à de Euclides. Novidades na matemática, se reconhecidas, por exemplo, quando René Descartes introduziu a geometria analítica, foram declaradas de autoridade da mesma natureza, sem investigação

² Tradicionalmente, distinguam-se as seções de Metafísica, Lógica, Ética, Estética; mais recentemente, a Epistemologia, ou Teoria do Conhecimento, também se tornou um ramo autônomo básico.

³ Uma boa introdução de certo modo recente, dirigida principalmente a filósofos, é a de S. Shapiro, *Thinking about mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000. Para uma exposição mais dirigida a matemáticos, ver G. Lolli, *Philosophy of mathematics*, Il Mulino, Bolonha, 2002.

particular (apesar do fato de que grande parte da nova matemática não tinha uma abordagem axiomática euclidiana).

Só recentemente (a partir do século XIX), a filosofia também, ou melhor, se incluiu a tarefa de intervir na matemática, fornecendo-lhe as justificativas, ou mesmo as correções, necessárias para restabelecer a confiança no sentido e na validade da produção matemática (ou, ao contrário, sancionar sua negação). A viragem deu-se, sobretudo, como consequência e sob a influência, desta vez, do que se passava no campo matemático, que já não podia ser ignorado.

Ao longo da história, os matemáticos muitas vezes se depararam com momentos em que tiveram dúvidas e incertezas sobre os métodos que usaram ou as pesquisas que realizaram. Isso pode parecer incrível para quem não está familiarizado com a história da matemática, mas episódios desse tipo têm sido frequentes e importantes. São os chamados períodos de crise e (ou seguidos de) períodos de rigor. A matemática é um laboratório de pensamento - esta poderia ser a sua definição - e às vezes nesse laboratório os experimentos dão resultados insatisfatórios, inesperados ou incontroláveis. Porém, sempre requerem muita manutenção.

[A crítica dos princípios] é uma parte essencial da elaboração de conceitos que sempre preparam ou acompanham o progresso da ciência e sua aplicação mais ampla,

confirmou Federigo Enriques⁴, que, no entanto, estava interessado em diminuir a importância da crítica dos primórdios de seu tempo e, portanto, mostrou que essa crítica ocorre em todos os momentos do desenvolvimento da matemática. Por outro lado, há períodos de crise mais críticos do que outros.

A descoberta dos irracionais na Grécia, o uso dos infinitesimais no século XVII, os cálculos com séries infinitas no século XVIII, os métodos sintéticos da geometria projetiva no início do século XIX, o estudo dos conjuntos infinitos no final do século XIX são alguns exemplos de tais situações. De qualquer forma, os matemáticos se viram diante (ou incapazes de lidar) com novos problemas com ferramentas que se revelaram inadequadas ou não suficientemente precisas e determinadas por regras claras e, sobretudo, compartilhadas. Acontece, então, que os matemáticos brigam entre si, com disputas acirradas.

Todos esses períodos de crise foram geralmente superados com o nascimento de uma nova matemática, ou com o abandono de uma parte dela (às vezes temporária, talvez seguida depois de séculos por uma recuperação).

⁴ Federigo Enriques, O significado da crítica dos princípios no desenvolvimento da matemática, 1912, reimpresso em F. Enriques, Para a ciência. Bibliópolis, Nápoles, 2000, pp. 155-72.

A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ produziu o que se diz ser uma grave crise no pitagorismo. Do lado matemático, a opinião generalizada é que ela favoreceu um desenvolvimento preferencial da geometria e a restrição das relações racionais com a teoria das proporções. Mas na realidade, também semeou a semente de procedimentos de aproximação altamente frutíferos como os de Arquimedes, um método completo equivalente ao processo limite. O método foi julgado por seus contemporâneos e pelo menos publicamente por ele mesmo como uma técnica heurística ao invés de uma forma demonstrativa rigorosa (no que diz respeito aos cânones fornecidos pelo modelo geométrico), um caso instrutivo de contenção exercida por preconceitos conservadores⁵.

Os infinitesimais evanescentes que estiveram na origem do cálculo infinitesimal não superaram as objeções daqueles que, como o bispo Berkeley, viram neles os fantasmas de quantidades que passaram. Contudo, o cálculo infinitesimal continuou condicionando em sua versão algébrica e em suas regras de cálculo, até que os infinitesimais foram eliminados da definição de limite de Cauchy e também como terminologia da definição de Weierstrass (para então ressuscitar nos anos sessenta do século XX com a análise não padronizada, produto da lógica matemática).

Os paradoxos da série infinita do século XVIII foram solicitados e resolvidos pelos teoremas da convergência, mas até o século XIX. Os métodos sintéticos da geometria projetiva, com seus pontos no infinito e cônicas degeneradas, após muitos contrastes, desencadearam uma geometria de coordenadas que representou um avanço substancial na geometria analítica e permitiu uma distinção-unificação das geometrias afins, projetivas e éticas.

No que diz respeito aos conjuntos infinitos, basta lembrar que no início da história podemos colocar simbolicamente a obra de Bernhard Bolzano de 1851 intitulada *Os paradoxos do infinito*, e que Cantor exclamou "Eu vejo, mas não acredito", diante de suas primeiras descobertas inesperadas. A desorientação é evidente. Ainda mais do que com a série, não se sabia quais leis lógicas (e não matemáticas⁶) eram admissíveis no novo domínio.

⁵ Outras vezes, na história, preconceitos semelhantes atuaram na direção oposta, consolidando uma oposição não resolvida entre algoritmos e provas. Ver P. Zellini, *Gnomon*, Adelphi, Milão, 1999.

⁶ A tentativa de estender as leis válidas para os finitos a conjuntos infinitos tem, entre outras coisas, permitido ou forçado isolar como autônoma também uma teoria de conjuntos finitos completamente abstratos, algo que não foi feito anteriormente.

O período do rigor do século XIX

No final do século XIX, somava-se aos problemas do infinito que está na origem da questão dos fundamentos na forma que dominou o panorama na primeira metade do século XX, com desdobramentos quase até os nossos tempos. É o que os próprios matemáticos chamaram de problema da realidade matemática, com uma terminologia que obviamente exigia a intervenção da filosofia.

Por muito tempo foi uma ideia universalmente popular, embora com nuances consideráveis, que a matemática estudasse características do mundo real. Lembre-se de Galileu, ao afirmar que a natureza é um livro, e que o livro está escrito em uma linguagem que é a matemática. A geometria estudava o espaço, os números mediam os fenômenos quantitativos do mundo.

A Matemática Superior é a arte de raciocinar sobre relações numéricas entre fenômenos naturais⁷, é apenas uma das muitas citações possíveis.

Geometrias não-euclidianas e teorias algébricas com leis parcialmente diferentes das tradicionais numéricas, desenvolvidas no século XIX, eram teorias que não tinham confirmação imediata no mundo; eles eram, no entanto, ou pareciam ser consistentes, pelo menos em relação aos tradicionais. Os matemáticos só podiam concordar que o que eles estudavam e trabalhavam eram teorias axiomáticamente estabelecidas, ou seja, logicamente desenvolvidas - porque e assim continuaram a fazer no modelo de Euclides – mas que realidade eles descreveram, se eles descreveram uma, foi difícil dizer, literalmente, difícil encontrar as palavras para expressá-la. A descrição de modelos teóricos, por exemplo, como sistemas não especificados de coisas satisfazendo axiomas, exigia uma linguagem (“coisas”, “entidades”) que até então não era matemática, mas que estava se tornando matemática na teoria dos conjuntos, de modo que na explicação das teorias matemáticas não havia como fugir dessa autorreferência.

A outra pedra angular da matemática tradicional, ao lado da geometria, era o estudo da aritmética, mas também tinha seus problemas. Quando os infinitesimais foram definitivamente eliminados com o conceito de limite, foi necessário definir os números reais, gerenciar a continuidade e sem o suporte intuitivo da linha geométrica - com a intuição geométrica desqualificada pelos desenvolvimentos em andamento. Completava-se assim uma progressiva extensão dos naturais aos inteiros, aos racionais e aos reais, o que deslocou todo o peso dos sistemas numéricos e, portanto, da Análise sobre os números naturais (aritmética da

⁷ J. W. Mellow, 1902.

Análise). Quais eram esses números, aos quais muitos se agarravam (Gauss entre eles)? Considere que até então mesmo o princípio de indução, utilizado esporadicamente, não tinha uma formulação clara e explícita. As alternativas disponíveis eram todas precárias ou não inteiramente satisfatórias: além de considerá-las um dom de Deus, ou uma intuição inata nossa, permanecia a definição axiomática de Peano (que reconduzia à abordagem axiomática toda a parte numérica da matemática) e a teoria dos conjuntos de Dedekind.

Por último, mas não menos importante, acrescentam-se as patologias da Análise, que impossibilitaram a identificação de funções com fórmulas, como se pensava possível na época, e com fenômenos naturais.

Cortou as raízes com o mundo; restava apenas reconhecer com admiração e espanto que

[A matemática] contém em si a causa de seu ser e sua própria métodos de teste. Em absoluta independência, a matemática cria para si o objeto de que trata, suas grandezas e suas leis, as suas fórmulas e símbolos⁸.

Mas, então, a matemática apareceu e teve que ser justificada apenas como uma produção mental, embora com uma mente concebida com diferentes graus de universalidade, da mente individual à razão objetiva.

Todas as respostas que serão dadas a esta crise buscarão um fundamento na mente, concebida mais ou menos objetivamente, e não no mundo, que impõe demasiadas restrições à liberdade (Cantor) de criar teorias matemáticas, que existia há tudo para ver.

Ao contrário do esquema historiográfico muitas vezes repetido, segundo o qual os períodos de crise seriam seguidos por períodos de rigor, períodos em que se estabelecem critérios rígidos de realização e aceitação da pesquisa matemática para resolver os problemas anteriores, no século XIX aparecem os dois momentos trocados; a necessidade de rigor se manifesta na necessidade de apresentar a matemática sem o apoio da realidade natural e da intuição física, e, portanto, também propondo definições autossuficientes para os conceitos fundamentais. Todavia, essa tendência traz à tona as dificuldades da razão, sua lógica e sua capacidade de definir conceitos matemáticos.

A crise dos fundamentos

Uma multiplicidade de problemas converge, portanto, no século XIX: a fundação do método axiomático, com duas dificuldades principais: como demonstrar a coerência das teorias e como apresentar seus modelos. As leis do infinito eram consideradas como uma questão

⁸ E. Dillmann, 1899.

urgente, uma vez que a teoria dos conjuntos se mostrava cada vez mais como a solução adequada ou conveniente para resolver muitas das dificuldades acima mencionadas. Entretanto, ela própria era atormentada por múltiplas incongruências e sobretudo por desacordos que subsistiam entre matemáticos, relativamente aos modos como desenvolvê-lo.

Por exemplo, pode-se supor o princípio da escolha ou não. Poderíamos aceitar as formas de definição e argumentação que trouxeram à existência infinitamente mais do que contável? Essas mesmas formas de raciocínio, essenciais em muita matemática, como as definições impredicativas, levam facilmente, em contextos estritamente análogos aos da prática cotidiana, a contradições.

Essa crise, portanto, por um lado foi semelhante às demais, na medida em que surgiu da dificuldade de novos desenvolvimentos matemáticos. Porém, por outro lado era diferente, implicando exatamente na justificação da natureza da matemática. O século XIX foi o século em que houve o maior progresso da matemática em toda a história; um progresso ou, em todo caso, uma mudança, não apenas quantitativa, mas na própria maneira de fazer matemática. Este século talvez represente um divisor de águas entre duas Eras históricas, apesar das continuidades óbvias, comparáveis talvez apenas ao século VI a.C., quando Tales de Mileto apresentou suas provas pela primeira vez.

Os problemas não diziam respeito apenas a conceitos ou métodos isolados, ou disciplinas particulares, mas à matemática como um todo em sua formulação. Não é de estranhar que esta, conhecida como a crise fundamental por excelência, não só por estar mais próxima de nós, tenha despertado também interesse filosófico. A crise da matemática em relação ao seu objeto de estudo, sua realidade, também foi uma crise para a filosofia da matemática. Tornou-se difícil continuar tomando-o como modelo quando a matemática parecia uma construção lógica suspensa no ar. Que tipo de certeza existe, e de que valor, sem um conteúdo? O conhecimento do nada é o que é proporcionado pela lógica analítica, útil, mas difícil de qualificar como conhecimento.

No mesmo período há também a circunstância de que, para a estimulação dos problemas discutidos, principalmente lógicos e linguísticos em maior medida do que no passado, foi desenvolvida uma nova ferramenta para lidar com os problemas colocados: uma ferramenta como essa da lógica simbólica.

Nem todos os protagonistas da crise usaram essa ferramenta, mas aqueles que o fizeram como contribuição mais recente e (em alguns casos) duradoura. Nunca a linguagem e os procedimentos da matemática foram submetidos a uma análise tão completa e original.

Portanto, não é de surpreender que mesmo a saída desta crise seja em parte diferente de outros casos. Se tivemos a produção de novas matemáticas, mas sobretudo chegamos a algumas conclusões (parciais) sobre a natureza da matemática⁹; saímos da crise com ideias mais claras sobre o potencial e os limites das ferramentas de pensamento que usamos para fazer matemática.

As escolas fundacionais

Duas imagens opostas das obras de fundações realizadas entre o final do século XIX e os primeiros trinta anos do século XX se sucederam na opinião comum. Por um tempo pensou-se e disse-se que este era o momento mais alto da reflexão filosófica sobre a matemática, depois seguiu-se o julgamento severo segundo o qual os resultados das escolas fundacionais (logicismo, formalismo, intuicionismo) não tiveram sucesso.

Ambos os julgamentos são exagerados, mesmo que o primeiro seja compreensível exaltação no momento do desenrolar da história, pelos protagonistas, enquanto o subsequente julgamento radicalmente negativo é menos justificado, que se baseia tanto em um equívoco técnico quanto na incapacidade de historicizar o fenômeno (tudo é colocado no caldeirão da crise do neopositivismo).

Um dos motivos da primeira exaltação foi a novidade das análises realizadas, e justamente o fato de terem sido realizadas com o instrumento da lógica simbólica ou matemática.

Esta oportunidade pareceu permitir uma investigação mais coerente com a natureza do próprio objeto, e não é por acaso que muito trabalho, mesmo filosófico, tem sido realizado por novos personagens, como as figuras de filósofos lógicos, ou precisamente por matemáticos.

O uso da lógica matemática deu a ideia de que esta era a maneira correta de procurar fundamentos para a matemática, fundamentos que lhe fossem homogêneos e, portanto, verdadeiramente (como as colunas de concreto nas fundações que se estendem até as da estrutura exterior de uma casa).

Mas, ao mesmo tempo, o estudo dos problemas fundamentais da matemática com ferramentas matemáticas, também levou à ideia de que poderia ser possível chegar assim a

⁹ Certamente, por exemplo, sobre o método axiomático: todo matemático que tem a probidade intelectual no coração agora tem a absoluta necessidade de apresentar seu raciocínio de uma forma axiomática. . . com palavras que se esvaziaram de todo o significado intuitivo” (Jean Dieudonné), grifo nosso.

respostas definitivas e certas, definitivas como são os resultados da matemática, e certas como são as certezas da matemática - como ainda se acreditava ser.

Logicismo

A necessidade de uma definição dos números naturais, por um lado, e o problema de eliminar as formas de intuição tradicionalmente ligadas à geometria, quando ela se tornou algo puramente lógico, estão no centro do programa do logicismo.

O matemático Richard Dedekind e o lógico Gottlob Frege são os fundadores desta escola, que não apenas se preocupa (Dedekind) em dar uma definição de números naturais, mas também (Frege) afirma dar uma que reduz toda a matemática a ter um caráter analítico e, portanto, um caráter de necessidade que pode ser verificado pela razão.

A definição de números naturais cruza-se com os problemas da teoria dos conjuntos, que é uma teoria dos conjuntos, e ao mesmo tempo com a questão da natureza e alcance da lógica, porque a lógica deve ser tal que também lide com conjuntos, classes, conceitos de ordem superior. Não pode ser apenas um sistema de regras como o *modus ponens* ou os silogismos aristotélicos. Precisamos de uma lógica que tenha a capacidade de lidar com o mesmo antes de entidades definidas, e uma justificativa teórica convincente de tais possibilidades.

Ao estudar a questão, os lógicos encontraram problemas e relutaram bastante a respeito dos modos como se apresentariam aos matemáticos, em particular sobre a impossibilidade de estender certas leis do finito ao infinito, e da necessidade de certas formas inevitáveis de definições (imprevisíveis) que, no entanto, poderiam gerar antinomias.

Dessa história, que se configurou aproximadamente entre 1870 e 1930, surgiu a teoria axiomática dos conjuntos e da lógica.

A lógica que emergiu desses estudos e aplicações é algo que não pode ser rastreado, em termos de riqueza e profundidade, à lógica aristotélica e escolástica anterior; Foi uma grande conquista intelectual. Mesmo no campo do pensamento, as formas e os instrumentos têm uma data de nascimento, nem sempre ali estiveram disponíveis.

A teoria dos conjuntos continua até hoje, com pesquisas sobre os grandes cardeais, a ser um laboratório para experimentar a noção de definibilidade¹⁰. Por outro lado, o século XX foi o século da linguagem.

¹⁰ A introdução e estudo dos grandes cardeais não pretende ser uma espécie de modelo cosmológico expansivo. Eles são hipotetizados para decidir questões de regularidade da hierarquia projetiva, o único campo em que os matemáticos percebem a relevância da definibilidade, e infinitos grandes interagem com propriedades de definibilidade. Este é um dos mistérios trazidos à luz pela pesquisa lógica.

A Escola de Hilbert e Formalismo

Com a nova lógica à sua disposição, David Hilbert concebeu de forma totalmente original o projeto de usá-la para abordar a questão da coerência das teorias matemáticas (das fundamentais, antes de tudo aritméticas), ao invés de gerar ou expor as matemáticas em si.

O pressuposto do projeto era a formalização, ou seja, a representação das teorias em linguagens simbólicas adequadas, com sintaxe absolutamente rigorosa, de modo que as próprias teorias (teoremas e provas) fossem transformadas em configurações discretas de objetos (símbolos), com a consequente possibilidade de aplicação de métodos matemáticos combinatórios elementares ao estudo de questões lógicas relacionadas a eles.

Os lógicos da escola de Hilbert não eram considerados filósofos tal como são concebidos atualmente. Vejamos como explicam o que é matemática. Eles dizem: nas teorias matemáticas, se formalizadas, os métodos matemáticos podem ser aplicados para (tentar) responder às seguintes questões. Mas muitas vezes são mal compreendidos, porque a tentação de encontrar respostas definitivas, definitivas, está sempre presente, e é precisamente a fonte da filosofia.

Assim, muitos entenderam ou entenderam que Hilbert estava propondo a tese de que a natureza da matemática é formal e que a matemática é feita de maneira formal. Com efeito, há posições filosóficas formalistas que sustentam que a matemática é uma manipulação de signos, como um jogo com regras arbitrárias, e nada mais. O formalismo é frequentemente alvo de críticas ferozes, mas sua força reside na fraqueza (especular) do outro filósofo.

A escola de Hilbert esperava, acima de tudo, demonstrar a natureza não contraditória da teoria dos números reais, colocando assim a palavra ã em dúvidas e discussões sobre a definição (de Cantor e Dedekind) acerca dos reais. Se permanecessem questões subjetivas sobre a natureza e o sentido da construção, ao menos se teria a certeza de não fazer algo descaradamente em vão.

A não-contradição não era, entretanto, a única questão lógica que poderia ser enfrentada via formalização; a decidibilidade foi outra, relevante, e muitos resultados foram obtidos sobre isso.

Do trabalho da escola de Hilbert surgiram os teoremas, negativos para os objetivos hilbertianos, de Gödel.

Em retrospectiva, pode-se argumentar que a impossibilidade do objetivo de Hilbert era previsível, devido a uma espécie de princípio de balanço de energia: queríamos demonstrar a natureza não contraditória da aritmética completa em uma teoria mais fraca. No entanto, a

esperança de Hilbert também parecia a priori bem fundamentada, pois uma vez formalizada a aritmética ela deveria perder todo o seu significado, daí sua força, e ser reduzida a um conjunto de estruturas simbólicas abstratas finitas. A impossibilidade do programa sugere que talvez, de maneira misteriosa, os símbolos nunca sejam completamente despojados de seu significado, ou nunca sejam completamente desprovidos dele, que o significado resida ou espreita nas regras da combinação sintática, e isso pode ser um ponto a favor do formalismo.

No entanto, os resultados limitantes não são a única coisa que se aprendeu com os estudos lógicos; são os mais citados (não necessariamente conhecidos); mas muito mais foi aprendido sobre a própria lógica, como dissemos, sobre semântica, sobre a completude de vários sistemas de regras, sobre a distinção entre lógica de primeira e segunda ordem, e sobre o que pode ser definido em um e não na outra, e quais possibilidades e garantias existem para o desenvolvimento do argumento em uma (recursivamente enumerável) ou na outra (não recursivamente enumerável).

A pesquisa continua, pois não está esgotada. Basta apontar como exemplo uma obra-prima do estudo fundacional que é a análise da aritmética predicativa realizada por Edward Nelson¹¹, que mostra o quanto maior controle, graças aos estudos sobre os fundamentos, temos agora sobre a construção de teorias sobre conceitos matemáticos básicos.

Do mesmo trabalho nasceu a teoria das funções computáveis e das calculadoras, com o que se seguiu. A metamatemática libertou-se da restrição de Hilbert de usar apenas ferramentas combinatórias e teve inúmeras aplicações algébricas importantes. Sem fundamento, sem resposta definitiva, mas um enorme enriquecimento de nossas habilidades de pensamento.

Talvez seja justamente porque as análises do logicismo e da escola de Hilbert foram pesquisas matemáticas, que produziram resultados matemáticos, que não puderam produzir um fundamento, muito menos o fundamento definitivo, absoluto (?) que alguém esperava e cuja impossibilidade ele agora os acusa.

Intuicionismo

O intuicionismo é uma escola que por certo período atraiu muita atenção, ainda que seja, ou por isso mesmo, reacionária; as dificuldades do tratamento clássico do infinito foram consideradas inevitáveis naquele cenário, e foi proposta uma drástica revisão e mutilação não só da matemática abstrata, mas da própria lógica, o que deveria ter evitado a ocorrência de

¹¹ E. Nelson, *Predicative Arithmetic*, Princeton Univ. Press, Mathematical Notes n. 32, Princeton, 1986.

anomalias, mas também de uma declaração de pouco significado ou conteúdo operacional. A matemática clássica era ilusória para Ludwig Brouwer, não tanto errada quanto sem sentido. Foi a linguagem que levou a declarações formalmente corretas, mas sem sentido. Brouwer queria tirar a matemática do domínio da linguagem e, portanto, restava apenas o refúgio no misticismo.

As filosofias que propõem uma revisão ou redimensionamento da matemática acumulada na história, como o nominalismo para dar outro exemplo, nunca são muito bem-sucedidas, exceto por alguns adeptos, muitas vezes fanáticos. Mas o intuicionismo não foi apenas um capricho dos pensadores místicos, que pensam na intuição original do número natural na percepção da passagem do tempo e na divisão da unidade em dois; quando foi revisto por seguidores moderados, e dispostos a usar linguagens simbólicas, produziu, ou melhor, fortaleceu e esclareceu a ideia de demonstração construtiva, e muito de seu ensino ainda é tecnicamente válido. De qualquer forma, Gödel mostrou que a aritmética clássica é interpretável na aritmética intuicionista e, portanto, relativamente não contraditória.

O Bourbakismo

Pode ser que a matemática não precise de fundamentos, mas, independentemente dos problemas mencionados, o grande crescimento das teorias abstratas do final do século XIX e início do século XX (espaços funcionais, variedades geométricas, topologia) precisava de uma organização, ou uma nova organização, que não poderia ser fornecida pela teoria dos conjuntos (outra das novas teorias abstratas¹²).

Isso forneceu uma linguagem confortável e poderosa, mas onde mostrou como toda noção matemática, toda estrutura, era definível em conjunto, realizou um trabalho que é positivamente chamado de reducionismo, e cuja legitimidade e significado são sujeitos a muitas disputas (em todas as áreas da ciência, não apenas da matemática); mas sobretudo não correspondia às necessidades dos matemáticos. Diante da definição de conjunto de uma de suas criações, o matemático não a reconhece mais, como quando as cores são definidas a partir de comprimentos de onda, e o pintor não encontra nelas seus materiais.

A organização e unificação de todo o novo material foi realizada por Bourbaki, em meados do século. A apresentação da matemática de Bourbaki em seus *Elementos* foi útil,

¹² Uma condição operativa rápida da teoria abstrata é que a teoria não fala de números ou funções numéricas ou de figuras.

correta, profunda, mas foi uma organização de cima, um elo unificador entre conceitos mais gerais e sua (com)presença em domínios específicos.

Esses conceitos muito gerais (estruturas parentais topológicas, algébricas e de ordem) não são aqueles encontrados na construção a partir de baixo, no crescimento efetivo de teorias, nem em sua apresentação usual, por exemplo, para não matemáticos em vista de aplicações. O mesmo pode ser dito, porém, da fundamentação categórica¹³.

Diante do perfeito edifício bourbakista, porém, a tentação de trabalhar sobre (ou dentro) essa imensa construção abstrata articulada e autossuficiente como se ela só existisse, e não o mundo real, natural e humano. O resultado é uma imagem um tanto irreal da matemática - perigosa na medida em que também influenciou o ensino escolar - como algo que vive em um hiperurânio platônico.

Da piada de Bourbaki de que os matemáticos são platônicos nos dias de semana e formalistas aos domingos, o pior dos dois mundos foi tirado na construção da imagem da nova matemática: rigidez expositiva e metafísica realista.

Não é por acaso que a partir desse período se difundiu cada vez mais a tendência entre os matemáticos de se declararem platônicos, convencidos da existência objetiva de entidades de natureza diferente da natural. O problema da realidade matemática no platonismo é resolvido com um decreto.

No entanto, o mundo platônico não é o humano. Neste último, a história que se passou sob a ação de homens concretos, entretanto, trouxe novas descobertas e novas atividades, entre as quais um papel de destaque foi e é, o desempenhado pelo computador. Pesquisas permitidas ou induzidas por computadores reviveram uma matemática feita de explorações, testes, conjecturas e - como alguns gostam de apontar - até experimentos. Eles também relataram o cálculo em álgebra, do qual ele havia desaparecido, embora essa afirmação possa parecer incompreensível para um aluno.

No mesmo período, sob a influência de eventos sociais, também nasceram ou se consolidaram novos tipos de interesses e pesquisas que envolviam a matemática, ou novas matemáticas, como a pesquisa operacional, como a estatística, e com sua contribuição (assim como com aquela da ciência da computação) o impulso para a matemática combinatória do

¹³ Unificar conceitos emergentes em diferentes setores em um conceito geral μ é parte integrante e importante do crescimento das teorias matemáticas, mas o conceito geral μ é um ponto de chegada, não pode ser um ponto de partida.

finito foi fortalecido. As novas tendências da filosofia da matemática são colocadas neste contexto.

Os matemáticos se retiram para seu trabalho, que está cheio de problemas interessantes - e eles não têm seu próprio projeto fundacional. Os filósofos, ou pelo menos os conceitos e terminologias filosóficas, voltam a desempenhar um papel de liderança; porém, são conceitos novos, aplicados à matemática, em relação à análise filosófica tradicional que, na problemática ontológica e epistemológica, já disse praticamente tudo o que poderia ser dito¹⁴.

Tendências atuais

Do ponto de vista filosófico tradicional, a ontologia colocava um problema de existência, com entidades matemáticas assumidas como representantes típicos de entidades abstratas; as respostas realistas ou nominalistas da tradição escolástica podem efetivamente ser despejadas no contexto da matemática abstrata; mas o interesse desses rótulos é inteiramente extrínseco; são também declarações de fé, além das posições nominalistas que imporiam uma revisão da matemática, segundo critérios, porém, descendentes de cima, não nascidos da pesquisa e da inclusão da disciplina na vida associada.

Em vez disso, as novas tendências se pretendem ver a matemática como um fato humano. Da mente, ou do hiperurânio, voltamos a colocar a matemática no mundo, não mais o natural, mas o humano, como veremos a seguir.

- *Os Sistemas culturais*

Entre os primeiros a dar essa indicação para um estudo do fenômeno “matemática” foi Raymond Wilder¹⁵. Depois de ter definido os sistemas culturais¹⁶, e de ter reconhecido a matemática como um exemplo particular destes, Wilder introduziu alguns conceitos adequados ao seu estudo, como os de tensão, consolidação, pressão ambiental; formulou, portanto, algumas leis da evolução, relativas à aceitação de um novo conceito, seu enraizamento, sua difusão ou seu isolamento, o papel dos problemas e soluções, a ocorrência de discontinuidades, o fenômeno das antecipações e descobertas múltiplas, e muitos outros, tentando cobrir todos os aspectos de fenômenos importantes na história da matemática.

¹⁴ Isso não significa que não haja contribuições originais, por exemplo, sobre logicismo - ver Shapiro, cit. - mas são variações do tema.

¹⁵ R. L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

¹⁶ Uma cultura é um conjunto de hábitos, rituais, crenças, ferramentas, costumes (valores éticos), linguagem, etc., denominados elementos culturais, possuídos em comum por um grupo de pessoas que estão ligadas por algum fator associativo, a tribos, proximidade geográfica, ocupação.

Mesmo a sociologia da ciência, na versão agressiva recente, tem se interessado pela matemática, mas apenas na tentativa (não convincente) de fornecer uma justificativa convincente para que ela seja um fenômeno completamente social; assim, os sociólogos pensam em eliminar, com a matemática, o contraexemplo mais óbvio à sua tese de que tudo é social e que não há domínio autônomo de abstrações de validade universal¹⁷.

- *O novo empirismo*

Mesmo sem passar explicitamente para uma sociologia dos sistemas culturais, a matemática é considerada por muitos como uma atividade contínua com outras, não radicalmente separada; essa tendência é particularmente evidente no novo empirismo. A filosofia empirista tradicional da matemática visava dar uma explicação e fundamentação do número e dos outros conceitos matemáticos elementares a partir de experiências sensíveis. O novo empirismo não tem essa preocupação genética; ele argumenta, em vez disso, que os procedimentos da matemática, os procedimentos de descoberta e confirmação, não são diferentes daqueles das outras ciências naturais.

Podemos citar nomes de filósofos muito populares, inclusive por suas intervenções em outros campos, como Hilary Putnam:

por métodos quase-empíricos "eu quero dizer métodos que são análogos aos métodos das ciências físicas, exceto que sentenças singulares que são generalizadas por indução", usadas para testar teorias "e similares, são elas mesmas o produto de cálculos em vez de serem observacionais". relata "no sentido usual¹⁸.

O primeiro a usar o termo "quase-empírico" foi Imre Lakatos¹⁹, tirando-o de Euler via George Polya. Lakatos aplicou um modelo emprestado de Popper à "dialética" da matemática, mas teve o mérito de chamar a atenção para a história. Hao Wang também introduziu estímulos interessantes, sob a influência de Wittgenstein. Reuben Hersh, juntamente com Philip Davis²⁰, tem estado entre os que mais contribuíram para compreender esta visão.

¹⁷ Ver D. Bloor, *Knowledge and Social Imagery*, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976-1991; trad. it. *La dimensione sociale della conoscenza*, Raffaello Cortina, Milano, 1994, e a discussão em G. Lolli, Beppe, scienziati e stregoni, Il Mulino, Bologna, 1998.

¹⁸ H. Putnam, *What is Mathematical Truth*, in *Philosophical Papers*, 2 voll., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975; trad. it. *Che cosa è la verità matematica*, in H. Putnam, *Matematica, materia e metodo*, Adelphi, Milano, 1993, pp. 80-98.

¹⁹ Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976; trad. it. *Dimostrazioni e confutazioni*, Feltrinelli, Milano, 1979. Per una discussione, sia di Lakatos sia in generale delle nuove tendenze, si veda Lolli, *Filosofia della matematica*, cit.

²⁰ Ver P. J. Davis e R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Basel, 1981 e R. Hersh, *What is Mathematics*, Really, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997; trad. it. *Cos'è davvero la matematica*, Baldini&Castoldi,

Mas a ideia da presença de experimentos em matemática foi especialmente relançada na filosofia da matemática pelo uso de computadores para demonstrações automáticas, um fato paradoxal, considerando que essas demonstrações são a exaltação da lógica formal incorporada nas máquinas.

Após a prova do Teorema das Quatro Cores, desencadeou-se uma discussão puramente filosófica sobre o argumento *a priori*, que, embora não conclusivo, deu mais fôlego às posições empiristas:

De acordo com [nossa] avaliação, o uso de calculadoras em matemática, como no caso do 4CT, introduz experimentos empíricos em matemática. Devemos admitir que a prova atual não é uma prova tradicional, não é uma dedução *a priori* de uma sentença de algumas premissas. Apresenta-se como uma prova em que existe uma lacuna, que é preenchida com os resultados de uma experiência bem pensada. Esse fato atribui ao 4CT o *status* de primeira proposição matemática conhecida *a posteriori* (não que seja falsa ou duvidosa, mas conhecida de uma maneira particular) e coloca novamente o problema da distinção entre matemática e ciências naturais²¹.

A principal característica das novas abordagens é ver a matemática como um fato histórico e estudar seus mecanismos de formação em andamento. Em geral, exemplos e histórias são muito mais fascinantes do que a apresentação da matemática estabelecida.

Infelizmente, é a prova que muitas vezes desaparece desses relatos, substituída pelo que se chama de prova informal, que se opõe não tanto à formal quanto à própria lógica. Não só a manifestação desaparece, como é até mesmo combatida ideologicamente, devido à sua identificação indevida com o formalismo.

De acordo com Putnam, por exemplo, se a Hipótese de Riemann fosse verificada em um grande número de casos por computador - que na verdade já é $\mu\epsilon$, quão grande deve ser "enorme"? - Então teríamos o direito de dizer que a hipótese foi verificada e que pode ser aceita sem reservas.

Um boato do acampamento contradiz isso:

A partir de hoje, a conjectura [de Goldbach] foi verificada para todos números pares $m \leq 10^{13}$ por H. J. J. de Riele e J.-M. Deshouillers. Há também uma prova de J.- R. Chen (simplificado de P. M. Ross) que qualquer número par suficientemente grande pode ser escrito como a soma $p + q$, onde p $\mu\epsilon$ primo e q $\mu\epsilon$ quase primo, no sentido de q ou $\mu\epsilon$ primo ou $\mu\epsilon$ o produto de dois

Milano, 2001. Per una scelta degli scritti più significativi della tendenza, si veda l'antologia di T. Tymoczko (curatore), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.

²¹ T. Tymoczko, *The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance*, in *The Journal of Philosophy*, 76, 1979, pp. 57-83. Si veda anche G. Lolli, *La Macchina e le dimostrazioni*, Il Mulino, Bologna, 1986.

primos. Com tudo essa evidência positiva, no entanto, nenhum matemático dirá que as conjecturas devem, portanto, ser verdadeiras para todos os m ²².

É parte da composição genética da matemática que

Uma característica exclusiva da matemática é que enquanto parecer possível provar (ou refutar) uma conjectura, os matemáticos a considerarão um problema em aberto, mesmo quando, segundo os critérios das ciências naturais, a evidência não dedutiva em favor do resultado (ou sua negação) *me* esmagadora²³.

Tendências históricas e empiristas se encaminham para esquecer, ou não considerar, o fato de que a dinâmica da construção de soluções e teorias sempre ocorre em um nível lógico e se articula na construção de provas.

A semiótica

A semiótica também tem algo a dizer sobre a matemática, que é uma atividade eminentemente simbólica, ou melhor, seria de esperar que ela tivesse muito a dizer, muito mais do que acontece. Não é apenas o formalismo que sustenta que a matemática faz parte das atividades simbólicas humanas. Ao contrário, o próprio formalismo poderia perder parte de sua aparência fantasmagórica ou gratuita (só se pode brincar com os signos) se fosse integrado a uma análise mais ampla com estudos culturais e sociais relativos à produção de signos.

Existem algumas tentativas de análise semiótica da matemática²⁴, que, no entanto, são invalidadas pela tendência dos autores em assumir a posição ideológica de que "tudo é signo", facilmente revertida em "o signo é tudo", mas no sentido que o signo contém tudo; também perturba a vontade excessiva de controvérsia justamente contra a imagem simulada da matemática, modelada na vulgarização da nova matemática de origem bourbakista, imagem que os linguistas tomam como palha fácil, como se para se impor tivessem de se propor como uma alternativa radical e global a uma degeneração causada pelas outras concepções.

Perspectivas

²² J. Rotman, *Journey into Mathematics*, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1998, p. 4.

²³ M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997, p. 138.

²⁴ B. Rotman, *Mathematics as Sign*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. Ver G. Lakoff e R. E. Núñez, *The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics*, in L. D. English (curatore), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997, pp. 21-89, e una discussione in G. Lolli, "La metafora in matematica", in *La parola al testo*, a cura di G. L. Beccaria e Carla Marengo, Dell'Orso, Alessandria, 2002, pp. 221-32.

A matemática hoje não apresenta problemas conceituais dramáticos; voltamos a uma visão mais pacífica da convivência e colaboração entre diferentes vertentes e pesquisas. A matemática abstrata continua a crescer e se mostrar útil (veja a prova recente do teorema de Fermat). Ele também começou a se alimentar da relação frutífera com a física (veja os *insights* de Edward Witten sobre as invariantes de variedades de quatro dimensões originadas da consideração da teoria quântica de campos).

Ao mesmo tempo, a matemática da matemática finita, discreta ou combinatória, voltou a mostrar sua riqueza e beleza, mesmo em nível educacional.

O computador, mesmo com suas consequências revolucionárias, tem exaltado aspectos já presentes, de um lado o cálculo e a experimentação, de outro o uso da formalização para a automatização de partes do raciocínio.

Se neste contexto não é possível indicar problemas fundacionais prementes, isso é apenas um sinal da vitalidade atual da matemática e de sua boa saúde. Isso não significa que não existam questões interessantes para investigar, e manter sob controle, e não apenas para aumentar nossa compreensão da matemática como um fenômeno da civilização humana. O trabalho originado por Hilbert, sobretudo, nos ensinou que a consideração metamatemática dos procedimentos de demonstração e construção de teorias também tem um impacto positivo na própria matemática. O estudo das fundações tornou-se laicizado.

Referências

BLOOR, D. Knowledge and Social Imagery, The University of Chicago Press, Chicago, 1976-1991

DAVIS, P. J.; HERSH, R. The Mathematical Experience, Birkhäuser, Basel, 1981.

ENRIQUES, F. Il significato della critica del principii nello sviluppo delle matematiche, 1912, ristampato in F. Enriques, Per la scienza, Bibliopolis, Napoli, 2000, pp. 155-72.

HERSH, R. What is Mathematics, Really, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.

LAKATOS, I. Proofs and Refutations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics, in L. D. English (curatore), Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images, Lawrence Erlbaum Associates, London, 1997, pp. 21-89

LOLLI, G. La metafora in matematica, in La parola al testo, a cura di G. L. Beccaria e Carla Marengo, Dell'Orso, Alessandria, 2002, pp. 221-32

- LOLLI, G. Beffe, scienziati e stregoni, Il Mulino, Bologna, 1998
- LOLLI, G. La Macchina e le dimostrazioni, Il Mulino, Bologna, 1986
- LOLLI, G. Philosophy of mathematics, Il Mulino, Bologna, 2002
- NELSON, E. Predicative Arithmetic, Princeton Univ. Press, Mathematical Notes n. 32, Princeton, 1986.
- PUTNAM, H. What is Mathematical Truth, in Philosophical Papers, 2 voll., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975
- RESNIK, M. D. Mathematics as a Science of Patterns, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997, p. 138.
- ROTMAN, B. Mathematics as Sign, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- ROTMAN, J. Journey into Mathematics, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1998, p. 4.
- SHAPIRO, S. Thinking about mathematics, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000
- TYMOCZKO, T. (Ed.). New Directions in the Philosophy of Mathematics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998.
- TYMOCZKO, T. The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance, in The Journal of Philosophy", 76, 1979, pp. 57-83
- WILDER, R. L. Mathematics as a Cultural System, Pergamon Press, Oxford, 1981
- ZELLINI, P. Gnomon, Adelphi, Milano, 1999.

Algumas notas sobre Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática

Antonio Vicente Marafioti Garnica¹
Universidade Estadual Paulista – UNESP

RESUMO

A partir da perspectiva de que o campo da Educação Matemática tem se ampliado consideravelmente, de modo a incorporar novos objetos, metodologias e abordagens, este artigo questiona o papel que as Filosofias “clássicas” da Matemática têm desempenhado no desenho desse campo, principalmente no que diz respeito à constituição de uma Filosofia da Educação Matemática cujo papel deve ser promover a incorporação de práticas, procedimentos e valores que respondam mais efetivamente às demandas do tempo presente e às necessidades da prática pedagógica cotidiana.

Palavras-chave: Prática Científica de Matemática. Prática Pedagógica. Filosofia. Provas Rigorosas.

Some remarks on Philosophy of Mathematics and Philosophy of Mathematics Education

ABSTRACT

From the perspective that the field of Mathematics Education must be open to incorporate new objects, methodologies and approaches, this article questions the role that "classical" philosophies of Mathematics have played in the design of this field, especially in what concerns to the constitution of a Philosophy of Mathematics Education whose role is to support an alternative approach that considers, as one of the most important objectives of the Math Education field, the incorporation of practices, procedures and values that respond more effectively to the demands of the present time and to the needs of daily pedagogical practices.

Keywords: Scientific Practice of Mathematics. Pedagogical Practice. Philosophy. Rigorous Proof.

Algumas notas sobre Filosofía de las Matemáticas y Filosofía de la Educación Matemática

RESUMEN

Desde la perspectiva de que el campo de la Educación Matemática debe estar abierto a la incorporación de nuevos objetos, metodologías y enfoques, este artículo cuestiona el papel que han jugado las filosofías "clásicas" de las Matemáticas en el diseño de este campo, especialmente en lo que se refiere a la constitución de una Filosofía de la Educación Matemática cuyo papel es sustentar un enfoque alternativo que considere, como uno de los objetivos más importantes del campo de la Educación Matemática, la incorporación de prácticas, procedimientos y valores que respondan con mayor eficacia a las exigencias de la época actual y a las necesidades de la práctica pedagógica cotidiana.

Palabras clave: Práctica Científica de las Matemáticas. Práctica Pedagógica. Filosofía. Demostraciones formales.

¹ Doutor em Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro. Professor livre-docente aposentado do Departamento de Matemática da UNESP, Campus de Bauru, SP, Brasil, e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP, Campus de Rio Claro, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Nações Unidas, 11-35/1101, Bauru-SP, CEP 17010-130. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0750-8483>. E-mail: vicente.garnica@unesp.br

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Ainda que a ideia de “clássico”² seja de difícil configuração, são algumas obras clássicas que vão nortear as considerações que faço neste artigo, engendrado a partir de uma revisitação que fiz a essas obras e a alguns textos meus, mais antigos (e nada clássicos), radicados no campo da Filosofia da Educação Matemática. Uma das que revisei foi o *Provas e Refutações*, de Imre Lakatos. Para minha formação, ela foi fundamental não apenas por tratar, de forma direta, simples, clara e contundente de um tema central aos meus estudos de doutorado – as demonstrações formais e o papel dessas demonstrações na formação de professores de Matemática em cursos de Licenciatura –, mas também por sua importância na configuração de uma Filosofia da Educação Matemática, além, é claro, de ser, como já afirmei, um clássico que, como clássico, eu penso, é leitura obrigatória, essencial à formação de todos os que frequentam os campos da Filosofia, da Matemática e da Educação Matemática.

A discussão sobre as demonstrações formais – também chamadas “provas rigorosas” – é, hoje, mais usual, e existem vários trabalhos de pesquisa sobre esse tema. Mas ao final da década de 1980, início da década de 1990, eram ainda pouco usuais, mesmo no cenário internacional, esses estudos, o que ajudou a dar à minha tese de doutorado certa proeminência, vindo ela a servir de referência, com outros textos estrangeiros, aos pesquisadores que, naquele momento, continuariam a se dedicar ao tema. Foi possível a mim, à época, realizar uma varredura bibliográfica bastante ampla e completa aos artigos e livros publicados sobre esse assunto no campo da Educação Matemática e também em campos próximos, como a Filosofia e a Matemática. Junto a isso, deve-se considerar que à década de 1991 os estudos em Filosofia da Educação Matemática ainda eram recentes, e o próprio domínio de uma tal Filosofia estava se constituindo, sem que tivéssemos, ainda, obras de referência. Entre os autores mais mobilizados para abordar as provas rigorosas no terreno da Educação Matemática estavam Nicolas Balacheff e Gila Hanna, que continuam – salvo engano meu – a ser atuais naquelas suas disposições e são, ainda hoje, fontes recorrentes para os estudos sobre esse tema. De Balacheff, especificamente, foi extremamente significativo para mim a reconfiguração da terminologia usada no tratamento das provas e demonstrações³ – longe de ser uma estratégia meramente de linguagem, a reconfiguração tratava, de modo inaugural, de assentar ideias sobre o recurso formal das demonstrações em campos diferentes que não apenas aquele da Matemática profissional, já usual e bastante conhecido, por exemplo, pelas práticas hegemônicas no campo da Matemática e por trabalhos consagrados como os do Grupo Bourbaki, fundadas no projeto euclideano –, enquanto que dos estudos de Hanna vinha a diferenciação (que depois foi bastante mais trabalhada e ampliada por ela, já que num primeiro momento essa diferenciação, embora poderosa, era ainda muito lacunar e pouco fundamentada) sobre as provas que provam e as provas que explicam que, por óbvio, apoiavam e dialogavam

² “Clássico” é um exemplo do que chamamos de “palavras plásticas”, dada a flexibilidade e a maleabilidade do seu uso e o modo (estranho) como parecem servir para uma série de circunstâncias... Ítalo Calvino (um clássico!), que tem um livro sobre clássicos que é também um clássico, enfrenta a dificuldade de definir a palavra. Ele parte de uma caracterização muito bem humorada (um livro é clássico quando dele não dizemos “estou lendo”, mas “estou relendo”) para, depois de feitas mais treze tentativas de apreender algum significado, constatar algo tão óbvio quanto importante: a única razão para ler os clássicos é que ler os clássicos é melhor do que não lê-los...

³ A diferenciação de Balacheff entre explicação, prova e demonstração é bastante conhecida e intensamente mobilizada ainda hoje nos trabalhos em Educação Matemática.

claramente com as disposições de Balacheff. Dos estudos de Hanna que, nesse ponto, ecoavam Davis e Tymoczko, vinha, ainda, a afirmação – que julgo fundamental – sobre serem “privadas” as Filosofias da Matemática como o Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo, posto que elas serviam para caracterizar – e ao mesmo tempo tinham como pano-de-fundo – uma Matemática ideal, defendendo a necessidade de uma teoria “pública”, que tratasse da Matemática como atividade social e, portanto, potencialmente aberta a formas de intervenção, a práticas, a estratégias de elaboração e validação outras que não apenas aquelas do fazer-saber matemático profissional. As atuais considerações sobre a natureza da Matemática Escolar – uma Matemática “distinta”, nascida e alimentada no chão da escola e dos fazeres cotidianos –, que questionam a noção – ainda muito ativa, infelizmente – de que essa Matemática escolar é uma mera transposição, pelas vias da didática, da Matemática profissional (essa tomada como ciência de referência) mostram, já tendo se passado mais de 30 anos, quão potencialmente poderosas eram aquelas proposições de Hanna.

Apoiado nas contribuições desses e de outros tantos autores desenvolvi meu trabalho de doutorado, defendido em 1995, tentando compreender o papel das provas rigorosas na formação de professores de Matemática em cursos de Licenciatura (GARNICA, 1995). A questão central fazia sentido: sendo as demonstrações formais a estratégia fundamental para a produção de conhecimento matemático, e considerando que os professores de Matemática, durante suas graduações, forçosamente passam por disciplinas em que essas demonstrações ocupam papel central como estratégia de ensino, havia (e ainda há), tradicionalmente, uma imbricação entre *produção de conhecimento matemático* (que apenas sob alguns pontos de vista e determinadas restrições são objeto dos professores que atuam majoritariamente nos ensinamentos fundamental e médio) e *produção de estratégias de ensino* (essa, sim, função precípua dos futuros professores). A julgar pelas disposições de Bourbaki, essa imbricação é ainda mais fundamental já que dizer “Matemática” implica dizer “Demonstração/Prova”⁴. Aparentemente, considera-se que o conhecimento sobre a produção de matemática, como feita pelos matemáticos profissionais (em que pese uma certa gradação, já que na prática profissional da Matemática são tratados conteúdos e teorias que não frequentam os bancos dos cursos de Licenciatura), é não apenas necessário, mas suficiente para o desenvolvimento de estratégias de ensino. Isso, que poderíamos caracterizar como um *deslizamento da prática científica sobre a prática pedagógica*⁵, me parecia, deveria ocupar uma posição central nos estudos sobre a formação de professores, e as provas rigorosas desempenhavam (e ainda desempenham) papel fundamental para entender esse deslizamento.

A insistência quanto à existência de uma Ciência de referência (“A” Matemática) que, transposta didaticamente para a escola torna-se uma Matemática escolar, contrariando a ideia de que a Matemática escolar é algo próprio da escola, criada nas tramas das ações pedagógicas e nas circunstâncias *impostas por e definidas no universo escolar*, está indelevelmente imbricada a esse deslizamento de práticas: mantém-se e se reproduz a ideia da Matemática escolar como uma transposição didática de uma ciência de referência exatamente porque a

⁴ “Depuis les Grecs, qui dit matématique dit démonstration; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstration au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs.” (Bourbaki, *Eléments de Mathématique*)

⁵ Para considerações mais aprofundadas sobre esse deslizamento, indica-se o mestrado de Maria Regina Gomes da Silva (SILVA, 1993) – que eu reputo ser um trabalho inaugural sobre esse tema.

prática científica desliza contínua e cotidianamente para a prática pedagógica, e esse deslizamento não é estancado porque não se acredita numa Matemática própria à escola. Assim, nosso papel de educadores matemáticos, em boa parte, tem sido promover formas mais adequadas, mais significativas, mais compreensivas, mais sensíveis, mais humanas, mais delicadas, mais comprometidas, mais... de continuar promovendo esse deslizamento e mantendo a Matemática “de referência” em seu papel sagrado e em seu posto consagrado e inquestionável. Uma manifestação clara disso se dá nos Departamentos de Matemática quando, por exemplo, numa situação de alteração curricular, disciplinas ditas “pedagógicas” podem ser incluídas, excluídas e/ou ter suas cargas horárias modificadas mesmo que de forma radical, sem muita discussão ou entraves, enquanto as ditas disciplinas “específicas” são, sempre, inalteráveis e vistas como “fundamentais”, cujas alteração, adequação ou atualização são “impossíveis”. Sem esse rompimento em relação à concepção de uma transposição didática e, em decorrência (dada a imbricação entre ambos), sem a interrupção (ou, ao menos, uma problematização mais efetiva) daquele deslizamento, a formação de professores e os conteúdos, as abordagens e os valores que se disseminam na escola continuarão alimentando e sendo alimentadas por esse ciclo vicioso que torna a própria Educação Matemática refém daquela Matemática dos matemáticos profissionais que não vêem outra possibilidade de conceber e agir senão a partir de suas próprias certezas, sem qualquer diálogo com o outro e com o diferente. Nesse mecanismo vicioso e viciante, as demonstrações rigorosas ocupam papel central, e a continuidade desse sistema é, de um modo ou outro, defendida por todos, matemáticos e educadores matemáticos e, de um ponto de vista teórico, assegurada até mesmo pela Filosofia da Educação Matemática. Talvez – e essa é uma afirmação mais provocativa que fundamentada – tenhamos que lutar também, como se tem feito em outras frentes, contra essa colonização *intracorporis*, mais silenciosa, menos nítida, que frequente e “naturalmente” temos promovido sem nos darmos conta disso.

A Prática Científica, a Prática Pedagógica e as Provas Rigorosas

Considerando, ao mesmo tempo, esse deslizamento e o fato de que a produção de conhecimento científico de Matemática (restringindo essa expressão, aqui, para a prática profissional da Matemática, como realizada por matemáticos) se dá em condições radicalmente distintas daquela produção de matemática que ocorre tanto nas escolas de ensino fundamental e médio quanto no cotidiano, em situações extraescolares, é importante não só estudar as demonstrações, mas também compreender e caracterizar o que diferencia a prática científica de Matemática da prática pedagógica de Matemática.

De um modo geral, entende-se que os matemáticos profissionais produzem matemática em “estado nascente”, por assim dizer, enquanto os professores de matemática operam a partir de uma matemática já consolidada, mais “básica” (mas nem por isso “mais simples”, a julgar pelas circunstâncias e pela comunidade à qual ela se dirige) e que, embora haja, sempre, um fator de criação no aprendizado de Matemática, em qualquer nível (tanto estudantes do ensino fundamental e médio como matemáticos profissionais em seus grupos de pesquisa são aprendizes e produtores de conhecimento), a Matemática “da escola” é mais frequentemente caracterizada pela reprodução de conceitos matemáticos já consagrados e, nesse sentido,

“elementares”⁶. No mais, a comunidade de matemáticos profissionais é caracterizada pela homogeneidade em vários aspectos (os participantes desse grupo têm formações equivalentes ou próximas; dispõem de uma linguagem depurada e amplamente conhecida e dominada por todos os interlocutores; formam seus grupos a partir de exigências e critérios pré-definidos e acordados pela própria comunidade de que participam e na qual os membros são próximos em seus *backgrounds*, incluindo os do campo social, cultural e econômico; os coletivos de produção de pesquisa são reduzidos e funcionam segundo normas que mais frequentemente são determinadas pelo próprio coletivo ou no coletivo; o acesso a materiais de apoio, espaço físico e obras de referência não são, via-de-regra, problemáticos etc), ao passo em que toda essa homogeneidade se esboroa quando se trata da comunidade escolar, em que os critérios de acolhimento são variados e variantes; as formações (de professores, gestores e estudantes) são as mais diversas possíveis; o domínio da linguagem (tanto no que diz respeito à língua materna quanto à linguagem matemática) varia enormemente de um indivíduo a outro; as condições sociais, econômicas e culturais dos estudantes são plurais, variando incrivelmente de escola para escola e entre estudantes de uma mesma escola; os coletivos escolares são muito distintos em relação não só à heterogeneidade mas também em relação às condições físicas, à quantidade de pessoas e prédios e à administração dos sistemas escolares (variam impressionantemente de escala as escolas, as salas de aula, a quantidade de alunos por sala e por professor, bem como a quantidade, a natureza e a formação prévia do corpo docente administrativo etc) e às normas de funcionamento (há escolas privadas e públicas, e mesmo em escolas de um mesmo grupo há diferenças flagrantes na condução das atividades escolares cotidianas, bem como na legislação que normatiza o oferecimento de vagas, os sistemas de avaliação e promoção etc).

Assim, parece claro que há uma diferença fundamental entre os atores, contextos e modos em que ocorrem a prática científica da Matemática e a prática pedagógica da Matemática. No entanto, os professores continuam a ser formados a partir de cursos e disciplinas que operam tendo como modelo a prática científica, e as demonstrações formais parecem ser um dos vetores, por excelência, para a manutenção e para a promoção dessa distorção. Em síntese, operamos como se todos os estudantes, sejam os do ensino médio, sejam os das Licenciaturas ou os dos Bacharelados, estivessem sendo formados para o exercício da Matemática profissional. São inúmeros e bem conhecidos os estudos que apontam as distorções quanto à natureza da formação do professor, marcando a perigosa confusão e a forçada aproximação que se efetiva, nos cotidianos dos Departamentos de Matemática, entre Bacharelado e Licenciatura mesmo quando a instituição não oferece cursos de Bacharelado, o que torna bastante claro que o Bacharelado não é apenas *uma modalidade* de curso para formar indivíduos com um perfil profissional específico, nem mesmo uma formação equivocadamente vista como “a desejável” para o futuro professor de Matemática, mas *o único modo de formar*

⁶ Elementar é um adjetivo usual em Matemática. Nos tempos revolucionários, ficou marcada, na produção dos livros didáticos franceses, uma nova apreensão ao adjetivo *elementar*. Antes desse período, a expressão *Elementos de...* indicava, mais frequentemente, obras cujo modelo era os *Elementos* de Euclides, ou seja, obras nas quais da apresentação e discussão de uma série de resultados essenciais a uma certa área decorriam outros resultados, também centrais a essa área. O conjunto dessas proposições essenciais com suas decorrências, ao qual algumas vezes vinculavam-se exemplos, constituía o corpo de uma determinada disciplina, seus “elementos” (no sentido euclidiano). Ao final do século XVIII, *Elementos de...* passaram a indicar livros elementares, no sentido mais usual do termo: obras voltadas ao ensino, com os conteúdos básicos de um determinado campo (Aritmética, Álgebra, Geometria etc.). É nesse sentido mais usual que usamos, aqui, o adjetivo “elementar”, sem, entretanto, confundi-lo com “ingênuo”, “simplório”, “natural”, “fácil” ou “desimportante”.

qualquer agente cujo exercício profissional esteja, de um modo ou outro, relacionado à Matemática. Muitas das críticas feitas aos cursos de Pedagogia, que formam professores que também ensinam Matemática, estão enraizadas nessa mesma cantilena: falta-lhes Matemática.

Nos ambientes escolares, as demonstrações deveriam servir – e nisso se assemelham à produção científica – para convencer e justificar, mas há que se defender a necessidade de pensar, aceitar e implementar parâmetros, estratégias e procedimentos que variam enormemente de um campo a outro. Essa constatação já estava presente nos estudos de Balacheff e Hanna, por exemplo, quando esses autores – principalmente em Hanna, com sua diferenciação entre “provas que provam” e “provas que explicam” – expunham a diferença de natureza das provas/demonstrações a depender da comunidade em que ela é mobilizada e de quais objetivos são visados com essa mobilização.

Pouca coisa, entretanto, parece ter se alterado no panorama desde aqueles meus primeiros estudos sobre o papel da demonstração na formação de professores. É importante ressaltar que mesmo as iniciativas que defendem a necessidade de atualizar – principalmente via informática – os modelos de provas, usualmente esbarram na concepção de que as ferramentas computacionais devem servir para desenvolver, ainda que de outro modo – desde que seja um modo aceitável, legítimo, rigoroso – aquela mesma formalização que caracteriza as provas rigorosas das práticas científicas do matemático profissional.

Na prática pedagógica, o estudante precisa ser convencido da validade de um determinado resultado ou procedimento, podendo valer-se de estratégias não-formais (do ponto de vista matemático já que do ponto de vista da Matemática escolar essa diferenciação entre formal e não-formal, como posta classicamente, não significa muita coisa) como recortes, experimentações concretas ou essencialmente indutivas, esboços gráficos (ainda que ingênuos), tentativas e erros que, certamente, estão fora do domínio de ação do matemático profissional em sua prática científica. Não se trata nem mesmo de afirmar que há uma diferença na concepção de rigor se comparadas a prática científica da Matemática (vista como fundamentalmente rigorosa) e as práticas pedagógicas relacionadas à Matemática (tidas como pouco ou nada rigorosas), mas de reconhecer que intuição e rigor são também conceitos a serem problematizados.

Em texto de 1993, Irineu Bicudo partia de um estudo etimológico para afirmar que, na Matemática, bem como na linguagem comum, o rigor tem dupla função – sintática e semântica. Em qualquer linguagem (e eu acentuaria: em qualquer campo de práticas), “ser rigoroso” significa proceder de acordo com as regras de uma gramática que, no caso da Matemática, é a Lógica. Não houve, ainda segundo Bicudo, ao longo dos tempos, uma alteração no conceito de rigor: em Matemática, ser rigoroso continua sendo seguir inflexivelmente os cânones da Lógica, ainda que historicamente tenha se alterado esse sistema gramatical da Matemática. Por decorrência, as práticas pedagógicas, calcadas em outra gramática e postas em ação, na comunicação, a partir da linguagem usual – que por sua vez tem sua própria gramática – são rigorosas, ainda que, nesse caso, impere de forma muito mais decisiva a intuição e a negociação de significados.

Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática

Esse estado de coisas no cenário dos estudos relacionados à “prova rigorosa” e ao ensino de Matemática – à formação do professor de Matemática, mais especificamente – envolve as filosofias clássicas da Matemática e certamente ecoará nas tentativas iniciais de se caracterizar uma Filosofia própria da Educação Matemática mais alinhada às necessidades de um campo que, nas décadas de 1980 e 1990, era visto como interdisciplinar, tendo como foco os momentos, os espaços, os fazeres e a história de uma Matemática Escolar. Melhor colocando, parece ser mais sensato pensar a Educação Matemática como um campo de estudos e práticas que tem como foco algo chamado Matemática que se manifesta em situações/momentos de ensino e aprendizagem⁷. A alteração na concepção da natureza da Educação Matemática também será um ingrediente importante no cenário deste meu artigo.

Muito já se discutiu sobre a Educação Matemática ser um campo de estudos cujo objeto é multi/interdisciplinar⁸ – sendo essa uma aceção que vai além daquela mais antiga, em que se caracterizava a Educação Matemática como campo multi/interdisciplinar. Ser seu objeto inter/multidisciplinar implica que o próprio objeto exige que, para seu tratamento, diversas óticas interajam. Assim, nessa perspectiva, ao contrário da anterior, não cabe ao pesquisador optar por implementar ou não a inter/multidisciplinaridade, não cabe a ele optar por ser ou não integrador de várias perspectivas: é nosso próprio objeto de pesquisa que exige isso, e essa exigência torna os pesquisadores em Educação Matemática buscadores de fundamentações outras, necessariamente sistematizadores e integradores que frequentam os mais distintos campos do conhecimento para nutrir-se de práticas e teorias, algumas das quais, inclusive, nos são inéditas, distantes ou mesmo estranhas, dada nossa formação inicial específica. O mesmo se aplica às práticas didáticas e pedagógicas relacionadas à Matemática, e não apenas ao campo de pesquisa da Educação Matemática: é preciso estabelecer, sempre, diálogos múltiplos pois o próprio objeto dessas práticas assim exige. Não se pode reduzir os fazeres relativos ao ensino de Matemática à problematização quanto aos objetos da Matemática escolar, desconsiderando o cenário turbulento, amplo, caótico e diversificado em que esse objeto é tratado: as instâncias “escolares”, considerando como “escolares” quaisquer ambientes, formais ou não, em que se ensina e/ou se aprende Matemática e em que se formam e atuam agentes que têm por função promover essa cultura “escolar” específica. Considerar o cenário mais amplo em que estão imersos os que aprendem e ensinam Matemática implica trazer, para o campo da Educação Matemática, objetos outros, que devem ser tematizados e problematizados como objetos próprios da Educação Matemática, posto que o “ambiente escolar” não se reduz aos locais e

⁷ Pode-se dizer que a Educação Matemática é um campo de ação e de pesquisa que tem como objeto o ensino e a aprendizagem de Matemática, envolvendo, assim, tanto um componente teórico quanto um acervo de práticas. Ainda que mais usualmente se tenha como referência o ambiente escolar formal (a sala de aula, a instituição escolar, as disciplinas, programas etc), a Educação Matemática deve ser concebida em sentido mais amplo, incorporando também ambientes (os informais) em que ocorrem situações de ensino e aprendizagem de Matemática, bem como ambientes em que ocorrem práticas culturais que podem ser chamadas de Matemática ou que podem ser aproveitadas para o ensino e a aprendizagem de Matemática (a Etnomatemática, por exemplo, é uma área da Educação Matemática que tem como foco essas práticas culturais). Mais que isso, atualmente se considera importante ampliar o escopo desse campo para inscrever, nos domínios dessa Educação Matemática, também outros ambientes, situações, problematizações etc relacionados àqueles que ensinam e/ou aprendem Matemática, com o que se ampliaria o acervo de objetos, metodologias e abordagens que caracterizam essa região de pesquisa e de ação. Também as práticas relacionadas ao ensino de Matemática, mesmo aquelas desempenhadas por profissionais que não têm, em princípio, vínculo com a pesquisa acadêmica usual e/ou formação matemática específica, estão inscritas nesse domínio conhecido por Educação Matemática.

⁸ Cf. Baldino (1991)

momentos em que se discute Matemática, e a vida dos agentes que praticam Educação Matemática também não se restringe a esses espaços “escolares”. Há sempre uma *hubris*, um excesso, que leva o ambiente escolar para o mundo e que, em composição, traz o mundo para o universo “escolar”. Professores, professoras e estudantes participam de uma sociedade que exige, cada vez mais, compromissos de natureza política: é preciso, por exemplo, compreender e posicionar-se frente às dinâmicas das políticas públicas (ou, como ocorre atualmente no Brasil, face à ausência de políticas públicas) relativas à saúde, ao bem-estar social, à família, ao meio ambiente, à diversidade, à economia, à educação, à violência urbana etc. É urgente tematizar as noções de gênero, as sexualidades, a equidade, a inclusão. Esses temas não serão abordados de modo significativo se apenas uma ou outra linha de pesquisa em Educação Matemática se ativer a eles, e serão ainda menos relevantes se essas linhas específicas se comprometerem com eles de acordo com alguma conveniência local, específica, circunstancial ou pontual. Esses temas não serão abordados convenientemente, de modo significativo, se nas escolas eles se tornarem objeto de discussão apenas em momentos específicos, localizados, festivos, especiais. É preciso que se inicie um movimento que vise a expandir as fronteiras sobre que o entendemos como sendo os objetos da Educação Matemática, ainda que esse movimento nos aproxime de temas e abordagens que não são, em princípio, reconhecidos como próprios à Educação Matemática, mas atinentes a outras áreas do conhecimento. É preciso permitir que questões e objetos outros frequentem nosso campo de pesquisa e nossas práticas docentes e que isso seja visto como uma atitude legítima na área e pela área da Educação Matemática, pois mais importante do que caracterizar uma área a partir de seus objetos é cuidar de formar agentes que possam atuar de modo responsável, pela pesquisa e/ou pelo ensino, no mundo em que vivemos.

Assim, esse movimento de reconfiguração do próprio campo da Educação Matemática refletirá, necessariamente, nas fundamentações mobilizadas para tratarmos dele. Do mesmo modo como os estudos sobre a prova rigorosa impactam (e são impactados) pelos estudos filosóficos e pela, digamos, criação de uma Filosofia da Educação Matemática, também vão impactar essa Filosofia específica a natureza da área e a necessidade de estender e flexibilizar nossas compreensões acerca de nossos objetos de pesquisa, dos nossos fazeres profissionais como professores de Matemática ou pesquisadores voltados a compreender os momentos, os cenários, os contextos em que se dão o ensino e aprendizagem de Matemática. Cabe, então, ainda que de modo bastante breve, retomar os primeiros estudos sobre a constituição de uma Filosofia da Educação Matemática, pois o restante deste meu texto será dedicado a uma crítica sobre algumas dessas filosofias.

O primeiro estudo de que temos notícia sobre esse tema é a tese de doutorado de Eric Blaire, defendida na Universidade de Londres, em 1981. A esse estudo seguiu-se o bastante conhecido livro de Paul Ernest – *The Philosophy of Mathematics Education* –, de 1991. No Brasil, essa preocupação quanto a uma filosofia da Educação Matemática, ressoando estudos específicos desenvolvidos por alguns pesquisadores, brasileiros e estrangeiros, toma corpo com a publicação do livro *Filosofia da Educação Matemática*, de 2001. Essa é, certamente, uma listagem lacunar⁹, servindo apenas para dar um panorama geral de que os estudos que

⁹ Muitos se ressentirão da ausência, nesse levantamento, de estudos como os de Freudenthal; dos trabalhos sobre o Modelo dos Campos Semânticos, de Romulo Lins; do livro *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, de Ole Skovsmose,

inicialmente configurariam o acervo que temos, hoje, de pesquisas e obras sobre Filosofia da Educação Matemática, começam a tomar corpo no entorno da década de 1990.

O trabalho de Paul Ernest é, ainda hoje, uma referência recorrente, e nele veremos uma face daquela aproximação entre prática científica e prática pedagógica da qual tratamos anteriormente. Construtivismo Social é o nome que Ernest dá à uma Filosofia da Matemática radicada, principalmente, em Lakatos e em Wittgenstein, que servirá de fermento para uma Filosofia da Educação Matemática. Para atender minhas intenções e apresentar com mais acuidade – nos limites desse texto – a proposta da Ernest, daremos atenção a Lakatos – que está no entrecruzamento de vários temas já trazidos à cena aqui, como a Filosofia da Matemática, a Filosofia da Educação Matemática, o Formalismo e as Provas Rigorosas –, deixando Wittgenstein para um outro momento.

Lakatos e o Construtivismo Social em Educação Matemática

A Filosofia da Matemática que chamamos de Quase-Empiricismo é um projeto que parte das teses críticas de Lakatos, mas que ele próprio não sistematizou como base filosófica. Davis e Hersh expõem claramente isso ao afirmar que, no *Provas e Refutações* – sem dúvida o texto mais conhecido de Lakatos – ouvimos as personagens criadas pelo autor mas não propriamente o autor. Segundo eles, Lakatos nos mostra a Matemática como ele a vê, mas não torna explícitas as consequências plenas do que nos está mostrando. Em vez disso, afirma sua importância somente em sentido crítico, especialmente em um ataque total e feroz ao formalismo (DAVIS e HERSH, 1985). Às críticas de Lakatos juntam-se as apreensões de Polya e Popper para que se estabeleça a chamada abordagem falibilista. De Popper, Lakatos vai incorporar dois conceitos principais: aquele que fala de uma “tecnologia de ação gradual”, e o de uma “lógica das situações”¹⁰. De Polya, Lakatos abraça a heurística como “arte da procura”. Das teses críticas de Lakatos, apoiadas em Polya e Popper, portanto, surge o que hoje chamamos de “a filosofia falibilista do quase-empiricismo”, tida como uma Filosofia da Matemática.

Já na introdução do *Provas e Refutações* Lakatos ataca o formalismo, caracterizando-o como a “escola de filosofia matemática que tende a identificar a matemática com sua abstração axiomática formal e a filosofia da Matemática como metamatemática” (LAKATOS, 1978, p. 13-14). Sob a égide desse estado de coisas, orbita-se, segundo Lakatos, entre o racionalismo mecânico e o irracionalismo da suposição, donde resulta enfraquecida a tese da existência de uma matemática viva que trafega em espaço e tempo contextualizados historicamente.

A forma como Lakatos defende seus pontos de vista é extremamente criativa: ele constrói como que um estudo de caso de natureza historiográfica sobre a conjectura Descartes-Euler, encenando, no cenário fictício de uma sala de aula, a discussão em que professor e alunos assumem as posições historicamente defendidas por matemáticos ao longo do tempo até que se

entre outros tantos textos e autores. Não é minha intenção tornar essa listagem extensa, muito menos completa, mas apenas apontar alguns exemplos, talvez mais abrangentes, de modo a marcar um momento no campo da Educação Matemática.

¹⁰ Esses conceitos são expostos no *A Miséria do Historicismo*, de Popper, publicado em 1957. A tradução dessas expressões aparece de forma um pouco distinta no *Provas e Refutações* (edição brasileira): “tecnologia de ação gradual” aparece como “tecnologia por partes”, enquanto “lógica das situações” é traduzida como “lógica do descobrimento” ou “lógica situacional”. Uma caracterização muito rápida (e, por decorrência, muito superficial) da obra de Popper é aquela segundo a qual é a possibilidade de falsificar uma hipótese científica que permite a correção e o desenvolvimento das teorias científicas e, em última análise, o progresso da ciência. Nenhuma teoria pode ser fundamentada de forma conclusiva. O próprio título da mais conhecida obra de Lakatos é uma homenagem ao *Conjecturas e Refutações*, livro de Popper publicado em 1963.

estabelecesse, de forma mais estável, uma definição de poliedro e, conseqüentemente, a equação $V-A+F=2$ e sua prova nos moldes como hoje a vemos, em linhas gerais, nos materiais didáticos. Nas discussões entre professor e alunos vão surgindo posições conflitantes (muitas vezes defendidas por um mesmo aluno) e vão sendo engendrados modos de transcender conflitos num movimento de correções de fluxo que estabelece definições e formalizações que, embora sejam mais estáveis, foram obtidas como resultado de um longo e tortuoso processo de formulações e reformulações historicamente elaboradas e abandonadas. Mostra-se, assim, em resumo, que essas idas e vindas (em que se encadeiam proposições/conjecturas, experimentação, provas, exemplos, contraexemplos, refutações, do que resultam novas proposições/conjecturas, com novas experimentações, novas provas, exemplos e contra-exemplos etc) metaforizam como se dá a construção do conhecimento matemático.

Dentre os méritos de nossa comunidade científica não está, certamente, o cuidado com a tradução de seus clássicos, e o *Prova e Refutações* é um exemplo emblemático disso: a primeira versão inglesa da obra, na forma de livro, foi publicada pela Cambridge University Press em 1976 – dois anos após o falecimento de Lakatos – e a edição brasileira, hoje esgotadíssima, traduzida por Nathanael Caixeiro, surgiu, publicada pela Zahar Editores, já em 1978. Trata-se, entretanto, de uma edição ruim, menos pela tradução do que pelos inconvenientes de diagramação e revisão, com recurso gráficos muito singelos e que, até hoje, não foi nem republicada nem retraduzida. A tese de doutorado de Lakatos – o *Provas e Refutações*, mais propriamente – compõe a primeira parte do livro. A ela foram anexados pelos organizadores (J. Worrall e E. Zahar) mais um texto e dois apêndices nos quais Lakatos trabalhava quando de sua morte prematura aos 51 anos.

As disposições do *Provas e Refutações*, bem como o que hoje chamamos mais genericamente de Falibilismo ou Quase-Empiricismo lakatosiano, exercem um enorme fascínio nos educadores matemáticos, principalmente por conjugar uma crítica ao formalismo a uma versão operacional muito bem executada e bem-sucedida da heurística de Polya, ele também um autor bastante referenciado, ainda hoje, nos estudos em Educação Matemática, mais especificamente no campo da Resolução de Problemas. Ainda que Lakatos tenha ocupado cargo de alto escalão no Ministério da Educação da Hungria, ele não trata de ensino de Matemática ou de Educação científica nesse seu texto mais conhecido. Quaisquer ilações nesse sentido são temerárias. Entretanto, como eu mesmo fiz em um artigo publicado em 1996, talvez seja possível listar algumas contribuições dessa obra para os estudos em Educação Matemática. Conhecer o *Provas e Refutações* pode motivar e fundamentar a aplicação da heurística de Polya para a sala de aula de Matemática, bem como pode servir de exemplo das potencialidades do uso da história como auxiliar didático-pedagógico. Além disso, o texto é um potente recurso para, ao menos, problematizar posições formalistas ao mesmo tempo em que traz elementos para se esboçar uma classificação do que seria uma matemática formal e uma matemática não-formal, ao optar pela segunda em situações de ensino. O texto ainda nos ajuda a criar uma contra-argumentação às posições que defendem o dogmatismo, o absolutismo, a certeza, a infalibilidade e a inquestionabilidade da Matemática.

Paul Ernest, entretanto, foi além. Seus estudos para criar as bases de uma Filosofia para a Educação Matemática o levam a ter Lakatos e Wittgenstein como centrais ao que ele chama de Construtivismo Social. Conjugando o Quasi-Empiricismo lakatosiano ao Convencionalismo de

Wittgenstein pode resultar em mistura um tanto indigesta para alguns. Davis e Tymoczko, autores aos quais já nos referimos, afirmam que as filosofias tradicionais do Logicismo, do Formalismo e do Intuicionismo são “teorias privadas” da Matemática (Ernest as classifica como Absolutistas) por descrever uma Matemática ideal (posto fiar-se na ideia de uma verdade absoluta). Sendo, porém, uma atividade social, a Matemática necessitaria de uma “teoria pública” ou, segundo Ernest, de uma teoria fundante embebida num Falibilismo que se aproveita das considerações linguísticas de Wittgenstein: o Construtivismo Social. O processo de Ernest é direto: analisando cada uma das filosofias da Matemática clássicas, ele pretende encontrar aquela que poderia servir à criação de uma Filosofia da Educação Matemática, que daria conta de alguns problemas tidos como essenciais para nortear a definição/delimitação de um campo específico de conhecimento. As filosofias absolutistas – aquelas de caráter privado, segundo a caracterização de Davis e Tymoczko – não passam no teste. Resta, então, amalgamar Falibilismo e Convencionalismo de modo a criar o Construtivismo Social como sendo a Filosofia da Matemática que servirá para apoiar a criação de sua Filosofia da Educação Matemática que traria respostas a questões como “O que é Matemática?”, “Quais são seus objetos?”, “Quais considerações filosóficas, ainda que implicitamente, fundam seu ensino e aprendizagem?”, “Quais são as epistemologias e as teorias de aprendizagem assumidas?”, “Quais os objetivos da Educação Matemática?”, “São eles válidos?”, “Para quem?”, “Baseados em quais valores?”, “Que meios são adotados para chegar a esses objetivos?”, “São consistentes os fins e os meios?”. Em outras palavras, ao empreender essa tarefa de propor uma Filosofia da Educação Matemática, Ernest busca inspiração, para compreender a Matemática da qual a Educação Matemática trata, nas Filosofias da Matemática. Certamente as Filosofias da Matemática podem nos falar sobre a Matemática, mas, do meu ponto de vista, é um equívoco acreditar que só as Filosofias “clássicas” da Matemática (o formalismo, o intuicionismo, o construtivismo, o logicismo, mesmo o falibilismo e o Convencionalismo) podem nos falar sobre a Matemática. Essas filosofias podem ainda menos falar sobre a Matemática da Educação Matemática. Mesmo o Quasi-Empiricismo lakatosiano, um dos fermentadores da Filosofia da Educação Matemática de Ernest, embora seja uma Filosofia falibilista da Matemática, está longe de desempenhar o papel de uma “teoria pública”, como bem nos mostra Virgínia Cardoso. Embora Lakatos consiga, pautado no Falsificacionismo popperiano, denunciar a verdade absoluta como uma quimera, essa teoria continua sendo internalista e inadequada para servir como “base epistemológica em estudos na Educação Matemática que consideram (a) uma tendência humanizadora no ensino, (b) a relação entre Matemática e outros campos do saber e (c) a Matemática como produto cultural humano. Há que se repensar, portanto, o tributo que uma Filosofia da Educação Matemática, nesses termos propostos por Ernest, presta à Filosofia da Matemática (CARDOSO, 1998).

Em resumo...

Considerando a Educação Matemática como uma região interdisciplinar, cujo objeto é também, por sua vez, interdisciplinar, e cujas práticas são fronteiriças a diversas áreas, sendo impossível mesmo determinar como e em que medida cada uma dessas diferentes componentes influencia a Educação Matemática, e estando também em movimento um processo de desestabilização e corrosão de fronteiras, visando a criar poros que as dissolvam de modo a

agregar à Educação Matemática novos objetos, métodos e abordagens teóricas, parece sensato perguntar: quais as vantagens de submeter-se a tributo tão caro exigido pelas filosofias clássicas da Matemática para constituir uma Filosofia da Educação Matemática que “nos explique”? A mim não parece ser nem possível, nem necessário ou adequado estabelecer tal Filosofia da Educação Matemática “de fora para dentro”. Não é esse, penso eu, o caminho para resolver o deslizamento da prática científica sobre a prática pedagógica do qual tratei anteriormente. Cabe, então, propor uma Filosofia da Educação Matemática elaborada em um movimento indutivo-descriptivo (GARNICA, 1999), originado nas práticas de ação tanto de professores quanto de pesquisadores do ensino de Matemática que, ao fim e ao cabo, objetivam produzir, cotidianamente – e efetivamente o fazem – Educação Matemática. Mas isso que poderíamos chamar de uma Filosofia Indutiva da Prática como uma Filosofia da Educação Matemática só tem já esboçadas algumas considerações iniciais, muito pouco sistematizadas, do que resulta que muitos outros textos devem ser pensados e escritos para melhor, ou minimamente, caracterizá-la.

Por fim, é importante reconhecer que, sendo papel da escola não meramente respeitar a diversidade, mas promovê-la, é urgente ampliar o papel da Educação Matemática no sentido de promover essa diversidade não apenas no que diz respeito ao entorno da escola, mas também internamente, no que diz respeito aos seus objetos, do que resultaria abraçarmos concepções distintas sobre o que a Matemática é e de como se cria e se sustenta uma Matemática escolar. Disso podem surgir novas Filosofias da Educação Matemática e pode mesmo surgir uma Educação Matemática que não seja refém de uma suposta Matemática que, como um farol a nos servir de referência, guia, mas compromete e limita, nossas práticas e perspectivas.

REFERÊNCIAS

- BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, 18, p.147-176, 1987.
- BALDINO, R.R., A interdisciplinaridade na Educação Matemática. **Didática**, v. 26/27, pp. 109-121, 1991.
- BICUDO, I. Análise não-standard. **BOLEMA**, 8, p. 60-67, 1992.
- BOURBAKI, N. **Theorie des ensembles** (Livro I). Paris: Hennann & Cie, 1954.
- CALVINO, I. **Por que ler os clássicos**. São Paulo: Cia das Letras, 1993.
- CARDOSO, V.C. **As teses falibilista e racionalista de Lakatos e a Educação matemática**. 1998. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Rio Claro, 1998.
- DAVIS, P. J. Fidelity in mathematical discourse: one plus one is really two? **The American Mathematical Monthly**, 79(3), p. 252-263, 1972.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics Education**. Nova Iorque: Falmer Press, 1991.

GARNICA, A.V.M. **É necessário ser preciso? É preciso ser exato? Um estudo sobre argumentação Matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação**. CURY, H.N. (org.). *Formação de Professores de Matemática: uma visão multifacetada*. Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

GARNICA, V. M. (1999). **Filosofia da educação matemática: Algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa**. In M. A. BICUDO, M.A.V. (Org.) *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

GARNICA, A.V.M. Lakatos e a filosofia do Provas e Refutações: contribuições para a Educação Matemática. **Educação e Sociedade**, ano XVII, n. 56, pp. 431-451, 1996a.

GARNICA, A.V.M. Da literatura sobre a Prova Rigorosa em Educação Matemática: um levantamento. **Quadrante**, Vol. 5, n. 1, 1996b.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática**. 1995. Tese (Doutorado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Rio Claro, 1995.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**, 21(1), p. 6-13, 1990.

HANNA, G. More than formal proof. **For the Learning of Mathematics**, 9(1), p. 20-23, 1989.

HANNA, G. **Rigorous proof in Mathematics Education**. Toronto: OISE Press, 1983.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

POPPER, K. **Conjecturas e Refutações**. Brasília: UnB, 1972

POPPER, K. **A miséria do Historicismo**. São Paulo: Cultrix, 1993

SILVA, M. R. G. **Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática**. 1993. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Rio Claro, 1993.

Platonismo, De Re e (Filosofia da) Prática Matemática¹

Marco Panza²

CNRS, IHPST (CNRS e Universidade de Paris 1, Panthéon Sorbonne)

Chapman University

RESUMO

No presente artigo, expõe-se uma versão acerca do platonismo voltada para uma filosofia da prática matemática, qual seja (tal versão) a de que a matemática pode ser adequadamente explicada como uma atividade intelectual que trata de conteúdos abstratos individuais sui generis, fixados de modo a serem capazes de nos permitir um acesso epistêmico de re a eles. Busca-se deixar claro que essa versão não tem estritamente nada a ver com a existência de tais conteúdos (nem com a veracidade de algumas afirmações sobre eles). Ou melhor, o autor do texto não só não afirma a existência de objetos matemáticos, mas também não a nega.

Palavras-chave: Platonismo. Objetos Matemáticos. De Re. (Filosofia da) Prática Matemática.

Platonism, De Re and (Philosophy of) Mathematical Practice

ABSTRACT

This article presents a version of Platonism focused on a philosophy of mathematical practice, namely (such version) that mathematics can be adequately explained as an intellectual activity that deals with sui generis individual abstract contents, fixed in so as to be able to allow us de re epistemic access to them. It is intended to make it clear that this version has nothing to do with the existence of such contents (nor with the veracity of some statements about them). Or rather, the author of the text not only does not affirm the existence of mathematical objects, but also does not deny it.

Keywords: Platonism. Mathematical Objects. De Re. (Philosophy of) Mathematical Practice.

Platonismo, De Re e (Filosofia de la) Prática Matemática

RESUMEN

Este artículo presenta una versión del platonismo centrada en una filosofía de la práctica matemática, a saber (dicha versión) que las matemáticas pueden explicarse adecuadamente como una actividad intelectual que se ocupa de contenidos abstractos individuales sui generis, fijados en tal forma que nos permitan acceso epistémico de re a ellos. Se pretende dejar claro que esta versión nada tiene que ver con la existencia de tales contenidos (ni con la veracidad de algunas afirmaciones sobre los mismos). O mejor dicho, el autor del texto no sólo no afirma la existencia de los objetos matemáticos, sino que tampoco la niega.

Palabras clave: Platonismo. Objetos Matemáticos. De Re. (Filosofía de) la Práctica Matemática.

¹ Artigo traduzido por Lênio Fernandes Levy para fins didáticos.

² Agradecimentos a: Jeevan Acharya, Annalisa Coliva, Silvia De Toffoli, Michele Friend, Giovanna Giardina, Peter Jipsen, Alex Kurz, Abel Lassalle Casanave, Fabio Minazzi, Andrew Moshier, Michael Otte, Andrea Sereni, Stewart Shapiro, Daniele Struppa, Ed Zalta, dois árbitros/pareceristas anônimos e inúmeros outros amigos e colegas.

Preâmbulo

Mencionar platonismo e *de re* (atitude) no título de um texto sobre a filosofia da prática matemática pode surpreender alguns adeptos dessa última. Enquanto o platonismo pode ser visto como uma opção metafísica, a distinção entre atitudes *de re* e *de dicto* pode parecer algo pertencente à filosofia analítica da linguagem. Esses fatos podem ser considerados suficientes para tornar a filosofia da prática matemática alheia, sobretudo, a tais noções. Ao concordar com essa visão, ao relatar uma versão anterior do meu ensaio, um árbitro anônimo qualificou-o como “uma peça ultraconservadora na filosofia da prática matemática”. A razão para isso é que não teria dito “nada sobre a prática matemática, havendo divórcio radical quanto às aspirações de alguns pioneiros da filosofia da prática matemática, como os membros do PhiMSAMP (LÖWE e MÜLLER, 2010); nem teria concordado com o entendimento conservador de Mancosu (2008) acerca da PMP (Filosofia da Prática Matemática) como exploração de novas questões filosóficas sobre a matemática”.

Essa avaliação me fez decidir escrever o presente preâmbulo, cuja ausência poderia tentar alguns leitores a concordar com tal julgamento, interpretando mal, então, o propósito do meu ensaio.

É verdade, certamente, que aqui exploro uma questão tradicional (ou “ultra”-tradicional) para a filosofia da matemática: tão tradicional que remonta à filosofia grega antiga. No entanto, ser novo não é um valor obrigatório, nem para boas questões filosóficas, nem para abordagens filosóficas frutíferas. Uma investigação filosófica muitas vezes se torna valiosa e inovadora por causa da maneira como questões tradicionais são reafirmadas e abordadas por conta das respostas provisórias que derivam de abordagens consagradas pelo tempo. Certamente não me compete dizer se a investigação que apresento aqui é valiosa e inovadora. O que eu posso dizer é que ela aspira a sê-lo pela seguinte razão: visa a utilizar uma distinção bem estabelecida, ou seja, a distinção entre atitudes *de re* e *de dicto*, para responder a uma pergunta tradicional de forma supostamente original.

Também é verdade, certamente, que aqui não exploro nenhum aspecto ou episódio específico de prática matemática. Promover e suscitar explorações semelhantes não é, no entanto, o único propósito da filosofia da prática matemática (pelo menos, como eu a entendo). Um propósito igualmente importante é explicar alguma característica geral essencial dessa prática, ao insistir que o termo “matemática”, em “filosofia da matemática”, deveria representar: a atividade humana de fazer matemática. Essa atividade tem aspectos sociais e materiais, mas não é por causa deles que ela é uma atividade matemática. O que a torna uma atividade matemática são os seus modos de ser uma atividade intelectual. Tal fato é primordial, e com ele a filosofia da prática matemática contabiliza requisitos para caracterizar-se como algo específico da atividade intelectual que realizamos ao fazermos matemática, destacando-se a questão de sabermos o que a torna uma atividade matemática por natureza. Essa é apenas a questão que exploro (parcialmente, é claro) em meu ensaio. E é justamente por tal motivo que considero o presente ensaio, no sentido pleno do termo, uma peça de filosofia da prática matemática – se (ultra) conservadora ou não, deixo para os leitores decidirem.

Mais do que ter uma história, a atividade matemática é (ou gera) uma história. Como de modo algum penso que a filosofia da matemática deva ter qualquer dever normativo em relação à própria matemática, considero essa história, propriamente falando, o que o termo

‘matemática’ deveria significar em ‘filosofia da matemática’. Estabelecer o que e como a matemática deveria ser é uma questão para matemáticos profissionais, não para filósofos. Menos ainda, é um dever dos filósofos estabelecer se algo pertence ou não à matemática. Em particular, filósofos da matemática não têm o direito de decidir o que realmente existe (ou aconteceu e acontece) e que se consideraria como matemática, nem o que é genuinamente matemático e o que não o é, entre tudo aquilo que existe (ou aconteceu e acontece), e que matemáticos e historiadores profissionais da matemática chamam por esse nome (quer dizer, designam de matemática).

Na minha opinião, a filosofia visa a, essencialmente, dar conta de realidades independentes (a menos que se trate de algum tipo de metafilosofia, o que pode acontecer, é claro, legitimamente, em alguns casos). Isso é até óbvio, parece-me, quando se tem a filosofia de alguma coisa, como a filosofia da matemática. Para que a filosofia seja a filosofia de algo, esse algo deve estar disponível para sua investigação. Essa investigação pode (ou mesmo não pode evitar) moldar esse algo, assim como a ciência faz com a realidade que estuda. Mas essa conformação é apenas uma parte essencial de explicar, de explicar como é, de soletrar fora, não de estabelecer como isso deveria ser, ou o que existe para formar essa realidade, e o que não existe.

Argumentar a partir dessas teses é, a meu ver, o mesmo que promover uma virada prática na filosofia, se houver uma que se possa promover. Por isso, se a filosofia da prática matemática deve fazer parte dessa virada, ela tem que nos dizer que algo é esse (a que ela se destina como filosofia) a que se dá o nome de ‘matemática’. Quando digo que o termo ‘matemática’, em ‘filosofia da matemática’, deve representar o fato histórico da atividade matemática, simplesmente quero dizer que esse algo não deveria ser nada além desse fato histórico: o que essa atividade foi e é hoje. Esse fato torna a interseção da história com a filosofia da prática matemática não apenas bastante rigorosa, mas essencialmente constitutiva: a filosofia da prática matemática é, a meu ver, a filosofia de um fato histórico.

Ainda assim, não há necessidade, espero, de referir-me a Croce (o filósofo historicista *ex excellentia*), por observar que história (*res gestæ*) não é o mesmo que historiografia (*historia rerum gestarum*). Essa conexão constitutiva não denota que a filosofia da prática matemática é a mesma coisa que a história da matemática, no sentido usual em que “história” erroneamente significa “historiografia” (e que, então, filósofos da matemática erroneamente significam historiadores dela). História (nesse sentido, isto é, entendida como historiografia) reconstrói os fatos e relatos relevantes por meio de seus aspectos específicos e detalhados. A filosofia dá conta das características gerais, do modo de ser, da peculiaridade que os torna fatos matemáticos. A primeira (historiografia) pode ser levada a efeito sem a última (embora, possivelmente, não com muita lucidez). Esta (filosofia) não pode ser feita sem a primeira, uma vez que a primeira proporciona à segunda a realidade acerca da qual existe uma filosofia (já que a história, propriamente chamada, só aparece para nós através das lentes da historiografia: não temos acesso direto a ela). Essa é outra maneira de dizer, na linguagem de Lakatos, que historiografia da matemática sem filosofia da matemática é certamente cega, mas ainda pode subsistir; enquanto a filosofia da matemática sem a história da matemática (e, portanto, sem a historiografia que a história nos fornece) é tão vazia que não pode subsistir, a não ser como uma caricatura de si mesma.

Outro esclarecimento importante é sugerido pelo mesmo árbitro de uma versão prévia do meu artigo. O que estou defendendo não é que a filosofia da matemática não pode deixar de consistir em uma coleção (ou mesmo em um sistema orgânico) ou em estudos de caso. Meu ponto é exatamente o contrário. Uma coleção (ou sistema) de estudos de casos não pode deixar de ser o que é: ou seja, uma configuração mais ou menos ordenada, de investigações particulares dedicadas a ambientes isolados no espaço da história. A filosofia é muito mais e muito menos do que isso: é um relato do espaço em si. Enquanto a primeira responde por alguns elementos em um conjunto bastante grande, a última define uma estrutura a partir desse conjunto e a estuda como tal. Isso é porque o leitor não encontrará nenhum estudo de caso no que se segue (enquanto alguns deles podem ser facilmente encontrados em outros ensaios mais propriamente históricos que escrevi), mas antes uma reflexão do que torna o fato histórico da atividade matemática algo matemático por natureza.

Concluo meu preâmbulo com uma ressalva. Embora eu seja naturalmente trazido para mencionar alguns filósofos da matemática e algumas de suas obras, meu propósito aqui não é discutir a opinião deste ou daquele colega ou mestre. Pelo contrário, o meu intento é o de promover uma opção filosófica geral e rejeitar algumas outras, apresentando a primeira em minha versão pessoal (e, espero, original). Qualquer leitor que queira ter mais informações bibliográficas sobre a presente discussão na filosofia da matemática, da qual tratarei, deve procurá-las em outro lugar. Contribuí para oferecer um levantamento de algumas dessas discussões em Panza e Sereni (2013), e (além dos mais recentes desenvolvimentos, decorridos após a sua publicação) posso certamente remeter o leitor para esse trabalho.

Um equívoco

A filosofia acompanha muitas tentações. E a filosofia da matemática não é diferente. O mais perigoso é tomar essa última como mera extensão da primeira, devido à possibilidade de usar a matemática como banco de testes para teses filosóficas, como um depósito de exemplos e problemas para medir os méritos mútuos de visões filosóficas opostas. Há dois tipos de filósofos: aqueles que têm problemas e procuram soluções para eles, e aqueles que têm soluções e procuram problemas a serem resolvidos com tais soluções. Os filósofos deste último tipo são vítimas de um equívoco, eu afirmo. A perigosa tentação a que me refiro é uma forma desse equívoco. Uma das maneiras de isso ocorrer na filosofia da matemática é usar a matemática e/ou exemplos matemáticos para medir os méritos mútuos do realismo e do nominalismo, entendidos como teses metafísicas gerais, a primeira afirmando e a segunda negando a existência de objetos abstratos.

No decorrer deste exercício, o realismo, ou, mais precisamente, a versão dele que muitas vezes é chamada de “platonismo” – que eu escrevo, como sempre fiz (seguindo PARSONS, 1964, p. 275), com um ‘p’ minúsculo, para diferenciá-lo de outras teses mais fiéis, também em sua intenção, à filosofia de Platão –, é apresentada como a tese de que “existem objetos matemáticos” (BALAGUER, 1998, p. 1). Mais precisamente, é a tese de que, independentemente do nosso curso de ação e de pensamento, existem objetos abstratos por direito próprio, que são intrinsecamente matemáticos por natureza, e que a matemática lida com eles, e visa a descrevê-los, revelando assim como são e como se relacionam uns com os outros. A matemática seria, então, bem-sucedida quando o que afirma desses objetos é verdadeiro, isto

é, quando os descreve verdadeiramente, bem como o mundo em que eles, de fato, estão. Segue-se que uma teoria matemática é boa se, e somente se, seus teoremas são verdades acerca dos objetos relevantes. Entre esses objetos estão conjuntos, números e figuras geométricas, ou, possivelmente, apenas conjuntos, começando pelo vazio, segundo os mais reducionistas entre esses autointitulados filósofos realistas da matemática.

Esses (ou outros, menos radicais) partidários do reducionismo ontológico estão certamente prontos para admitir que boas teorias matemáticas podem incluir teoremas que não são literalmente verdadeiros, ou o são apenas se os termos relevantes forem devidamente compreendidos de acordo com as cláusulas reducionistas apropriadas. Ainda assim, uma vez que a redução está finalmente completa (ou uma vez que essas cláusulas são/estão totalmente operacionais), não há mais necessidade para reformular: os teoremas dessas teorias significam claramente o que parecem significar *prima facie*, e o que os torna verdadeiros quanto aos objetos relevantes é que esses objetos apenas são e estão um para o outro como esses teoremas literalmente dizem que eles são e estão.

O nominalismo é apresentado como a tese oposta que nega a existência de objetos abstratos e, *a fortiori*, de objetos matemáticos. Nega, por exemplo, “que existem números, funções, conjuntos ou quaisquer entidades semelhantes” e, por conseguinte, “que é legítimo usar termos que pretendem se referir” a eles (FIELD, 1980, pág. 1). Para evitar o mais clássico dos paradoxos, isso não pode deixar de ser entendido como a tese de que o conceito de um objeto abstrato é vazio, o que imediatamente implica que isso também é assim para o conceito de um objeto matemático (desde que se admita que os objetos matemáticos não poderiam ser senão abstratos). Esses dois conceitos não podem ser tomados como malformados, é claro, pois, se fossem assim, seria difícil afirmar sensatamente que eles são vazios. O mesmo se dá mais claramente no caso de conceitos matemáticos mais específicos, como o de um número, de um conjunto ou de uma função. Esses conceitos são assim definidos para fazerem alguns itens matemáticos particulares supostamente se enquadram neles. Segue que ou um nominalista está preparado para também argumentar que esses itens não são objetos (mas, então, são o quê?), ou não pode evitar concluir que a linguagem matemática usual é bem formada e, ao mesmo tempo, vazia, fazendo quaisquer declarações matemáticas serem literalmente falsas, ou apenas vagamente verdadeiras.

Supondo que a distinção duvidosa entre itens matemáticos e objetos é descartada, segue-se que entender adequadamente uma declaração depende de dois movimentos possíveis, localmente alternativos um ao outro, mas possivelmente operando em conjunto dentro de um programa mais geral visando a uma compreensão global do discurso matemático. De um lado, pode-se exigir, no estilo Quinlan (inaugurado em QUINE, 1939, mas seguido em muitos trabalhos subsequentes), que as declarações matemáticas sejam parafraseadas como declarações sobre objetos não abstratos e não matemáticos. Uma vez que a paráfrase esteja completa, essas afirmações se tornariam, enfim, literalmente verdadeiras ou falsas. Isso permitiria dizer que uma teoria matemática é boa, se os seus teoremas admitem uma paráfrase tornando-os literalmente declarações verdadeiras, que, porém, não seriam mais declarações matemáticas. Pode-se também exigir, por outro lado, como sugerido em Field (1980), que as teorias matemáticas sejam adicionadas às empíricas, as quais só trabalham com objetos concretos, para gerar extensões conservadoras deles. No entanto, permanecendo literalmente

falsos e não necessariamente admitindo qualquer paráfrase que os torne verdadeiros, os teoremas entre os bons teoremas matemáticos teriam então uma virtude muito bem-vinda: a de tornar mais fácil (ou mesmo praticamente possível) estabelecer verdades empíricas.

Tanto os partidários do platonismo quanto os do nominalismo, assim concebidos, podem facilmente encontrar, dentro do armazém matemático, muitos exemplos que parecem, à primeira vista, favoráveis a uma parte e a outra.

Um nominalista pode facilmente observar, por exemplo, que uma frase como “Marte tem duas luas” pode ser reformulada fielmente como “Existem x e y tais que eles são distintos entre si e ambos são as luas de Marte, e para qualquer z , ou não é uma lua de Marte ou é, tal que (sendo lua de Marte) $z = x$ ou $z = y$ ”, onde não há referência a qualquer número. O uso do termo “dois” pode, então, ser tomado como *façon de parler* (maneira de falar), usado simplesmente para abreviar.

Um platonista pode admitir isso, afinal. Mas observe que a sentença anterior não expressa, de fato, uma afirmação (puramente) matemática, e que a simplicidade de tal exemplo desaparece quando falamos de números como tais, em vez do número de luas de Marte, ou de peras ou maçãs. Quando nós dizemos, por exemplo, que 2 mais 3 é 5, não falamos de duas coisas e três outras coisas particulares que, quando colocadas juntas, resultam em cinco coisas. No máximo, falamos, de acordo com a definição VII.2 dos Elementos de Euclides (EUCLIDES, TBEH), de duas unidades e três unidades, que, quando reunidas, resultam em cinco unidades. Mas as unidades certamente não são, como tais, em toda a sua generalidade, objetos. Isso torna impossível – o platônico pode concluir – seguir a mesma estratégia usada acima para reafirmar a frase a fim de evitar qualquer referência a objetos abstratos. Na verdade, isso faria com que perdesse sua generalidade, que é uma característica saliente das declarações matemáticas.

O nominalista pode tentar repetir sugerindo uma nova paráfrase que seria muito longa para escrever aqui. Será suficiente dizer que ele pode tentar retornar à generalidade da sentença original substituindo a referência a unidades, seja por quantificadores universais apropriados que variam quanto à totalidade de objetos concretos, seja por uma conversa acerca de qualquer objeto concreto. Nesse ponto, o platonista pode apresentar outro exemplo simples, como o da sentença “Há infinitos números primos”, desafiando o nominalista a sugerir uma paráfrase nominalista, ou, indo para uma estratégia muito mais geral e lembrando a distinção de Platão entre aritmética vulgar e aritmética conhecedora (ou filosófica), respectivamente preocupadas com “unidades desiguais [$\mu\acute{o}\nu\alpha \alpha\acute{\nu}\iota\sigma\omicron\varsigma$]”, como “dois exércitos” ou “dois bois”, e com “incontáveis unidades [$\mu\acute{o}\nu\alpha \mu\upsilon\pi\acute{\iota}\alpha\iota$]”, nenhuma das quais difere uma da outra (FILEBO, 56d-e; veja também TEETETO, 195e-196a). O nominalista pode retrucar, por sua vez, sob a autoridade de Quine (QUINE, 1986, p. 400), que essa última aritmética é meramente “recreativa” e deve, de fato, ser ignorada pela filosofia naturalizada (e, então, boa), no sentido de que um exemplo como o último, que acabamos de mencionar, deve ser tomado como perfeitamente irrelevante para tal (boa) filosofia.

Esse último movimento também pode abrir caminho para a segunda estratégia nominalista, em que o recurso à paráfrase é substituído pela fala de extensões conservadoras de teorias científicas e, então, nominalistas. Diante dessa estratégia, o platonista não teria motivos para se render, pois ainda haveria espaço para argumentar: i) que as teorias científicas matematizadas estão longe de ser nominalistas, em fato, já que a matemática é constitutiva de

seus objetos; e ii) que a matemática pura está longe de ser recreativa e deve constituir o banco de texto apropriado para decidir a disputa “realismo *versus* nominalismo”.

Quem está certo? Pode parecer que há boas razões para ambos os lados.

Por exemplo, não há necessidade de invocar o número dois, como um objeto abstrato, para contar as luas de Marte, se contar objetos (ou contagem transitiva: BENACERRAF, 1965, pp. 49-50) é entendido como tal, ou seja, como uma operação intelectual sobre esses objetos (e não como o estabelecimento de uma bijeção entre eles e os números), que é tudo o que é necessário para todos os propósitos científicos. Não há mais necessidade de invocar números para decidir se há mais planetas ou mais luas no sistema solar. Usá-los é certamente bastante conveniente; torna as coisas mais simples. No entanto, não é indispensável. Se alguém tivesse que trabalhar com coleções muito maiores, provavelmente seria necessário passar por números, mas isso seria apenas uma necessidade prática. Em princípio, pode-se evitá-los. Isso pode parecer uma razão forte o suficiente para pensar que as palavras numéricas entram em nossas declarações relacionadas com essas práticas empíricas apenas como úteis, mas dispensáveis, *façons de parler* (maneiras de falar), como sugere o nominalista.

Mas é o uso em tal prática empírica que decide sobre a natureza da matemática? Para fazer o realista vencer o nominalista na bancada da matemática, não parece absolutamente necessário que nenhuma ocorrência de palavras matemáticas possa ser explicada como sugere o nominalista. Parece o suficiente que alguma ocorrência não possa ser assim explicada. Mas, então, o caso do infinito de números primos pode se tornar decisivo: ou o nominalista pode explicá-lo nominalisticamente, ou o platônico tem razão, afinal, a menos que, num último e decisivo suspiro, o nominalista consiga excluir esse caso do banco de texto relevante.

Uma pergunta mal colocada

Mas, então, novamente: quem está certo? Nenhum dos dois, eu afirmo. A pergunta para a qual as duas partes oferecem respostas opostas está simplesmente mal colocada.

Mesmo supondo que a disputa “realismo *versus* nominalismo” tenha algum sentido, ela, em geral, não se estende à matemática nesses termos, pelo menos se tal extensão tiver que assumir a forma de uma filosofia da matemática. Pois, se a filosofia da matemática é acerca da matemática, tem que começar da matemática em si mesma, e refletir sobre isso, em vez de começar em outro lugar e chegar à matemática por acidente, reproduzindo nela as mesmas perguntas e respostas gerais já olhadas lá fora, com a mera substituição de marcadores de lugar esquemáticos com ingredientes matemáticos. Em outros termos: não basta substituir ‘abstrato’ por ‘matemático’ na pergunta geral ‘existem objetos abstratos?’, para obter uma pergunta sensata para a filosofia da matemática.

Sejamos um pouco mais precisos. Suponhamos que a palavra ‘abstrato’ seja a única palavra esquemática nessa questão geral. Isso significa que a substituição dessa palavra por qualquer outra palavra do mesmo tipo dentro dessa questão não se coaduna com uma substituição correspondente de quaisquer outras palavras, como ‘objetos’ ou ‘existir’, ou, pelo menos, com uma compreensão particular correspondente delas. Com isso garantido, suponha, por causa do argumento (e apenas para isso), que, quando assim entendida, uma questão tão geral tem um sentido claro. A questão então é a seguinte: também sob essas ressalvas, ainda permanece que a instância matemática da questão – ‘os objetos matemáticos existem?’ – não é

uma questão genuína para a filosofia da matemática, ou, pelo menos, não é assim se também se admite que a filosofia da matemática é realmente acerca da matemática.

É claro que os filósofos estão perfeitamente autorizados a não ter nenhum interesse particular por matemática, bem como por qualquer outra área do conhecimento. Mas nós, filósofos da matemática, também somos autorizados e, na minha opinião, até obrigados a considerar a filosofia que praticamos como um empreendimento genuíno somente se houver raciocínio acerca da matemática como um material externo que se toma como dado, antes de se iniciar o trabalho.

Se isso for admitido, há espaço para argumentar que a própria pergunta “os objetos matemáticos existem?” é sem sentido. Ou, pelo menos, é assim, se a matemática é supostamente dada, e é concedido que as palavras ‘objetos’ e ‘existem’ designam noções primitivas, não pedindo nenhuma elucidação apropriada apoiada na matemática em si. Consequentemente, a questão conexa “é matemática sobre seus próprios objetos?” também se torna sem sentido, sob condições semelhantes.

Isso torna qualquer suposta resposta a essas perguntas, que progride de acordo com tais condições, não apenas duvidosa, mas inevitavelmente enganosa: uma afirmação que não está tão longe, afinal, pelo menos em sua forma, da afirmação de Kant sobre dogmática metafísica.

Um sintoma desse absurdo é a dificuldade de responder (em concordância com a boa resposta) a uma questão conexa: ‘o que poderia ser concebido como uma evidência para a existência, ou não existência, de objetos matemáticos?’. Se a matemática for considerada como dada, deve incluir tal evidência. Claro, isso pode estar muito bem escondido, bem longe da superfície que aparece imediatamente para um observador inexperiente. Isso tornaria a descoberta e a exibição de tais provas bastante difíceis. Mas deve ser, em todo caso, possível dizer claramente como isso pode ser. Uma vez que a pergunta ‘os objetos matemáticos existem?’ apresenta-se, ela própria, como uma questão factual, decidir qual é a resposta certa para ela deveria ser uma questão de fato. Além disso, atribuindo-se um significado claro a essa questão, tornando-se isso sensato, dever-se-ia exigir esclarecer como tal questão de fato poderia se tornar manifesta ao nosso entendimento. Deveríamos, em outros termos, ser capazes de dizer o que nos tornaria inquestionavelmente conscientes de que objetos matemáticos existem ou não existem.

Conheço apenas duas atitudes frente a essa última questão crucial, que podem parecer plausíveis, finalmente à primeira vista.

A primeira atitude está disponível somente para os nominalistas: o ônus de fornecer evidências para decidir sobre a existência de objetos matemáticos é uma incumbência apenas do lado platonista, uma vez que os platonistas são os únicos que fazem uma afirmação positiva. Aqui está como o ponto é feito por C. Cheyne (2001, p. 108), por exemplo:

[...] é uma questão contingente se os números existem com necessidade matemática no mundo real. A alegação de que isso poderia ser decidido por métodos puramente a priori torna-se duvidosa. Descobrir se este mundo é ou não favorecido pela existência de entidades que podem não existir parece ser uma questão de observação. Mas como poderíamos observar tais entidades se elas carecem de poderes causais? O ônus da prova recai [...] sobre os platônicos [...].

O ônus do nominalista é, então, apenas explicar as evidências disponíveis de uma maneira que não se suponha a existência de um objeto abstrato e, então, de um objeto matemático. Essa não é propriamente uma resposta à pergunta; é, em vez disso, um movimento para transformar a ausência de qualquer resposta em algo a favor do lado nominalista. Mas o movimento é bastante fraco. Pois transforma essa ausência favorável a uma atitude agnóstica, no máximo, deixando claro que a tese nominalista é, com efeito, uma *petitio principii* (uma “petição de princípio”; uma falácia informal). O nominalista pode replicar, apelando para a Navalha de Ockham, e alegar que, na ausência de qualquer evidência positiva, tudo o que pode decidir se os objetos matemáticos existem (ou não existem) é a necessidade (ou a ausência de necessidade) de postular sua existência para explicar a evidência disponível. No entanto, inverte-se aí o ônus da prova, pois agora se exige que o nominalista mostre que isso não é necessário. Nas palavras de J. Burgess (BURGESS, 1983, pp. 95-96):

Na verdade, o ônus da prova recai sobre esses inimigos dos números [...], para mostrar: (a) que a ciência, devidamente interpretada, já dispensa objetos matemáticos, ou (b) que existem razões pelas quais as teorias científicas atuais devem ser substituídas por alternativas que dispensam objetos matemáticos.

O problema, então, passa a estar no fato de que a explicação nominalista, tanto em termos de paráfrases quanto em termos de extensões conservadoras, é parcial, no máximo, se não amplamente insatisfatória. Possivelmente, é responsável por algumas evidências escassas. Mas o faz ao preço de declarar essa prova não confiável, isto é, ao preço de adicioná-la como uma aparência falsa de uma realidade oculta que nossa linguagem é muitas vezes incapaz de descrever fielmente, ou só pode descrever de uma forma bastante emaranhada e estranha.

A segunda atitude é a de alguns platonistas: a evidência necessária (positiva) é fornecida pela verdade de algumas afirmações matemáticas apropriadas, envolvendo termos que supostamente denotam objetos matemáticos. Nas palavras de B. Hale e de C. Wright (HALE e WRIGHT, 2001, p. 8):

[...] nada mais deve ser exigido para que haja um forte caso *prima facie* de que uma classe de termos singulares aparentes tem referência, de que eles ocorrem em declarações verdadeiras livres de todas as formas epistêmicas, modais, de citação e de outras formas de vocabulário-padrão reconhecidas para comprometer a função referencial direta.

Uma vez que uma afirmação sobre certos objetos só é verdadeira se esses objetos existirem. Justo. Mas isso deixa outras questões em aberto: que evidências temos para as verdades das declarações matemáticas relevantes? Que provas temos de que essas declarações são, na verdade, sobre os objetos para os quais parecem *prima facie* ser (sobre)? Ainda mais crucial: estamos realmente certos de que as verdades matemáticas requerem existência?

A segunda dessas três perguntas traz combustível para o moinho dos nominalistas. Considerar a terceira nos afastaria demais do propósito do presente artigo/texto. Assim, limito-me à primeira. Uma resposta possível para isso é que as verdades são verdades lógicas, ou, pelo menos, consequências lógicas de suposições tão inocentes que não poderíamos rejeitá-las como

falsas. Essa foi, essencialmente, a estratégia de Frege, e, em outra versão, ainda é uma estratégia neologicista (defendida por HALE e WRIGHT, 2001, por exemplo). Mas ela tem problemas, por sua vez, e não apenas por causa da dificuldade de derivar declarações matemáticas adequadas de sistemas consistentes de suposições inocentes o suficiente. Também, entre outras coisas, por causa da dúvida que se pode levantar sobre o fato de que a inocência dessas suposições implica sua verdade, ou melhor, implica um tipo apropriado de verdade sustentando existência. Pode-se, é claro, redefinir existência em termos de (ou do tipo relevante de) verdade. Mas isso violaria a condição mencionada acima, sobre a presença de uma única palavra esquemática na pergunta acerca da existência de objetos abstratos, tornando a tese platonista essencialmente diferente a partir de uma simples aplicação à matemática do realista. Dessa maneira, a tese envolveria uma afirmação sobre uma noção peculiar de existência, própria à matemática. Deve, então, ser apoiada, não por uma atitude metafísica geral, mas por uma investigação específica sobre a natureza da matemática, que é exatamente o que estou incentivando.

O problema de Platão

Posso parar a *pars destruens* do meu trabalho aqui. O objetivo era descrever criticamente uma atitude que nenhum tipo de filosofia da prática matemática poderia compartilhar, na minha opinião. Ainda assim, argumentar que a filosofia da prática matemática pode não compartilhar essa atitude não é o mesmo que argumentar que a questão tratada, embora sem sentido, como tal, não está enraizada em um contexto relevante e perfeitamente sensato de um problema genuíno sobre matemática (que a filosofia da prática matemática certamente não só tem o direito, mas também o dever de resolver). O que eu quis sugerir é que o problema, com essa atitude, é muito menor, devido às respostas opostas que ele sugere para a referida pergunta, do que a pergunta em si, melhor para a forma como tal questão torna crucial o problema que permanece na raiz dela. O ponto em foco é que esse caminho faz com que a questão seja essencialmente externa à matemática, tornando difícil decidir quais evidências, provenientes da própria matemática, podem contar como justificativa para uma resposta a ela, qualquer que seja a resposta.

Em Panza e Sereni (2013), designei o problema ao qual me refiro como o de Platão. Uma forma de abordá-lo é citando uma famosa passagem da República (527a-b), em uma tradução apropriada:

Este <...> não será contestado, pelo menos, por aqueles que <são> mesmo um pouco familiarizados com a geometria, que esta ciência [αὕτη ἡ ἐπιστήμη] está em total oposição [πᾶν τοῦναντίον] à língua falada por seus adeptos <...>. Já que <a maneira como eles> falam <é> tanto ridícula quanto necessária [μᾶλα γελοῖως τε καὶ ἀναγκαιῶς]: eles moldam todos os seus discursos como se estivessem operando na prática e na finalidade da prática [ὥς γὰρ πράττοντές τε καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τοὺς λόγους ποιοῦμενοι]; [eles] falam de quadratura, aplicação e acrescentando, e todos dizem assim, enquanto todo o <seu> aprendizado é de alguma forma adequado ao propósito do conhecimento [τὸ δ' ἔστι που πᾶν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτηδεύμενον]. <...> [Isso é] conhecimento sobre o que sempre é, e não o que agora vem a ser e agora perece.

Ao contrário do modo como essa passagem tem sido muitas vezes entendida (e, conseqüentemente, traduzida), isso não é de forma alguma uma crítica à linguagem e à prática dos geômetras (o ponto foi feito primeiramente, *mutatis mutandis*, por M. F. BURNYEAT, 1987). Platão percebe que essa linguagem parece ser moldada “πράξεως ἕνεκα [no propósito da prática]”, enquanto a aprendizagem geométrica é “γνώσεως ἕνεκα [para fins de conhecimento (teórico)]” de eternos (e abstratos) assuntos. Ele considera essa linguagem “ridícula [γελοῖως]”. Mas também “necessária [ἀναγκαίως]”. Ele parece então reconhecer que não há outra opção senão usar uma linguagem tão prática e ridícula para teorizar sobre um assunto tão abstrato.

Isso é exatamente o oposto da afirmação nominalista: a matemática não usa uma linguagem abstrata para falar de objetos concretos, clamando por paráfrases nominalistas apropriadas; antes fala dos abstratos como se fossem artefatos materiais, exigindo assim uma compreensão apropriada. O ridículo (ou metafórico) de sua linguagem não consiste em lidar com objetos concretos *prima facie* falando de objetos abstratos, mas sim em (sem outra opção a não ser essa) usar uma linguagem originalmente criada para falar dos primeiros objetos para raciocinar acerca de sua matéria abstrata.

Mas isso não é mais o mesmo que afirmar claramente que existem objetos abstratos dos quais a matemática trata e os quais ela chama pelos seus próprios nomes. Se fosse assim, não haveria oposição, nem absurdo necessário. No máximo, o problema seria o de inventar uma nova linguagem, feita apenas para falar desses objetos abstratos, assim como a linguagem vulgar foi inventada para falar dos objetos concretos.

De acordo com Platão, a matemática certamente não é algo acerca de “ideias [εἶδη]”. Isso não pode depender do exercício de νοῦς, mas sim do exercício de διάνοια, ou, possivelmente, φαντασία, como Proclo dirá mais tarde. A alma pode contemplar, ao mais, a ideia de um triângulo, ou a de um número, possivelmente as ideias de pares e de estranho, mas a matemática requer mais ou menos do que isso: requer triângulos e números; não idéias únicas, mas pluralidades de itens. No que essas pluralidades consistem? Como podemos conceber esses itens? Mais em geral: como podemos explicar o exercício intelectual ao qual a matemática pertence?

Esse é o problema de Platão. E esse deveria ser o problema ontológico da filosofia da matemática, em vez de: se existem μαθηματικά ou não. Mas como podemos explicar nosso raciocínio sobre eles? Pois é deles que a matemática é raciocínio, a menos que se queira argumentar contra Platão, e por causa de uma equívoco preconceituoso e pré-estabelecido de que sua forma é fictícia e deve ser alterada pela verdadeira filosofia (que seria exatamente o oposto da filosofia da matemática, sendo antes filosofia contra a matemática).

Tome a seguinte afirmação: ‘qualquer espaço vetorial tem uma base’. Do que se está falando? A resposta mais óbvia é que se fala de espaços vetoriais e suas bases. Não? Por que não? Possivelmente, por serem os espaços vetoriais objetos abstratos e pelo fato de os objetos abstratos não existirem? Sugiro que um nominalista, apoiando tal resposta, explique-a para qualquer matemático em atividade e considere a respectiva reação. Suspeito que seria melhor não a descrever. Mas isso significa que o platonista indicado acima finalmente ganhou? Isso prova que os espaços vetoriais existem e têm bases? E que não há mais nada a se dizer sobre

esse assunto, exceto, possivelmente, para acrescentar que isso torna a afirmação verdadeira, e sua prova uma justificação de sua verdade?

Suponha trabalhar em ZF, ou seja, sem o axioma de escolha. A prova de que qualquer espaço vetorial tem uma base não vale mais. Mas o que o axioma de escolha diz? Consideremos uma das suas formulações mais usuais (todas equivalentes entre si em estruturas apropriadas): “Para qualquer conjunto de conjuntos não vazios de pares disjuntos, existe pelo menos um conjunto que contém um e apenas um elemento para cada conjunto do conjunto anterior”. Do que se está falando? Novamente, a resposta mais óbvia é que se fala de conjuntos (não vazios), ou, mais especificamente, de conjuntos de conjuntos (não vazios). Nosso platonista diria que esses conjuntos existem (evitemos perguntar-lhe se isso faz existir o conjunto formado por todos os conjuntos). Mas, então, essa afirmação é verdadeira para eles? Se não fosse, suponho que o mesmo platonista deve sustentar que é falsa. Então sua negação deve ser verdadeira. Mas, a partir dessa negação, podemos agora provar que existem espaços vetoriais sem bases. Portanto, nossa afirmação anterior seria falsa. A declaração anterior (“qualquer espaço vetorial tem uma base”) é, então, verdadeira somente se a última (o axioma da escolha) também for. Mas como podemos provar a última? Podemos certamente provar isso em ZF, fundamentando-nos em outra afirmação equivalente ou ainda mais forte, por exemplo fundamentando-nos na primeira (que é comprovadamente equivalente à primeira afirmação sobre ZF). Mas isso apenas deslocaria a questão. O que é isso, se não uma prova que justifica o axioma de escolha? E se não temos justificação, como podemos ter certeza de que é verdade? E se não podemos ter certeza de que é assim, como podemos ter certeza disso para a declaração anterior, sobre espaços vetoriais? Então, possivelmente, as duas afirmações não são verdadeiras: possivelmente, existem espaços vetoriais, mas alguns deles não têm bases. Tudo o que podemos saber, então, de acordo com nosso platonista, é que espaços vetoriais existem e que todos eles têm uma base, ou alguns não. Ou, possivelmente, não é assim, pois, de fato, temos, afinal, uma justificativa clara do axioma de escolha: vemos que os conjuntos são como ele diz; nós o vemos com nossos olhos perspicazes de matemáticos, mesmo se não pudermos fazer com que outros olhos o vejam, mesmo olhos de outros matemáticos (não clássicos ou construtivistas).

O problema com ambas as conclusões é que elas não decorrem de quaisquer evidências provenientes da própria matemática. Elas realmente não fornecem uma solução ao problema de Platão (relativamente ao fragmento particular da matemática concernente a isso), mas apenas o dissolvem. Se essas conclusões se confirmam, então o problema simplesmente não surge; ele é resolvido antes de ser colocado. Visto que a causa do problema é que a matemática fala de espaços vetoriais apenas como a geografia fala de lagos, montanhas ou cidades, enquanto os espaços vetoriais não são como lagos, montanhas ou cidades. Então, como a matemática pode falar deles? As conclusões platonistas anteriores simplesmente negam a raiz do problema: elas simplesmente presumem que os espaços vetoriais são como lagos, montanhas ou cidades, pelo menos aos olhos perspicazes dos matemáticos (clássicos).

Do lado platonista

Vamos reafirmar o problema, então, em um cenário mais geral. Admitindo a matemática como resultado de uma atividade intelectual bastante peculiar, ou (admitindo a matemática) como tal atividade, quando é considerada como uma empresa, e não como um corpus. Essa

atividade parece ser dupla. Parece consistir tanto na criação a partir da observação de itens eternos e imutáveis, quanto na atribuição de (algumas) propriedades e relações a eles. Embora esses itens pareçam eternos e imutáveis, sua criação é obra de seres humanos (não de Deuses ou de Deus), e ocorre no tempo, ou mesmo na história (não antes de qualquer tempo). Esses seres humanos, além disso, não têm outra forma de justificar suas atribuições de propriedades e relações a esses itens, a não ser mediante declarações de prova que afirmam que esses itens estão e permanecem em concordância, uns com outros, no que diz respeito a essas atribuições. As provas dessas afirmações partem de outras declarações do mesmo tipo, algumas das quais necessariamente têm que ser admitidas sem fundamento em uma justificativa semelhante e sem que se tenha conhecimento desses mesmos itens. Como podemos explicar isso?

Isso não é de forma alguma um problema sobre a existência, sobre o que existe ou não existe. O que existe é claro: é matemática, e essa existência se manifesta pela história e pela experiência real (de professores, de alunos e de profissionais), do mesmo modo como acontece para a existência de outros empreendimentos intelectuais e fenômenos sociais, bem como para a existência de seus produtos, e, *mutatis mutandis* (mas não tão *mutandis* assim), para objetos empíricos de tamanho médio. O problema é mais sobre como a referida existência deve ser melhor contabilizada. Como tal, esse é um problema verdadeiro, e mesmo crucial, para uma filosofia da prática matemática, uma vez que essa existência é apenas a da própria prática matemática e de seus resultados.

Quando se encara o problema dessa forma, as teses que o platonista e o nominalista, que descrevi acima, tentam testar (ou, melhor, confirmar) na bancada da matemática são investidas sob outra luz, e aparecem, então, dramaticamente ingênuas e implausíveis. A tese platônica torna-se a tese de que a realidade evidente deve ser explicada postulando a existência de outra realidade, inacessível e inverificável, mas de alguma forma (causal ou não) operativa o suficiente para tornar possível tomar a existência de uma como uma imagem mais ou menos deformada da outra. A tese nominalista torna-se a tese de que a realidade evidente não é o que parece, pois o que aparece é um desempenho teatral disfarçando uma realidade muito mais trivial, não muito diferente da natureza da nossa vida cotidiana. Quando uma filosofia séria da prática matemática aborda o problema, não pode deixar de rejeitar essas duas respostas absurdas.

No entanto, a meu ver, a rejeição não deve ser simétrica, uma vez que essas teses não são assim: enquanto a primeira visa a explicar a evidência disponível através de uma suposição forçada, a última visa a negar tal evidência em nome de uma preconcepção. Se eu tivesse que tomar partido na disputa, embora julgando enganosa, eu teria, então, sem dúvida, que ficar do lado platonista. Porque esse é o lado que visa a explicar a matemática como ela parece ser, em vez de visar a explicar o que é necessário para ela estar de acordo com uma preconcepção independente. O objetivo das considerações a seguir é sugerir uma maneira plausível de permanecer desse lado para uma filosofia da prática matemática, ou seja: um modo de ser platonista sem recorrer à suposição forçada da existência de objetos.

Pode-se argumentar que ficar do lado platonista por causa do motivo que acabei de adiantar não é, ainda assim, o mesmo que ser platonista. Se fosse desse jeito, o pronunciamento anterior seria incongruente, pois o que vem depois do colôn iria muito além do que vem antes dele. Qualquer um que concordasse com isso provavelmente também acharia a posição que

defenderei, no que segue, longe de ser platonista por natureza. Embora eu não me importe muito com as partículas gramaticais *-ist* e *-ism*, eu considero tal ponto relevante, e quero esclarecer por quê.

Na minha opinião, esse não é um ponto, de fato, puramente terminológico. Depende, sim, de um julgamento sobre o que é essencial na opção platonista, em todas as diferentes formas que ela assumiu ao longo da história da filosofia da matemática. Mais do que isso, depende também, em certo sentido, do que se considera ser a principal tarefa da filosofia. Para muitos, essa tarefa é a de estabelecer o que há/existe, e o platonismo é uma parte importante da filosofia, uma vez que afirma claramente que existem objetos abstratos. Não para mim! Eu não considero isso, de forma alguma, uma tarefa para a filosofia. No máximo, é tarefa para as ciências positivas (físicas, naturais, biológicas, econômicas ou históricas). Também não é tarefa da filosofia dizer como o que existe deveria ser (se pudesse ser de diferentes maneiras). Essa é certamente uma tarefa para a política, mas a filosofia não é política de forma alguma (embora possa ser útil para ela). A filosofia deve antes visar a fornecer o máximo de categorias conceituais apropriadas, a serem usadas para explicar o que existe, ou, melhor, o que parece haver/existir.

Isso me faz pensar que o platonismo é uma opção válida em filosofia da matemática, uma vez que ele sugere que a matemática lida com os próprios conteúdos dos quais a linguagem da matemática fala, *prima facie*. Em outros termos, eu tomo o platonismo, na filosofia da matemática, como a tese bastante geral de que a conversa matemática deve ser entendida literalmente como uma conversa de conteúdos individuais que fornecem os sujeitos de diferentes formas de predicação – em uma palavra, como uma conversa de objetos –, e que essa conversa, assim entendida, consiste em afirmações que valem como tal, e como tal têm de ser admitidas e contabilizadas. Meu propósito, a seguir, é articular e detalhar melhor essa tese geral em um caminho, ao longo da linha de uma filosofia da prática matemática.

Propósitos filosóficos

No entanto, antes de fazer isso, um *excursus* está em ordem. Tem como objetivo responder brevemente a esta outra questão: qual deveria ser o propósito, em geral, de uma filosofia da prática matemática? Ou ainda, mais simplesmente: como tal filosofia deveria ser? Já abordei o problema no meu preâmbulo, mas parece que, à luz das considerações anteriores, voltamos a ele agora.

Coloquemos a questão desta forma: a filosofia da prática matemática é concebida como uma reação a uma tendência metafísica, analítica ou fundacional na filosofia da matemática? Ou melhor, como tentar enfrentar novos problemas, antes despercebidos e que, embora estritamente ligados ao trabalho cotidiano dos matemáticos, não têm uma natureza estritamente matemática, estando mais relacionados com escolhas metodológicas, julgamentos de valor ou algo parecido? Ou, novamente, como fazer esforços para repensar os problemas clássicos da filosofia da matemática, reafirmando-os e abordando-os de uma perspectiva diferente?

Não gosto da primeira opção, puramente antagonista, e considero que a segunda é simplesmente insuficiente. Uma vez que penso que os problemas da filosofia clássica são assim porque são problemas bons e difíceis, embora muitas vezes sejam concebidos e reformulados de uma maneira mal colocada. O problema de Platão é um exemplo disso. O que faz com que

ele seja, desde a época do próprio Platão, um problema tradicional para a filosofia da matemática, é que se trata de um problema crucial, que nenhuma filosofia séria da matemática pode deixar de lado, e, menos ainda, deixá-lo de lado simplesmente por ser um problema antigo. Isso me faz pensar que a segunda opção só poderá ser verdadeiramente frutífera se for buscada como complemento da terceira. É, então, no quadro dessa terceira opção que raciocino aqui.

Quando essa opção se junta com o que eu disse no final do penúltimo parágrafo, acima, leva-me a considerar que uma tarefa crucial para a filosofia da prática matemática é a de sugerir boas categorias conceituais a serem usadas para dar conta da forma estrutural da matemática (pretendida como uma realidade existente), como ela parece ser.

Digo ‘considerar a forma estrutural’ por uma questão de brevidade, é claro, para deixar claro que as categorias conceituais relevantes não são aquelas exigidas para descrever os conteúdos específicos das teorias matemáticas, mas sim algumas características gerais dessas teorias e conteúdos, que muitas vezes se caracterizam pelo uso de uma linguagem filosófica técnica, como a lógica, a epistêmica, a ontológica etc. Os conteúdos específicos de teorias matemáticas também devem ser descritos, é claro, usando-se categorias conceituais apropriadas, mas moldando-se essas categorias, e fornecer tal descrição é uma tarefa para matemáticos e não para filósofos (embora fosse prudente que os filósofos tentassem compreender tal descrição, sem cair na tentação oposta à mencionada em parágrafo anterior: a tentação de substituir os matemáticos nessa tarefa, para fornecer uma descrição mais profunda dos referidos conteúdos, o que inevitavelmente resulta em algo muito menos profundo do que confuso e defeituoso; uma tentação, deve-se dizer, a que alguns alegados filósofos da prática matemática não são estranhos).

Neste quadro, parece-me que nada pode proibir a filosofia da prática matemática de abraçar uma perspectiva platonista, sob a forma da tese de que a natureza peculiar da atividade matemática é (ou, ao menos, poderia ser adequadamente) contabilizada como uma atividade intelectual que lida com (os) objetos abstratos (indicados pelos termos usuais que figuram na Língua).

Essa é ainda uma visão muito ampla, no entanto, que pode ser recusada de muitas maneiras diferentes. Pode-se perguntar, por exemplo, o que se deve dizer, nesse contexto, por ‘atividade intelectual’, ‘lidar com’, ‘objetos abstratos’ e, ainda, por ‘objetos’ *tout court*. Não posso entrar em todos esses assuntos, aqui, é claro. Vou tomar então como certo que meu público entende o termo “atividade intelectual” mais ou menos como eu. Acrescento apenas que, segundo a versão do platonismo que eu gostaria de ilustrar (e defender) aqui, ‘lidar com x’ significa algo como “fornecer (formar, dar à luz) x, depois estudá-lo para descrevê-lo”. Suponho também que isso seja suficiente para restringir minha tarefa em andamento a responder (bastante programaticamente) à seguinte pergunta única: o que se deve dizer, no presente contexto, por ‘objetos’, em geral, e por ‘objetos abstratos’, em particular. A atenção ao contexto é essencial, pois estou longe de fingir para explicar o que pode tornar um objeto abstrato, em geral. Vou me limitar ao caso de objetos abstratos que se poderia tomar como matemáticos. Meu propósito, no que se segue, será, então, nada mais do que tentar tornar claro como a noção de um objeto abstrato (matemático) deve ser entendida, a fim de fornecer uma boa categoria conceitual a ser usada ao descrever matemática como uma atividade intelectual que lida com objetos abstratos.

Objetos por reificação

Os objetos geralmente são considerados como seres individuais autoexistentes, ou melhor, como conteúdos individuais autoexistentes. Um objeto é, então, considerado abstrato se esse conteúdo é assim, ou seja, como se costuma dizer, não é espaço-temporalmente identificável ou determinável. Um objeto abstrato é, então, considerado matemático se a matemática (pura) envolve uma referência putativa a ele (sem recebê-la de fora, por exemplo, da lógica). Se entendermos um objeto dessa forma, torna-se inevitável nos perguntarmos como um conteúdo individual pode existir (ou ter existido, ou ainda possivelmente vir a existir) sem ser espaço-temporalmente identificável ou determinável. Isso é apenas tomar essa possibilidade como certa, sem qualquer explicação adicional, ou, pior: é na tentativa de fornecer informações bastante improváveis e, muitas vezes, até respostas (quase) místicas a essa pergunta que o platonismo se torna geralmente implausível.

Uma maneira de evitar o problema é deixar de considerar a existência, pelo menos se ela for pretendida como uma noção primitiva ou como uma condição necessária para a objetividade. Isso não é uma perspectiva original, sendo bastante comum na filosofia e também fora da filosofia da matemática. No entanto, isso se desenrola, muitas vezes, em conjunto com alguns problemas, o que não é necessário nem possível considerar aqui em qualquer detalhe. Será suficiente observar que um movimento comum, feito para escapar desses (ou de alguns desses) problemas, é tomar objetos abstratos como conteúdos individuais que vêm da reificação de conceitos (de primeiro nível). Isso poderia caminhar junto com a ação de fazer a noção de um objeto abstrato essencialmente independente da noção mais geral de objeto, ou seja, isso poderia caminhar junto com a ação de renunciar a definir objetos abstratos como determinado tipo de objetos. O importante aqui, porém, não é como essa última tarefa poderia ser alcançada, mas sim como se pode tornar a noção de reificação de um conceito (de primeiro nível) precisa o suficiente para evitar que a afirmação de que a matemática lida com objetos abstratos torne-se vazia.

Um exemplo tornará o ponto mais claro. Suponhamos que a aritmética ordinária lide com números naturais. Uma maneira muito econômica de também determinar que ela trabalha com objetos (abstratos) é fornecer uma definição suficiente do conceito de número natural, por meio, por exemplo, de alguma versão apropriada dos axiomas de Peano, recorrendo-se então aos números naturais para serem objetos abstratos apenas na medida em que são reificações dos conceitos de itens distintos que se enquadram nesse conceito, reiteradamente definidos, por sua vez, com base na definição desse último conceito. A noção de reificação de um conceito não está muito bem definida aqui, mas não parece, à primeira vista, implausível considerar que, por exemplo, tomando-se o número um como o sucessor de zero, admitindo-se também que os conceitos de zero e de sucessor estejam implicitamente definidos através da versão relevante dos axiomas de Peano, então esta seja uma maneira de considerar tal número como a reificação de um conceito (o de sucessor de zero), e que o mesmo também aconteça, em princípio, para todos os outros números naturais positivos.

Embora, certamente, não seja/esteja perfeitamente claro, esse raciocínio não me parece absurdo. Mas (tal raciocínio) não ajudaria em transformar a afirmação que ele apoia – ou seja, a de que aritmética lida com objetos abstratos, entendidos como reificação de conceitos – mais do que uma afirmação vazia (embora confortável), uma *façon de parler* inventada somente para

dizer que a matemática usa termos singulares com uma intenção referencial. Se quisermos tornar o platonismo uma tese filosófica interessante, precisamos fazer muito melhor do que isso.

A filosofia da matemática de hoje apresenta pelo menos duas maneiras de fazê-lo, cada uma das quais tem méritos inquestionáveis.

A primeira é fornecida pelo Estruturalismo *Ante Rem* (ARS), defendido principalmente por Steward Shapiro (1997; uma visão semelhante, que difere, no entanto, de SHAPIRO em muitos detalhes importantes é desenvolvida em RESNIK, 1997; outras formas de estruturalismo também estão disponíveis, o que não é necessário discutir aqui, uma vez que elas não aderem à ideia de que os objetos matemáticos resultam de uma forma de reificação de conceitos). De modo geral, a ideia básica por trás do ARS é caracterizar a forma adequada de reificação, identificando uma forma particular, típica da matemática, para definir conceitos e organizá-los com o objetivo de fixar conteúdos individuais. Essa modalidade diz respeito à identificação de uma estrutura categorial: os objetos abstratos relevantes são identificados com os polos (ou lugares) de tal estrutura. Eles são, então, tidos como existindo na medida em que a estrutura categorial da qual são polos existe, e esta existe, por sua vez, se, e somente se, for coerentemente definida, e obedecer a uma teoria geral das estruturas, que (*mutatis mutandis*) imite a teoria dos conjuntos.

Embora muito mais possa ser dito sobre o ARS, este breve relato deve ser suficiente para esclarecer a maneira como ele responde ao problema de Platão. O que é importante, de fato, é que ele (ARS) deixa para a própria matemática a tarefa de definir estruturas categoriais, e então assegurar a existência de objetos matemáticos, embora assumindo a tarefa de indicar a forma adequada mediante a qual isso deve ser feito (ou seja, definindo estruturas categoriais). Deixando de lado o habitual (quer dizer, mais objeções técnicas sobre indiscerníveis, originalmente avançadas por KERÄNEN, 2001, a que Shapiro respondeu, por exemplo, em SHAPIRO, 2008), sua principal deficiência resulta, a meu ver, do fato de ser incapaz de dar conta da evolução histórica da matemática e, mais em geral, de grandes porções da matemática do passado e do presente que certamente não são de natureza estruturalista, bem como da prática generalizada atual de provas transcendentais (provas de teoremas de uma determinada teoria, envolvendo ferramentas de outras teorias).

A segunda via requer uma explicação mais detalhada, uma vez que apela a técnicas menos comuns. Ela também adota uma abordagem muito mais descritiva (em vez de normativa). É fornecida pela Teoria dos Objetos de E. Zalta (ZALTA, 1983, 2021). A ideia básica dessa teoria (ou OT, de agora em diante) é fornecer uma representação lógica da própria ideia de reificação de conceitos na forma de um tipo particular de predicação, chamado ‘codificação’, essencialmente distinto daquele em uso na lógica de predicados. Formalmente, isso depende de admitir duas formas distintas para uma fórmula de predicado atômico, ou seja, ‘ Fa ’ e ‘ aF ’, onde ‘ a ’ é um termo e ‘ F ’ um predicado monádico, expressando o caso onde a respectivamente exemplifica (ou tem) F e o codifica. Ambas as formas de predicação estão incorporadas em um sistema de lógica modal de ordem superior admitindo tipos, mas também trabalhando sem eles para simplicidade. Na sua versão não tipada, esse sistema inclui o seguinte axioma:

$$\Diamond [aF] \Rightarrow \Box [aF]$$

(onde ‘ a ’ e ‘ F ’ são letras esquemáticas, e ‘ $\Diamond$ ’ e ‘ $\Box$ ’ são operadores modais usuais), afirmando que a pode codificar F somente se o codificar necessariamente. Como a implicação recíproca também vale, é claro, por causa das propriedades usuais dos operadores modais, isso torna a ideia de que a é a reificação de F se, e somente se, for necessariamente assim.

Essa ideia se desenvolve junto com dois outros ingredientes cruciais do sistema: a cláusula de que um objeto codifica uma propriedade (monádica) somente se for abstrato, e uma forma de compreensão que afirma que, para qualquer condição nas propriedades monádicas exprimíveis na linguagem formal em questão, há um objeto abstrato que apenas codifica as propriedades que atendem a essa condição (o que permite um objeto abstrato ser concebido, de fato, como a reificação de um conjunto de propriedades).

O primeiro ingrediente é implementado pela introdução da constante de predicado monádico não lógico ‘ $E!$ ’, denotando a propriedade de ser um objeto concreto, através do qual as duas outras constantes de predicado primitivo monádico ‘ $A!$ ’ e ‘ $O!$ ’, denotando respectivamente as propriedades de ser abstrato e comum, são definidos por:

$$A! =_{df} [\lambda x \neg \Diamond E!x] \quad \text{e} \quad O! =_{df} [\lambda x \Diamond E!x].$$

Segue-se que qualquer objeto considerado no sistema é abstrato ou comum, e é abstrato se, e somente se, não pode ser concreto, isto é, concreto em nenhum mundo possível, enquanto é ordinário se, e somente se, pode ser concreto, ou seja, concreto em algum mundo possível. A essas definições, o seguinte axioma-esquema é adicionado:

$$\forall \dots [O!x \Rightarrow \neg \exists P [xP]],$$

(onde ‘ $\forall \dots [\varphi]$ ’ representa o fechamento universal de φ), afirmando que um objeto é ordinário (e, portanto, não abstrato) somente se falhar em codificar (não é a reificação de) qualquer propriedade (monádica). Por contraposição, segue-se imediatamente que um objeto codifica (é a reificação de) uma propriedade (monádica) somente se for abstrato, conforme anunciado acima.

O último ingrediente completa o quadro. Consiste no seguinte axioma-esquema de compreensão:

$$\exists x [A!x \wedge \forall P [xP \Leftrightarrow \varphi]]$$

onde ‘ φ ’ é qualquer fórmula na linguagem formal em questão na qual ‘ x ’ não ocorre livremente. Seja, então, P qualquer propriedade (monádica) já definida no sistema. A partir desse esquema de axioma, juntamente com o primeiro axioma mencionado acima e com um princípio de identidade para objetos abstratos tornando x os mesmos objetos abstratos que y se, e somente se, x necessariamente codifica as mesmas propriedades que y , nós obtemos imediatamente:

$$\exists!x [A!x \wedge \forall P [xP \Leftrightarrow \forall z [Pz \Leftrightarrow Pz]]],$$

que garante que existe um único objeto abstrato que codifica (é a reificação de) qualquer propriedade (monádica) coextensiva com P . Extensionalmente falando, podemos então dizer que, para qualquer propriedade (monádica) P , há um único objeto abstrato que a codifica (reifica) e somente codifica ela. Mas isso não é tudo, pois a fórmula ‘ φ ’ pode ser mais complexa do que isso. Pode expressar qualquer condição em propriedades (monádicas), o que faz com que o esquema garanta que, para qualquer condição desse tipo, haja um objeto abstrato que apenas codifica as propriedades (monádicas) que a ele se relacionam, como também foi anunciado.

Com esse aparato formal em mãos, e com a ajuda de alguns outros enriquecimentos da linguagem de sua teoria – incluindo a introdução do operador de descrições definidas ‘ ι ’ (tal que ‘ $\iota x [\varphi]$ ’ é um termo que denota o único objeto, se houver, que atenda à condição expressa por ‘ φ ’) –, B. Linsky e o próprio Zalta foram capazes de fornecer uma caracterização rigorosa e explícita de um objeto matemático intrateórico (LINSKY e ZALTA, 1995, 2006, 2019; a razão para eu falar de um objeto matemático intrateórico, ao invés de um objeto matemático *tout court*, será esclarecida a seguir). Esse é um objeto κ_t , tal que existe uma teoria matemática t (identificada, por sua vez, com um objeto abstrato adequadamente fixado na OT, de modo a introduzir uma teoria matemática real), tal que esse objeto codifique todas e somente as propriedades que possui em t , isto é:

$$\kappa_t = \iota x [A!x \wedge \forall F [xF \Leftrightarrow t [\lambda z F \kappa_t]]],$$

onde $[\lambda z F \kappa_t]$ é a propriedade de 0-lugar (ou proposicional) que qualquer objeto tem apenas no caso de o mundo ao qual ela pertence ser tal que $F\kappa_t$ (na terminologia de Zalta, essa é a propriedade proposicional “construída” de $F\kappa_t$).

Essa não é propriamente uma definição (explícita), é claro. Sua forma muito lógica impede que seja assim, uma vez que o termo ‘ κ_t ’ figura nela à esquerda e na lateral direita. É antes uma “descrição teórica”, oferecida na linguagem (rigorosa) da OT (Teoria dos Objetos). Se existe uma teoria como t , se é realmente uma teoria matemática, como se faz, então: de quais conteúdos individuais (indicados por termos singulares) trata, quais deles são considerados como tendo em si esta ou aquela propriedade, e o que faz com que as tenham são questões que a OT não pode decidir nem pretende decidir. Ela simplesmente fornece um cenário formal que torna possível reivindicar rigorosamente que esses conteúdos são objetos matemáticos intrateóricos, e que nada mais tais objetos são. Isso implica que objetos matemáticos intrateóricos são todos abstratos e são apenas os conteúdos individuais (possivelmente denotados por termos singulares apropriados) com os quais uma teoria matemática lida. De forma geral, cada um deles é a reificação do conceito de possuir todas as propriedades que essa teoria lhe atribui.

Assim como a definição estruturalista de Shapiro, a caracterização de Zalta, ou “descrição teórica” de objetos matemáticos intrateóricos, é intrinsecamente inadequada para contabilizar provas transcendentais e conteúdos extrateóricos, ou seja, é inadequada para objetos matemáticos possivelmente estudados por diferentes teorias e independentes delas. O problema é grave, pois negar essa possibilidade torna impossível sustentar, por exemplo, se não muito informalmente, que diferentes versões da aritmética lidam com números naturais, como uma

explicação platônica deveria ser capaz de fazer, parece-me. A OT tem, no entanto, os recursos para também caracterizar objetos matemáticos extrateóricos.

Por um lado, isso dá conta da referência de termos matemáticos singulares em declarações que não fazem menção (explícita) de uma teoria matemática particular, como uma referência a objetos abstratos que codificam um conceito relevante. Supondo que somos capazes de lidar com o conceito de um triângulo, por mais que seja fixo, seria suficiente, por exemplo, identificar esse conceito com um conceito particular, chamá-lo de T , tratado dentro dessa teoria, para apresentar facilmente o enunciado de uma linguagem natural ou informal ‘ a é um triângulo’ por meio da afirmação ‘ aT ’. Isso é o mesmo que interpretar o ‘é’, na declaração anterior, como uma ocorrência informal do operador de codificação. Se acontecer de o conceito T ser definido dentro de uma determinada teoria matemática particular, seja ela formal ou não (e essa teoria, por sua vez, sendo identificada com um objeto abstrato apropriadamente fixado dentro da OT), podemos provar (dentro dessa teoria) que a codifica T se, e somente se, a exemplifica T . A afirmação ‘ aT ’ é então uma afirmação sobre um objeto matemático intrateórico, e isso a torna adequada para a apresentação ‘ a é um triângulo’ somente se o mesmo também acontece para essa última afirmação. E ainda, nada proíbe considerar T (informalmente) fixado de outra forma (de uma forma que a OT não necessita especificar), e ainda apresentando ‘ a é um triângulo’ por meio de ‘ aT ’.

Por outro lado, a OT também permite definir dentro dela uma teoria dos conjuntos pseudo-fregeana bastante fraca e usá-la para definir o número natural *à la* Frege, como extensões de conceitos (ZALTA, 1999). Para isso, basta tomar a extensão εF de um conceito (distinguível, especificável) F como o objeto

$$\iota x [A!x \wedge \forall P [xP \Leftrightarrow \forall z [Pz \Leftrightarrow Fz]]]$$

que apenas codifica F , para definir a relação de pertencimento $\in$ (ou sua designação fregeana $\sim$) por $x \in y \Leftrightarrow \exists P [x = \varepsilon P \wedge P y]$

e adotar um princípio modal apropriado para obter axiomas de Peano de segunda ordem como Frege fez (*mutatis mutandis*) em Grungesetze. Segundo Zalta, os números naturais extrateóricos podem, então, ser tomados como os objetos que atendem a esses axiomas (nos quais nenhuma relação de ordem, nenhuma adição e nenhuma multiplicação são definidas ainda), e o mesmo pode ser feito para outros objetos matemáticos definíveis dentro da mesma (frágil, vulnerável) teoria de conjuntos.

Tudo isso deve ser suficiente para deixar claras, ao mesmo tempo, a grande força expressiva (ou descritiva e elucidativa) da OT, e sua intrínseca e presumidamente proposital fraqueza. Essa fraqueza consiste em deliberadamente evitar qualquer endosso em favor de uma visão específica sobre a natureza da matemática. A teoria consegue fornecer uma clara explicação lógica dos processos de reificação e de constituição correspondente de objetos abstratos. No entanto, propositalmente se abstém de explicar o que distingue a forma matemática de reificação, e faz com que o exercício intelectual a que pertence a matemática resulte em um corpus tão poderoso e estável. Isso torna a OT particularmente adequada como um contexto teórico para avançar uma visão pluralista sobre matemática (ZALTA,

FORTHCOMING). Mas também a torna inadequada para fornecer, por si só, uma resposta ao problema de Platão. Isso não significa que não possa contribuir para fornecer tal resposta. Significa simplesmente que algum outro *insight* independente é necessário para realizar essa tarefa.

Objeto por meio do acesso epistêmico *De Re*

É por isso que quero sugerir aqui outra perspectiva, essencialmente independente do ARS (Estruturalismo *Ante Rem*) e da OT (Teoria do Objeto). Em particular, sugiro olhar para um objeto, tanto concreto quanto abstrato, como um conteúdo individual ao qual poderíamos ter (ou haver tido) um acesso epistêmico *de re*.

Se digo ‘*a* tem a propriedade *P*’, posso afirmar duas coisas bem diferentes, cujas diferenças dependem da modalidade do meu acesso epistêmico a *a*. Posso dizer, de *a*, identificado como tal de antemão, que possui a propriedade *P*, ou posso afirmar que *a*, que não foi necessariamente identificado como tal antecipadamente, tem a propriedade *P*.

Nasci em Varese, uma simpática cidadezinha no norte da Itália, e vivi permanentemente lá nos primeiros vinte e sete anos da minha vida e, mesmo agora, embora viva no estrangeiro, tento regressar a Varese sempre que posso, passando algum tempo na casa onde cresci e morei por tantos anos. Da varanda dessa casa, pode-se ver o Lago Varese, nas margens do qual passei de bicicleta inúmeras vezes. Também andei muitas vezes de barco nesse lago e, quando eu era criança, a poluição não desaconselhava nadar nele, então nadei ali muitas vezes. Agora, aconteceu de eu ler na Wikipédia que o Lago Varese tem uma superfície de 14,5 km². Apesar da minha familiaridade com o Lago Varese, essa é uma informação nova para mim, e é, literalmente falando, um pedaço de informações sobre o Lago Varese. É sobre isso, é sobre o fato de que eu tenho essa informação, a qual eu não tinha antes (simplesmente porque nunca pensei em procurar). Não ter essa informação não me impediu de saber perfeitamente o que o Lago Varese é, entender do que se falava quando se falava dele, localizá-lo na superfície da Terra e possuir a imagem dele em minha memória: em poucas palavras, ter um acesso epistêmico perfeito a isso. É por causa desse acesso que agora sei do que trata a nova informação que obtive. Então, se eu agora disser ‘O Lago Varese tem uma superfície de 14,5 km²’, quero dizer definitivamente, do Lago Varese, que tem uma superfície de 14,5 km².

Depois de obter essas novas informações sobre o Lago Varese, abri outra página da Wikipédia e li que o “Lago Eridania é um lago antigo [em Marte] com uma superfície de aproximadamente 1,1 milhão de quilômetros quadrados [. . .][, uma] profundidade máxima de 2.400 metros [e um] volume[. . .][de] 562.000 km³”. Eu nunca tinha ouvido nada sobre o Lago Eridania, e nunca soube da teoria de que poderia ter havido lagos em Marte no passado distante. Eu estou, então, muito surpreso por haver podido existir uma massa de água tão grande em Marte. Essa nova informação não é sobre algo que eu sabia antes, não é sobre algo que eu conhecia independentemente dela (da informação), algo que eu pudesse localizar no universo e do qual eu tivesse uma imagem na minha memória. Em poucas palavras, não se trata de algo a que eu tive um acesso epistêmico, antes de obtê-lo. Essa informação é, em vez disso, para mim, constitutiva do Lago Eridania: é o que me faz ter um acesso epistêmico a ele. Então, se eu disser agora que ‘O lago Eridania tinha uma área de superfície de cerca de 1.100.000 km²’, não posso

deixar de dizer, literalmente, que o Lago Eridania tinha tal área de superfície, e é isso que me torna agora capaz de pensar nele de alguma forma.

Isso ilustra a distinção que quero fazer entre duas modalidades de acesso epistêmico a um conteúdo que funciona como referência de um nome. No primeiro exemplo, considero meu acesso epistêmico como *de re*. No último, considero-o puramente *de dicto*.

Dito isso, voltemos ao último exemplo (o primeiro parece-me suficientemente claro, a ponto de não exigir outras considerações). Embora nenhum ser humano (e também, presumivelmente, nenhum animal não humano) certamente haja tido qualquer experiência empírica direta no que respeita ao Lago Eridania, parece-me claro que se trata de um objeto, e mais ainda de um objeto concreto. O que torna isso tão claro (pelo menos para mim)? Adianto que a razão é esta: o fato de que ninguém jamais teve qualquer experiência empírica direta acerca do Lago Eridania não torna logicamente impossível para alguém ter essa experiência empírica direta. Além disso, mesmo se (por algumas razões de que não sou francamente capaz de imaginar) formos instados a considerar tal experiência como logicamente impossível, restaria ainda que isso dificilmente dependeria das características intrínsecas do Lago Eridania, mas sim das limitações impostas à nossa capacidade (ou à capacidade de outros animais) de experiência empírica. Como tal, o Lago Eridania teria permitido a qualquer um ter uma experiência direta dele, e essa experiência teria, por sua vez, permitido que um ser humano tivesse um correspondente acesso epistêmico *de re*. A possibilidade (lógica) de tal acesso é, a meu ver, o que torna o Lago Eridania, para nós, algo suscetível de ser considerado como um objeto. O fato de que essa é a possibilidade de uma experiência empírica é, em vez disso, o que faz tal objeto contar para nós como concreto.

Há um aspecto importante desse argumento que merece esclarecimento. O que acabei de descrever não são, de forma alguma, as condições que tornam os Lagos Varese e Eridania objetos concretos *tout court*, mas sim condições que tornam eles, para nós, objetos concretos. Na verdade, não estou interessado na questão de estabelecer o que faz um objeto concreto ou abstrato ser assim. Eu até considero essa pergunta perfeitamente sem sentido. De acordo com a abordagem da filosofia que descrevi acima, estou bastante interessado na questão de estabelecer o que nos faz considerar um objeto como tal. É só a essa pergunta que sugiro responder dizendo que isso nada mais é do que a possibilidade de ter (ou haver tido) um acesso epistêmico *de re* a ele.

Esclarecido isso, voltemos ao ponto principal. Os dois os exemplos que apresentei são ambos tais, que possibilitam haver um acesso epistêmico *de re* a um determinado conteúdo individual, dependendo da possibilidade de uma experiência empírica direta relativa a esse conteúdo. Isso é apenas o que faz com que esses exemplos digam respeito a objetos concretos. A próxima pergunta é, então, esta: existem outros tipos de relações epistêmicas com alguns conteúdos individuais que nos tornam capazes de ter um acesso epistêmico *de re* a eles? A possibilidade de (sensivelmente) tomar algum conteúdo individual como um objeto abstrato – em vez de, meramente, tomá-lo como o alvo referencial, falsamente suposto, de um nome próprio usado em uma declaração que se admite valer – depende, a meu ver, da resposta a essa pergunta. Além disso, se a resposta for positiva, é apenas a natureza dessas relações alternativas que decide a natureza que podemos atribuir ao objeto em questão, e se ele deve contar para nós como um objeto abstrato ou concreto. Isso me faz substituir a questão de saber se existem

objetos (abstratos) matemáticos pela questão de saber se existem formas de relações epistêmicas com conteúdos individuais (abstratos), que são próprios da matemática (e diferem, então, da experiência empírica direta), as quais nos permitem ter um acesso epistêmico *de re* a esses conteúdos.

Para tornar a questão mais compreensível, deixe-me tentar esclarecê-la melhor.

O que torna meu acesso epistêmico ao Lago Varese *de re* é minha capacidade de identificar esse conteúdo como tal ao atribuir certa propriedade a ele, mas é algo totalmente independente de eu fazê-lo. Essa é, em outros termos, a minha capacidade de fixar tal conteúdo em meu horizonte epistêmico independentemente de reconhecê-lo como o conteúdo que tem a referida propriedade.

Agora, parece-me claro que isso também acontece muito frequentemente com conteúdos individuais com os quais lidamos em matemática.

Certamente, podemos identificar o número 31 independentemente de atribuir a ele a propriedade de ser o décimo primeiro número primo (na ordem usual de números). Portanto, propriamente falando, não dizemos que 31 é o décimo primeiro número primo; preferimos dizer, de 31, que é o décimo primeiro número primo.

Da mesma forma, não dizemos corretamente que a razão de dois termos da sequência de Fibonacci tende à proporção áurea, ou mesmo que essa razão é (igual a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; dizemos, da razão de dois termos sucessivos da sequência de Fibonacci, que tende à proporção áurea, e, dessa proporção, que é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Apesar de nomeá-lo em homenagem a Euclides, não dizemos corretamente que o fechamento euclidiano dos números racionais é o corpo dos números construtíveis pela régua e pelo compasso; dizemos, do fechamento euclidiano dos números racionais, que é o corpo dos números construtíveis por régua e por compasso.

Novamente, não dizemos corretamente que 4 é o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa evitando que duas regiões adjacentes sejam coloridas com a mesma cor; dizemos, de 4, que é o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa.

Não dizemos corretamente que 18 é o número Ramsey $R(4, 4)$ (ou seja, o menor número de vértices de um grafo contendo um conjunto de 4 ciclos ou um conjunto independente com 4 vértices), ou que $43 \leq R(5, 5) \leq 48$; dizemos, de 18, que $R(4, 4)$ é igual a ele, e dizemos, de 43 e 48, que eles são os limites do intervalo fechado incluindo $R(5, 5)$.

Finalmente, não dizemos corretamente que $\frac{\pi^2}{6}$ é o limite da série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2}$; nós dizemos, de $\frac{\pi^2}{6}$, que é o limite dessa série.

Os exemplos podem ser multiplicados. Alguns dos anteriores podem, a propósito, também ser invertidos. Poderíamos dizer perfeitamente, por exemplo, de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a (ou igual à) proporção áurea, ou dizemos, do limite da série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2}$, que é (ou igual a) $\frac{\pi^2}{6}$. A questão não é quais exemplos consideramos, ou o que consideramos ser, em cada um deles, o conteúdo dado, e a propriedade a atribuir-lhe. O relevante é que esses exemplos ilustram um importante fato sobre a matemática: nela podemos fixar exhaustivamente conteúdos individuais em nosso horizonte epistêmico, independentemente de atribuir-lhes propriedades relevantes que são

atribuídas a eles *post festum*. Em outros termos: podemos identificar tais conteúdos sem especificar todas as propriedades que eles têm na própria configuração em que são identificados ou em outras configurações. Esse fato é justamente o que nos permite exportar conteúdos individuais de um cenário para outro, ou melhor, lidar com o mesmo conteúdo individual em configurações diferentes. Novamente, podemos fixar esse conteúdo em um determinado cenário, estendendo então o cenário definindo relações apropriadas ou funções sobre esses mesmos conteúdos, o que nos permite atribuir novas propriedades a eles, sem torná-los conteúdos diferentes. Executamos as duas coisas de forma generalizada. E é isso, exatamente, o que faz, a meu ver, uma espécie de platonismo espontâneo (embora, muitas vezes, irreflexivo) tão popular entre os matemáticos ao trabalharem.

Essa é, de fato, a minha própria versão do platonismo para uma filosofia da prática matemática: a matemática pode ser (ou é) adequadamente explicada como uma atividade intelectual que trata de conteúdos abstratos individuais *sui generis*, fixados de modo a serem capazes de nos permitir um acesso epistêmico *de re* a eles. Como deve ficar claro, essa alegação não tem estritamente nada a ver com a existência de tais conteúdos (e com a veracidade de algumas afirmações sobre eles). Não só não afirma a existência de objetos matemáticos, mas também não a nega. Em vez disso, assume que a noção de existência de objetos abstratos é, quando concebida como uma noção primitiva, simplesmente absurda, deixando em aberto a possibilidade de definir essa noção com base em outras, acabando assim por reconhecer que, sim, objetos matemáticos existem (e teoremas matemáticos são verdadeiros para eles), mas em um novo sentido derivado. Entre outras coisas – particularmente a admissão de que as declarações matemáticas devem ser entendidas *prima facie* –, essa suposição de absurdo essencialmente se distingue da afirmação de qualquer versão de nominalismo. Trata-se, sim, de uma reivindicação para o platonismo genuíno, embora este (meu platonismo) seja, por assim dizer, um platonismo sem existência (e sem verdade), pelo menos se pretendido como noção(ões) primitiva(s).

Digo ‘*sui generis*’, pois a forma como os conteúdos individuais relevantes são fixados é peculiar da matemática. E é justamente essa peculiaridade que faz essa tese não apenas compatível com o programa da filosofia da prática matemática, mas também dependente desse mesmo programa para sua clarificação e advocacia. De fato, é apenas analisando a prática matemática e a sua história que podemos identificar as diferentes formas de fixação desses conteúdos, de modo a torná-los um acesso epistêmico possível, e podemos tentar reconhecer o que os torna matemáticos por natureza.

Tal projeto é estruturalmente similar, em natureza, ao de qualquer ciência empírica: é, por assim dizer, o projeto de uma ciência empírica da realidade matemática, essa realidade não sendo, entretanto, a de objetos autossustentáveis, como um platonista tradicional argumentaria, mas sim a da atividade e da produção matemáticas.

História, cognição e lógica

Claro, realizar esse projeto não é algo que eu possa fazer aqui. Tanto os limites de espaço quanto o próprio propósito do meu ensaio o forçam a ser essencialmente programático, por natureza. O que posso e quero fazer é delinear uma perspectiva filosófica, um programa de pesquisa para uma filosofia da prática matemática capaz de responder ao problema de Platão.

Isso requer apenas, por enquanto, sugerir brevemente três fontes gerais (certamente não alternativas, mas sim complementares) para nossa capacidade de fixar conteúdos abstratos individuais de modo a possibilitar ter acesso epistêmico *de re* a eles e, então, tomá-los como objetos matemáticos: história, cognição e lógica (ou, em se tratando dessa última, ‘formalização’, mais geralmente).

Pela história

A matemática evolui em grande parte por reformulação (conceitual) (eu tomo emprestado esse termo de várias conversas de Ken Manders). As teorias são primeiro (sobretudo informalmente) avançadas, depois reafirmadas, reorganizadas e formalizadas de várias maneiras. Essa parte importante da atividade matemática depende explícita e essencialmente da admissão de que essas diferentes formas de reformulação conservam conteúdos, que alguns conteúdos (não apenas individuais, é claro, mas crucialmente também individuais) continuam sendo os mesmos sob a transformação do cenário em que são definidos e estudados. Isso sugere inverter a perspectiva teórica-modelar.

De acordo com essa última perspectiva, os objetos matemáticos são concebidos como os elementos do(s) domínio(s) de primeira ordem envolvidos no(s) modelo(s) de uma teoria matemática (distinguível, discernível), ou seja, como os indivíduos formando o(s) intervalo(s) de (diferentes tipos de) variáveis de primeira ordem. O que quero dizer com inverter essa perspectiva é conceber a maioria das teorias matemáticas como codificações – ou, possivelmente, em alguns casos, formalizações – de uma parcela do conhecimento disponível herdado da história da matemática (no sentido próprio de “história”, ou seja, como *res gestæ*, em vez de *historia rerum gestarum*), em que os conteúdos (não apenas individuais, mas fundamentalmente também os individuais) são cristalizados, de modo a tornar possível a sua transmissão. O que muitas teorias matemáticas fariam, então, seria admitir os conteúdos como dados, e sugerir uma nova configuração conceitual para eles, possivelmente conectando-os com outros conteúdos, por sua vez cristalizados historicamente, mas dissociados dos anteriores, no saber original. Isso seria fazer uma teoria matemática não ser sobre seus modelos, mas sim sobre os conteúdos que ela captura por reformulação.

A disponibilidade de um único modelo, sob isomorfismo (e dentro de uma determinada configuração semântica), apenas mostraria que a teoria captura esses conteúdos tornando-os parte de uma estrutura unívoca (nesse cenário). A presença dos modelos não isomórficos tende a mostrar que esses conteúdos não são tão capturados assim, deixando, então, espaço para interpretações alternativas. Essa falta de univocidade (ou categoria relativa) pode certamente ser benéfica, pois possibilita abrir novos horizontes de conhecimento (o caso da análise não padronizada é sintomático), mas não diz nada sobre o conteúdo original. Em vez disso, diz algo sobre novos conteúdos que, dessa forma, passamos a ser capazes de distinguir dos primeiros, e estudar junto com eles ou separadamente deles. Aqui, a ideia básica é que a atividade matemática é intrinsecamente histórica (conforme argumentado no preâmbulo), embora essa natureza característica e peculiar dela permaneça oculta diante de movimentações superficiais. O motivo da ocultação é que essa natureza histórica se manifesta por uma espécie de negação (temporária) de si, apenas devido à reformulação.

Pela cognição

A matemática requer habilidades cognitivas (comuns e específicas). Essas não são as habilidades usuais para realizar performances práticas, muitas vezes consideradas por supostos estudos em cognição matemática (tipicamente numérica), a fim de exibirem formas generalizadas de acesso cognitivo a objetos matemáticos (normalmente pequenos números inteiros positivos), algumas (habilidades) das quais também seriam próprias de bebês e de certas espécies de primatas. Essas meramente me parecem habilidades mundanas para jogar determinados jogos linguísticos ou pré-linguísticos, que envolvem palavras matemáticas, ou para admitir uma descrição retrospectiva apelando a essas palavras ou aos conceitos correspondentes. Temos aí apenas um entre muitos outros exemplos possíveis dessas performances práticas, que, a meu ver, não têm relação atestada com as teorias matemáticas e com os conteúdos que realmente estão ligados a elas.

Refiro-me a habilidades cognitivas que são necessárias para cristalizar conteúdos intelectuais envolvidos no raciocínio abstrato. Essas são tipicamente (mas não limitadas a) habilidades de reconhecer uma estrutura invariável dentro de diferentes (tipos de) exemplificações dela, por exemplo, a estrutura ω -sequência dentro da sucessão de algarismos arábicos, ou do recíproco dos números naturais, ou da estrutura de um polígono regular dentro de triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos etc.

De maneira mais geral, essas são habilidades de detectar invariantes abstratos, sejam individuais ou não (por exemplo, operacionais) e de os considerar como tais, e trabalhando em instâncias particulares deles, a fim de identificar propriedades estruturais. Na conhecida terminologia de Kant, essa é a capacidade de lidar com o “*universal in concreto*”. Por mais errôneas que suas conclusões possam ter sido, tanto por uma prática experimental dramaticamente equivocada quanto por uma confusão enganosa entre evolução ontogenética e histórica, em seu estudo do desenvolvimento cognitivo das crianças, Jean Piaget tentou localizar e isolar habilidades como essas.

Aqui, a ideia básica é que a realização da atividade matemática depende da (aquisição e) posse de habilidades cognitivas de diferentes níveis e tipos. Essas são as habilidades que nos tornam capazes de identificar conteúdos intelectuais estáveis (individuais ou não), que são tanto filogeneticamente forjados, quanto ontogeneticamente refinados, também por meio de exercícios cognitivamente complexos e específicos (mesmo que, certamente, não apenas através deles).

Pela lógica (ou formalização)

A reformulação matemática (conceitual) depende principalmente de uma codificação da linguagem e dos atos intelectuais, como suposições (estáveis ou provisórias), inferências, definições, construções etc. Essa codificação é essencialmente lógica, na medida em que depende de restrições das formas de expressão e da possibilidade de ações, de acordo com uma série de cláusulas gerais a serem aplicadas em qualquer ocasião específica. Essas cláusulas podem ser vistas como normas que concedem permissões, a serem apeladas para produzir um cenário argumentativo que exclui tudo o que não é permitido por elas. É claro que uma determinada configuração é frequentemente estendida, seja ocasionalmente, por admissões ou atos não previstos, seja sistematicamente, pela adição de cláusulas de concessão de novas

permissões. Além disso, diferentes configurações são frequentemente fundidas umas com as outras. Se Cantor estava certo em afirmar que “a essência da matemática reside apenas em sua liberdade” (CANTOR, 1883, p. 564; tradução minha), trata-se essencialmente da liberdade de fixar as configurações apropriadas ou, no máximo, de contradizê-las localmente, meramente prevendo novas permissões, ao invés de deixar qualquer coisa se desenvolver.

Descrita de forma tão ampla, a codificação pode resultar em teorias formais ou informais. A fronteira entre os dois casos está longe de ser rígida e depende em grande parte de condições históricas ou culturais, ramos de estudo e atitudes, e sensibilidades metodológicas. O que pode ser tomado como formal dentro de alguns conceitos matemáticos? Comunidades não podem ser tomadas dessa maneira dentro de outras comunidades. Mesmo o critério de (a possibilidade de uma) implementação em computador é muito mais vago do que pode parecer à primeira vista, pois depende das linguagens de máquina usadas e das interfaces com linguagens de alto nível. Ainda assim, seja como for, o ponto crucial é que qualquer forma de codificação, por mais ampla que seja, anda junto com a identificação de um espaço delimitado de possibilidades, envolvendo alguns polos que podem contar como conteúdos individuais fixos.

Conceber determinada codificação como um ato de reformulação faz com que esses conteúdos individuais contem como ocorrências particulares de um conteúdo mais geral que eles apresentariam/introduziriam dentro de uma determinada configuração. Isso é apenas o que permite que o último conteúdo seja tomado, como tal, como um alvo disponível para atribuições de propriedades ou para definição de relações ou funções, que não são de forma alguma constitutivas dele, nem em geral, nem dentro do contexto particular em questão.

Fixar os números naturais como polos da estrutura (relativamente) categórica definida pelos axiomas de segunda ordem de Peano permite, por exemplo, tomar esses polos como alvos de uma axiomatização de primeira ordem (não categórica) – que conta, então, como um ato de reformulação dentro de um cenário diferente – e definindo neles, dentro da sua própria configuração constitutiva, uma ordem linear, e uma lei de composição aditiva e multiplicativa, sem mudar sua natureza, mas antes atribuindo a eles, como tais, um novo conjunto de propriedades. Além disso, fazer a codificação atender a algumas condições adequadas também permite que o seu resultado se torne, como tal, o assunto de uma nova investigação matemática, dependendo, por sua vez, de uma metacodificação. Tal é o muito conhecido fenômeno da metamatemática, que é também um aspecto distintivo da nossa capacidade de ter, em matemática, um acesso epistêmico *de re* a conteúdos individuais.

Aqui, a ideia básica é que a matemática usa linguagens codificadas dentro de espaços argumentativos delimitados. Esses espaços não servem apenas para fixar algumas estruturas apropriadas que se destinam a apresentar/introduzir peças de conhecimento, trazendo-as para uma nova vida. Eles também têm propriedades estruturais específicas que podem ser estudadas, como tais, por novas teorias matemáticas.

Algumas palavras, à guisa de conclusão

Quando concebidas como fontes de nossa capacidade de fixar conteúdos individuais, de modo a possibilitar um acesso epistêmico *de re* a eles, a história, a cognição e a lógica tornam-se ingredientes cruciais de uma forma de platonismo, sendo independentes de qualquer

conversa sobre a existência de objetos abstratos (e sobre a verdade das declarações acerca deles), se não apropriadamente re-definidas como noções derivadas, transformando as teses avançadas (por elas) em reivindicações perfeitamente factuais.

Se a matemática obedece ou não a tal forma de platonismo, torna-se, então, uma pura questão de fato: uma questão de fato de que a filosofia da prática matemática não é obrigada a argumentar abstratamente, mas a verificar por uma investigação dessa prática e de sua história. Isso faz com que essa filosofia funcione, por sua vez, como uma espécie de ciência empírica de alto nível.

Referências

BALAGUER, M. **Platonism and anti-platonism in mathematics**. Oxford University Press, New York and Oxford, 1998.

BENACERRAF, P. What numbers could not be. **The Philosophical Review**, 74:47–73, 1965. Also in Benacerraf and Putnam (1964), pp. 172-294.

BENACERRAF, P.; PUTNAM, H., editors. **Philosophy of mathematics**. Selected Readings. Prentice-Hall, Prentice-Hall, 1964. Second Edition (substantially enlarged): Cambridge University Press, Cambridge, etc., 1983.

BURGESS, J. P. Why I am not a nominalist. **Notre Dame Journal of Formal Logic**, 24(1):93–105, 1983. Also in: BURGESS, J. P. **Mathematics, Models and Modality**, Cambridge University Press, Cambridge, New York, etc., 2008, pp. 31-45.

BURNYEAT, M. F. Platonism and mathematics: A prelude to discussion. In A. Graeser, editor, **Mathematics and metaphysics in Aristotle**, pp. 213-240. P. Haupt, Bern and Stuttgart, 1987.

CANTOR, G. Ueber unendliche, lineare punktmannichfaltigkeiten, 5. **Mathematische Annalen**, 21: pp. 545-586, 1883.

CHEYNE, C. **Knowledge, cause, and abstract objects**. Causal Objecftions to PLatonism. Springer, Dordrecht, 2001.

EUCLID. **The thirteen books of the Elements**. Cambridge University Press, Cambridge, 1926 (2nd ed.). Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath; 3 vols.

FIELD, H. **Science without numbers**. Princeton Univ. Press, Princeton (NJ), 1980. Second edition: Oxford University Press, New York, 2016.

HALE, B.; WRIGHT, C. **The reason's proper study**. Clarendon Press, Oxford, 2001.

KERÄNEN, J. The identity problem of realist structuralism. **Philosophia Mathematica**, ser. III, 9: pp. 308-330, 2001.

LINSKY, B.; ZALTA, E. Naturalized platonism versus platonized naturalism. **The Journal of Philosophy**, 92(10): pp. 525-555, 1995.

LINSKY, B.; ZALTA, E. What is neologicisms? **The Bulletin of Symbolic Logic**, 12(1): pp. 60-99, 2006.

LINSKY, B.; ZALTA, E. Mathematical descriptions. **Philosophical Studies**, 176 (2): pp. 473-481, 2019.

LÖWE, B.; MÜLLER, T., editors. PhiMSAMP. **Philosophy of mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice**. College Publications, London, 2010.

MANCOSU, P. **The philosophy of mathematical practice**. Oxford University Press, Oxford, New York, 2008.

PANZA, M.; SERENI, A. **Plato's problem**. An Introduction to Mathematical Platonism. Palgrave Macmillan, Basingstoke (UK), 2013.

PARSONS, C. On platonism in mathematics. Translation of: P. Bernays, "Sur le platonisme dans les mathématiques", **L'enseignement mathématique**, 34, 1935, pp. 52-69. In Benacerraf and Putnam, 1964, pp. 274-286.

QUINE, W. V. O. Designation and existence. **The Journal of Philosophy**, 36: 701-709, 1939. Also in Feigl H., Sellars, W. (eds.), *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1949.

QUINE, W. V. O. Reply to Charles Parsons. In HAHN, L.; Schilpp, P., editors, **The philosophy of W. V. Quine**, pp. 396-403. Open Court, La Salle (Ill.), 1986.

RESNIK, M. D. **Mathematics as a science of patterns**. Clarendon Press, Oxford, 1997.

SHAPIRO, S. **Philosophy of mathematics: Structure and Ontology**. Oxford Univ. Press, Oxford, New York, 1997.

SHAPIRO, S. Identity, indiscernibility, and *ante rem* structuralisms: The tale of i and $-i$. **Philosophia Mathematica**, Ser. III, 16: pp. 285-309, 2008.

ZALTA, E. **Abstract objects**. Reidel P. C., Dordrecht, Boston, Lancaster, 1983.

ZALTA, E. Natural numbers and natural cardinals as abstract objects: A partial reconstruction of Frege's Grundgesetze in Object Theory. **Journal of Philosophical Logic**, 28(6): pp. 619-660, 1999.

ZALTA, E. **Principia logico-metaphysica**. 2021. Most recent version of a work in progress, regularly updated and posted at <<https://mally.stanford.edu/principia.pdf>>.

ZALTA, E. **Mathematical pluralism**. Forthcoming. Available online at <<https://mally.stanford.edu/Papers/math-pluralism.pdf>>.

Russell e Frege sobre a Lógica das Funções¹

Bernard Linsky
University of Alberta
Edmonton, Canada²

RESUMO

Neste artigo eu comparo a teoria das funções Matemáticas de Russell, às “funções descritivas” do *Principia Mathematica* *30, com a conhecida explicação de Frege das funções como entidades “insaturadas”. Russell analisa termos funcionais com funções proposicionais e a teoria de descrições definidas. Este é o principal papel técnico da teoria das descrições em Filosofia Matemática. No *The Principles of Mathematics* e alguns escritos inéditos anteriores a 1905, Russell ofereceu críticas explícitas ao relato de funções de Frege. Consequentemente, a teoria das descrições em “On Denoting” pode ser vista como uma parte crucial da maior redução logicista da Matemática de Russell, bem como uma excursão à teoria da referência.

Palavras-Chave: Russell. Frege. Lógica. Funções. Filosofia Matemática.

Russell and Frege on the Logic of Functions

ABSTRACT

In this article I compare Russell’s theory of mathematical functions, the “descriptive functions” from *Principia Mathematica* *30, with Frege’s well known account of functions as “unsaturated” entities. Russell analyses functional terms with propositional functions and the theory of definite descriptions. This is the primary technical role of the theory of descriptions in *PM*. In *The Principles of Mathematics* and some unpublished writings from before 1905, Russell offered explicit criticisms of Frege’s account of functions. Consequently, the theory of descriptions in “On Denoting” can be seen as a crucial part of Russell’s larger logicist reduction of mathematics, as well as an excursion into the theory of reference.

Keywords: Russell. Frege. Logic. Functions. Mathematical Philosophy

Russell y Frege sobre la lógica de funciones

RESUMEN

En este artículo comparo la teoría de las funciones Matemáticas de Russell, las “funciones descriptivas” de *Principia Mathematica* *30, con la conocida explicación de Frege de las funciones como entidades “no saturadas”. Russell analiza términos funcionales con funciones proposicionales y la teoría de las descripciones definidas. Este es el papel técnico principal de la teoría de las descripciones en *PM*. En *The Principles of Mathematics* y algunos escritos inéditos anteriores a 1905, Russell ofreció críticas explícitas a la descripción de funciones de Frege. En consecuencia, la teoría de las descripciones en “Sobre la denotación” puede verse como una parte crucial de la mayor reducción logicista de las Matemáticas de Russell, así como una incursión en la teoría de la referencia.

Palabras clave: Russell. Frege. Lógica. Funciones. Filosofía Matemática.

¹ Este artigo foi traduzido por Iran Abreu Mendes, com fins didáticos para uso na formação de professores de Matemática.

² Agradecimentos a Allen Hazen, James Levine, Paul Oppenheimer e Ed Zalta pelas discussões do artigo, e aos participantes da conferência de Riga, em particular meus co-simpósios James Levine e Mike Beaney. Um ensaio complementar, “From Descriptive Functions to Sets of Ordered Pairs”, foi apresentado no 31st International Wittgenstein Symposium em agosto de 2008, e no volume *Reduction and Elimination in Philosophy and the Sciences*, Alexander Hieke e Hannes Leitgeb eds., Ontos Verlag, 2009.

Introdução

A teoria de descrições definidas de Russell, com suas noções de escopo e definição contextual, justificadamente ainda é uma teoria líder na filosofia da linguagem, mais de cem anos desde que foi publicada pela primeira vez em “On Denoting”³ (Sobre Denotação) em 1905. Esta teoria foi certamente um paradigma inicial da filosofia analítica, e então, juntamente com a teoria do sentido e da referência de Frege, tornou-se uma das duas teorias clássicas de referência⁴. Atualmente o “On Denoting” vem sendo estudado a partir de um ponto de vista histórico como decorrente dos escrúpulos de Russell a respeito de sua própria teoria anterior de denotar conceitos. Como a teoria do sentido de Frege, no entanto, o papel da teoria das descrições no projeto logicista mais amplo não é bem compreendido. A teoria do sentido de Frege precede seu trabalho fundamental, o *Grundgesetze der Arithmetik*⁵, em apenas alguns anos. Ao que parece, a teoria do sentido de Frege é justificadamente fundamental no desenvolvimento posterior da filosofia da linguagem, mas não é tão fundamental para o trabalho de sua própria vida: o projeto de reduzir a Matemática à lógica.

A teoria das descrições de Russell pode parecer similarmente uma digressão na filosofia da linguagem, por um filósofo cujo principal projeto era escrever um longo livro provando os princípios da Matemática a partir de definições, usando lógica simbólica. Neste artigo, meu objetivo é explicar uma das maneiras pelas quais as descrições definidas entram no projeto de escrita dos *The Principles of Mathematics*, a saber, em *30, referente às “Funções Descritivas”. As funções descritivas são simplesmente funções Matemáticas comuns, como a função seno ou adição. O número *30 é a origem da noção agora familiar na lógica elementar de eliminar funções em favor de relações, e assim faz parte de nossa concepção de lógica elementar como um fim da lógica das relações, com a adição de termos complexos, incluindo símbolos de função, como um desenvolvimento extra e opcional. Desejo argumentar, no entanto, que essa maneira familiar de reduzir a lógica das funções apenas à lógica das relações, foi de fato um passo no projeto logicista de Russell, que ele tomou em oposição consciente ao uso de funções Matemáticas de Frege como uma noção primitiva, em sua lógica. Como tal, as “funções descritivas” foram importantes para a redução da Matemática à lógica por Russell.

As descrições definidas têm um papel importante na teoria de proposições de Russell, que foram elaboradas no *The Principles of Mathematics*, de 1903, em que Russell usa a teoria de denotar conceitos, que ele só substituiu em 1905, pela teoria de “On Denoting”. As proposições em Princípios, são compostas de “termos” que incluem indivíduos e conceitos denotativos. Os constituintes predicativos das proposições, os termos introduzidos pelos predicados, quando tomados em extensão, desempenham o papel de classes. Esses conceitos, obviamente, são essenciais para a explicação lógica dos números naturais e de todas as outras entidades com as quais a Matemática lida. Os sujeitos das proposições são indivíduos, quando

³ NT: Em 1905 Russell publicava um pequeno artigo chamado “On Denoting”, no qual apresentou sua famosa teoria das descrições. Esta teoria tornou-se um verdadeiro paradigma da discussão na filosofia contemporânea. Consiste em um método de análise de descrições definidas (expressões do tipo “o tal-e-tal”) e indefinidas (expressões do tipo “um tal-e-tal”). Mais detalhes ver **Sagid Salles Ferreira**: *Introdução à teoria das descrições de Russell*, in: Filosofia da linguagem, publicado em 18 de maio de 2010. <https://criticanarede.com/descricoes.html>.

⁴ Ramsey (1931, 263 n) primeiro o chamou de “paradigma da Filosofia”.

⁵ NT: Leis Básicas da Aritmética.

de fato são indivíduos sobre os quais fazemos julgamentos, embora, de maneiras mais gerais, denotam conceitos, que nos permitem julgar sobre termos que não conhecemos, como classes infinitas e, mais familiarizados de “On Denoting”, inexistentes, como o “quadrado redondo” ou o atual “Rei da França”⁶. Um relato adequado de descrições definidas, como um tipo especial de conceito denotativo, é, então, apropriado no pensamento preliminar e fundacional de Russell sobre a lógica à qual a Matemática deve ser reduzida. Embora apropriado em um relato de noções fundamentais de lógica, no entanto, um relato de descrições definidas não foi central para o desenvolvimento técnico de *The Principles of Mathematics*, que passou a se basear no conceito de função proposicional, e não nas proposições que são o centro das atenções em *The Principles of Mathematics*.

A teoria de descrições definidas de Russell também é importante para o projeto do *The Principles* como um modelo da técnica de definição contextual que é usada lá em *20 - “Classes”, para reduzir classes a funções proposicionais. A teoria das descrições em *12 é baseada em um par de definições contextuais, que permitem a eliminação de expressões para descrições definidas dos contextos em que ocorrem. A definição primária é:

$$*14.01. [(\iota x)\phi x] . \psi(\iota x)\phi x . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b \text{ Df}$$

Isso pode ser parafraseado dizendo que $\ulcorner \phi \text{ é } \psi \urcorner$ significa o mesmo como existe um b tal que qualquer x é ϕ se e somente se esse x é idêntico a b , e que b é ψ . Eis o contexto a partir do qual o descrição $(\iota x)\phi x$ deve ser eliminado. Que este é o “âmbito” do descrição é indicada pela ocorrência prefixada da descrição entre colchetes: $[(\iota x)\phi x]$. Esta definição permite a substituição das fórmulas nas quais aparecem descrições definidas é a posição do sujeito. Uma definição contextual adicional é fornecida para a ocorrência de descrições como, $E! (\iota x)\phi x$, que expressa a afirmação de que uma descrição é “própria”, ou seja, que existe exatamente um ϕ .

A segunda maneira pela qual a teoria das descrições definidas entra na redução logicista da Matemática em Principia Mathematica, é um modelo para a definição contextual semelhante de expressões de classe. Assim como as definições de *14 permitem a eliminação de descrições definidas de diferentes contextos, a teoria de classes em *20 é baseada em uma série de definições contextuais. Ocorrências de expressões de classe $\ulcorner \hat{z}(\psi z) \urcorner$, lidas como “a classe de z que são ψ ”, podem ser eliminadas dos contextos f através da definição primária:

$$*20.01 \quad f\{\hat{z}(\psi z)\} . = : (\exists \phi) : \phi!x . \equiv_x . \psi x : f\{\phi!z\} \text{ Df}$$

Dizer que a classe $\hat{z}(\psi z)$ é f é dizer que existe alguma função (predicativa) que é coextensiva com ψ que é f . Há nenhuma menção explícita de escopo, mas em todos os aspectos esta definição copia de perto a de descrições definidas⁷ A definição de expressões de classe é

⁶ NT: Essas são algumas expressões tomadas por Russell para discutir problema sobre o significado de expressões para uma análise proposicional relacionada a sua teoria das descrições.

⁷ Leon Chwistek prestou atenção ao papel do escopo na teoria das não classes e o discutiu em seu artigo “The Theory of Constructive Types”, ver meu (Linsky 2009).

completada por uma série de outras definições, incluindo aquelas que usam variáveis que abrangem classes, as “letras gregas” como as, que são usadas como variáveis vinculadas (aparentes) e livres (reais) para classes. Juntas, as definições de *20 proporcionam uma redução da teoria das classes à teoria das funções proposicionais. Uma consequência imediata dessa definição é que uma solução para o paradoxo de Russell é fornecida pelas restrições da teoria dos tipos. A “classe de todas as classes que não são membros de si mesmas”, mediante análise, exige que uma função se aplique a outra função do mesmo tipo, o que é proibido pela teoria dos tipos. (Veja meu Linsky 2002.) Embora essa teoria das classes “sem classes” consiga resolver os paradoxos através da eliminação da conversa sobre classes em favor da conversa sobre funções proposicionais, é precisamente neste ponto que nos separamos do agora padrão, alternativo, projeto de fundar a Matemática na teoria axiomática dos conjuntos. Em vez de confiar na noção de função proposicional para explicar as classes, os filósofos que defendem a teoria axiomática dos conjuntos preferem a teoria dos conjuntos de primeira ordem, conforme formulada em uma das teorias axiomáticas padrão, como a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha, ZFC. As funções proposicionais, acredita-se, são obscuras e nem mesmo apresentadas como funções Matemáticas familiares de argumentos a proposições.

A próxima seção do Principia Mathematica, *21 “Teoria Geral da Relações” apresenta a extensão da teoria das “não classes” para a noção correspondente de relações binárias, a teoria das “relações em extensão”. Por analogia com a forma como a teoria sem classes de *20 define uma expressão de classe $\hat{z}(\psi z)$ usando uma definição contextual, em *21 temos definições contextuais para eliminar expressões da forma $\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)$, que representa a “relação em extensão” que se mantém entre x e y quando (x,y) obtém:

$$\begin{aligned} *21.01. \quad f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\} &= \\ &: (\exists\phi): \phi!(x,y) \equiv_{x,y} \psi(x,y) : f\{\phi!(\hat{u},\hat{v})\} \quad \text{Df} \end{aligned}$$

A relação de x para ψ tem a propriedade f apenas no caso de alguma função predicativa ϕ , que é coextensiva com ψ tem a propriedade f . A partir de *21 em “Letras maiúsculas latinas”, ou seja, ‘R’, ‘S’, ‘T’, etc., são reservados para essas relações em extensão. São variáveis, substituídas por expressões como $\hat{x}\hat{y}\psi!(x,y)$, “apenas”, Whitehead e Russell dizem, “. . . como usamos letras gregas para expressões variáveis da forma $\hat{z}(\phi!z)$.” (PM 201) Esses novos símbolos para relações em extensão são escritos entre variáveis, como em xRy ou uSv . Uma função proposicional precederia as variáveis, como em $\phi(x,y)$. (Não está claro como esta notação para relações em extensão seria estendida para relações de três ou quatro lugares. De fato, em geral abaixo, como quando se fala sobre a análise de relações em termos de conjuntos de pares ordenados, a discussão será sempre restrita a Deve-se notar, como Quine observou, que as funções proposicionais intensionais representadas por ϕ , e ψ , etc., abandonam aqui o desenvolvimento de Principia Mathematica, e que a partir deste ponto só encontramos relações em extensão, simbolizado por ‘R’, ‘S’, ‘T’, etc. (Quine 1963, 251).

Descrições definidas, embora, é claro, muito importantes para o desenvolvimento posterior da filosofia da linguagem, não aparecem explicitamente nas últimas seções do PM,

onde de fato o trabalho de reduzir a Matemática à lógica é realmente realizado. Na verdade, é depois de *30·01 que os operadores de descrição, os conhecidos “íotas girados”, desaparecem, tendo, eu diria, desempenhado sua função técnica mais importante. Estamos agora prontos para a terceira via pela qual a teoria das descrições definidas entra no projeto logicista dos *Principia Mathematica*, como chave para a definição das “Funções Descritivas”, tema deste artigo. Isso toma a forma de mais uma definição, neste caso da expressão $R'y$, a ser lida como “o R de y ”:

$$*30·01. R'y = (\iota x) xRy \text{ Df}$$

A expressão $R'y$ é definida pela descrição definida, $(\iota x) xRy$. Se xRy significa “ x é pai de y ”, então $R'y$ é “o x tal que x é pai de y ”, ou “o pai de y ”. Como Whitehead e Russell apontam, esta definição não é uma definição contextual, que mostra como a expressão $R'y$ deve ser eliminada de um contexto, como $\psi(R'y)$, mas simplesmente como uma instrução explícita sobre a substituição dos símbolos R' , onde quer que ocorram. A noção de “função descritiva” fornece uma análise das ubíquas “funções Matemáticas” da aritmética e da análise que são reduzidas em números posteriores dos *Principia Mathematica*. Whitehead e Russell dizem:

As funções consideradas até agora, com exceção de algumas funções particulares como $\cap$, foram proposicionais, ou seja, tiveram proposições para seus valores. Mas as funções ordinárias da Matemática, como x^2 , $\sin x$, $\log x$, não são proposicionais. Funções desse tipo sempre significam “o termo que tem tal e tal relação com x .” Por essa razão, podem ser chamadas de funções descritivas, porque descrevem um determinado termo por meio de sua relação com seu argumento. Assim, “ $\sin \pi/2$ ” descreve o número 1; no entanto, as proposições nas quais o $\sin \pi/2$ ocorre não são as mesmas que seriam se 1 fosse substituído por $\sin \pi/2$. Isso aparece, por exemplo, da proposição “ $\sin \pi/2 = 1$ ”, que transmite informações valiosas, enquanto “ $1 = 1$ ” é trivial. As funções descritivas, como as descrições em geral, não têm significado por si mesmas, mas apenas como constituintes de proposições (PM, 231)

As funções descritivas fornecem a análise de funções Matemáticas do *Principia Mathematica*, uma análise Logicista em termos das noções lógicas de relação em extensão e descrições definidas. Foi dito que Frege “matematizou” a lógica em preparação para sua análise da aritmética⁸. Essa matematização envolveu não apenas a invenção da lógica simbólica, mas também a confiança na noção Matemática de função como uma noção primitiva em sua lógica. Conceitos são funções de objetos para valores de verdade. A noção de Frege da extensão de um conceito é seu curso de valores, que é uma noção que se aplica a todas as funções. A noção de curso de valores está centralmente implicada no paradoxo de Russell, e assim é vista, como a teoria de Whitehead e Russell, como uma das tentativas malsucedidas dos logicistas de evitar postular conjuntos como entidades Matemáticas primitivas. A explicação das funções descritivas em *30, portanto, traz claramente, alguns podem pensar, as objeções primárias à versão do logicismo de Whitehead e Russell. Baseia-se em noções muito melhor compreendidas dentro da teoria Matemática dos conjuntos, pensa-se. Uma função, nesse sentido, é simplesmente um conjunto de pares ordenados, sendo os próprios pares ordenados conjuntos de um certo tipo, e uma função proposicional seria uma função de argumentos para proposições.

⁸ As de Burton Dreben, segundo Peter Hylton (1993, n. 28).

Como as proposições não são necessárias para a lógica extensional, de primeira ordem, na qual a teoria axiomática dos conjuntos é formulada, *30 resume assim o caminho errado tomado pela versão do logicismo de Whitehead e Russell.

No entanto, gostaria de sugerir que um exame do desenvolvimento da ideia de função na lógica de Frege e Russell até o início do século XX defenderá a noção de função descritiva como uma maneira bem-sucedida de reduzir a noção Matemática de funcionam apenas para noções lógicas. Com exceção de algumas observações, das notas de Russell sobre as obras de Frege, e seu artigo não publicado “On Meaning and Denotation” de 1903, esta revisão se baseia em material em *Principles of Mathematics* e seu Apêndice A, “On the Doctrines of Frege”, mas apresentado com uma ênfase diferente do habitual. Em particular, a ênfase estará nas funções Matemáticas habituais, como a função seno, ou adição, e sua redução na teoria axiomática dos conjuntos para conjuntos de pares ordenados, e menos com os tipos mais idiossincráticos de funções, como conceitos e funções proposicionais.

Frege em Funções

Embora seja correto dizer que Frege se baseia na noção de função Matemática como primitiva, isso não quer dizer que ele não forneceu uma análise lógica famosa e inovadora de expressões de função e variáveis. O artigo de Frege de 1891 “Função e conceito” e mais explicitamente seu artigo de 1904 “O que é uma função?” falar sobre a noção Matemática de função, da qual os conceitos são um caso especial. Frege explica a natureza das variáveis como sendo entidades linguísticas às quais podem ser atribuídos valores diferentes e não como sinais de “quantidades variáveis” como muitos as descreveram confusamente. A noção adicional de Frege de conceitos como “entidades insaturadas” que são completadas por objetos e produzem valores de verdade é bem conhecida. Uma função em geral, e funções Matemáticas entre elas, também se referirão a entidades insaturadas que produzem objetos como valores. Uma expressão de função, então, como *sen x*, x^2 e $\log x$ terá como seu *Bedeutung*, ou referência a uma entidade insaturada que, quando aplicada a um número como argumento, produz um número como valor. O status lógico das expressões para funções é que elas são nomes “incompletos” para números. Assim como Frege teve problemas em até mesmo nomear conceitos como “o conceito cavalo”, similarmente há uma dificuldade em nomear funções⁹. sua natureza insaturada. A expressão ‘*sen (x)*’ realmente expressa um determinado número, o valor da função, para cada atribuição de um número à variável *x*. Fica claro a partir da discussão do problema de nomear conceitos que Frege teria rejeitado a notação lambda de Church como uma forma de nomear funções, por exemplo, com ‘ $\lambda x \text{ sen } x$ ’ como nomeando a função seno.

As opiniões de Russell sobre esse problema do “cavalo do conceito” estão no Apêndice aos *Princípios da Matemática*. Em §481 Russell concorda com Frege que é apenas “. . . alguns termos só podem ocorrer como sujeitos. . .”, em oposição à visão de Kerry de que “Begriffe também pode ocorrer como sujeitos . . .”, mas continua a discordar da alegação adicional de que eles são sujeitos que estão “na mesma relação” com seus predicados.

Mas ele [Frege] passa a fazer um segundo ponto que aparece enganado. Podemos, diz ele, ter um conceito superior (como Sócrates cai sob o homem, ele quer dizer, não

⁹ Frege introduz este problema em “Function and Concept”, (Frege 1891, 196).

como o grego cai sob o homem): mas em tais casos, não é o conceito em si, mas seu nome, que está em questão (BuG. p. 195). “O conceito de cavalo”, diz ele, não é um conceito, mas uma coisa; o uso peculiar é indicado por aspas (ib. p.196). Mas algumas páginas depois ele faz declarações que parecem envolver uma visão diferente. Um conceito, diz ele, é essencialmente predicativo mesmo quando algo é afirmado dele: uma afirmação que pode ser feita de um conceito não encaixar um objeto. Quando se diz que uma coisa se enquadra em um conceito, e quando se diz que um conceito se enquadra em um conceito superior, as duas relações envolvidas, embora semelhantes, não são as mesmas (ib. p.201). É-me difícil conciliar estas observações com os da p.195; mas voltarei a este ponto em breve (PoM, 507).

Na próxima página, Russell discute o que é essencialmente a diferença no tipo lógico entre objetos e conceitos:

Outro ponto de diferença de Frege, no qual, no entanto, ele aparece à direita, reside no fato de que não coloco nenhuma restrição à variação da variável, enquanto Frege, de acordo com a natureza da função, confina a variável às coisas. , funções de primeira ordem de uma variável, funções de primeira ordem com duas variáveis, funções de segunda ordem com uma variável e assim por diante. Há, portanto, para ele um número infinito de diferentes tipos de variabilidade. Isso decorre do fato de ele considerar distinto o conceito que ocorre como tal e o conceito que ocorre como termo, que eu (§49) identifiquei. Para mim, as funções, que não podem ser valores de variáveis em funções do primeiro ordem, são não entidades e abstrações falsas. (PoM, 508-9)

A observação de Russell de que Frege está “certo” nesta questão tem a ver com a divisão das funções proposicionais em tipos. Russell diz que “A contradição discutida no Capítulo X parece mostrar que algum mistério espreita na variação das funções proposicionais; mas para o presente a teoria de Frege de diferentes tipos de variáveis deve, penso eu, ser aceita.” (PoM, 510).

Russell retorna ao “problema do cavalo do conceito” em §483, argumentando que Frege está simplesmente errado, e que os conceitos podem ser sujeitos de proposições. Ele diz:

Frege, pode-se observar, não parece ter desembaraçado claramente os elementos lógicos e linguísticos da nomeação: o primeiros dependem da denotação, e têm, penso eu, uma alcance mais restrito do que Frege permite. (PoM, 510)

Isso está muito longe da visão contemporânea de que as funções são simplesmente conjuntos de pares ordenados. Em sua Introdução à Lógica Matemática, Alonzo Church consegue transformar a visão de Frege na visão atual padrão sobre a sintaxe lógica de expressões e termos de função. Church evita a fala de Frege de expressões de função tendo como referência (Bedeutung) alguma entidade insaturada (e não nomeável), que, quando saturada por um argumento, dá um valor. Em vez disso, encontramos:

Se supusermos a linguagem fixa, toda forma singular (função expressão) tem a ela correspondente uma função f (que chamaremos a função associada do formulário) pela regra que o valor de f para um argumento x é o mesmo que o valor do formulário para o valor x da variável livre do Formato . . . (Igreja 1956, 19)

Esta conta evita as expressões “denotado” ou “designado”, em vez de usar o neutro “correspondente a” e “associado a”. Church deseja explicar a semântica das expressões de

função sem entrar em conflito com o problema do “cavalo do conceito” de Frege, dizendo que as expressões funcionais nomeiam funções. Mas este é o relato de Frege sobre a semântica. Church, e aqueles depois dele por algum tempo, tomaram a diferença de tipo entre funções e objetos, como uma diferença de tipo lógico. Foi apenas no final da década de 1930 que, seguindo Quine, tornou-se padrão ver a lógica como lógica de primeira ordem, e as relações e funções, por meio de sua redução a conjuntos de pares ordenados, como apenas objetos¹⁰. Se olharmos atentamente para a Lei Básica V do Grundgesetze, a lei que leva ao paradoxo, veremos que na verdade trata-se de funções em geral:

$$\vdash (\epsilon f(\epsilon) = \alpha g(\alpha)) = (\forall a f(a) = g(a))$$

A expressão $\epsilon f(\epsilon)$ tem como Bedeutung ou referente, o Werthverlauf, ou “curso de valores” da função f . A Lei Básica V diz assim que o curso dos valores de f é o mesmo que o curso dos valores da função g apenas no caso de os valores de f e g serem os mesmos para cada argumento a . No caso em que f é uma função de objetos para valores de verdade, e portanto um conceito, o curso de valores é naturalmente visto como a extensão do conceito, como uma classe. Mas para qualquer outro tipo de função, o curso de valores é um objeto, como o gráfico da função, o conjunto de pares de argumentos e valores. Para o caso especial dos conceitos, a Lei Básica V diz que as extensões são as mesmas quando os conceitos são coextensivos. É natural, então, que Russell tenha visto funções (Matemáticas) como figurando proeminentemente na explicação de termos de Frege e, portanto, em sua lógica.

Expressões de função para Frege também terão um sentido, embora ele não discute isso com muitos detalhes. Esse sentido fornecerá uma conexão entre o argumento de uma função e seu valor, presumivelmente, da mesma forma que o sentido de um nome fornece uma “rota para a referência” do nome. Enquanto as funções Matemáticas simplesmente mapeiam números em números, ainda há alguma noção da conexão entre os dois, incorporada no sentido da expressão da função. Russell, na margem de Grundgesetze §2 escreve “Qual é o Sinn de $\xi^2 = 4$? Essa é a pergunta mais intrigante¹¹.”

É possível que a noção do sentido de uma equação possa estar em o cerne do uso de Frege da distinção Sinn/Bedeutung na lógica. Por se uma expressão de termo funcional como ' 2 ' simplesmente tem como seu Bedeutung o valor de uma função para um argumento, então para o argumento 2 a expressão ' ξ^2 ' é simplesmente outro nome para 2 e, além disso, não há vestígios do argumento (ou função) no valor, 4 , então a equação ' $2^2 = 4$ ' é uma identidade trivial. ' $2^2 = 4$ ' então não é diferente de ' $4 = 4$.' Se expressões como ' $2^2 = 4$ ' devem ser derivadas apenas de princípios lógicos, e isso é para revelar algo sobre o status das verdades aritméticas, então ser mais para as derivações do que uma série de identidades próprias (ou nomes para o Verdadeiro, que é, afinal, a Bedeutung de cada verdade lógica). Assim, pode-se ver a atenção às sentenças de identidade no início de “Ueber Sinn und Bedeutung” como não apenas uma amostra de um problema escolhido quase ao acaso, a atenção está na substituição de nomes pela

¹⁰ Ver (Mancosu 2005, 335-9).

¹¹ Ver (Linsky 2004, 14).

mesma referência nas sentenças ' $a = . . .$ ', mas realmente como dirigido às identidades, tão importante para a teoria das funções Matemáticas, e assim para uma defesa do interesse epistemológico na Matemática, se é de fato dedicado a sentenças e outras expressões com a *Bedeutung* que Frege diz que elas têm. Estranhamente, então, a pergunta aparentemente ingênua de Russell, “Qual é o Sinn de $\xi^2 = 4$?”, chega ao ponto exato da teoria do sentido, para justificar a explicação das expressões de função, na qual Frege se baseou.

De qualquer forma, então, seja como for que Frege fornece uma análise lógica das funções, incluindo tanto sua noção de entidades insaturadas quanto a noção de sentido, essa explicação é uma ajuda para entender as funções com as quais os matemáticos já estavam familiarizados.

As críticas de Russell a Frege

Há pouco suporte textual direto para minha tese de que a insatisfação de Russell com a noção de função de Frege se deveu ao fato de ela ser insuficientemente logicista. Nos primeiros escritos de Russell há pouca atenção a uma demarcação entre lógica e Matemática, ou atenção se uma noção é lógica ou não¹². automaticamente uma conta logicista. Existem objeções à teoria das funções de Frege, no entanto, expressas no Apêndice A aos Princípios da Matemática, e elas podem ser lidas sob essa luz. Assim temos:

noção de uma função, que à primeira vista pode parecer mais simples. Se $f(x)$ não é uma função proposicional, seu valor para um dado valor de x ($f(x)$ sendo assumido como um valor) é o termo y que satisfaz a função proposicional $y = f(x)$, ou seja, satisfaz, para o valor dado de x , alguma proposição relacional; esta proposição relacional está envolvida na definição de $f(x)$, e alguma dessas funções proposicionais é requerida na definição de qualquer função que não seja proposicional. (PoM, 508)

Russell aqui afirma que a noção de denotação e, portanto, de função descritiva, é pressuposta na noção Matemática de uma função na expressão do valor de uma função. Críticas específicas da conta de funções seguem na próxima página:

A definição geral de Frege de uma função, que também pretende abranger também funções que não são proposicionais, pode se mostrar inadequada ao considerar o que pode ser chamado de função idêntica, ou seja, x como uma função de x . Se seguirmos o conselho de Frege e removermos x na esperança de deixar a função, descobriremos que nada resta; contudo, nada não é o significado da função idêntica. (PoM, 509)

A objeção é que a metáfora de Frege para a incompletude, a lacuna em uma expressão denotativa, não pode explicar a função identidade, que recebe x como argumento e retorna x como valor. Uma equação, ' $f(x) = x$ ' pode expressar tal função, mas uma expressão que denota diretamente o valor, com o argumento excluído. Mas, argumenta Russell, as equações

¹² Assim, sua primeira reação ao ver a análise de Frege do ancestral em termos puramente lógicos foi simplesmente chamá-la de “... engenhoso: é melhor que a indução de Peano.” (Linsky 2004-5, 137). Assim, o que vemos como uma explicação logicista da indução à herança de propriedades hereditárias foi descrito por Russell como meramente melhor do que assumir um axioma de indução. Ainda assim, Russell adotou a análise de Frege imediatamente, e mais tarde a descreveu como um passo essencial no programa logicista.

pressupõem um conceito denotativo, “o” valor de uma função. Russell continua suas críticas mais adiante nessa página:

Frege deseja que os lugares vazios onde o argumento deve ser inserido sejam indicados de alguma forma; assim ele diz que em $2x^3 + x$ a função é $2(\)^3 + (\)$. Mas aqui sua exigência de que os dois lugares vazios sejam preenchidos pela mesma letra não pode ser indicada; não há como distinguir o que queremos dizer da função envolvida em $2x^3 + y$. (PoM, 509)

A fala de Frege de expressões para funções como incompletas, sugeridas por um buraco ou ponto vazio, não explica o papel das variáveis em expressões de função. Mais tarde, com o cálculo lambda de Church, ficou claro que as variáveis em expressões funcionais devem ser vistas como variáveis vinculadas. $\lambda x 2x^3 + x$ é claramente distinguido de $\lambda x \lambda y 2x^3 + y$. Há mais na análise lógica de expressões de função do que a insaturação de funções¹³.

O fato parece ser que queremos a noção de qualquer termo de uma determinada classe, e que é isso que nossos lugares vazios realmente representam. A relação, como entidade única, é a relação (6) . . . acima [a relação do membro da classe . . . ao valor que a variável tem nesse membro]; podemos então considerar qualquer relatum dessa relação, ou a afirmação de todos ou alguns dos relata, e qualquer relação pode ser expressa em termos do referente correspondente, como “Sócrates é um homem” é expresso em termos de Sócrates. Mas o aparato formal usual do cálculo das relações não pode ser empregado, porque pressupõe funções proposicionais. Podemos dizer que uma função proposicional é uma relação muitos-um que tem todos os termos para a classe de seus referentes e tem seus relata contidos entre proposições: ou, se preferirmos, podemos chamar a classe de relata de tal relação de função proposicional. Mas o ar de definição formal sobre esses enunciados é falacioso, pois as funções proposicionais são pressupostas na definição da classe de referentes e relata de uma relação. (PoM, 509)

Russell aqui se opõe a dizer que as funções proposicionais são funções de indivíduos para proposições, alegando que essa é uma explicação circular, “uma vez que as funções proposicionais são pressupostas na definição da classe de referentes e relata de uma relação”. Mas ele também sugere que a explicação de variáveis em expressões de funções também envolve denotação. Os “lugares vazios” em uma expressão de função realmente representam “qualquer termo” de uma determinada classe. “Qualquer” é uma das classes de expressões denotativas analisadas em “On Denoting”, com as próprias variáveis permanecendo entre as últimas, não analisadas, expressões denotativas quando as descrições definidas e indefinidas foram eliminadas. Russell aqui argumenta que o papel das variáveis em expressões de função é entendido se elas forem analisadas usando funções proposicionais.

Como Frege sustenta que as expressões de função são simplesmente expressões denotativas incompletas, também podemos olhar para as objeções de Russell à teoria das descrições de Frege e outras “expressões denotativas” em “On Denoting” e em outros lugares para ver suas outras objeções. Além dos problemas do argumento da “Elegia de Gray”, que

¹³ Philip Ebert salientou que em Grundgesetze, Frege usa as letras gregas e apenas para esse fim. De fato, Russell copia essa notação em sua pergunta “Qual é o Sinn de $2 = 4$?”. Claramente, Russell está criticando o uso de parênteses em torno de um espaço em branco em “Function and Concept”, e afirmando que a noção de insaturação por si só não dará conta de todas as propriedades das funções de vários argumentos.

parecem ter algo a ver com o problema de se referir a funções, o principal problema com a visão de Frege são as dificuldades com descrições impróprias. De fato, como argumentei com F.J. Pelletier (Pelletier & Linsky 2005), não está claro qual das quatro teorias diferentes de descrições impróprias é a visão oficial de Frege. Assim, eu concluiria que, apesar das realizações dos artigos de Frege em explicar o status lógico das expressões de função, foi a insatisfação de Russell com essa mesma análise, centrada no problema das descrições impróprias, que incorpora suas objeções à prioridade, ou status primitivo, de funções Matemáticas.

Em vez de simplesmente dar conta de funções parciais, de modo que 'dividir por 0' seja tratado como se referindo ao atual rei da França, na verdade a noção de função descritiva desempenha um papel mais importante no logicismo de Russell, na medida em que permite a redução de uma noção Matemática, ainda primitiva na obra de Frege, a noções lógicas. Embora talvez enigmáticas aos nossos olhos, quando comparadas com funções Matemáticas, as funções proposicionais de Russell eram centrais para sua lógica e, assim, argumentarei, centrais para seu logicismo.

A visão de Russell sobre a relação entre funções Matemáticas e funções proposicionais, ou relações, não são primariamente dirigidas por uma reação a Frege. Eles parecem ter sido motivados independentemente e desenvolvidos antes do encontro mais cuidadoso de Russell com Frege no verão de 1902. Considere o seguinte de “On Meaning and Denotation”, de 1903:

Se tomarmos a denotação como fundamental, a maneira natural de afirmar uma relação muitos-um não será xRy , mas $y = \phi x$. Esta, é claro, é a maneira Matemática usual; e há muito a ser dito sobre isso. Todas as funções comuns, como x^2 , $\sin x$, $\log x$, etc., parecem ocorrer mais naturalmente nesta forma do que como $\lambda x.\phi x$. Novamente, em linguagem comum, “ y é o pai de x ” claramente afirma uma identidade, não uma relação: é “ $y = \text{o pai de } x$ ”. (CP4, 340)

Mas se considerarmos as funções proposicionais como fundamentais – como sempre fiz, primeiro conscientemente e depois inconscientemente – devemos proceder através das relações para chegar às funções ordinárias. Pois então começamos com funções comuns como “ x é um homem”; estas são originalmente as únicas funções de uma variável. Para obter funções de outro tipo, temos que passar por xRy ; mas então, com , temos todos os problemas de denotação. E, como vimos, uma forma de denotar mais difícil do que está envolvida no uso de variáveis para começar. Assim, a denotação parece impossível de escapar (CP4, 340).

Então, Russell vê funções proposicionais, ou melhor, relações, como mais fundamentais do que funções Matemáticas. De fato, ele adotou essa posição com tanta certeza que se tornou “inconsciente” em algum momento. No entanto, Russell vê a mudança para as relações como problemática, exigindo uma explicação adequada da denotação. Assim, embora Russell possa ter achado as funções proposicionais mais básicas do que as funções Matemáticas, até resolver o problema da denotação (em “On Denoting” em 1905), ele não estava justificado em pensar que havia explicado o menos óbvio em termos das mais básicas, em vez disso, a redução das funções Matemáticas levou diretamente ao seu grande problema que o preocupava naqueles dias, o problema da denotação.

Com uma teoria própria de denotar, em particular, a teoria das descrições de *12 de *Principia Mathematica*, Whitehead e Russell estão então prontos para completar a análise logicista das funções Matemáticas como “funções descritivas” em *30.

Referências

Church, Alonzo. 1956. **Introduction to Mathematical Logic**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Frege, Gottlob. 1891. ‘Funktion und Begriff’, translated as ‘Function and Concept’. In **Collected Papers** [1984], 137–156.

Frege, Gottlob. 1893. **Grundgesetze der Arithmetik**. Jena: Hermann Pohle. Reprinted Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1998.

Frege, Gottlob. 1904. ‘Was ist eine Funktion?’, translated as ‘What is a Function?’ In **Collected Papers** [1984], 285–292.

Frege, Gottlob. 1984. **Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy**, ed. Brian McGuinness. Oxford: Basil Blackwell.

Hylton, Peter. 1993. ‘Functions and Propositional Functions in *Principia Mathematica*’. In A. D. Irvine & G. A. Wedeking (eds.) **Russell and Analytic Philosophy**, 342–360. Toronto: University of Toronto Press.

Linsky, Bernard. 2002. ‘The Resolution of Russell’s Paradox in *Principia Mathematica*’. In James E. Tomberlin (ed.) *Language and Mind*, No. 16 in **Philosophical Perspectives**, 395–417. Boston and Oxford: Blackwell.

Linsky, Bernard. 2004. ‘Russell’s Marginalia in his Copies of Frege’s Works’. **Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies** n.s. 24: 5–36.

Linsky, Bernard. 2004-5. ‘Russell’s Notes on Frege for Appendix A of *The Principles of Mathematics*’. **Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies** n.s. 24(2), Winter 2004-05: 133–72.

Linsky, Bernard. 2009. ‘Leon Chwistek’s Theory of Constructive Types’. In Wioletta Miskiewicz Sandra Lapointe, Mathieu Marion & Jan Wolenski (eds.) **The Golden Age of Polish Philosophy**: Kazimierz Twardowski’s Philosophical Legacy, Springer Verlag.

Mancosu, Paolo. 2005. ‘Harvard 1940-1941: Tarski, Carnap and Quine on a Finitistic Language of Mathematics for Science’. **History and Philosophy of Logic** 26: 327–357.

Pelletier, F.J. & Linsky, B. 2005. ‘What is Frege’s Theory of Descriptions?’ In G. Imaguire & B. Linsky (eds.) **On Denoting: 1905-2005**, 195–250. Munich: Philosophia Verlag.

Quine, Willard van Orman. 1963. **Set Theory and Its Logic**. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Ramsey, Frank Plumpton. 1931. **The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays**, ed. R.B. Braithwaite. London: Routledge, Kegan and Paul.

Russell, Bertrand. 1905. **On Denoting**. *Mind* 14 (Oct. 1905): 479–93. Reprinted in [CP4], 415-427.

Russell, Bertrand. CP4. Foundations of Logic 1903-1905, **The Collected Papers of Bertrand Russell**, vol. 4, ed. Alasdair Urquhart. London and New York: Routledge, 1994.

Russell, Bertrand. PoM. **Principles of Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

Whitehead, A.N. & Russell, B.A. PM. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 3 vols, 1910-13, 2nd ed, 1925-27.

As correntes filosóficas da matemática e suas implicações na formação o professor que ensina matemática: uma análise da produção acadêmica

Cristiane Borges Angelo¹
Universidade Federal da Paraíba

RESUMO

Este texto apresenta os resultados de uma pesquisa que objetivou analisar como a produção acadêmica vem articulando as diferentes correntes filosóficas da matemática à formação e/ou à prática de professores que ensinam Matemática. Trata-se de um estudo qualitativo e descritivo, realizado por meio de análise documental, tendo como corpora teses, dissertações e artigos científicos. Buscou-se em bancos de teses e dissertações, bem como em revistas da área da Educação Matemática trabalhos cujo objeto de estudo versasse sobre as implicações das correntes filosóficas clássicas na formação e prática do professor que ensina matemática. Os resultados apontam para a presença das correntes filosóficas relacionados ao formalismo e ao logicismo, em concepções de professores ou matrizes curriculares de Matemática. Conclui-se que as concepções elaboradas sob influência de diferentes formas de perceber a Matemática podem, muitas vezes, constituir-se em entraves nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, quer no âmbito da Educação Básica, quer no âmbito do Ensino Superior, especialmente no contexto de formação de professores.

Palavras-chave: Correntes filosóficas da Matemática; formação de professores de Matemática; prática de professores de Matemática.

The philosophical currents of mathematics and their implications in the formation of the teacher who teaches mathematics: an analysis of academic production

ABSTRACT

This text presents the results of a research that aimed to analyze how academic production has been articulating the different philosophical currents of mathematics to the training and/or practice of teachers who teach mathematics. This is a qualitative and descriptive study, carried out through document analysis, having as its body theses, dissertations and scientific articles. In theses and dissertations banks, as well as in magazines in the area of Mathematics Education, works were sought whose object of study was about the implications of classical philosophical currents in the formation and practice of the teacher who teaches mathematics. The results point to the presence of philosophical currents related to formalism and logicism, in teachers' conceptions or curriculum matrices of Mathematics. It is concluded that the conceptions elaborated under the influence of different ways of perceiving Mathematics can, many times, constitute obstacles in the teaching and learning processes of Mathematics, either in the scope of Basic Education or in the scope of Higher Education, especially in the context of teacher training.

Keywords: philosophical currents in Mathematics; Mathematics teacher training; practice of mathematics teachers.

¹ Doutora em Educação (UFRN). Professora na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus I, João Pessoa, Paraíba, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Antônio Gama, 222/1201, Bairro Expedicionários, Av., número, complemento, bairro, João Pessoa, Paraíba, Brasil, CEP: 58041-110. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0228-5559>. E-mail: cristiane.angelo@academico.ufpb.br

Las corrientes filosóficas de las matemáticas y sus implicaciones en la formación del profesor que enseña matemáticas: un análisis de la producción académica

RESUMEN

Este texto presenta los resultados de una investigación que tuvo como objetivo catalogar y analizar cómo la producción académica ha ido articulando las diferentes corrientes filosóficas de las matemáticas a la formación y/o práctica de los docentes que enseñan matemáticas. Se trata de un estudio cualitativo y descriptivo, realizado a través del análisis de documentos, con tesis, disertaciones y artículos científicos como corpus. En bancos de tesis y disertaciones, así como en revistas del área de Educación Matemática, se buscaron trabajos cuyo objeto de estudio fuera sobre las implicaciones de las corrientes filosóficas clásicas en la formación y práctica del docente que enseña matemáticas. Los resultados apuntan para la presencia de corrientes filosóficas relacionadas con el formalismo y el logicismo, en las concepciones o matrices curriculares de los profesores de Matemática. Se concluye que las concepciones elaboradas bajo la influencia de diferentes formas de concebir las Matemáticas pueden, muchas veces, constituir obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, ya sea en el ámbito de la Educación Básica o en el ámbito de la Educación Superior, especialmente en los contextos de la formación del profesorado.

Palabras clave: Corrientes filosóficas en Matemáticas; Formación de profesores de matemáticas; práctica de los profesores de matemáticas.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As discussões concernentes ao campo da formação de professores que ensinam Matemática apresentam uma gama de perspectivas voltadas, principalmente, aos conhecimentos matemáticos que devem ser apreendidos, ao currículo, aos processos de ensino e aprendizagem, às metodologias específicas para se ensinar matemática.

O tratamento de questões voltadas à natureza e à realidade dos objetos matemáticos são relevantes à medida que interferem na definição de propostas curriculares, escolhas de conteúdos, expectativas de aprendizagem e indicadores de avaliação (BICUDO; GARNICA, 2003). Sob esse prisma, consideramos que as discussões sobre a natureza da matemática influenciam, de maneira direta ou indireta, os processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Quando pensamos no papel da matemática e a sua função na escola, existe clareza, por parte dos professores, das suas funções, notadamente, a formativa e a utilitária. A primeira, relacionada a aspectos de estruturação do pensamento e a segunda como ferramenta para a compreensão e intervenção na realidade. No entanto, percebemos que ainda não há muita clareza sobre como o modo de conceber a matemática influencia na aprendizagem dos estudantes. Formas muitas vezes implícitas de conceber o conhecimento matemático – instrumento, linguagem, sistema organizado – determinam a postura do professor frente aos estudantes e, conseqüentemente, o impacto em suas aprendizagens (ESPINOSA, 2010).

Questões de natureza epistemológica que questionam a realidade dos objetos matemáticos têm gerado reflexões principalmente no campo da Filosofia da Matemática e se tornam relevantes para o ensino da Matemática. Basicamente, há três correntes filosóficas clássicas que objetivam explicar a natureza dos objetos matemáticos, fruto de uma busca pelos fundamentos da Matemática e a sua relação com a realidade concreta, quais sejam: o Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo.

Partindo do pressuposto que cada corrente filosófica intenciona explicar a natureza dos objetos e processos matemáticos e que há uma relação entre a forma de conceber a matemática

e a postura do professor de matemática em sala de aula e, ainda, que a produção acadêmica no campo da Educação Matemática configura-se em um discurso científico da área e problematiza aspectos filosóficos, epistemológicos, sociológicos, psicológicos e pedagógicos da Matemática, propomo-nos neste artigo, a analisar como a produção acadêmica, entendida como teses, dissertações e artigos científicos, vem articulando as diferentes correntes filosóficas clássicas da matemática à formação e/ou à prática de professores que ensinam Matemática.

Com isso, pretendemos traçar um panorama da produção acadêmica com o foco supracitado e pontuar quais os direcionamentos de tais pesquisa, apontando, inclusive, possibilidades para investigações futuras.

BREVE PANORAMA DAS CORRENTES FILOSÓFICAS CLÁSSICAS E SUAS POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA PEDAGÓGICA

O Logicismo, com raízes em Leibniz, tem como um dos expoentes Russell, que manifesta suas ideias logicistas reduzindo a Matemática à Lógica, tomando essa premissa como tese. Para os logicistas “a analiticidade de uma proposição, [...], pode ser demonstrada a partir das leis gerais da Lógica, com o auxílio de algumas definições formuladas a partir delas” (MACHADO, 2009, p. 26). Nessa direção, “explicitar tais leis gerais bem como os métodos de inferências legítimas são tarefas a que se dispõe os logicistas” (ibidem, 2001, p. 26).

A tentativa de tornar a Matemática uma ciência sem contradições não logrou êxito já que os logicistas não conseguiram expressar todas as proposições matemáticas utilizando, para tal, a terminologia lógica, sobretudo porque a lógica “[...] não admite sem enfrentar dificuldades, regras de quantificação para expressões bem-formadas onde atributos são tratados como indivíduos” (MACHADO, 2009, p. 27).

Algumas tentativas de superar as barreiras existentes para alcance dos objetivos dos logicistas foram apresentadas, a exemplo dos trabalhos de Zermelo, Fränkel e Von Neumann. Este último, introduz uma tipologia simplificada na Teoria dos Conjuntos, classificando as entidades matemáticas como elementos e não elementos. Houve ainda propostas indicadas pelo Positivismo Lógico de localizar todos os problemas filosóficos na utilização inadequada da linguagem (MACHADO, 2009). No entanto, as contribuições de Leibniz e outros não se mostraram suficientes para alcançar os objetivos logicistas.

Apesar do movimento logicista ter apresentado falhas, teve sua importância para a Matemática, uma vez que contribui, sobremaneira, para o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna (MONDINI, 2008).

No começo do século XX, Hilbert introduz o formalismo, apoiando-se na lógica como um instrumento necessário, mas não suficiente para o desenvolvimento da Matemática. Os fundamentos do formalismo de Hilbert, baseiam-se nas ideias de que “a Matemática compreende descrições de objetos e construções concretas, extralógicas; [...] enlaçados em teorias formais em que a lógica é o instrumento principal” (MACHADO, 2009, p. 29).

Hilbert defende que “o trabalho do matemático deve consistir no estabelecimento de teorias formais consistentes [...] até que se alcance a formalização completa da Matemática” (MACHADO, 2009, p. 29). Dessa forma, as construções e os objetos que compreendem a Matemática são formados em teorias formais que constam de termos primitivos, regras para a formação de fórmulas, axiomas ou postulados, regras de inferência e teoremas (ibidem, 2009).

Sob o ponto de vista axiomático, acreditou-se que “[...] poderíamos ser capazes de demonstrar que, a partir de fórmulas fundamentais e regras apoiadas pela manipulação de símbolos, nunca obteríamos uma fórmula que levasse a uma contradição” (MENEGETTI; BICUDO; 2003, p. 9), o que na prática não foi concretizado. Dessa forma, o formalismo não logrou êxito por não conseguir provar, por meio da formalização, que a Matemática está isenta de contradições (ESPINOSA, 2010).

A terceira corrente, denominada intuicionismo, foi desenvolvida inicialmente por Brouwer, contrapondo-se à redução da Matemática à lógica e aceitando as concepções kantianas do caráter sintético a priori acerca do tempo e espaço (MACHADO, 2009).

Os intuicionistas consideram que o aparecimento de paradoxos, como o de Russel, são claras indicações de que a Matemática está distante da perfeição, sendo falível em alguns aspectos. Para os intuicionistas, “a Matemática é uma construção de entidades abstratas, a partir da intuição do matemático [...]” (MACHADO, 2009, p. 40). Deste ponto de vista, considera-se a Matemática como um construto mental, sendo compreendida como elaborações humanas, indo de encontro aos ideais platônicos. Portanto, nesta corrente filosófica, “tudo deveria ser intuitiva e efetivamente construído pelo matemático, a partir dos números naturais, considerados claros e intuitivos” (AGNE; HARRES, 2016).

Fossa, ao discorrer sobre as ideias de Brouwer acerca do intuicionismo, afirma que “é através da intuição básica do tempo que a mente cria a matemática [...]” (FOSSA, 2011, p. 26), concluindo que “objeto matemático é criado pela ação livre da mente humana” (ibidem, p. 26). Para tal, a construção da Matemática prescinde de elementos que emergem do pensamento criativo.

Observamos o logicismo, o formalismo e o intuicionismo apresentam dissonâncias no modo de compreender os objetos matemáticos, mas isso não significa que são correntes excludentes, pois também há alguns pontos em comum entre eles.

Com o intuito de sintetizar as principais ideias das três correntes filosóficas, apresentamos o Quadro 1, a seguir.

Quadro 1 – Algumas características do pensamento Logicista, Formalista e Intuicionista

Logicismo	Escrever toda a matemática em proposições lógicas; Atender ao princípio do terceiro excluído; Reduzir os conceitos matemáticos a conceitos da lógica; Provar a verdade matemática a partir de axiomas e de regras lógicas; Enunciar os resultados matemáticos por meio de uma linguagem simbólica; Excluir da Análise as intuições geométricas, substituindo-as por noções da Aritmética; Os objetos matemáticos são imateriais, obtidos por abstração, a partir de objetos acessíveis aos sentidos, mas de que deles são apenas “imagens”; A matemática é vista como um conjunto de conhecimentos metodologicamente organizados de forma lógico-dedutiva.
Formalismo	Ser livre de contradições e paradoxos; Mostrar a consistência das estruturas;

	Linguagem Formal de 1ª ordem com cinco itens: uma quantidade enumerável de variáveis, símbolos para os conectivos da linguagem comum, o sinal de igualdade, os quantificadores e símbolos para os entes primitivos da teoria axiomatizada (NERY, BATISTELA, 2013); Ontologia estruturalista; Inexistência de objetos matemáticos – Nominalismo (MONDINI, 2008; MENEGHETTI, 2010); Raciocinar nada mais é que jogar um jogo de fórmulas (MENEGHETTI, 2010).
Intuicionismo	A matemática é falível; Existência de uma intuição primeira sobre os números naturais; As entidades abstratas existem somente quando são construídas pela mente humana (MONDINI, 2008) Entidades abstratas são elaborações humanas e não objetos ideais platônicos (SNAPPER, 1984); Os paradoxos são erros da matemática; Construção da matemática por métodos finitos (MACHADO, 2005); Renúncia da lei do terceiro excluído (MORAIS FILHO, 2007).

Fonte: Berns; Wichnoski; Merli (2019)

Reconhecemos que as correntes filosóficas que versam sobre os fundamentos da Matemática, têm reflexos na área da educação e, por conseguinte, nas concepções e posturas metodológicas do professor que ensina Matemática. Essa visão é corroborada por Fiorentini quando afirma que “[...] por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de Matemática e de Educação” (FIORENTINI, 1995, p. 5)

Cury (2009, p. 4) alerta-nos para o fato de que “não é possível fazer uma associação estreita entre uma visão filosófica da Matemática e uma tendência pedagógica que lhe seja correspondente”. Apesar dessa limitação, entendemos que as correntes filosóficas podem nos dar indícios de seus possíveis reflexos em sala de aula, já que apresentam diferentes modos de conceber os objetos matemáticos.

Uma discussão que apresenta esses reflexos foi proposta por Agne e Harres (2016) que, inclusive, propõem um organograma² onde relacionam a perspectiva do Educar pela Pesquisa a princípios filosóficos, tendências da Educação Matemática e modelos didáticos.

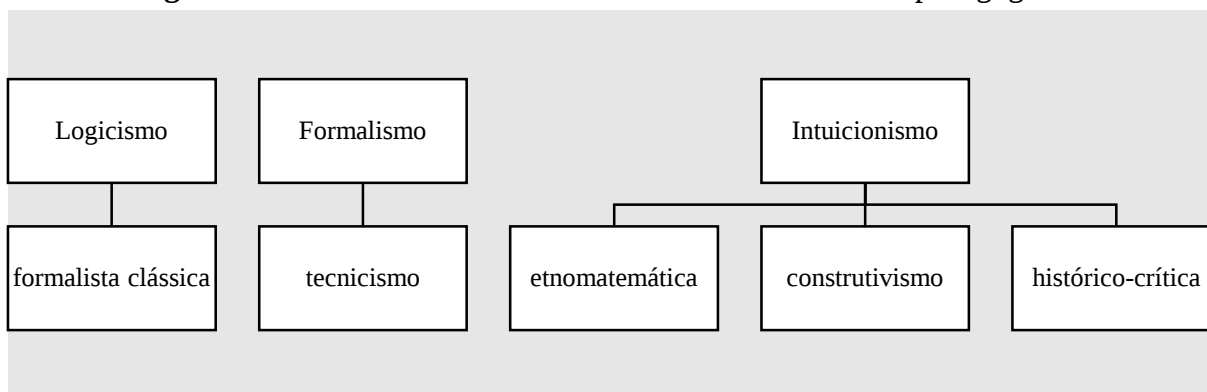
Os autores justificam a discussão e, conseqüentemente, a elaboração do organograma, tendo em vista que “nenhum teórico defende explicitamente as relações entre os modelos didáticos e as filosofias de Platão e Aristóteles” (AGNE; HARRES, 2016, p. 130). Filosofias essas que fundamentam as correntes filosóficas clássicas da Matemática.

Com base no organograma supracitado, elaboramos um esquema, apresentado na figura 1, a seguir, que relaciona as correntes filosóficas da Matemática aos modelos pedagógicos e

² O referido organograma apresenta as relações entre Educar pela Pesquisa em Matemática, modelos didáticos e princípios Filosóficos, apresentando também as categorias realismo platônico, antirrealismo aristotélico que deram origem às correntes filosóficas clássicas (logicismo, formalismo e intuicionismo) e relacionando as tendências matemáticas a alguns modelos pedagógicos.

pode auxiliar na compreensão de como o processo histórico e a forma de conceber a Matemática pode influenciar as práticas dos professores em sala de aula.

Figura 1 - Correntes filosóficas da Matemática e tendências pedagógicas



Fonte: Adaptado de Agne e Harres (2016)

O cerne do pensamento logicista é refletido na prática docente a partir da ênfase na valorização da lógica, sendo privilegiadas as manipulações simbólicas. Agne e Harres (2016) relacionam essa corrente à tendência formalista clássica, “centrada na figura do professor, detentor do conhecimento, e nos livros didáticos, escritos sob a perspectiva de que a Matemática era detentora da verdade absoluta” (AGNE; HARRES, 2016, p. 123).

Ao vincular o formalismo à tendência tecnicista, Agne e Harres (2016, p. 124) afirmam que em sala de aula “[...] o aluno desenvolvia uma aprendizagem mecânica, com exercícios repetitivos e sem a compreensão das teorias que fundamentam a Matemática”. Sob esse prisma “a habilidade exigida do aluno era a de resolver problemas por meio de técnicas prontas, como a aplicação de fórmulas” (ibidem, p. 124), gerando uma ênfase excessiva ao rigor e à formalização da matemática apresentada na escola.

A postura formalista, associada ao rigor nos métodos de demonstração, implica em um “formalismo pedagógico”, termo utilizado por Miguel, para se referir a uma prática docente que enfatiza a “[...] presença maciça de processos, técnicas, regras, fórmulas e algoritmos [...] pela quase ausência de aplicações do conhecimento matemático a outras áreas científicas e tecnológicas e pela neutralidade do conhecimento matemático” (MIGUEL, 1995, p. 10).

A forma de conceber a matemática centrada no formalismo, na qual a reduz a uma linguagem com sintaxe e semântica geral, leva o professor à transmissão dessa linguagem, considerada como uma verdade absoluta, sem levar em consideração as ideias dos estudantes (ESPINOSA, 2010).

A compreensão da Matemática, como construção humana, estabelece relação com o intuicionismo, sendo o elo aglutinador de tendências como o construtivismo, a etnomatemática e a histórico-crítica. Na etnomatemática, o saber dos sujeitos e o contexto sociocultural é valorizado e, nessa direção, o estudante é um sujeito capaz de produzir conhecimento; no

construtivismo, o desenvolvimento do pensamento se dá a partir da ação do sujeito, sendo um processo intrínseco de construção do conhecimento; na tendência histórico-crítica, o saber acumulado ao longo da história é valorizado e ressignificado pelo estudante (AGNE; ARRES, 2016).

Fossa (2001) discorre sobre os princípios pedagógicos do intuicionismo, agrupando-os nas seguintes categorias: organização do currículo, teoria geral da aprendizagem, práticas pedagógicas e contexto institucional da educação. Do ponto de vista da aprendizagem, o intuicionismo relaciona-se com a construção ativa da matemática pelo estudante. Isso, na prática do professor, implica no abandono das apresentações axiomáticas e na intensificação do uso de materiais manipulativos (FOSSA, 2001).

Conforme apontam Davis e Herch (1989), no intuicionismo, as representações mentais de objetos matemáticos são adquiridas pelas experiências e não pela memorização e essa seria a implicação do intuicionismo para a sala de aula. Sob esse ponto de vista, Davis e Hersh (1989, p. 454) apontam que “a matemática tem um objeto de estudo, as suas afirmativas fazem sentido. A significação, contudo, deve ser encontrada na compreensão partilhada por seres humanos, e não em uma realidade externa não-humana”.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DO ESTUDO

Esta pesquisa quanto à abordagem é qualitativa e quanto aos objetivos é descritiva. Foi realizada por meio de análise documental, tendo como corpora teses, dissertações e artigos científicos cujo objeto de estudo versava sobre as implicações das correntes filosóficas clássicas na formação e prática do professor que ensina matemática.

Para a seleção do material empírico deste estudo, em forma de teses e dissertações³, realizamos uma pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) utilizando o sistema de busca por meio dos descritores “logicismo”, “formalismo”, “intuicionismo”, utilizados de forma combinada, com o uso do operador *and*. Nessa busca, foram encontrados 15 trabalhos, sendo 8 teses de doutorado e 7 dissertações de mestrado. Após a leitura dos resumos, constatou-se que somente 1 atendia os critérios de inclusão por apresentarem discussões que relacionavam diretamente as correntes filosóficas à formação ou à prática do professor de matemática.

No sistema de busca de teses e dissertações foi realizada Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) utilizamos os mesmos descritores supracitados, mas focamos a busca na área de conhecimento da Educação e do Ensino de Ciências e Matemática. Nessa busca foram encontrados 49 trabalhos que, com exceção de uma tese, estavam indisponíveis por serem anteriores à Plataforma Sucupira. Cabe ressaltar que o trabalho que atendia os critérios de inclusão encontrados na BDTD estava também no catálogo da CAPES. Embora os 49 trabalhos estivessem indisponíveis para leitura na íntegra, a leitura dos títulos indicou que não atendiam os critérios de inclusão.

³ Em todas as buscas não foi limitado período temporal.

Para selecionar os artigos científicos⁴, realizamos uma busca no *Scientific Electronic Library* (SciELO) utilizando os mesmos descritores supracitados. Por não encontrarmos nenhum artigo científico na *SciELO*, decidimos fazer uma busca direta nos sítios da Revista Educação Matemática Pesquisa (EMP), do Boletim de Educação Matemática (Bolema), da Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), da Revista Zetetiké, e da Revista Matemática, Educação e Cultura (REMATEC), por serem revistas consideradas representativas do que se produz e divulga na área da Educação Matemática. Foram encontrados 4 artigos científicos que atendiam os critérios de nosso objeto de estudo.

Os trabalhos que apresentavam discussões sobre as correntes filosóficas da matemática, mas que não as relacionavam diretamente à formação ou à prática do professor não foram considerados nessa pesquisa.

Após a seleção da corpora de pesquisa, procedemos à leitura dos textos e realizamos a catalogação dos trabalhos. Santos e Ribeiro (2003) citados por Cristianini, Moraes e Castro (2010) definem a catalogação como a primeira fase do processo de tratamento intelectual de um documento que tem por objetivo descrever de forma precisa esse documento.

Nessa perspectiva, a partir de uma leitura minuciosa de cada trabalho, realizamos um tratamento descritivo das informações contidas nas pesquisas. Por terem naturezas distintas as dissertações e os artigos científicos foram catalogados com critérios particulares, em consonância com a sua natureza.

A catalogação da dissertação levou em consideração os seguintes critérios: o título, o(a) autor(a), o(a) orientador(a), o programa de pós-graduação ao qual a pesquisa estava vinculada, o nível, a área, o objetivo geral, os objetivos específicos e as palavras-chave. A catalogação dos artigos foi baseada nos critérios de: título, autor(es), ano de publicação, revista, metodologia, objetivo e palavras-chave.

Os Quadros 2 e 3, a seguir, apresentam a catalogação da dissertação e dos artigos científicos, respectivamente.

Quadro 2 – Catalogação das pesquisas

DISSERTAÇÃO	
Título	A Matemática entre o Formal e o Histórico: a Práxis Pedagógica do professor de Matemática da UNOESC/Chapecó
Autor	ANDREIS, R. F.
Orientador	JANTSCH, A. P.
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Santa Catarina
Nível	Mestrado acadêmico
Área	Educação
Metodologia	Abordagem qualitativa, estudo de caso
Objetivo Geral	Refletir a articulação do formal e do histórico na práxis pedagógica do professor de matemática, especialmente dos docentes de matemática da UNOESC Chapecó.

⁴ Em todas as buscas não foi limitado período temporal.

Objetivos Específicos	Debater a articulação formal e do histórico na práxis pedagógica de matemática como um problema no(s) curso(s) de licenciatura em matemática (formação do professor); Discutir a paradigmática (epistemológica) presente na práxis pedagógica de matemática no ensino universitário, especialmente da UNOESC Chapecó.
Ano Defesa	2000
Palavras-chave	Educação Matemática. Formalismo. Histórico. Prática Pedagógica.

Fonte: Elaboração própria

Quadro 3 – Catalogação dos artigos científicos

ARTIGO 1	
Ano	2009
Autores	Meneghetti, R. C. G
Título	O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática
Revista	Boletim de Educação Matemática (Bolema)
Metodologia	Abordagem qualitativa, estudo de caso
Objetivo	Analisar uma proposta que trata o intuitivo e o lógico como não excludentes, sob dois enfoques: em relação às concepções de conhecimento matemático após crise fundamentalista da matemática e ao contexto educacional da matemática.
Palavras-chave	Conhecimento Matemático. Aspecto Intuitivo. Aspecto Lógico. Filosofia da Matemática. Educação Matemática. Proposta Pedagógica.
ARTIGO 2	
Ano	2013
Autores	Meneghetti, R. C. G. Trevisani, F. M.
Título	Futuros matemáticos e suas concepções sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem
Revista	Educação Matemática Pesquisa (EPM)
Metodologia	Abordagem qualitativa, estudo de caso
Objetivo	Analisar concepções de conhecimento matemático e de ensino e aprendizagem de matemática dos alunos do último ano de um curso de bacharelado em matemática e refletir sobre a formação do futuro professor de matemática do ensino superior.
Palavras-chave	Conhecimento Matemático. Ensino e Aprendizagem de Matemática. Bacharelado em matemática
ARTIGO 3	
Ano	2019
Autores	Mutti, G. S. L. Matioli, C. E. R. Peron, L. C. Klüber, T. E.
Título	Logicismo, intuicionismo e formalismo: uma análise de documentos das licenciaturas em Matemática das universidades públicas paranaenses

Revista	Educação Matemática Pesquisa (EPM)
Metodologia	Pesquisa documental
Objetivo	Refletir sobre as questões associadas ao logicismo, intuicionismo e formalismo presentes nos documentos que orientam as licenciaturas em Matemática das universidades públicas paranaenses.
Palavras-chave	Filosofia da Matemática. Formação de Professores. Análise de conteúdo

ARTIGO 4	
Ano	2022
Autores	Lovis, C. Mariani, R. C. P.
Título	Relações com a matemática: entendimentos de pesquisadores do campo da educação matemática
Revista	Educação Matemática Pesquisa (EPM)
Metodologia	Abordagem qualitativa e descritiva
Objetivo	Investigar elementos que caracterizam relações com a matemática, apontadas por pesquisadores de produções stricto sensu desenvolvidas a partir do aporte teórico da relação com o saber
Palavras-Chave	Relação com o saber. correntes filosóficas. prática social. Aspecto sociocultural.

Fonte: Elaboração própria

Concluída a catalogação, passamos para a etapa de análise descritiva-reflexiva das pesquisas. Nessa análise, buscamos identificar as dimensões teóricas utilizadas em cada pesquisa e as consonâncias entre as correntes filosóficas clássicas da Matemática e os elementos relacionados à formação ou à prática do professor que ensina matemática.

ELEMENTOS EMERGENTES DA PRODUÇÃO ACADÊMICA: ANÁLISE DESCRITIVA

A dissertação intitulada “A Matemática entre o Formal e o Histórico: a Práxis Pedagógica do professor de Matemática da UNOESC/Chapecó” se propõe a refletir sobre a articulação do formal e do histórico na práxis pedagógica do professor de matemática da UNOESC – Chapecó. O lócus de estudo é o Curso de Matemática da Universidade do Oeste de Santa Catarina, Campus de Chapecó, problematizado pela autora como o segundo curso de maior reprovação da instituição. Os sujeitos da pesquisa são onze professores universitários da área de matemática que atuam no Curso. Os dados foram coletados por meio de entrevista.

A pesquisa parte do pressuposto de que há uma “estreita relação entre a questão pedagógica e a concepção de como se processa o conhecimento matemático, e [...] a concepção do professor sobre o que é a matemática, como se dá o seu processo de produção e construção” (ANDREIS, 2000, p. 11). Além disso, defende que “a prática pedagógica do professor se delineia a partir de uma posição filosófica pré-definida e da vinculação direta entre a concepção epistemológica do professor e sua prática pedagógica” (ibidem, p. 51).

Na dimensão teórica, apresenta a visão de matemática como um dos principais instrumentos criados pelo homem na busca da construção e do entendimento do mundo em que se vive. O histórico, categoria chave do trabalho, é voltado à compreensão de que o papel que a matemática desempenha na totalidade social, contribui para a formação do cidadão capaz de apreender, modificar e se relacionar na sociedade. Tomando como fundamentação as categorias de Duarte (1987 apud ANDREIS, 2000) propõe a articulação entre conhecimento enquanto produto (lógico) e o conhecimento enquanto processo (histórico), de forma a possibilitar a articulação entre o formal e o histórico. Essa articulação é fundamental para o professor, pois possibilita a compreensão de “[...] como que a lógica do processo de ensino e de aprendizagem pode reproduzir o processo histórico de produção do saber sistematizado” (ANDREIS, 2000, p. 14).

Baseada em Becker (1994 apud ANDREIS, 2000) apresenta como modelos pedagógicos a pedagogia diretiva, a pedagogia não-diretiva e a pedagogia relacional. A pedagogia diretiva, baseada no empirismo, tem no professor o centro do processo e a concepção de transmissão do conhecimento. No modelo da pedagogia não-diretiva, fundamentada no apriorismo, o professor é um auxiliar do aluno, um facilitador, uma vez que o estudante já traz um saber, ele aprende por si mesmo. Já no modelo da pedagogia relacional, baseado em uma epistemologia relacional, o estudante, enquanto sujeito histórico, elabora e reelabora seu conhecimento na ação (ANDREIS, 2000).

O trabalho apresenta uma crítica para o modelo de ensino de Matemática que, segundo a autora, domina as escolas e que se baseia em uma pedagogia diretiva. Nessa perspectiva, defende que as relações entre professor, aluno e saber, sejam estabelecidas pelo contrato didático, baseado na pedagogia relacional.

No que diz respeito à análise dos dados, a autora conclui que a maioria dos professores entrevistados, mas não exclusivamente, pensa/age dentro das noções do paradigma cartesiano-newtoniano, associado a uma pedagogia diretiva e empirista, entendendo a Matemática como uma ciência neutra e exata. Dessa forma, não se considera o estudante como sujeito histórico e não se articula essa condição com o formal da Matemática. Segundo a autora, essa visão é fruto de uma formação fundamentada também nessas ideias, o que reforça a repetição de modelos.

O artigo “O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática”, parte do pressuposto de que no processo de constituição do conhecimento matemático não se pode tratar como excludentes os aspectos lógicos e intuitivos (MENEGUETTI, 2009). Sob esse ponto de vista, a autora associa a crise das correntes filosóficas do logicismo, formalismo e intuicionismo ao fato de considerar os aspectos intuitivo e lógico como excludentes e não como complementares no processo de organização da Matemática.

Em sua dimensão teórica, o trabalho apresenta as concepções de intuição, lógica e conhecimento matemático. Concebe a intuição como uma apreensão imediata que pode ser sensível (relacionada à sensação) ou intelectual (relacionada à razão); vincula a lógica à linguagem formal, que possibilita a sistematização do conhecimento, de forma que ele adquira um caráter de necessidade e de universalidade; e compreende o conhecimento matemático como

construtível e falível, elaborado pelo sujeito, por meio do equilíbrio entre os aspectos intuitivos e lógicos (MENEGUETTI, 2009).

No artigo há a defesa de uma proposta em que o intuitivo e o lógico apoiam-se mutuamente, por meio de um processo gradual, dinâmico e equilibrado, em forma de espiral. A autora busca perceber o significado dessa proposta no contexto da Educação Matemática, a partir da análise dos processos de elaboração e aplicação de materiais didáticos para o ensino e para a aprendizagem da matemática. O material elaborado consistiu em kits pedagógicos, compostos por atividades apoiadas por materiais manipuláveis, envolvendo o objeto de conhecimento números racionais, que foi aplicado em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental.

Em consonância com a proposta de integração entre os aspectos lógico e intuitivo do conhecimento, a aplicação do material foi dividida em 3 níveis, em uma abordagem em espiral, que buscou o equilíbrio em cada um desses níveis, a saber: (1) introdução de conceito, com ênfase em ideias intuitivas acerca das frações; (2) consolidação de conceitos abordados, por meio de jogos pedagógicos, cujas regras e dinâmicas eram familiares aos estudantes; (3) expansão de conhecimentos de frações, por meio do estabelecimento da relação das frações às suas diversas formas de representação.

A autora conclui que a proposta de integração do intuitivo e o lógico envolveu professores, possibilitando a reflexão sobre a prática e sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática e ainda proporcionou aos alunos a construção dos conceitos matemáticos envolvidos, demonstrando potencial de implementação da proposta na prática educativa da matemática. Além disso, a proposta vai além das correntes filosóficas clássicas da Matemática, tendo em vista que apresenta aspectos empíricos e intuitivos na constituição do saber matemático, de forma integrada e complementar.

O artigo “Futuros matemáticos e suas concepções sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem” considera que a prática do professor de matemática sofre influência da forma como esse concebe o conhecimento matemático (MENEGUETTI, TREVISAN, 2013). Tem por objetivo analisar concepções de conhecimento matemático e de ensino e aprendizagem de matemática dos alunos do último ano de um curso de bacharelado em matemática e refletir sobre a formação do futuro professor de matemática do ensino superior. O estudo de caso, objeto do artigo, teve como sujeitos da pesquisa nove estudantes do último ano do curso de bacharelado em Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo. Desses, quatro estudantes também cursavam a licenciatura em Matemática e, por se tratar de uma pesquisa que se direciona à formação inicial de professores, o artigo foi selecionado para o presente estudo.

Os dados coletados em entrevista semiestruturada, complementada por análise documental, foram tratados à luz da análise de conteúdo.

Neste trabalho, a dimensão teórica se apoia no conceito de concepção, entendida como o ponto de vista de um objeto a partir de representações mentais, invariantes, dentre outros.

Os autores, além de apresentarem as três correntes filosóficas clássicas, ampliam a discussão sobre a natureza do conhecimento matemático considerando os aspectos históricos da matemática; o seu caráter de quase-empirismo; o rigor local, contextualizado à uma época e aprovado por um grupo determinado de especialistas; e a sua característica de produto cultural

como importantes na constituição da Matemática. Esses elementos coadunam para uma visão de matemática como conhecimento falível, corrigível, parcial e incompleto.

Os autores concluem que os estudantes, no que diz respeito à natureza do conhecimento matemático, mudaram suas concepções após iniciarem a graduação. De uma visão de matemática inquestionável e fechada passaram a concebê-la como algo não absoluto, concepção essa em consonância com as correntes filosóficas da matemática mais atuais.

No entanto, há indícios, sob o ponto de vista da natureza dos objetos matemáticos, de concepções relacionadas às correntes filosóficas clássicas, sem indicação de qual ou quais predominam, tendo em vista que os sujeitos consideram os objetos matemáticos com existência em si próprios e concebem a matemática com elementos do rigor e abstração.

O artigo “Logicismo, intuicionismo e formalismo: uma análise de documentos das licenciaturas em Matemática das universidades públicas paranaenses”, defende que as correntes filosóficas clássicas podem refletir, de forma direta ou indireta, na compreensão dos professores acerca da Matemática e de seu ensino. Tratou-se de um estudo de natureza documental, cujo objeto foram ementas, planos de ensino, matrizes curriculares e projetos pedagógicos dos Cursos dos cursos de licenciatura em Matemática

Neste contexto, os autores buscam nos documentos que regem os cursos de licenciatura em Matemática das universidades públicas do estado do Paraná indícios do logicismo, intuicionismo e formalismo. Cumpre salientar que, embora esse artigo não trate diretamente com o sujeito professor (em formação ou em exercício), sua seleção para o presente estudo se deu por ter como foco documentos norteadores da formação inicial na licenciatura em Matemática que explicitam, do ponto de vista legal, o que se tem abordado nos cursos.

Do ponto de vista teórico, o artigo utiliza as próprias correntes filosóficas como categorias de análise. O intuicionismo relaciona-se à “compreensão de que o conhecimento matemático é uma construção humana, cabendo as disciplinas dos cursos permitir ao professor conhecer como se dá esse processo de construção desenvolvendo a intuição como instrumento de construção desse conhecimento” (MUTTI et al, 2009, p. 320). O logicismo evidencia-se na ideia de que a Matemática é ‘logicamente estruturada, sendo objetivos dos cursos qualificar os licenciandos para que dominem conhecimentos de lógica e desenvolvam o raciocínio lógico”. (ibidem, p. 320). O formalismo manifesta-se na indicação de que os licenciandos tenham sólidos conhecimentos matemáticos e apliquem esses conhecimentos “utilizando rigor científico e o formalismo inerente a Matemática. [...] expressando-se matematicamente com precisão e compreendendo os métodos analíticos e múltiplos códigos e linguagens matemáticas.” (MUTTI et al, 2009, p. 320).

Os resultados do estudo sinalizam que as três correntes filosóficas se fazem presentes nos documentos analisados, sendo o formalismo presente em 129 unidades de registro, o logicismo em 54 unidades e o intuicionismo em 33 unidades.

A discussão da presença do logicismo nos documentos, segundo os autores da pesquisa, implica “na desconsideração da capacidade do sujeito de construir estratégias que o permitem elaborar conceitos matemáticos” (MUTTI et al, 2009, p. 323). Essa perspectiva, nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática pode resultar “na priorização dos conteúdos matemáticos em detrimento do modo como eles são elaborados pelos alunos ou ainda, de

encaminhamentos pedagógicos que poderiam favorecer essa elaboração” (ibidem, p. 323, grifo dos autores).

O intuicionismo se revela em expressões como “construção do conhecimento, construção humana e construção mental dentre os objetivos dos cursos de licenciatura em Matemática e, como habilidades que esperam desenvolver nos futuros professores” (MUTTI et al, 2009, p. 324, grifo dos autores), desvelando o “reconhecimento do sujeito enquanto como elemento central no que diz respeito a construção do conhecimento matemático” (ibidem, p. 323, grifo dos autores). Essa visão, segundo os autores, repercute nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, por meio de uma prática que considera a intuição e que é voltada à construção do conhecimento.

Em relação ao formalismo, a análise destaca nas matrizes curriculares uma ênfase em conteúdos matemáticos “contemplados a partir de uma sequência que lhes dê encadeamento formal e que sejam sofisticados e rigorosos de tal modo que os licenciandos reflitam sobre as generalizações e regularidades” (MUTTI et al, 2009, p. 325-326). Os documentos revelam expressões como “rigor científico, sólido conhecimento matemático, precisão e algoritmização” [...] associadas às habilidades que os cursos de licenciatura em Matemática levantados, objetivam desenvolver nos futuros professores de Matemática” (ibidem, p. 323, grifo dos autores). Nos processos de ensino e aprendizagem, essa ênfase pode implicar em uma supervalorização “de regras, de procedimentos logicamente definidos para a resolução dos problemas, na busca pela acumulação de informações relativas aos postulados, axiomas e teoremas matemáticos e na preocupação com o domínio rigoroso da linguagem matemática” (MUTTI et al, 2009, p. 325-326).

O artigo “Relações com a matemática: entendimentos de pesquisadores do campo da educação matemática”, objetivou investigar elementos que caracterizam relações com a matemática, apontadas por pesquisadores de produções *stricto sensu* desenvolvidas a partir do aporte teórico da relação com o saber.

No que diz respeito à dimensão teórica, considera a concepção epistêmica de saber, estabelecida por diferentes relações identitárias e sociais, tomando como fundamentos a perspectiva de Charlot (2000, 2021 apud LOVIS; MARIANI, 2022). Além disso, o trabalho apresenta uma concepção de Matemática como prática social e como um saber estabelecido por relações.

Os autores apresentam cinco categorias que constituem as relações com a matemática e o saber, quais sejam: correntes filosóficas; conhecimentos científico e escolar, aspectos interdisciplinares, aspectos socioculturais, práticas sociais. Dentre essas, interessou-nos a categoria correntes filosóficas, tendo em vista que considera indícios do logicismo, intuicionismo e formalismo, por meio da organização lógica do pensamento matemático; da intuição como uma ferramenta para resolver problemas; da estrutura formal dos métodos axiomáticos; da linguagem formal; e da ferramenta de resolução de problemas.

Deste modo, os autores sinalizam que nas concepções dos sujeitos da pesquisa destaca-se a construção formalista da matemática, mediante a aplicação de métodos axiomáticos, acentuando relações epistêmicas associadas ao domínio do conhecimento. Nessa perspectiva, são reveladas pelos sujeitos da pesquisa concepções que se aproximam do logicismo, por destacarem a supremacia da lógica formal na matemática acadêmica.

À GUIA DE CONCLUSÃO: UMA SÍNTESE REFLEXIVA

Nos propusemos neste trabalho a realizar e apresentar uma análise sobre trabalhos que apresentam consonâncias entre as correntes filosóficas clássicas da Matemática e os elementos relacionados à formação ou à prática do professor que ensina matemática. Ao todo, catalogamos cinco trabalhos, sendo uma dissertação de mestrado e quatro artigos científicos publicados em periódicos da área da Educação Matemática.

Pelo quantitativo de trabalhos encontrados, a partir dos critérios delimitados na pesquisa, percebemos que há uma escassez de pesquisas que tomem como fenômeno de estudo as correntes filosóficas de matemática e que assumem como região de inquérito elementos da formação ou da prática do professor que ensina Matemática.

Os trabalhos analisados, independente do objeto de estudo, entendem que existe uma relação entre a forma como os objetos matemáticos são concebidos, de acordo com as correntes filosóficas clássicas ou os pressupostos da filosofia da Matemática mais atuais, e a postura do professor que ensina Matemática.

As dimensões teóricas privilegiadas nos trabalhos baseiam-se nas concepções sobre conhecimento enquanto produto (lógico); conhecimento enquanto processo (histórico); intuição relacionada à sensação e à razão; concepção de saber, estabelecida por diferentes relações epistêmicas, identitárias e sociais; além das próprias correntes filosóficas como categorias de análise. Em todos os trabalhos a matemática é apresentada em suas dimensões histórica, social, cultural e é considerada falível, não absoluta e não neutra, o que vai ao encontro do movimento mais atual da filosofia da Matemática.

No que diz respeito à presença das correntes filosóficas clássicas e às suas relações com as concepções do professor que ensina Matemática, alguns estudos apontam para elementos relacionados ao formalismo e logicismo, em que ainda prevalecem aplicação de métodos axiomáticos e ênfase na lógica formal no ensino de matemática. Consideramos esse apontamento importante, uma vez que as concepções elaboradas sob influência de diferentes formas de perceber a Matemática podem, muitas vezes, constituir-se em entraves nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, quer no âmbito da Educação Básica, quer no âmbito do Ensino Superior, especialmente no contexto de formação de professores.

Por outro lado, entendemos que, quando as visões sobre a Matemática a concebem como um conhecimento falível e não absoluto e, além disso, como uma linguagem formal que prescinde da lógica e da intuição, os entraves quanto ao aprendizado podem ser minimizados, fato corroborado por uma das pesquisas objeto deste estudo.

Buscamos nesse texto refletir sobre a influência deixada pelas correntes filosóficas clássicas que emergem das buscas de compreender e estruturar os objetos matemáticos. A título de conclusão, consideramos que essa temática deve se fazer presente em cursos de formação inicial de professores que ensinam Matemática, sobretudo, se associada ao exercício de reflexão e análise, tendo em vista que podem vir a favorecer a compreensão da natureza da Matemática, para além das suas funções, considerando o seu caráter histórico-cultural, associado às especificidades de sua linguagem, de forma que se utilizem diferentes práticas e metodologias em sala de aula compatíveis com a natureza desses objetos.

Por fim, destacamos que essa pesquisa, no que diz respeito à seleção dos artigos científicos analisados, limitou-se a periódicos vinculados à área da Educação Matemática e,

nessa direção, reconhecemos as suas limitações. Com base no exposto, consideramos que ampliar o estudo para periódicos da área da Educação e áreas correlatas e, ainda, contemplar trabalhos publicados em anais de eventos científicos, que podem versar, inclusive, sobre pesquisas ainda em andamento, poderá ampliar a discussão e o quadro acerca da produção acadêmica sobre a temática.

REFERÊNCIAS

- AGNE, L. S.; HARRES, J. B. S. Influências Filosóficas no Educar pela Pesquisa em Matemática. **REVMAT**. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 117-133, 2016.
- BERNS, M.; WICHNOSKI, P.; MERLI, R. F. Implicações da Filosofia da Matemática na elaboração e mediação de tarefas matemáticas. **Ensino e Tecnologia em Revista**. Londrina, v. 3, n. 2, p. 198-213, jul./dez. 2019.
- BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- CRISTIANINI, G. M. S.; MORAES, J. de S.; CASTRO, M. A. S. de. Sistema de geração automática de ficha catalográfica para teses e dissertações: mais autonomia para o usuário. **Anais... XVI Seminário Nacional de Bibliotecas Universitárias**. São Conrado, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: www.gap.congressos.com.br/eventos/z0070/trabalhos/final_293.pdf. Acesso: 8 jun. 2014.
- DAVIS, J. D.; HERSH, R. **A experiência matemática**. 4 ed. Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.
- ESPINOSA, A. J. La naturaleza de la matemática, sus concepciones y su influencia em el salón de classe. **Educación y ciência**. n. 13, p. 135-150, 2010. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/11743/1/Jimenez2010La.pdf>. Acesso: 30 set. 2022.
- FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 1-38, 2009. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877>. Acesso em: 30 set. 2022.
- FOSSA, J. A. **Ensaio sobre a Educação Matemática**. Belém: UEPA, 2001.
- MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**. 7 ed. São Paulo: Cortez, 2009.
- MIGUEL, A. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em Educação Matemática. **Revista Zetetiké**, n. 3, v. 3, p. 7-40, 1995.
- MONDINI, F. O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus Diferentes Modos de Pensar a Matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática EBRAPEM - Educação Matemática: Possibilidades de interlocução, XII, 2008, Rio Claro. **Anais....** Rio Claro: Editora Unesp, 2008.

Aprender-Ensinar Matemática numa Perspectiva Formativa

Maria Aparecida Vigiani Bicudo¹
UNESP-Rio Claro PPGFCET- UTFPR

Luciane Ferreira Mocrosky²
UTFPR- Curitiba PPGFCET- UTFPR

Nelem Orlowski³
Prefeitura Municipal de Curitiba PPGFCET-UTFPR

RESUMO

Nesse artigo nos dedicamos à formação de professores que ensinam Matemática, nos atentando a possíveis sentidos e significados que foram se revelando num estudo teórico-filosófico, no âmbito da Educação Matemática, numa perspectiva fenomenológica. Mais especificamente, damos atenção às palavras formação, ensinar e aprender, trazendo uma revisão bibliográfica, num exercício hermenêutico que busca compreensões. Primeiramente explicitamos nosso entendimento de “Ensino de Matemática” e de “Educação Matemática”. No percurso investigativo teórico, no diálogo com a literatura explicitamos compreensões, inicialmente sobre formação de professores que ensinam matemática, na esteira destas nos dirigimos a expor um modo articulador de compreender as dimensões do aprender e do ensinar entrelaçados. Concluímos com a compreensão de aprender-ensinar como compromisso assumido consigo e com o outro; compromisso pautado no cuidado ao formar e formar-se, numa perspectiva crítica e reflexiva, tendo em vista a Matemática enquanto possibilidade formativa de pessoas.

Palavras-chave: Educação Matemática; formação de professores que ensinam matemática; forma/ação; aprender-ensinar.

Learning – Teaching Mathematics in Educational Perspective

ABSTRACT

In this article we approach the education of teachers who teach Mathematics with particular attention to possible senses and meanings that were revealed in a theoretical-philosophical study, within a phenomenological perspective in the scope of Mathematical Education. More specifically, we focus our attention to the words education, teaching, and learning, bringing a bibliographic review in a hermeneutic exercise that seeks understandings. First, we explain our understanding of Mathematics Teaching and Mathematics Education. Through this theoretical investigative path, by dialoguing with the literature, we explain understandings, initially regarding the education of teachers who teach mathematics. In line with that, we expose an articulating way of understanding the dimensions of learning and teaching which are intertwined. We conclude with the understanding of learning-teaching as a commitment made to ourselves and to others; this commitment is based on care while educating others and ourselves within a critical and reflective perspective, keeping in mind Mathematics as a possibility for the development of people.

¹ Pesquisadora do CNPq -1 A. Presidente da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos. Professora dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e seus fundamentos filosóficos, PGEM, UNESP, Campus de Rio Claro. Av. 24 A. Rio Claro. CEP. 13500-000 e Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET-UTFPR), Curitiba. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3533-169X>. E-mail: mariabicudo@gmail.com

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista –Campus de Rio Claro (UNESP). Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET-UTFPR). Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP: 80230-901, Curitiba, Paraná, Brasil. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8578-1496>. E-mail: mocrosky@gmail.com

³ Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Curitiba (UFPR). Professora da Rede Municipal de Ensino de Curitiba, CEI José Lamartine, Rua Carolina dos Anjos, nº 94, Pinheirinho, Curitiba, Paraná, Brasil, CEP: 81150-240. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1426-9671>. E-mail: norlovski@educacao.curitiba.pr.gov.br

Keywords: Mathematics Education; formation of teachers who teach mathematics; form/action; learn-teach.

Aprender-Ensinar Matemática em uma Perspectiva Formativa

RESUMEN

En ese artículo nos dedicamos a la formación de profesores que enseñan Matemática, prestando atención a posibles sentidos y significados que fueron revelándose en un estudio teórico-filosófico, en el ámbito de la Educación Matemática, en una perspectiva fenomenológica. Más específicamente, damos atención a las palabras formación, enseñar y aprender, trayendo una revisión bibliográfica, en un ejercicio hermenéutico que busca comprensiones. Primeramente, dejamos explícito nuestro entendimiento de Enseño de Matemática y de Educación Matemática. En el transcurso investigativo teórico, en el diálogo con la literatura dejamos explícitas comprensiones, inicialmente sobre la formación de profesores que enseñan Matemática, en el ámbito de ellas nos dirigimos a exponer un modo articulador de comprender las dimensiones del aprender y del enseñar entrelazados. Concluimos con la comprensión de aprender-enseñar como compromiso asumido consigo mismo y con el otro; compromiso pautado en el cuidado al formar y formarse, en una perspectiva crítica y reflexiva, teniendo en vista la Matemática considerando la posibilidad formativa de personas.

Palabras-clave: Matemática; formación de profesores que enseñan matemática; forma/acción; aprender-enseñar.

INTRODUÇÃO

Iniciamos este artigo expondo nossa compreensão a respeito de “Ensino de Matemática” e “Educação Matemática”, tema deste dossiê. Essa compreensão, que passaremos a expor, subjaz o modo pelo qual entendemos que a formação de professores que ensinam-aprendem essa disciplina deve se dar.

“Ensino de Matemática” é um nome que já anuncia o destaque dado à Matemática, entendida na dimensão de sentidos e significados que esse nome carrega consigo e que deve ser ensinada. São duas palavras “ensino”, “matemática” interligadas pela preposição “de”. Sendo assim, há um ensino de algo, indicado como Matemática.

Ensino é a ação e o efeito de ensinar, verbo que diz das ações de instruir, doutrinar e amestrar com regras ou preceitos. Matemática, em uma busca simples por dicionários⁴, tem-se definida como: a ciência que relaciona as práticas do cotidiano e a natureza ao raciocínio humano e à lógica numérica; uma ciência que relaciona a lógica com situações práticas habituais; uma ciência que desenvolve uma constante busca pela veracidade dos fatos por meio de técnicas precisas e exatas.

Esse é um modo comum de se falar a respeito do ensino e dessa ciência. Entretanto, adentrando mais pelas possibilidades de compreender-se o ensino, já em uma perspectiva de trazê-lo à luz das discussões mantidas na área da Educação, ele é entendido como uma atividade docente dirigida à aprendizagem do aluno. As ações de ensino devem se manter consonantes com a visão de aprendizagem assumida. Por sua vez, a aprendizagem é objeto de estudo da Psicologia e há diferentes teorias que expõem, de modo cientificamente justificado, conceitos e modos da aprendizagem se dar. Tomemos como um exemplo, para focar o pensamento aqui exposto, as teorias que focam a cognição. Nesse âmbito, pensemos na teoria piagetiana, como era estudada, compreendida e trabalhada na esfera da Educação, nas décadas de 1960 e 1970.

⁴ Matemática: 1 Ciência que trata das medidas, propriedades e relações de quantidades e grandezas e que inclui a aritmética, a álgebra, a geometria, a trigonometria, o cálculo etc. (MICHAELIS, 2022). Matemática: Ciência que estuda, por meio do raciocínio dedutivo, as propriedades dos seres abstratos (números, figuras geométricas etc.), bem como as relações que se estabelecem entre eles (DICIO, 2022).

O ponto crucial da teoria é a cognição. Trabalha com o sujeito epistêmico⁵, buscando mostrar como ele constrói esquemas e conceitos, mediante ações realizadas pelo sujeito com objetos da realidade. Sendo os objetos a serem trabalhados os matemáticos, então as atividades de ensino deveriam visá-los, compreendê-los, bem como compreender a lógica da ciência Matemática, tendo por meta possibilitar ao aluno construir conceitos matemáticos, com base nos esquemas gerados nas ações realizadas e, mediante avanços, ir construindo e dando conta da própria lógica da ciência em questão. Note-se que a simplicidade de um olhar ingênuo, agora já se evidenciou de uma complexidade que exige estudos, tanto de teorias da Psicologia, quanto da ciência Matemática, acrescida da visão de Educação.

Observa-se que a aprendizagem tem por meta o trabalho com a Matemática, entendida como ciência que se instaura no mundo da civilização europeia ocidental. É com essa concepção de ciência que, nas décadas acima trazidas para exemplificar nossa argumentação, era assumida. A Matemática entendida como ciência que opera com exatidões e com técnicas precisas e exatas. O esforço dirigido à formação do professor que trabalha ou que está em formação para trabalhar com essa ciência, nessa abordagem, incide primeiramente na sua aprendizagem dessa ciência e dos seus objetos e lógica; para complementar essa formação, incide no estudo da aprendizagem do aluno. Aos professores, juntamente com a equipe da educação, compete realizar as conexões de ambas as regiões de inquérito. E a tarefa de realizá-las mostra-se difícil e complexa. Ao se pensar nas práticas de ensino realizadas, analisando-as e sobre elas refletindo-se, lacunas e indagações se mostram e se colocam. Perguntas sobre educação e o seu fim, olhando-se um contexto que abrange a realidade histórico-sócio-cultural para além da construção do conhecimento do sujeito epistêmico; perguntas sobre a própria Matemática, sua historicidade e os modos pelos quais foi construída na cultura ocidental; perguntas sobre as consistências de suas teorias; sobre o significado de exatidão e de certeza com o qual trabalha; sobre o significado de sua hegemonia dentre as ciências; sobre o sentido de suas verdades para a vida de todo e qualquer ser vivente.

Essas perguntas conduziram discussões entre profissionais e pessoas em geral, ao longo das décadas de 1980 e 1990, e, se constituíram no solo para a compreensão do que se consagrou como Educação Matemática. Destaca-se esse ser um nome, sem conectivos que as unifique. O sentido que foi se fazendo e os significados que foram convergindo para um núcleo de ideias ditas nessa denominação, expõe a compreensão de formação da pessoa que lida com essa ciência e com as ações realizadas no cotidiano que se evidenciam como fazer matemático, tais como, mensurar, se posicionar espacialmente, fazer previsões julgadoras aproximadas. Abre-se, então, uma dimensão importante a ser adentrada, pois solicita compreensões, uma vez que, é preciso compreender do que se fala, ao se falar em pessoa.

Estudos aprofundados no âmbito da Filosofia, da Antropologia Filosófica, da Teologia, das Ciências Sociais e Humanas evidenciam não ser passível de *pessoa* ser concebida como um sujeito individual e nem ser um Ego que, de modo egoístico, assume valores importantes para si mesmo. Porém, se trata de pessoa formada na conjuntura de sua totalidade bio-psíquico-espiritual junto à totalidade da realidade histórico-sócio-cultural em que sua vida,

⁵ O sujeito epistêmico ou “sujeito do conhecimento” como um sujeito social, cujas características mais gerais advém de sua estruturação mental, desdobrando-se em operações lógico-matemáticas universais de cada estágio do desenvolvimento humano (MARÇAL, 2009).

existencialmente, se realiza e se escoa na temporalidade. Pessoa essa que sente, toma decisões, realiza atos cognitivos, se coloca e expressa sua compreensão pela linguagem; pessoa que, dada sua constituição, transcende sempre, e necessariamente, os contornos da individualidade do seu organismo e se enlaça e entrelaça com o que está dado no mundo. Ao se focar a Educação Matemática, a formação aqui considerada, se dirige a essa ciência e aos modos de ela proceder, tanto da perspectiva da ciência concebida na civilização do mundo ocidental, quanto às ações realizadas pela pessoa na sua vida do cotidiano.

Ao se perguntar como compreender a Matemática, se está focando a ciência do mundo ocidental, que é sustentada por uma lógica, por determinações que definem seus objetos e por uma linguagem, a qual tem estado presente nos currículos da escola. Nesse âmbito, por sua vez, abrem-se perguntas sobre essa linguagem, sobre a exatidão que confere às suas afirmações e possibilidades de aplicação. Em suma, é preciso compreender o que ela faz no âmbito da ciência e da tecnologia, e do que diz do mundo. Perguntas são levantadas: suas verdades são verdades universais? Entendemos que no âmbito de suas teorias e da perspectiva de que fala e faz, sim, são. Mas não são universais, no sentido de valerem para todas as regiões das atividades humanas, como, por exemplo, religião, arte etc., nem é o modo pelo qual todas as culturas expressam e realizam atividades matemáticas. À Educação Matemática compete abrir clareiras para a compreensão da perspectiva da verdade de que essa ciência trata, trazendo, inclusive modos de outros povos e culturas trabalharem com ideias matemáticas.

Educação Matemática, conforme entendemos, visa à formação da pessoa olhada em sua singularidade e como cidadã, ou seja, como enraizada e participante de uma comunidade e de uma sociedade, solo de sua existência e nutrição; a Matemática, como ciência do mundo ocidental, portanto, visa os seus modos de proceder, de ser constituída e produzida, bem como à análise crítica e reflexiva do que diz e faz no âmbito da ciência e da tecnologia do mundo todo, presente em diferentes culturas; do que diz da vida do ser humano; de como está presente em outras culturas, tendo em vista não tomá-la como onisciente e universalmente válida para toda e qualquer questão da realidade mundana, porém tão somente como um modo de lidar e tratar com essa realidade.

Com essas considerações iniciais, nesse artigo tratamos possíveis sentidos e significados que foram se revelando ao refletirmos sobre formação de professores que ensinam Matemática no âmbito da Educação Matemática, fenomenológico-hermenêutica. Fenomenológica, por não assumir teorias que postulem sobre modos de proceder ao se fazer Educação Matemática, focando, no caso do tema deste artigo, a formação do professor de Matemática, no próprio movimento de aprender-ensinar assuntos dessa disciplina, tendo em vista o que se revela como mais estrutural a essa forma/ação. Hermenêutica porque adentramos pela compreensão interpretativa de palavras que se destacam ao buscarmos pela compreensão do ensinar-aprender no movimento de formação de professores de Matemática. Sendo assim, destacamos, em nossos estudos, as palavras formação, ensinar e aprender, trazendo uma revisão bibliográfica, num exercício hermenêutico que busca compreensões. Foi no percurso investigativo teórico dos termos supracitados e dialogando com a literatura que compusemos esse texto em três partes. Na primeira, explicitamos uma compreensão fenomenológica de formação de professores que ensinam Matemática. No decorrer do percurso descritivo empreendido, explicitamos na segunda parte, um modo articulador de compreender as dimensões do aprender e do ensinar

entrelaçados. Nos dirigimos à conclusão do texto com a compreensão de aprender-ensinar como compromisso assumido consigo e com o outro; compromisso pautado no cuidado ao formar e formar-se, numa perspectiva crítica e reflexiva, tendo em vista a Matemática enquanto possibilidade formativa de pessoas.

Formação de professores que ensinam Matemática no âmbito da Educação Matemática numa perspectiva filosófica-fenomenológica

A formação de professores se caracteriza com um questão ampla e discuti-la, segundo Bicudo (2018), exige um proceder analítico e reflexivo, que entrelace aspectos culturais, características da sociedade em que se vive, seu projeto de educação, transcendendo o imediato e utilitário, sem ignorá-los. Isso quer dizer, que a temática solicita tratar dos possíveis desdobramentos éticos, gnosiológicos e ontológicos, acolhendo os atos da própria pessoa que reflete

É esta ação de se dar conta de si, do que se está fazendo na própria ação do fazer, que nos ajuda a transcender a ação prática e de visualizações de justificativas, ou seja, a do como se faz e do por que se faz assim, para se perceber fazendo, dando-se conta disso que se faz. É um tomar ciência de si e, com isso, aprofunda-se a constituição do conhecimento e expande-se sua abrangência, podendo-se caminhar em direção de assumi-lo no seu próprio modo de ser. O aprofundamento do conhecimento que se dá nesse processo de constituir-se, revela-se na atitude assumida pela pessoa (BICUDO, 2018, p. 41).

Compreendemos que dar-se conta da própria ação, da análise dessa ação em expressões intencionais de quem as atualiza, nos modos de ser realizada e nos desdobramentos e reflexões do realizado se configura em uma “forma/ação”. A expressão forma/ação, foi cunhada por Bicudo (2003) para dar ênfase ao significado de forma como manifestação de algo que assume uma configuração por meio de um ato atualizador em ação. Esta, por sua vez, lhe serve como conteúdo e força que impulsiona à forma configurada pela ação empreendida (MIARKA; BICUDO, 2010).

Além de uma expressão, forma/ação esclarece a compreensão fenomenológica que se sustenta na atitude filosófica de um entrelaçamento da materialidade com a forma, em que a ação, a cada vez, lhe imprime configurações. Assim, tanto matéria quanto forma se constituem movimentadas pela ação, como modo pelo qual a forma se materializa.

Este entrelaçamento é tematizado por Bicudo (2003) com base na metafísica de Aristóteles em que, na constituição dos seres, há dois pares, potência e ato, forma e matéria. Potência entendida como a força que sustenta o movimento de devir da *physis*, que se impõe com vigor para se manter, sendo. Entretanto a força não inicia o movimento de ser, pois é preciso do ato que se origina da ação. Assim, a ação desencadeia o acontecer da forma, revelando que é na ação, no movimento, que o significado de forma como configuração ou aparição de algo se dá. Ou seja, mostra a forma que possui e que, de certo modo foi perseguida, tomando forma por meios de um ato atualizador, o qual lhe serve como conteúdo e força que impulsiona à forma apresentada. Bicudo (2003, 2018, 2020) explicita que a matéria vem impressa de sua forma. Estes pares, segundo a autora, presentes na forma/ação de professores de matemática, se dão no próprio ato de acontecer da educação.

A forma, para se realizar, precisa da matéria e esta imprime modos de ser da forma. Entretanto, para que se atualize, isto é, para que venha a ser, precisa da ação. Esta é realizada pelo sujeito, entendido como corpo vivente, ou seja, corpo encarnado que se movimenta intencionalmente. Assim, forma, matéria e ação estão constitutivamente unidas para a realização de qualquer projeto, e, neste caso, para a realização da professoralidade do professor de matemática (BICUDO, 2018, p. 34).

As formas, como as ideias, carregam ideais e valores, vão sendo produzidas historicamente no contexto cultural, social e político no qual se caracterizam as concepções sobre educação, matemática e sobre as pessoas, de modo que a forma vai sendo nutrida nesse contexto material de concepções e valores que indicam direções (relações sociais, pessoas que têm expectativas, modos de ser e de compreender, dos conhecimentos produzidos, preservados e comunicados pela linguagem e pela tecnologia disponível).

[...] entra em jogo uma complexidade de aspectos que constituem a forma/matéria da forma mencionada na expressão forma/ação. As ações efetuadas por pessoas trazem à realidade a forma/ação do professor. E esse movimento se estende em cada pessoa que exerce a profissão. A forma/ação do modo como o professor é professor também se dá no próprio exercício da profissão em uma determinada realidade e contexto socio histórico cultural em que está imerso (BICUDO, 2018, p. 36).

Nesse modo de conceber, compreendemos que questionar a forma/ação requer atenção ao movimento contínuo de pensar e repensar a ação, dando-se conta do que se está realizando junto aos envolvidos. O que isso pode significar? Diz-nos que, de um ponto de vista amplo, nunca estamos formados, mas estamos sempre em condição de vir a ser em forma/ação. Tal condição aberta nos indica também que não há etapas ou limites cronológicos, uma vez que vai se dando ao longo da vida da pessoa que vem a ser docente, desde seus primeiros contatos com expressões matemáticas.

Destaca-se, também, a característica da forma/ação no realizar-se sendo, o que lhe confere um caráter histórico, em que o *tornar-se* pessoa e professor de matemática se entrelaçam no próprio movimento de ser pessoa e professor, carregando consigo a questão teleológica, ou seja, aquele que enfatiza a finalidade de se formar professores. Portanto, toda a trama política, econômica, social são envolvidas, indicando intencionalidades formativas emolduradas em propostas de formação de professores.

Assim, ressaltamos que forma/ação não é um constructo, muito menos uma preconcepção assumida, mas um modo de conceber que anuncia a importância do movimentar-se humano, intencional, impulsionado pela indeterminação existencial e condições de aberturas de dinâmicas formativas. Nesse âmbito, a investigação faz sentido no entrelaçar das formas e ações em atos atualizadores do agir reflexivo docente, mantendo-se comprometido e em sintonia com a espacialidade, a temporalidade e a corporeidade de acontecimentos das vivências humanas em geral, especificamente com as vivências na Educação e na Educação Matemática.

Destarte, assumimos a forma/ação como modo de concentração e realização de pensamento, que emerge de uma postura reflexiva e crítica frente a formação de professores que ensinam matemática, expressada na compreensão fenomenológica de forma/ação. Trata-se de uma postura que solicita que se compreenda as dimensões da forma e da ação na palavra formação, em entrelaçamento, as unindo, que expressa no sinal gráfico </> um aceno para

atenção à dinâmica formativa, cuja condição de possibilidade se realiza em esforço reflexivo de dar-se conta de si, em ação de formar e formar-se com o outro. Aceno como o que provoca a pensar, impulsiona a reflexão sem predispor respostas e nem definições, pois se compreende indeterminado, abrindo-se em possibilidades às pessoas de ampliarem compreensões.

Assumir tal postura requer uma atitude, firmar um compromisso com o sentido de unir mútua e reflexivamente forma e ação. Esse acordo mútuo, se concentra em torno do esforço de ensinar Matemática. É no pensar a formação de professores que ensinam matemática como forma/ação, que passamos a segunda parte desse artigo nos questionando: Que sentidos e significados podem ser revelados no movimento de conhecer a ciência matemática vislumbrada no horizonte o ensinar Matemática?

Aprender-ensinar Matemática: uma possibilidade expansiva de se pensar a formação de professores que ensinam Matemática

A palavra ensinar tem origem “no latim, *insignare*, ‘gravar, colocar uma marca em’, de *in*, ‘em’, mais *signum*, ‘marca, sinal’ (SANTANA, 2020, p.16). Assim, em que circunstâncias o ensino de Matemática poderia ser movimentado pela compreensão de forma/ação? Revisitamos a etimologia da palavra matemática:

A palavra Matemática tem diversas interpretações e origens, nossos estudos indicam que é derivada da expressão grega *MATHEMATIKE TEKHNE*, “ciência matemática”, “Técnica Matemática” e da palavra *MATHEMA* “ciência, conhecimento em geral, arte do conhecimento, conhecimento matemático”, relativo a *MANTHANEIN* “aprender”, “coisas a aprender” (SANTANA, 2020, p. 24).

Ao buscarmos por autores que contextualizassem o que significa historicamente (nesse caso para os gregos) a *mathematike*, encontramos em Martin Heidegger, em sua obra “O que é uma coisa?” (1987) uma explicitação para o conceito grego de *tá mathemata*, como as coisas que se pode aprender.

O “matemático”, segundo a origem etimológica, resulta do grego *tá mathemata*, o que se pode aprender e, ao mesmo tempo; em consequência, o que se pode ensinar. *Manthanein* significa aprender. *Mathesis* significa lição e, na verdade, num duplo sentido: lição no sentido de “ir a uma lição e aprender” e lição como “aquilo que é ensinado”. Ensinar e aprender são aqui tomados num sentido lato e, ao mesmo tempo, essencial, não no sentido estrito tardio, utilizado na escola pelos doutos (HEIDEGGER, 1987, p. 76).

Como reforça enfaticamente no texto, o filósofo está se referindo ao matemático em sentido lato, amplo⁶. Seu trabalho hermenêutico se concentra em repensar quais sentidos históricos permeavam as palavras para ampliar suas compreensões acerca delas. Disto que, na sequência de seu texto, explicitou como os gregos compreendiam “coisa” e “matemático”:

- 1) as coisas, na medida em que elas se abrem e se produzem por si mesmas; 2) as coisas, na medida em que são produzidas pela mão do homem, pelo seu trabalho, e,

⁶ Heidegger enfatiza que está se referindo ao “matemático” em sentido lato e o utiliza na referida obra como para se referir a posição de fundo em que se estrutura o pensamento na modernidade. Nos concentramos na hermenêutica da palavra e como ela foi se revelando uma possibilidade de atualização de sentido a nós, ao nos debruçarmos a pensar em Matemática na forma/ação de professores.

deste modo, estão diante de nós; 3) as coisas, na medida em que estão a uso e se encontram permanentemente disponíveis; podendo ser, pedras ou coisas semelhantes, ou as que são expressamente produzidas; 4) as coisas, na medida em que são, em geral, aquelas com que estabelecemos um comércio, seja porque trabalhamos com elas, as utilizamos, as transformamos, ou, apenas, as observamos e investigamos, relacionado com pragma tomada aqui em sentido lato, não no sentido restrito de aplicação prática, nem no sentido de acção, entendida como acção moral, é todo o fazer, exercitar e suportar (HEIDEGGER, 1987, p.76).

Mathesis significa aprender e *mathemata*, aquilo que se pode aprender, e se pode aprender no modo como as coisas são visadas (pelo seu uso, pelo como se tomam as coisas). Para Heidegger (1987), “aprender é um modo do apreender e do apropriar-se”, entretanto, nem todo tomar é um aprender, e só o uso não diz do aprender autêntico. Intencionando compreender o filósofo, interpretamos que o aprender se dá em um exercício que conduz quem aprende a aprender, a apreender (apropriar-se), isto é, “o aprender é também, sempre, um aprender a conhecer. No aprender, há sempre uma direcção do aprender, aprender a utilizar, aprender a conhecer” (HEIDEGGER, 1987, p.78). Aprender vem se revelando na obra do autor como aprender a conhecer.

Na verdade, este “tomar conhecimento” é a essência autêntica do conhecer, a *mathesis*. As *mathemata* são as coisas, na medida em que as tomamos no conhecimento, enquanto tomamos conhecimento delas, como aquilo que verdadeiramente já sabemos de modo antecipado: o corpo como corporeidade; na planta, a vegetabilidade; no animal, a animalidade; na coisa a coisidade etc. Este verdadeiro aprender é, por consequência, um tomar muito peculiar, um tomar no qual aquele que toma, toma, fundamentalmente, aquilo que já tem. A este aprender corresponde, também, o ensinar. Ensinar é um dar, um oferecer; no ensinar, não é oferecido o ensinável, mas é dada somente ao aluno a indicação de ele tomar aquilo que já tem. O verdadeiro aprender está, pela primeira vez, onde o tomar aquilo que já se tem é um dar a si mesmo e é experimentado enquanto tal. Por isso, ensinar não significa senão deixar os outros aprender, quer dizer, um conduzir mútuo até à aprendizagem (HEIDEGGER, 1987, p. 79).

Assim, Heidegger mostra uma correlação entre ensinar e aprender que se dá no modo como se visa as *mathemata*: coisas que se pode aprender, de tal modo que esse aprender se dê para além do uso, do tomar, do conhecer, mas também reconduza ao sentido. Por isso, a afirmação heideggeriana explicita que ao aprendermos, o que quer que seja, já o fazemos desde a recondução do aprendido a um sentido que lhe é próprio, e que, de alguma maneira, já possuíamos, ou seja, “onde o tomar aquilo que já se tem é um dar a si mesmo e é experimentado enquanto tal” (HEIDEGGER, 1987, p.78). Fala-se do modo de pensar e dar sentido às coisas no mundo como uma possibilidade, uma abertura identitária entre quem aprende e o que é aprendido.

Ensinar, por sua vez, mostra-se como uma possibilidade heurística reveladora de sentidos. Por assim ser, impulsiona o aprender a fazer sentido, de maneira que

Quando o aluno recebe apenas qualquer coisa oferecida, não aprende. Aprende pela primeira vez, quando experimenta aquilo que toma como sendo o que, verdadeiramente, já tem. O verdadeiro aprender está, pela primeira vez, onde o tomar aquilo que já se tem é um dar a si mesmo e é experimentado enquanto tal [sentido]. Por isso, ensinar não significa senão deixar os outros aprender, quer dizer, um

conduzir mútuo até a aprendizagem. Aprender é mais difícil do que ensinar; assim, somente quem pode aprender verdadeiramente – e somente na medida em que tal consegue – pode verdadeiramente ensinar (HEIDEGGER, 1987, p. 79-80).

Um aprender autêntico, para Heidegger, diz do aprender em que houve o exercício do uso, do conhecer, do fazer sentido para si. Um cuidado de aprender a se colocar numa perspectiva de pensamento existencial e com isso, “em todo ensinar, professor é quem mais aprende” (HEIDEGGER, 1987, p. 80).

Aprender/ensinar é, segundo Heidegger, reconduzir-se a um lugar no qual se pode descobrir um sentido próprio ao indivíduo que aprende, ao que é aprendido de maneira temática (e até mesmo curricular) sem, contudo, perder de vista seu sentido originário; possibilitar um sentido orientador da perspectiva de sua existência do indivíduo. Em vista disso, ensinar é ensinar uma “postura”, é ensinar o aluno a se reportar ao ethos de todo aprender, é dar através de um relato a indicação que conduzirá o aluno ao seu aprender. Por isso, só faz sentido ensinar quem está pré-disposto a aprender, ou seja, a ouvir o tal relato. Pois tal relatar atinge apenas aquele que um dia experimentou a possibilidade fundamental de apreender um sentido próprio a si (KAHLMEYER-MERTENS, 2005, p.170).

Compreendemos que pensar, no âmbito da formação de professores, exige um movimento formativo, de dentro para fora, pois apenas o ensinar matemática esvaziaria a dimensão do formar-se, isso porque na própria raiz da palavra matemática há uma solicitação ao entrelaçamento dessas duas dimensões: aprender e ensinar. Assim, o entrelaçar do aprender com o ensinar Matemática vai fazendo sentido nas articulações advindas das explicitações heideggerianas, ou seja, na medida em mostrou-se como um exercício reflexivo de reconsiderar e retornar o aprendizado como parte e condição do ser.

Buscamos outros autores que fizessem esse entrelaçamento, uma vez que, tradicionalmente cada teoria da educação discute essas palavras conceitualmente em acordo com modos de conceber o conhecimento, o mundo e as pessoas, resguardando análises de supostas assimetrias entre elas em que se invalide a possibilidade de considerá-las partes de um mesmo processo. Por esse caminho, encontramos em Franco (2015) tal discussão, quando aborda entendimentos sobre os processos de aprender-ensinar pelas práticas pedagógicas no campo da formação continuada de professores, numa perspectiva colaborativa, compreendo-as como práxis. Práticas essas que a autora considera caracteristicamente como existenciais, interativas e impactantes, de modo que, “imbuídas de intencionalidades”, dirigem e dão sentido à ação docente.

Para transformar uma ação pedagógica em práticas colaborativas, considero fundamental que pesquisadores e professores se engajem em processos mútuos de aprender-ensinar, de estranhar-compreender. É preciso superar a perspectiva de serem os docentes vistos apenas como objetos de estudo; é preciso tempo e espaço para que pesquisadores e sujeitos da prática sejam, ao mesmo tempo, participantes e protagonistas. [...] Trata-se de transformar a consciência ingênua em consciência crítica, de superar e transcender o senso comum; de produzir novas relações com o saber da docência (FRANCO, 2015, p. 611).

A compreensão de ensinar-aprender vai se mostrando, para a autora supracitada, pelas suas possibilidades investigativas na docência. Na mesma direção, mas dando especial atenção

aos modos de ação e reflexão do ser professor em atuação, o aprender-ensinar se mostra possível de ser pensado também como um questionar-se contínuo em que há a possibilidade de reconstrução epistemológica (no caso do “fazer” docente)

O ensinar-aprender está implicado por um ciclo complexo de permanente questionamento do(a) professor(a) quanto ao que ele(a) ainda precisam aprender no processo de ensinar, para aprender, mais e mais, com o aprendiz. Deste modo, esta díade ensinar-aprender, como processo de (re)construção da episteme do(a) professor(a) dialoga com a ideia de que o aprendizado e a formação epistemológica fazem parte de incertezas contínuas, que vão sendo retroalimentadas, quanto mais se aprende sobre o fazer, no decurso do desenvolvimento da ação educativa. O ato de aprender se mostra, assim, um movimento vital da natureza humana, portanto, da formação do conhecimento educativo nutrido pelos princípios da dialética, do diálogo para a dialogicidade (ALVES *et al.* 2021, p. 107).

Ambos autores referenciados fundamentam suas discussões em Paulo Freire (1997). Este educador aborda em várias situações o ensinar e o aprender, geralmente buscando chamar a atenção de professores para o questionar e refletir críticos como modo de ser professor, de exercer a profissão com vistas à uma prática pedagógica emancipatória e transformadora.

Afirma Freire (1997) que não existe ensinar sem aprender. Entretanto cabe ressaltar que ele não se refere a uma discussão utilitária ou ingênua que pressupõe a simetria ou a mensuração entre ensinar e aprender, mas explicita como um processo interdependente entre pessoas em que “o ensinante aprende primeiro a ensinar, mas aprende a ensinar ao ensinar algo que é reaprendido por estar sendo ensinado” (FREIRE, 1997, p. 27). Paulo Freire, nos provoca a pensar a existência de quem aprende e quem ensina, em um aprender e ensinar que se dá de modo que quem ensina aprende porque reconhece um conhecimento antes aprendido.

Ensinar inexistente sem aprender e vice-versa e foi aprendendo socialmente que, historicamente, mulheres e homens descobriram que era possível ensinar. Foi assim, socialmente aprendendo, que ao longo dos tempos mulheres e homens perceberam que era possível – depois, preciso - trabalhar maneiras, caminhos, métodos de ensinar. Aprender precedeu ensinar ou, em outras palavras, ensinar se diluía na experiência realmente fundante de aprender (FREIRE, 1996, p. 26-27).

Por esse caminho argumentativo, o autor nos mobiliza a retomar o sentido de continuidade na formação de professores. Para o educador, a continuidade vem como uma permanente condição docente de formar-se que, ao envolver aspectos epistemológicos (do fazer pedagógico) e ontológicos (do ser professor), se funda na análise e reflexão críticas de sua prática pedagógica esforçando-se na criação de uma noção de formação ampliada socialmente.

Mesmo quando Freire se preocupa e apresenta questões metodológicas, essas evidenciam seu esforço de criação, no sentido de que o método esteja a serviço de uma formação ampliada por meio de aprendizagens sociais, caracterizadas como dialógicas, que envolvem o reconhecimento de si mesmo no outro, estimulando a ultrapassagem de relações em que o poder não se exerça unilateralmente, seja por aceitação passiva (consciência mágica), seja por internalização de relações autoritárias pelas quais o sujeito se identifica com o poder (consciência ingênua), mas sim por meio de um diálogo de mútuo reconhecimento, pelo qual o que ensina e o que aprende se enriquecem mutuamente, por meio da tarefa do ensinar e do aprender. O ensinar e o aprender se tornam procedimentos reversíveis na medida em que

aprendizagens sociais e dialógicas implicam a troca de papéis, em termos do ensinante e do aprendente, troca que conduz a autonomia e interdependência (MARTINI, 2005, p.7).

Destacamos de nossa leitura de trabalhos, de e sobre Paulo Freire, a presença do aprender-ensinar pelo compromisso mútuo, como atitude. Esse viés nos interessa por trazer à discussão a dimensão dos professores em condição de formação, e permitir liberar o pensamento categorizador de uma suposta organização instrumental, que pressupõe o entendimento mensurável, do ensinar e do aprender. Do exposto, enfatizamos a identidade como entrelaçamento de diferentes, que pode ser pensada quando avançamos na diluição da fragmentação instrumental do ensinar e aprender e nos concentramos no compromisso mútuo como atitude

Mas qual a diferença? Qual o limite entre ser aluno e ser professor, aprender e ensinar? O que demarca a condição de cada qual? Por mais paradoxal que possa parecer e ainda que não percebamos imediatamente, o homem só se faz aluno quando vivencia o compromisso radical de ensinar e assim aprende. Por outro lado, o homem se faz professor quando vivencia o compromisso não menos radical de aprender e assim ensina. Com o compromisso de querer ensinar o aluno aprende e com o compromisso de querer aprender o professor ensina. Com isso evidencia-se a identidade – aprender-ensinar – no seio das diferenças entre aluno e professor e é para este lugar que passamos a liberar o pensamento enquanto questão (PAES, 2016, p. 134).

Aprender-ensinar ou ensinar-aprender destaca-se então pela possibilidade que traz subjacente ao modo como os diferentes autores, e especialmente Paulo Freire, se propõem a pensá-lo, pelo compromisso mútuo entre pessoas. Por esse trajeto de estudo, o que vem se mostrando como central trata-se antes de uma atitude assumida pela pessoa do professor,

Nessa dimensão, o que quer dizer compromisso? Compromisso é, sobretudo, uma promessa consigo mesmo, não apenas com o outro de si mesmo, mas também com o outro dos outros no “não outro”, ou seja, com tudo que é e não está sendo, com o ser e com o nada. Comprometer-se é não só acolher, mas recolher-se no envio de uma missão. Como assim? Não se trata do cumprimento de mandatos, missões diplomáticas ou político-partidárias no esteio de uma programação, mas sim de abrir-se ao envio radical do Ser ao pensamento no Homem (PAES, 2016, p. 134).

Envio radical do Ser, na obra do referido autor, vem de suas explicitações da experiência de ensinar e aprender, tendo como base o “Ser” da ontologia hermenêutica heideggeriana⁷.

Refletindo sobre o explicitado no movimento interpretativo

⁷ Heidegger inaugura em *Ser e Tempo* (2005) como um modo diferente de compreender a ontologia que perpassa e vai se ampliando em toda a sua obra, estruturando-se fundamentalmente na análise da existência das pessoas no mundo como *ser-no-mundo*, que pode ser visado e compreendido nas manifestações de suas vivências historicamente constituídas no mundo com os outros. Nesse sentido, a hermenêutica é evidenciada como um conhecer existencial, ou seja, o ser humano como um ser que, em uma experiência de despertar, se dá conta, se auto interpreta. Deste modo, o caráter ontológico, segundo o filósofo, é a possibilidade de ser, que varia de modo fático segundo as situações e condições as quais se dirige e se questiona.

Evidenciamos que entendemos Educação Matemática como educação que se dá junto a essa ciência, ensinando-aprendendo com o outro e visando à formação da pessoa, olhada em sua singularidade e como cidadã, ou seja, como enraizada e participante de uma comunidade e de uma sociedade, solo de sua existência e nutrição; à Matemática, como ciência do mundo ocidental, portanto, visa os seus modos de proceder e de ser constituída e produzida, bem como à análise crítica e reflexiva do que diz e faz no âmbito da ciência e da tecnologia do mundo todo, presente em diferentes culturas; do que diz da vida do ser humano; de como está presente em outras culturas, tendo em vista não tomá-la como onisciente e universalmente válida para toda e qualquer questão da realidade mundana, porém tão somente como um modo de lidar e tratar com essa realidade.

No movimento fenomenológico e interpretativo, retomando o viés que trouxemos do aprender-ensinar, Martin Heidegger (1987) sustenta o apelo pelo aprender autêntico como pensar (questionar reflexivo do ser), em que todas as pessoas estão em possibilidade de ser no mundo com os outros. Na esteira desse modo de pensar, Freire (1997) nos coloca no exercício crítico de compromisso mútuo como uma atitude assumida pela pessoa, em que aprender e ensinar remonta ao engajamento do educador em seu tempo com os outros, especialmente com seus alunos. Em ambos, é no professor que se encontra a mola propulsora para que o compromisso com a transformação social seja possível, pela atitude formativa da pessoa que aprende para ensinar. É a postura do educador que abre possibilidades para o encontro de aberturas para que a Matemática, no caso de nosso estudo, seja mobilizada para educar as pessoas.

Convém enfatizar que a aproximação entre os dois autores, trazida nesse artigo é meramente formal, e o fazemos pois, em ambos há uma abordagem ontológica, de modo que, embora as duas perspectivas, heideggeriana e freiriana, possam parecer muito diferentes em suas intencionalidades e concepções estruturantes, não as consideramos antagônicas ou excludentes, quando as visamos pelo viés de compromisso que os dois assumem frente ao seu tempo, e que se voltam a discutir em suas obras a essencialidade do outro (mundo e pessoas). Ambas nos auxiliaram a legitimar a utilização da expressão aprender-ensinar entrelaçadas. De Heidegger, a atitude existencial do pensar reflexivo e em Freire destacamos a atitude crítica de engajamento político.

Assim, a expressão aprender-ensinar se legitima na possibilidade de pensar a forma/ação na experiência vivenciada entre professores, tendo como impulsionador o movimento de aprender-ensinar. Ambos, forma/ação e aprender-ensinar, correlacionados na medida em que abrem possibilidades aos professores de se assumir na condição de pessoas envolvidas crítica e reflexivamente ao formarem-se entre pares.

De modo sintético, compreendemos aprender-ensinar Matemática com o hífen, como o entrelaçamento de ambos como um compromisso assumido consigo e com o outro, de cuidado ao formar-se e formar, numa perspectiva crítica e reflexiva, tendo em vista a Matemática enquanto possibilidade formativa de pessoas.

Referências

- ALVES, I. A. de S.; RAMINHO, E. G.; SÍVERES, L.; JÚNIOR, I. J. das N.; 11ª Carta aos professores do século XXI: tecendo o perfil de educador transdisciplinar. In: SILVA, J. A. A.; LUCENA, J. I. A. de.; SÍVERES, L. (Orgs.). **Diálogos com Paulo Freire: reflexão e ação** [recurso eletrônico]. Caxias do Sul, RS: Educus, 2021, p. 95- 116.
<https://www.ucs.br/educs/arquivo/ebook/dialogos-com-paulo-freire-reflexao-e-acao/> Acesso em: 2 out. 2022.
- BICUDO, M. A. V. A formação de professores: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Formação de Professores? Da incerteza à compreensão**. 1. ed. Bauru: EDUSC, 2003. p.19-46.
- BICUDO, M. A. V. Concepção de forma/ação de professores e possibilidades investigativas. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Ano 15, n. 36, p. 95-107, 2020.
- BICUDO, M. A. V. Filosofia da educação matemática: sua importância na formação de professores de matemática. In: SILVA, R. S. R. (org.). **Processos formativos em Educação Matemática. Perspectivas filosóficas e pragmáticas** [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Editora Fi, 2018. p. 29-46. Disponível em: https://3c290742-53df-4d6f-b12f-6b135a606bc7.filesusr.com/ugd/48d206_53eae0c3c1764fc5b4f58a7a07e6a281.pdf. Acesso em: 2 out. 2022.
- FRANCO, M. A. S. Práticas pedagógicas de ensinar-aprender: por entre resistências e resignações. **Educ. Pesqui.**, São Paulo, v. 41, n. 3, p. 601-614, jul./set. 2015.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.
- FREIRE, P. **Professora sim, tia não**. São Paulo: Editora Olho d'Água, 1997.
- HEIDEGGER, M. **QUE É UMA COISA?** Doutrina de Kant dos princípios transcendentais. Tradução Carlos Morujão. Lisboa: Edições 70, 1987.
- HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo**. Tradução de Márcia Sá Cavalcante Schuback. 13. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2005.
- KAHLMAYER-MERTENS. R. S. HEIDEGGER EDUCADOR: ACERCA DO APRENDER E DO ENSINAR. APRENDER. **Cad. de Filosofia e Psic. da Educação**. Vitória da Conquista, Ano III, n. 4, p. 161-171, 2005.
- MARÇAL, V. E. R. **O esquema de ação e a constituição do sujeito epistêmico:** contribuições da epistemologia genética à teoria do conhecimento. 2009. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91757>. Acesso em: 03 out. 2020.

MARTINI, R. M. F. Paulo Freire e Heidegger: o essencial é deixar aprender. **Educação Unisinos** [en linea]. 2005, v.1, n. 9, p. 5-13, 2005. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=449644419002>. Acesso em: 8 out. 2022.

MATEMÁTICA. In: DICIO, Dicionário Online de Português, 2022. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/matematica/> . Acesso em: 13 out. 2022.

MATEMÁTICA. In: MICHAELIS moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2022. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/matem%C3%A1tica/> . Acesso em: 13 out. 2022.

MIARKA, R.; BICUDO, M. A. V. Formação do Professor de Matemática e suas Concepções de Mundo e de Conhecimento. **Ciência & Educação**, Bauru. v.16, n. 3, p. 557-565, nov. 2010.

PAES, L. C. E. A experiência de ensinar e aprender (sendo) no Ser. **Cadernos da EMARF, Fenomenologia e Direito**, Rio de Janeiro, v. 9, n.1, p. 129-153 abr./set. 2016.

SANTANA, R. J. **Etimologia para ensinar e aprender matemática**. 1^a. ed. São Paulo: Independently published, 2020.

O lugar da filosofia Matemática de Manoel Amoroso Costa

Iran Abreu Mendes¹

Universidade Federal do Pará

RESUMO

O objetivo deste artigo é identificar um lugar na cartografia da filosofia Matemática onde seja possível situar as matrizes filosóficas por meio das quais o matemático brasileiro Manoel Amoroso Costa construiu seus argumentos para nos apresentar suas ideias fundamentais da Matemática nas primeiras décadas do século XX. Essas ideias permanecem em movimento nas discussões relacionadas aos fundamentos epistemológicos da Matemática em disciplinas da formação e professores e Matemática, bem como em estudos situados em cursos de pós-graduação em Educação Matemática, especialmente nos campos da história e filosofia da Matemática em suas relações com o ensino. A partir de uma pesquisa bibliográfica fundamentada na análise de conteúdo, evidencio a multiplicidade de princípios filosóficos da composição diversificada de reflexões anunciadas por Amoroso Costa em seu livro *As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios*, publicado originalmente em 1929, após seu falecimento, ocorrido em dezembro de 1928.

Palavras-chave: filosofia Matemática; Amoroso Costa; Epistemologia; princípios filosóficos.

The place of Manoel Amoroso Costa's mathematical philosophy

ABSTRACT

The objective of this article is to identify a place in the cartography of Mathematical philosophy where it is possible to locate the philosophical matrices through which the Brazilian mathematician Manoel Amoroso Costa built his arguments to present his fundamental ideas of Mathematics in the first decades of the 20th century. These Ideas remain in motion in discussions related to the epistemological foundations of Mathematics in training disciplines and teachers and Mathematics, as well as in studies located in postgraduate courses in Mathematics Education, especially in the fields of history and philosophy of Mathematics in its relations with the education. Based on a bibliographic research based on content analysis, I highlight the multiplicity of philosophical principles of the diversified composition of reflections announced by Amoroso Costa in his book *The Fundamental Ideas of Mathematics and Other Essays*, originally published in 1929, after his death, which occurred in December 1928.

Keywords: Mathematical philosophy; Amoroso Costa; Epistemology; philosophical principles.

El lugar de la filosofía Matemática de Manoel Amoroso Costa

RESUMEN

El objetivo de este artículo es identificar un lugar en la cartografía de la Filosofía Matemática donde sea posible ubicar las matrices filosóficas a través de las cuales el matemático brasileño Manoel Amoroso Costa construyó sus argumentos para presentar sus ideas fundamentales de las Matemáticas en las primeras décadas del siglo XX. Estas ideas siguen en movimiento en discusiones relacionadas con los fundamentos epistemológicos de las Matemáticas en las disciplinas de formación y de profesores y Matemáticas, así como en estudios ubicados en cursos de posgrado en Educación Matemática, especialmente en los campos de la historia y la filosofía de las Matemáticas en sus relaciones con la enseñanza. . A partir de una investigación bibliográfica basada en el análisis de contenido, destaco la multiplicidad de principios filosóficos de la diversificada composición de reflexiones anunciada por Amoroso Costa en su libro *Las ideas fundamentales de las matemáticas y otros ensayos*, publicado originalmente en 1929, luego de su muerte, ocurrida en diciembre de 1928.

Palabras clave: Filosofía matemática; Amoroso Costa; Epistemología; principios filosóficos.

¹ Doutor em Educação Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular Livre (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7910-1602>. E-mail: iamendes1@gmail.com

Considerações Preliminares

Ao longo dos séculos XIX e XX foram escritos e publicados uma quantidade expressiva de textos ensaísticos relacionados à filosofia e epistemologia da Matemática que possibilitaram aos estudiosos desse período poderem reformar seus pensamentos acerca da Matemática, sua produção, sua organização disciplinar científica e escolar, bem como no exercício da formação do pensamento do professor de Matemática.

Desse movimento configurado pela diversidade de pensamento acerca dos polos de origem e disseminação dos modos de pensar, produzir e disseminar as Matemáticas nos contextos científicos e escolares foram emergindo e se agrupando modelos de pensamento que se conformaram em fundamentos epistemológicos sustentadores dos modos de situar modelos de pensamento, de organização, escrita e ensino de Matemática na sociedade.

A esse respeito, como bem assevera Rom Harré (1988), a maioria das pessoas supõe que os filósofos se ocupam de questões muito gerais e muito profundas, no âmago das quais se situa o problema do relacionamento do homem com o Universo. Neste artigo tratarei de alguns relacionamentos específicos de um homem específico com um universo específico. Esse homem é Manoel Amoroso Costa, o universo específico refere-se à Matemática e o relacionamento aqui é estabelecido pela filosofia conformada como pano de fundo das discussões situadas por Amoroso Costa em sua obra de destaque: *As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios* (COSTA, 1929).

Este artigo tem a intenção de identificar um lugar na cartografia da filosofia Matemática onde seja possível situar as matrizes filosóficas por meio das quais o matemático brasileiro Manoel Amoroso Costa construiu os argumentos para nos apresentar suas ideias fundamentais da Matemática nas primeiras décadas do século XX. A intenção se justifica por perceber que ao longo de todo o século XX suas ideias permaneceram em movimento nas discussões relacionadas aos fundamentos epistemológicos da Matemática, de modo a contribuir nas discussões realizadas em disciplinas da formação de professores e Matemática, bem como nos estudos situados em cursos de pós-graduação em Educação Matemática, especialmente nos campos da história e filosofia da Matemática em suas relações com o ensino.

Minha intenção se justifica pela multiplicidade de princípios filosóficos identificados em comunhão na composição da diversidade de reflexões anunciadas por Amoroso Costa em seu livro *As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios*, publicado originalmente em 1929, após seu falecimento, ocorrido em dezembro de 1928. É com essa perspectiva que este artigo está organizado em quatro partes, conforme menciono a seguir.

Na primeira parte indico ao leitor que siga uma vereda que por mim foi identificada como uma forma de um mapa filosófico constituído pelo itinerário intelectual do Amoroso Costa, filósofo e autor, com a finalidade de situá-lo em escolas de pensamento por meio das quais é possível admitir que o matemático tenha apostado e se nutrido de princípios e reflexões que conformaram sua maneira de organizar o pensamento sobre a Matemática e seu ensino.

A segunda parte, intitulada Mapa de conferências, ensaios e artigos do período de 1918/1928 objetiva mostrar uma parte da produção de Amoroso Costa, tecida pelas influências de filósofos e matemáticos franceses, dos quais o autor incorporou uma herança de teorias fortalecedoras da constituição de seu pensamento sobre a Matemática. É nesta seção que destacarei a contribuição da evidência em Matemática na demonstração de proposições matemáticas tratadas por Amoroso Costa, juntamente com a influência das ideias filosóficas de Henri Poincaré, Leon Brunschvicg, dentre outros pensadores influenciadores e formadores do pensamento da sua geração.

Na terceira parte do artigo apresentarei minhas reflexões acerca das ideias fundamentais da Matemática, presentes nos ensaios relativos o livro “As ideias fundamentais da Matemática”, no qual Amoroso Costa procurou discutir, em linhas gerais, a concepção de Matemática que se tinha nas primeiras décadas do século XX, seu método dedutivo e suas diretrizes.

Em seguida, na quarta parte, ou parte final, apresentarei uma revisão da discussão ou convergências reflexivas, considerando ser de fundamental importância para qualquer estudo que se faça no campo da Matemática, estabelecer um aprofundamento histórico e filosófico sobre a elaboração desse conhecimento. Não há, pois, outra maneira de se apreender tal conhecimento sem uma retomada de noções que nos levem a reelaborar toda a produção organizada pelo homem ao longo de sua história, assim como concebê-la como verdade, mesmo que se necessite contestá-la e modificá-la posteriormente.

Uma vereda identificada no itinerário intelectual do autor

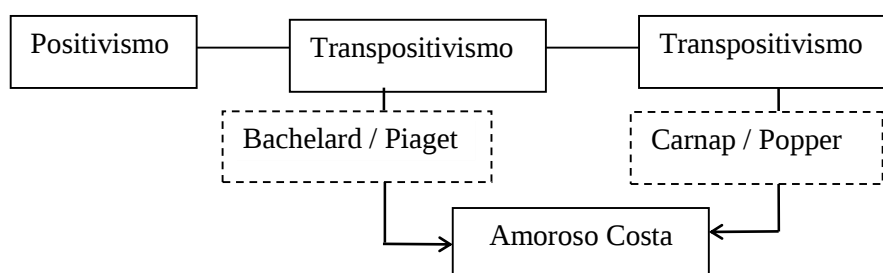
Amoroso Costa nasceu no Rio de Janeiro em 13 de janeiro de 1885 e faleceu na mesma cidade em 03 de dezembro de 1928. Teve formação escolar em instituições educacionais de destaque no cenário da capital, onde avançou seus estudos na escola Politécnica do Rio de Janeiro, e posteriormente passou a ser livre docente. Viveu em Paris entre 1920 e 1925, onde desenvolveu diversos estudos e participou de muitas atividades científicas e culturais que o levaram a constituir-se intelectualmente em seu itinerário já descrito por diversos estudiosos sobre sua vida e obra.

Em seus 43 anos de vida (1885 - 1928), dos quais 16 foram dedicados a ciência e a filosofia da Matemática, podemos considerar Amoroso Costa como uma referência nacional para a elaboração da história da filosofia da Matemática entre nós, pois é a partir de seus ensaios e artigos que podemos iniciar um estudo acerca da produção de uma discussão teórica sobre o conhecimento matemático no Brasil.

A influência da escola francesa do início do século XX é bastante evidente no seu pensamento filosófico devido sua convivência durante alguns anos, com estudiosos franceses (1920/21 e 1923/25) onde estudou filosofia das ciências, teoria do conhecimento, entre outros assuntos ligados à sua formação filosófico-científica.

Amoroso Costa surge, então, como uma ruptura do pensamento filosófico nacional como o positivismo, procurando conduzir com mais profundidade a evolução do pensamento científico brasileiro, tratando de eliminar o espaço onde não há mais lugar para as demonstrações convincentes, como no âmbito das ciências, mas há emergência na solução de problemas de ordem filosófica. Nesse sentido procurou seguir as concepções neopositivistas de Otto Alencar não se ocupando de difundir qualquer outra filosofia, mas apenas de acompanhar a evolução da ciência.

De acordo com o esquema traçado por Severino (1994) podemos situar, cronologicamente, Amoroso Costa entre os neopositivistas, representados por Carnap, Popper entre outros e transpositivistas representados por Poincaré, Piaget, Bachelard, entre outros que buscaram discutir os caminhos do pensamento filosófico da ciência através da análise técnica de sua linguagem e do seu modo de agir na discussão do conhecimento. Assim podemos representar tal posição através do seguinte infográfico descritor:



Descritor do pensamento filosófico de Amoroso Costa.
Fonte: Elaborado por Mendes.

O pensamento filosófico de Amoroso Costa procurou estabelecer uma nova dimensão da cultura científica entre nós, buscando com isso suscitar uma filosofia Matemática voltada à construção de uma academia científica brasileira.

Conferências, ensaios e artigos do período de 1918/1928

Essa parte da obra de Amoroso Costa apresenta vários artigos e ensaios que discutem pontos referentes a estruturação teórica do conhecimento matemático em que a concepção filosófica neopositivista se faz presente, apresentando também, traços transpositivistas na sua formação filosófica.

Os artigos apresentados nessa parte da obra em estudo, se mostram bastante atuais e úteis à formação filosófica do matemático ou do educador matemático, visto que trazem à tona alguns pontos bastante essenciais na construção de um pensamento organizado a respeito das ideias presentes na criação da Matemática como ciência. Cada um deles procura discutir pontos considerados de bastante relevância para a construção teórica do pensamento matemático entre nós e que emergiram, graças ao espírito de ruptura que predominavam na época em que foram elaborados tais artigos.

Vê-se claramente nos artigos estudados, a influência sofrida por Amoroso Costa durante sua estada na academia francesa onde, no âmbito da Matemática, predominavam as concepções filosóficas de Poincaré e seus seguidores, isto é, a concepção intuicionista dava o primeiro sinal das ideias precursoras do construtivismo matemático.

Contribuição da evidência em Matemática na demonstração de proposições Matemáticas

Esse artigo apresenta a evidência em Matemática como um produto da intuição e nos faz compreender o quanto se faz necessário utilizá-la na demonstração de proposições Matemáticas, aceitando de início como evidentes, as proposições primitivas (axiomas). Tais axiomas, considerados como evidentes, são apontados por Amoroso Costa como elementos fundamentais em uma demonstração Matemática. Isso nos remete às discussões suscitadas por Chalmers (1993) a respeito de suas considerações relativas a dependência que a observação tem da teoria, visto que a existência de conceitos primitivos construídos a partir das evidências nos levam a obtenção de elementos importantes à demonstração de proposições Matemáticas. A exemplo disso podemos apresentar a elaboração geométrica euclidiana, alvo de inúmeras discussões de Amoroso Costa em seus artigos e ensaios.

Diante dessas considerações surge uma questão: a evidência Matemática é um recurso precioso para o ensino? De acordo com a argumentação apresentada vê-se o quanto é importante para o professor de Matemática, a sua utilização no ensino de Matemática. Porém cabe a cada um de nós usar criatividade ao utilizá-la pedagogicamente para explorar a razão do aluno sem

submetê-la a qualquer formalismo lógico, pois somente assim, talvez possamos alcançar uma aprendizagem significativa em Matemática.

A influência da filosofia Matemática intuicionista de Poincaré

Em outro artigo Amoroso Costa apresenta uma boa exposição das ideias intuicionistas de Poincaré, ligadas aos juízos sintéticos e analíticos na construção da noção de espaço, tempo e o conceito de número. Nessa abordagem vê-se claramente o quanto há em seus argumentos uma forte tendência de identificação de suas ideias com as concepções intuicionistas de Poincaré.

Os juízos sintéticos a priori são anteriores a qualquer experiência anterior, preexistem no espírito e constituem os juízos científicos por excelência. A exemplo disso temos os princípios da Matemática, pois certas intuições são essenciais na construção dessa ciência, como é o caso da aritmética dos números inteiros, quando o princípio da recorrência evidencia a noção de adição e multiplicação, justificadas somente através de infinitas experiências, além dos axiomas matemáticos como um exemplo ímpar para tal.

Os juízos sintéticos a posteriori resultam da experiência e neste caso reverterem um caráter indutivo e não podem pertencer a certeza integral, isto é, não são tão evidentes antes da experiência. Esses aspectos também foram abordados por Chalmers (1993) quando trata de questões relativas ao indutivismo e que apontam como característica desse juízo, a relevância dada à experiência como causa principal da construção do conhecimento científico.

Os juízos analíticos são explicações que derivam-se de um conceito, uma de suas propriedades, mas que nada acrescentam ao conhecimento do conceito. Exemplo disso são os juízos da língua formal, isto é, ocorre apenas uma reformulação representacional das noções iniciais (conceitos primitivos) mas que não causam modificações estruturais no conhecimento construído inicialmente.

Para Amoroso Costa, a Matemática está apoiada sobre intuições do espaço, do tempo e do conceito de número, cujas existências são subjetivas e a priori. As intuições tem duplo sentido: fontes de noções puras ou instinto inventivo. No primeiro caso temos a noção de número inteiro, no segundo o trabalho do espírito na descoberta científica.

Essas considerações nos levaram a uma nova questão: intuição ou lógica; idealismo ou realismo, qual a ênfase presente na existência do método matemático? Amoroso Costa afirma que a intuição descobre e a lógica demonstra os resultados da intuição e que os espíritos verdadeiramente matemáticos sabem encadear o raciocínio, visando atingir seus objetivos tal

como no jogo de xadrez, necessitando para isso de um senso estético, contrariando, portanto, o pensamento logicista no qual a Matemática é descoberta e não criada, onde a existência do conhecimento não pressupõe a existência do sujeito pensante. Nisso resulta então a divergência constante no pensamento dos homens.

Sobre as concepções (radicais) de Henri Bergson na obra de Amoroso Costa

Amoroso Costa fez também um pequeno estudo sobre a visão de Henri Bergson a respeito da diferença de natureza entre o tempo e o espaço. Para isso buscou questões suscitadas pela teoria da relatividade, momento em que Bergson afirma que a teoria de Einstein é compatível com o tempo universal do senso comum e das tradições filosóficas. De acordo com Amoroso Costa, na concepção bergsoniana o tempo é real por ser percebido e vivido na memória que encadeia o antes e o depois, visto que nada se repete e nada se estabiliza. O movimento possibilita a medição do tempo registrando-se no espaço, não podendo, portanto, aplicar número e medida ao tempo puro pois suas fases são incomparáveis entre si. Para ele, tudo depende do que se considera por “real” e é real o que for medido pelo físico, fictício o que é representado no pensamento do físico real, como medida para os físicos fictícios. Fictício não é de fato vivido por pessoa alguma.

O pensamento bergsoniano lança uma distinção essencial entre ciência e filosofia: a primeira é obra da razão, movendo-se no domínio do fragmentário e do descontínuo enquanto a segunda é capaz de atingir a realidade profunda das coisas graças ao método intuitivo que lhe é peculiar.

O problema da ciência e as correntes filosóficas

Nesse artigo Amoroso Costa buscou comentar a respeito dos problemas da ciência com relação a sua estruturação filosófica, visto que há uma grande discussão sobre as bases de sustentação da ciência estar ou não na filosofia. O autor procurou remeter seu ensaio ao discurso defendido por Brunschvicg, cuja filosofia é uma reação contra a ideia de que a ciência se reduz a um tecido arbitrário de convenções, um formalismo vazio sem sentido. Desse modo inicia seu trabalho expressando que “a filosofia não se faz sem a ciência e a recíproca pode parecer contestável”, porém esta se mostra, segundo ele, adormecida e reaparece inevitavelmente quando buscamos a origem desse conhecimento.

A verdade parece ser outro ponto questionável nesse ensaio e a Matemática, então, surge como uma parte da construção humana mais provável de ser verdadeira, embora haja a esse

respeito, uma diversidade de especulações entre a filosofia e a ciência, ao longo da história. Nesse sentido o autor procura mostrar que a Matemática sempre foi considerada como um tipo de saber supremo no qual se podia explicar o universo gerando assim o pitagorismo, spinosismo, cartesianismo, leibnismo entre outros inspirados em Platão, mas que nenhum atingiu seu objetivo.

A investigação histórica torna-se importante na análise da evolução das teorias Matemática nos vários sistemas filosóficos, alguns dos quais a ciência rejeitou definitivamente no passado através das concepções falsificacionistas visto que procuraram buscar consistência nas afirmações Matemáticas presentes em algumas teorias. Entretanto há que se considerar importante as limitações dessas críticas falsificacionistas pois a construção do conhecimento matemático tem sua estrutura histórica ligada a valorização da produção científica de cada grupo de matemáticos em diferentes momentos e locais, criando assim um todo que se organizou através das experiências científicas desenvolvidas posteriormente.

A crítica das ciências Matemáticas e físicas por Kant e sua reflexão decisiva na história da teoria do conhecimento

Amoroso Costa busca nesse ensaio mostrar a relação dos escritos filosóficos de Kant com as ciências exatas. Para tanto mostra a concepção kantiana sobre as ideias de ciência física antes mesmo de Laplace, passando por Newton e Descartes. Nesse sentido ele afirma que Kant é uma reação contra a ideia de que a filosofia não passa de uma promoção da ciência, de que seu método é o próprio método científico, de que a ciência é capaz de esgotar a curiosidade do homem.

A obra de Kant aparece como o início de uma orientação nova na história das relações entre filosofia e ciência. A Matemática pura, para ele, se funda nos princípios a priori e, ao contrário do empirismo, a considera como incorporada ao mecanismo do nosso pensamento. A física não pode dispensar a observação nem o método matemático pois ambos são elementos essenciais da representação de fenômenos originados da percepção externa, mesmo possuindo uma certeza interna, geradas parcialmente das leis do pensamento.

A apreensão da ciência pelos olhos da poesia - Um poeta e a ciência

O valor da beleza da ciência nem sempre é visto com profundidade pelos homens da ciência e esse foi o alvo da discussão apresentada por Amoroso Costa através do ensaio intitulado *Um poeta e a Ciência*. Nele Amoroso Costa busca trazer à baila o pensamento

filosófico francês do início do século XX e que se baseia na ruptura com o pensamento científico kantiano, visto que a luta entre a racionalidade e a irracionalidade faz emergir um novo espírito científico baseado na psicanálise freudiana e nas concepções de Young sobre o inconsciente.

Através de citações de Valéry² e suas divagações poéticas que Amoroso Costa procura dissertar a respeito das imagens criadas nessas obras poéticas, lançando-se então, na apresentação de uma nova concepção de ciência, onde tudo se reconduz a inquietude e ao inesgotável, isto é, a verdade científica não é mais imutável; ela passa, portanto a ser sujeita de outros fatores que estão além das ideias lançadas pelo pensamento cartesiano e seus seguidores.

Esse foi o último artigo de Amoroso Costa, publicado em 1928 após sua morte, cujas colocações levantam algumas questões ligadas a ciência contemporânea onde a física dos quanta e a exploração do cosmos abrem uma janela sobre a liberdade do pensamento científico propondo com isso uma nova dimensão para levar cada vez mais à frente a concepção de que a teoria pressupõe a observação pois a revolução científico-cultural causada por esse novo espírito científico provocou o aparecimento de diversas relações entre a poesia e a ciência.

Há no artigo, inúmeras citações de divagações do inconsciente e que para o novo espírito científico tornaram-se fios condutores de investigações científicas contemporâneas, o que provavelmente puderam conduzir-nos ao pensamento científico atual.

Sobre As ideias fundamentais da Matemática

Nos ensaios relativos às ideias fundamentais da Matemática, Amoroso Costa procurou discutir, em linhas gerais, a concepção de Matemática que se tinha nas primeiras décadas do século XX, seu método dedutivo e suas diretrizes.

Destinado a todos que se interessam pela Matemática, seus fundamentos e seu ensino, essa parte contém as ideias principais da Matemática e como foram estruturadas historicamente e segundo as concepções do autor. É importante perceber aí como o método dedutivo se utiliza das ideias intuicionistas que se evidenciam durante a construção da Matemática e que não percebemos ser tão evidentes assim

A descoberta e a demonstração são apresentadas como posse imediata do conhecimento pois segundo ele, o espírito vê antes de compreender. A demonstração é uma construção

² Nesta menção, menciono o comentário de Amoroso Costa a respeito das relações entre literatura e ciência, presentes nas obras do filósofo, escritor e poeta francês Paul Valéry, que se refere a seu artigo intitulado *Um poeta e a ciência*, publicado em 16/12/1928 no jornal *O Imparcial*, do Rio de Janeiro.

organizada da descoberta. Isso é justificado através da intuição e da lógica que podem construir um sistema coerente para o método dedutivo.

São importantes na descoberta e na demonstração, os elementos não dedutivos pelo seu caráter intuitivo na construção do pensamento matemático, além do rigor de raciocínio que é próprio da Matemática, embora não possua um padrão para todos os assuntos abordados.

O autor apresenta a noção de definibilidade e de demonstrabilidade para explicar a noção de definições e demonstrações em Matemática. Para ele definição é a análise de uma ideia em seus elementos e a demonstração, uma cadeia entre postulados e teoremas mediante um cálculo do qual se exclui qualquer arbitrariedade. As definições são úteis, mas teoricamente supérfluas e as demonstrações, fundamentais na teoria dedutiva.

Para Amoroso Costa, as noções e proposições dedutivas constituem a base de qualquer teoria dedutiva. Utiliza-se as noções primeiras, cujo caráter é intuitivo e apresenta-se os axiomas e postulados. Para isso se faz necessário lembrar que os axiomas são evidentes por si mesmos e os postulados não, embora ambos sejam indemonstráveis. A evidência e a simplicidade são fatores importantes na interpretação de uma teoria dedutiva e cabe-nos, portanto, utilizá-las na estruturação das proposições Matemáticas.

A dedução Matemática apresenta o raciocínio como uma verdadeira capacidade criadora na qual a coerência lógica da conclusão com as premissas formam uma cadeia. Para que isso ocorra se faz necessária a utilização da lógica formal através de uma notação sutil e concisa.

Para esclarecer a relação entre significante e significado, o autor busca no retrospecto histórico a origem leibniziana da lógica simbólica com sua característica universal e cálculo lógico até a escola inglesa de Russel e Whitehead. Busca em seguida a separação dos princípios lógicos da dedução, onde a partir dos silogismos chega-se a elaboração das proposições da lógica formal.

Amoroso Costa também buscou encontrar subsídios que pudessem esclarecer a questão levantada a respeito do surgimento da noção de número como símbolo para a representação de grandezas concretas. Para ele essa noção constitui-se um dos elementos mais importantes para a compreensão da ciência Matemática, pois a partir da noção de número natural como a gênese do pensamento matemático estruturou-se, desde a Antiguidade, a noção de número fracionário seguindo-se aos irracionais, negativos e complexos.

As noções de conjunto, correspondência e número cardinal são consideradas por Amoroso Costa como as noções que formam a estrutura da Matemática através da generalização

do conceito de número. Isso é feito com a apresentação da noção de conjunto, correspondência e número cardinal, incluindo até as ideias de conjuntos finitos e infinitos.

A generalização algébrica da noção de número é vista como a algebrização da aritmética, apresentando-se como uma extensão da noção de número tendo em vista estabelecer características genéricas para as noções de operação e suas propriedades. Para que isso seja bem apresentado o autor vai desde as operações mais simples com os números naturais até chegar as mais complexas com os algoritmos de Hamilton, visando mostrar que não é muito viável tentar apresentar, em uma fórmula, a infinita complexidade da noção de número generalizado.

Quanto as noções de ordem e de continuidade, Amoroso Costa teceu as seguintes considerações: a noção de ordem é tão importante quanto a de número e resulta da comparação entre dois conjuntos. Mesmo considerados independentes entre si, as noções de número e ordem estão ligados uma a outra. A noção de ordem resulta da consideração dos conjuntos semelhantes e é a base para a estruturação abstrata da noção de continuidade que representa um progresso sobre aqueles em que predomina a intuição geométrica.

Quanto aos números transfinitos, o autor apresenta uma discussão a respeito desses números nos quais George Cantor se apoiou para questionar a existência do infinito atual.

Sobre as noções de variável e de limite o autor nos apresenta, inicialmente, um esboço histórico do desenvolvimento das noções de variável e limite, onde enfatiza as contribuições de Eudoxo de Cuido, Arquimedes, Nicolas de Cues (Nicolau de Cusa), Cavalieri, Newton e Leibniz, para a construção da noção de limite. A noção de variável nos é dada como um símbolo que representa os diversos elementos de um conjunto dado, chamado domínio da variável. A noção de limite, porém, se prende às ideias de variável e traz junto, a linguagem da teoria dos conjuntos como um elemento indispensável na representação formal dessas ideias.

As noções de função e de derivada são comentadas do mesmo modo que as ideias de variável e limite. Novamente se tem um esboço histórico como ponto de partida para que seja apresentada a noção de função e derivada. A autor busca as contribuições vindas desde o fim do século XVII, com Descarte e Newton, passando por Euler, Lagrange e Cauchy, através das noções de continuidade e de descontinuidade. É interessante a colocação do autor, de que a derivação poderá constituir-se de uma teoria puramente dedutiva, tomando a noção de derivada como noção primitiva e a derivação como operação fundamental caracterizada por suas propriedades formais, sem recurso à ideia de passagem ao limite. Todo o cálculo de derivadas e integrais de expressões algébricas e transcendentais se desenvolvia sobre postulados exprimindo as propriedades da derivada de uma soma ou produto.

As noções de integral e de diferencial seguem o mesmo itinerário anterior. O conhecimento do desenvolvimento histórico dessas noções se mostra novamente importante para a compreensão de toda essa construção Matemática, pois de acordo com o autor temos como fundamental as contribuições de Cauchy, Riemann e Leibniz, para que se chegasse a forma atual da noção de integral e diferencial e com isso organizando o cálculo diferencial e suas contribuições à ciência. Quanto as funções de variáveis complexas, Amoroso Costa encerra o seu estudo a respeito das noções de funções e é nesse pensamento que ele apresenta a noção de número complexo numa correspondência perfeita quando representada algébrica e geometricamente.

A noção de grupo é apresentada como fundamental na generalização das operações sobre números, álgebra superior e em geometria, de modo a evidenciar o processo de síntese que caracteriza o crescimento da ciência Matemática.

Os princípios da geometria euclidiana, para Amoroso Costa, constituem a base em que os geômetras modernos se apoiam para construir seu trabalho, pois os sistemas de axiomas e postulados sobre os quais Euclides elaborou os seus *Elementos*, apresentam demonstrações cheias de intuições que provocam o surgimento de vários trabalhos voltados à reconstrução da geometria euclidiana. A exemplo disso temos Hilbert, Peano, Lobatchewsky, entre outros que adotaram um sistema diferente das noções primitivas e postulados que contradizem parcialmente os de Euclides.

Já as geometrias não euclidianas e não arquimedianas surgem historicamente como uma reação ao 5º postulado de Euclides nas demonstrações tentadas por geômetras modernos como Lobatchewsky, Riemann, entre outros. As geometrias não arquimedianas constituem-se em negar o chamado postulado de Arquimedes, que está implícito na 4ª definição do 5º livro de Euclides.

Amoroso Costa encerra seu trabalho apresentando considerações sobre Matemática pura e Matemática aplicada, estabelecendo comparações entre a evidência lógica ou formal da Matemática e o caráter intuicionista dessa ciência. Ele afirma que existem reações mútuas entre essas duas tendências, visto que por mais sutil que a ciência pura seja, ela sempre encontrará uma fonte de inspiração no mundo sensível, cuja infinita riqueza ser-lhe-á impossível traduzir integralmente.

Revisão da discussão ou convergências reflexivas

É de fundamental importância para qualquer estudo que se faça no campo da Matemática, estabelecer um aprofundamento histórico e filosófico sobre a elaboração desse conhecimento. Não há, pois, outra maneira de se apreender tal conhecimento sem uma retomada de noções que nos levem a reelaborar toda a produção organizada pelo homem ao longo de sua história, assim como concebê-la como verdade, mesmo que se necessite contestá-la e modificá-la posteriormente.

As ideias suscitadas por Amoroso Costa nas primeiras décadas desse século e que se tornaram públicas através de jornais e revistas da época, demonstram o quanto é fundamental para os estudiosos da área científica a compreensão filosófica desse conhecimento. Não há possibilidade de se conduzir uma discussão acerca da estruturação do conhecimento científico sem uma base filosófica que o sustente. Essa foi a grande bandeira de luta que Amoroso Costa tentou levantar na Matemática brasileira.

Cabe hoje aos matemáticos e educadores matemáticos, procurar conduzir essas discussões para que, a partir daí, possamos, pelo menos em linhas gerais, responder a pergunta que nos foi apresentada por Chalmers (1993): o que é ciência afinal? Acreditamos que o caráter atribuído hoje à ciência não é mais aquele concebido pelos indutivistas nem tampouco pelos falsificacionistas. Entretanto não podemos apresentar uma categoria única para a ciência, pois a diversidade de áreas de investigação e diferentes formas de conceber essas investigações, nos levam a acreditar que esse conceito de ciência alcançou um limite cada vez mais alto e isso implica que tal conceito tem uma relação direta com o momento histórico, contexto sócio cultural e grau de desenvolvimento da sociedade.

REFERÊNCIAS

CHALMERS, A. F. *O Que é Ciência afinal?* Tradução por Raul Fiker. São Paulo: Brasiliense, 1993. 225p. Tradução de *What is this thing called Science?*

COSTA, M. A. *As Idéias fundamentais da Matemática e outros ensaios*. Editorial Grijalbo Ltda. São Paulo: EDUSP, 1971. 330p.

HARRÉ, Rom. *As filosofias da ciência*. Tradução Ligia Guterres. Lisboa: edições 20, 1988. (Série O saber da filosofia, 23).

SEVERINO, A. J. *Filosofia*. São Paulo: Cortez, 1993. (coleção Magistério)

O Netz-Works de deduções gregas: uma revisão de The Shaping of Deductions in Greek Mathematics de Reviel Netz¹

Bruno Latour

RESUMO

O livro de Netz é, sem dúvida, o trabalho mais importante em estudos científicos desde Shapin & Schaffer Leviathan and the Air Pump. Recorrendo a um método semiótico e construtivista muito original, consegue redescrever inteiramente a prática da dedução no início da geometria grega. Mostra como essa prática quase não tem conexão com as várias teorias de abstração e convicção que foram oferecidas por filósofos de Platão em diante. Ele oferece a primeira descrição não-formalista sistemática do formalismo em seu estágio histórico inicial. Ao fazê-lo, oferece a melhor ocasião para elaborar uma metalinguagem para falar concretamente da abstração.

Palavras-chave: Filosofia. Matemática. Filosofia matemática. Matemática grega. Deduções.

The Netz-Works of Greek Deductions – A Review of Reviel Netz’s The Shaping of Deductions in Greek Mathematics

ABSTRACT

Netz’s book is, without question, the most important work in science studies since Shapin & Schaffer Leviathan and the Air Pump. By resorting to a very original semiotic and constructivist method, it manages to redescribe entirely the practice of deduction in the beginning of Greek geometry. It shows how this practice bears almost no connection with the various theories of abstraction and conviction that have been offered by philosophers from Plato onwards. It offers the first systematic non-formalist description of formalism at its early historical stage. In doing so it offers the best occasion to elaborate a metalanguage to speak concretely of abstraction.

Keywords: Philosophy. Mathematics. Mathematical philosophy. Greek mathematics. deductions.

Las obras de Netz de las deducciones griegas: una revisión de Reviel Netz La formación de las deducciones en las matemáticas griegas

RESUMEN

El libro de Netz es, sin duda, el trabajo más importante en estudios científicos desde Shapin & Schaffer Leviathan and the Air Pump. Recurriendo a un método semiótico y constructivista muy original, consigue redescibir por completo la práctica de la deducción en los inicios de la geometría griega. Muestra cómo esta práctica casi no tiene conexión con las diversas teorías de abstracción y convicción que han ofrecido los filósofos desde Platón en adelante. Ofrece la primera descripción no formalista sistemática del formalismo en su etapa histórica temprana. Al hacerlo, ofrece la mejor ocasión para elaborar un metalenguaje para hablar concretamente de abstracción.

Palabras clave: Filosofía. Matemáticas. Filosofía matemática. matemáticas griegas. Deducciones.

Este é, sem dúvida, o livro mais importante de estudos científicos a aparecer desde Leviathan and the Air-Pump, de Shapin e Schaffer. Eu digo isso mesmo que seja autor, Reviel Netz, um classicista sério de Stanford, prefere se distanciar do nosso campo (que com toda a probabilidade ele considera um pouco desonroso). Desde o início ele afirma, com um trocadilho adicional com seu próprio título, que “Este livro não deve ser lido como se fosse ‘o Shapin da

¹ Este artigo foi traduzido por Iran Abreu Mendes para fins didáticos, a partir do original intitulado A review of Reviel Netz (2003). The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a Study in Cognitive History. (Cambridge: Cambridge University Press). Este artigo foi publicado originalmente em Social Studies of Science, Vol 38, nº3, pp. 441-459, 2008. A tradução desta obra é uma homenagem ao filósofo e sociólogo francês Bruno Latour, após termos notícias do falecimento do autor no dia de 09 de outubro de 2022 em Paris.

dedução” (p. 3). Em vez disso, ele prefere chamar seu esforço de “história cognitiva” – o que significa exatamente o que por “estudos de ciência”, ou seja, uma atenção obsessiva ao material, condições históricas e práticas necessárias para a descoberta de novas habilidades.

Mesmo que Netz não seja um sócio-historiador da ciência de carteirinha, um olhar para outro de seus livros impressionantes (NETZ, 2004) – desta vez sobre a história do arame farpado das fazendas de gado das grandes planícies, até Pearl Harbor, as trincheiras da Primeira Guerra Mundial e depois todo o caminho para Auschwitz – seria suficiente para assegurar a qualquer leitor de SSofS que ele é um de nós, e um dos nossos melhores. Que o campo dos estudos científicos seja muito maior (e também, infelizmente, muito menor!) do que a lista de seus membros oficiais não deveria ser uma grande surpresa. Tenho uma memória vívida de Thomas Kuhn aceitando o Prêmio Bernal de nossa sociedade com mais do que um leve embaraço... importância crucial para o nosso campo que, mesmo não sendo um classicista nem um filósofo da Matemática, devo correr o risco de envergonhá-lo da mesma forma, colocando seu livro no centro do corpus STS.

Uma descrição não formalista do formalismo

O livro de Netz faz exatamente o que ele diz não querer: oferece para a origem do formalismo o que Shapin e Schaffer fizeram pela origem da ciência experimental. Se, para propor uma história alternativa da ciência, o berço da ciência experimental – o espólio de Boyle enquanto laboratório – tivesse que ser revisitado, é claro que essa revisão teria permanecido grosseiramente incompleta enquanto o berço da dedução não foram revisitados da mesma maneira. Em *O Leviatã*, a divisão entre um estilo científico e um literário, a própria distinção entre ciência e política, a autonomia do raciocínio científico e a invenção de uma nova forma de persuasão foram tomadas como tópicos da investigação histórica em vez de recursos para escrever esta história. Nesse trabalho estávamos testemunhando o surgimento dessas novas habilidades cognitivas e dessa nova forma de vida: o laboratório, o estilo experimental. Isso é exatamente o que podemos testemunhar novamente no livro de Netz, só que desta vez com uma disciplina muito mais antiga, mais dura, menos documentada e ainda mais influente: o próprio coração do que é deduzir, demonstrar e raciocinar, como dizem, “rigorosamente”.

Não é de admirar, então, que a matemática grega enfatize a forma. Ao longo do livro, enfatizei a forma ao invés do conteúdo, em parte como um método de chegar à realidade cognitiva por trás dos textos, mas em parte – e esta é a justificativa fundamental de minha abordagem – porque este é o lugar onde o estresse deve ser colocado, se devemos ser sensíveis ao contexto histórico da

matemática grega. A matemática grega, para resumir, era uma prática cultural na qual a forma dominante era a forma (p. 311)

Em vez de tomar o “milagre grego” como recurso para recontar, mais uma vez, a gloriosa história do raciocínio apodíctico, é a própria invenção desse estilo de raciocínio que é escolhido como tema da investigação. Esta é realmente uma grande surpresa, porque as fontes parecem estar totalmente ausentes, à primeira vista. Se foi uma grande conquista recontar a Revolução Científica do século XVII como se tivéssemos o mesmo tipo de dados que temos para as vidas laboratoriais contemporâneas, quão maior seria a dificuldade de recuperar a prática da dedução operacionalizada por algumas centenas de matemáticos pouco conhecidos da Antiguidade, dos quais possuímos apenas textos fragmentários e corrompidos? E, no entanto, você obtém a mesma sensação de praticidade deste livro que você obtém, por exemplo, de *Cognition in the Wild* (1995), de Ed Hutchins, sobre um tópico não tão diferente – cálculo coletivo com instrumentos. A semelhança se mantém mesmo que Hutchins tivesse o benefício de vídeos, gravadores e arquivos de todos os tipos, ali, no local, como um etnógrafo vivo. Graças a Netz, o leitor é genuinamente transportado para o “laboratório plano” da matemática grega e pode testemunhar suas invenções passo a passo de uma forma que muito poucas etnografias de matemáticos no trabalho foram capazes de emular (ROSENTAL, 2003). Como eu disse, pode não ter havido “Milagre Grego” em ação naquela época, mas encontramos aqui e agora um milagre de Netz de algumas proporções...

Esse milagre reside no nível de prática que é tomado como foco de investigação: as invenções scripto-visuais².

Argumentarei que as duas principais ferramentas para a formação da dedução foram o diagrama, por um lado, e a linguagem matemática, por outro. Diagramas - na forma específica em que são usados na matemática grega são a maneira matemática grega de explorar os recursos cognitivos visuais humanos. A linguagem matemática grega é uma maneira de explorar os recursos linguísticos humanos (...) Mas observe que não há nada de universal na forma precisa de tais métodos cognitivos. Eles não são neurais; são uma construção histórica. (...) Há necessidade de estudos em história cognitiva, e ofereço aqui um desses estudos (p. 6-7)

Como pode ser visto nesta citação, o materialismo de Netz não se encontra em alguma “construção social da matemática”, no contexto econômico da Grécia clássica, mas nas

² Este é um local comum para o pequeno número de analistas ousados o suficiente para lidar com uma descrição não formalista do formalismo. Ver, por exemplo, Bastide (1990); Rotman (1987, 1993).

*tecnologias intelectuais*³ nas quais grande parte dos estudos científicos hoje consiste. Como você demonstra algo para alguém? Aquilo é, como você mostra isso? Como você desenha isso? Como você aponta o dedo para ele enquanto fala? Como você escreve isso? Como você obtém aprovação na ausência de seus correspondentes? Como você compartilha a convicção? É em grande parte o nível semiótico, uma vez devidamente focado nas mãos inteligentes de Netz, que uma quantidade impressionante de informações sobre a prática agora ausente pode ser fornecida. O que prova, mais uma vez, que “prática” não é algo que você observa visualmente, mas é mais um paradigma explicativo. É um gênero que pode recuperar tanto de documentos mortos e tempos imensamente distantes quanto de sítios visitáveis (“Meu plano é proceder, como sempre, da prática” p. 241). Os significados que Netz é capaz de extrair de papiros e pergaminhos são tão impressionantes quanto aqueles que os paleoarqueólogos são capazes de recuperar do sílex disperso em alguma pedreira distante de ferramentas de pedra – minuto a minuto, gesto por gesto em cadeia de ações realizadas por pessoas sobre as quais nada sabem.

Este livro pode não ser a primeira descrição não-formalista do formalismo, mas é certamente a primeira instância em que uma descrição não-formalista se relaciona com a própria origem da dedução, geometria e raciocínio apodíctico no século V a.C. É claro que essas são as próprias formas de raciocínio no cerne da imaginação científica. Não importa quão excelentes tenham sido os outros estudos de práticas matemáticas em períodos posteriores, eles sempre se basearam (como seu assunto) em um já rico repertório de técnicas e gêneros literários, alguns dos quais podem ser rastreados até o grego. Isso significa que eles deram por certo o que significava deduzir algo de outra coisa, demonstrar um resultado, convencer através de uma figura⁴. O que Netz faz é nos transportar de volta no tempo para onde não havia geometria, nem raciocínio apodíctico, sem dedução, e até quando cada uma dessas práticas teve que ser concebida do zero sem depender de nenhum precedente. Se você teve que sofrer com demonstrações geométricas na escola (o que certamente é o meu caso), há algo emocionante em testemunhar, página a página, após página, neste livro luminoso e lúcido: a dificuldade que os próprios geômetras gregos tiveram em inventar, uma após a outra, as micro técnicas necessárias para navegar nos diagramas e o “transporte da necessidade” (termo crucial que

³ O paradigma é mais ou menos o do livro mestre de Jack Goody (1977). Para uma apresentação geral, ver Latour, 1990.

⁴ Para alguns exemplos recentes, veja Dear (1995); Galison (1997); MacKenzie (2001); Warwick (2003), mas seus matemáticos já sabiam tanto que não poderiam colocar os componentes elementares do que era quando ninguém ainda sabia o que é pensar matematicamente no centro do palco.

explicarei mais adiante) para levar uma prova do início ao fim⁵. Mais uma vez, mudar a própria noção de forma e formalismo de um recurso para um tópico possui um efeito libertador — o que se poderia chamar de iluminação própria dos “estudos científicos”!

Por causa da minha falta de credenciais em matemática grega, o presente artigo não pode ser mais do que um poste de sinalização para a comunidade de estudos de ciências ser direcionada para um livro que, de outra forma, poderia ter perdido. Limitar-me-ei, portanto, a extrair três argumentos principais da obra-prima de Netz (sem seguir o ordem dos capítulos) que me parecem especialmente decisivas: a) o mau uso da matemática grega pelos filósofos; b) a autonomia do formalismo e, por fim, c) o cerne do livro, a tecnologia dos diagramas de letras e o que estes fazem para a transferência de necessidades.

Quando Platão vai para Hollywood

É fácil estudar as práticas laboratoriais porque são tão fortemente equipadas, tão evidentemente coletivas, tão obviamente materiais, tão claramente situadas em tempos e espaços específicos, tão hesitantes e dispendiosas. Mas o mesmo não acontece com as práticas matemáticas: noções como “demonstração”, “modelagem”, “provação”, “cálculo”, “formalismo”. A “abstração” resiste a ser deslocada do papel de recursos indiscutíveis para o de tópicos inspecionáveis e responsáveis. É como se não tivéssemos nenhuma ferramenta para manter tais noções sob nossos olhos por mais de um momento fugaz, ou simplesmente nenhuma metalinguagem para registrá-las. Parece que estamos inevitavelmente contaminados por eles, como se a abstração também nos tornasse abstratos! Um momento de desatenção e, com certeza, eles terão evaporado, terão saltado de volta, por assim dizer, atrás de nós, em vez de permanecer sob nosso olhar. Em vez de ser o que deve ser descrito por uma nova linguagem descritiva, ainda a ser inventada, as abstrações facilmente voltam a fornecer a metalinguagem de nossas descrições. Assim, a explicação materialista do ato de abstrair tornou-se uma representação abstrata da abstração⁶. Muitos estudantes de ciência confiáveis voltaram a ser epistemólogos e acabaram simplesmente acumulando formalismo sobre formalismo... é tão fortemente inclinado a favor das ciências experimentais; para duas dezenas de estudos de experimentos e maquinários, encontramos apenas um sobre equações, modelização, formalismo ou lógica.

⁵ “Deve-se fazer um esforço para perceber quão mundanas são as palavras matemáticas gregas. Traduzimos tome por ‘seção’, tmea por ‘segmento’, tomeus por ‘setor’. Tente imaginá-los, como, digamos, ‘cortar’, ‘cortar’ e ‘cortar’. Os gregos não tinham gregos ou romanos para emprestar seus termos” (p. 124).

⁶ Provavelmente foi isso que enredou Eric Livingston (1985) no circuito do qual Netz extraiu maravilhosamente: há mais de uma maneira de alcançar a “adequação única”

A grande decisão libertadora do livro de Netz é que esse estado de coisas pode não ser devido à natureza inerentemente “abstrata” da dedução, mas sim a uma estranha operação de canalização (para não falar de sequestro), por filósofos platônicos de um conjunto de habilidades, nutrido dentro de pequenas redes de praticantes cosmopolitas da geometria grega... Uma citação bastante longa, mas hilária, será suficiente para ver onde seu argumento está indo:

Para ser mais preciso: todos conhecemos o destino de um livro que subitamente torna-se um best-seller após ser transformado em filme – na versão “de acordo com o filme”. Esse processo se originou no sul da Itália no final do século V a.C., mas foi Platão quem transformou ‘Matemática: o Filme’ em uma visão convincente. Essa visão permaneceu para assombrar a cultura ocidental, remetendo-a repetidas vezes para “O Livro segundo o Filme” – a numerologia associada ao pitagorismo e ao neoplatonismo. Algumas pessoas, especialmente na tradição aristotélica, voltaram ao original, até que, emergindo do último renascimento platônico do Renascimento, a matemática explodiu no século XVI e deixou o platonismo para trás com o resto da filosofia e das humanidades. Agora tomamos como certa a centralidade da matemática; não devemos projetá-lo no passado (p. 290).

Para grande surpresa dos que acreditam no Milagre Grego, a característica marcante da matemática grega, segundo Netz, é que ela era completamente periférica à cultura, mesmo à altamente letrada. Medicina, direito, retórica, ciências políticas, ética, história, sim; matemática, não. “Há algo muito radical no isolacionismo da matemática grega, comparado com o fundo” (p. 309). Com uma exceção: a tradição plato-aristotélica. Mas o que essa tradição (ela própria muito pequena na época) tirou dos matemáticos? Não os diagramas com letras (horresco referens), não muito do vocabulário, quase nenhuma das tecnologias intelectuais, mas apenas uma característica crucial: que pode existir uma maneira de convencer que é apodíctica e não retórica ou sofística. A filosofia extraída dos matemáticos não era uma prática de pleno direito. Foi apenas uma forma de se diferenciar radicalmente através da maneira correta de conseguir a persuasão.

As palavras *apodeixis* e *epideixis* têm quase a mesma raiz etimológica e para muitos séculos eram totalmente indistinguíveis (CASSIN, 1995). São apenas os filósofos platônicos que, padronizando seu discurso a partir do efeito resultante na persuasão das demonstrações geométricas, introduziram na filosofia uma diferenciação radical entre um modo de se convencer (por demonstrações rigorosas), *apodeixis* e outro caminho, que contou com floreios de retórica, sofismas, poesia, imaginação e manobras políticas, *epideixis*. Seria esse o efeito real das práticas filosóficas? Céus, não! O grande escândalo para os filósofos na Antiguidade,

um escândalo que ainda hoje está conosco, é que dois filósofos não concordam um com o outro. A filosofia platônica era uma emulação real das práticas do geômetra? que produzia convicção em torno da inspeção coletiva de diagramas com letras, apegando-se às conclusões a que as formas, e apenas as formas, poderiam levar?⁷ Claro que não, já que não havia diagrama para começar. A filosofia não se limitou cuidadosamente às formas, como faziam os geômetras (mais sobre isso abaixo), mas, em vez disso, afirmou se falar de conteúdos: a Boa Vida, o modo próprio de buscar a Verdade, as Leis da Cidade, etc. É como se Platão não extraísse da geometria mais que um estilo de convicção e lhe acrescentasse um conteúdo totalmente alheio; é como se o tipo de persuasão que os matemáticos obtiveram com muito esforço (porque se limitaram às formas) pudesse, no entanto, ser alcançado, quase sem custo demonstrativo, pelos filósofos em relação ao que eles viam como o único conteúdo relevante! Uma imitação da matemática, apenas o suficiente para expulsar os sofistas da filosofia. Uma proeza de fato, que continua sendo a fonte secreta de muitas das Guerras da Ciência, passadas e presentes.

E, no entanto, o “Livro segundo o filme”, para invocar novamente o símile de Netz, aquele que foi lido e ensinado durante vinte e seis séculos, afirma que “há uma diferença radical entre convicção e persuasão”. Afirma, ainda, que essa diferença é o que define a filosofia, a epistemologia, a ciência e até a Razão com R maiúsculo... Quando admiramos a admoestação de Sócrates ao sofista Cálicles: “geômetrias gar ameais!”⁸ o filme de sucesso. Podemos exibir o filme de vez em quando, mas ninguém, ninguém, exceto Netz, ainda lê o minúsculo roteiro esotérico com o qual o filme de Hollywood e o best-seller posterior foram produzidos... Depois de ser libertado do best-seller da Revolução Científica, podemos agora ser libertados do best-seller do Milagre Grego. De volta aos originais. Mais uma vez, a história da Razão se mostra ainda mais esclarecedora do que o Iluminismo insinuou.

⁷ Aqui está a avaliação de Netz da conexão de Platão com a técnica: “As obras de Platão sugerem que os matemáticos tinham uma certa terminologia – Platão faz isso permitindo que suas passagens matemáticas sejam preenchidas com o que parece ser um jargão. Esse jargão é muitas vezes diferente do euclidiano, mas não há razão para supor que Platão esteja tentando usar o jargão correto. Fora isso, Platão é estranhamente reticente sobre aspectos da prática matemática como, por exemplo, o uso de letras em diagramas. Em geral, seu uso da matemática é feito a uma distância considerável dela, e não nos permite ver claramente qual era a forma da matemática que ele conhecia” (p. 276)

⁸ “Você não percebeu quanto poder a igualdade geométrica tem entre deuses e homens, e essa negligência da geometria levou você a acreditar que se deve tentar ganhar uma parte desproporcional das coisas” (GORGIAS 508a) e meu comentário sobre isso diálogo mais famoso em Latour (1999).

Inventando uma nova autonomia

Mas não devemos ser muito duros com os filósofos: afinal, mesmo os maus filmes de peplum podem desencadear as vocações de grandes classicistas! Séculos antes que a física pudesse dominar a filosofia, previram que o que os matemáticos gregos conseguiram fazer poderia funcionar para eles também. Aderir aos formulários poderia fornecer uma nova e fabulosa fonte de certeza se apenas um certo tipo de conteúdo pudesse ser tratado do mesmo jeito. Quando “objetos galileus” fossem adicionados às provas arquimedianas, os conteúdos finalmente se ajustariam às formas e a demonstração assumiria o controle. De certa forma, a filosofia (pelo menos do tipo platônico) era um espaço reservado para esse desenvolvimento futuro. Mas ainda assim, isso não é, definitivamente não, o que os matemáticos gregos desejavam fazer naquela época. Pelo contrário, eles se esforçaram consideravelmente para fazer exatamente o tipo de sequestro a que os filósofos se entregavam, impossível. Como Netz documenta uma e outra vez, os geômetras mantinham uma separação estrita entre matemática de primeira ordem (trabalho feito em formulários) e matemática de segunda ordem (a busca de conteúdo deixada inteiramente para forasteiros).

O importante não é como o léxico de segunda ordem é diferente, mas que é diferente. Os dois estão separados. Na verdade, eles estão isolados um do outro, literalmente. Interlúdios de segunda ordem entre provas, para não mencionar dentro de provas, são notavelmente raros. Os dois são definidos como opostos. E é claro que é o discurso de primeira ordem que é marcado por isso, já que o discurso de segunda ordem é simplesmente a continuação da prosa grega normal (p. 120).

Aqui, novamente, o paralelo com o método de Shapin e Schaffer é impressionante: autonomia não é o ponto de partida para explicar como a dedução milagrosamente aparece como Atena da coxa de seu pai. O que tem de ser explicado surge pela introdução de um conjunto de técnicas novas e altamente especializadas. Assim como Boyle inventou um estilo chato de testemunho virtual que permitia uma relativa autonomização da prosa científica do resto da literatura, Netz mostra que, da mesma forma, os matemáticos gregos inventaram deliberadamente um estilo que lhes permitiu diferenciar-se de qualquer outro intelectual. prática — especialmente da filosofia. Não fazer nenhuma reflexão de segunda ordem sobre as provas é um aspecto central desse estilo, “selando-o” do restante da literatura:

O diagrama com letras fornece um universo de discurso. Falando de seus diagramas, os matemáticos gregos não precisam falar sobre seus princípios ontológicos. Esta é uma característica da matemática grega. As provas foram feitas em nível de objeto, outras questões foram deixadas de lado. Um foi

direto para os diagramas, fez o trabalho sujo e, quando perguntado qual era a ontologia por trás disso, resmungou algo sobre o tempo e voltou ao trabalho. (...) Há uma certa obstinação sobre a matemática grega, uma escolha deliberada de fazer matemática e nada mais. Que isso fosse possível é parcialmente explicável pelo papel do diagrama, que atuou, efetivamente, como substituto da ontologia (p. 57).

É por isso que Netz é tão importante por nos permitir finalmente estudar a abstração com métodos etnográficos. Muitas vezes ficamos paralisados pela ontologia da dedução (o best-seller do filme) e, portanto, raramente conseguimos focar no “universo do discurso” fornecido, neste caso, pelas técnicas scripto-visuais. Para entender a “forma da dedução” temos que reverter a substituição novamente, temos que substituir a ontologia pela prática. Então, e só então, aparecem características marcantes: a referência constante no texto aos diagramas e especialmente às letras neles⁹, o vocabulário limitado (“Todo o corpus de Arquimedes é composto de 851 palavras”. p. 107), o uso de fórmulas bem encapsuladas e constantemente repetidas. Aqui está como Netz resume como seu corpus consegue obter provas:

- Cerca de 100-200 palavras usadas repetidamente, responsáveis por 95% ou mais do corpus (na maioria das vezes, o artigo, as preposições e as pseudopalavras ‘cartas’).
- Um número semelhante de fórmulas –estrutura de palavras- dentro das quais um uma proporção ainda maior do texto é escrita (na maioria das vezes, fórmulas de objetos com letras). Essas fórmulas são extremamente repetitivas.
- Tanto as palavras quanto as fórmulas são um sistema econômico (tendendo, especialmente com palavras, mas também com fórmulas, ao princípio de um item lexical por conceito).
- As fórmulas são flexíveis, sem perder sua identidade clara. A flexibilidade geralmente toma a forma de elipses graduais, o que, por sua vez, torna a semântica do texto “anormal”.
- Além disso, cerca de metade do texto é composto por fórmulas fortemente marcadas semanticamente, o que serve ainda para marcar o texto como um todo.
- A flexibilidade às vezes toma a forma de transformações de um fórmula em outra e, mais geralmente, as fórmulas são estruturalmente relacionadas (ou verticalmente – uma fórmula é constituinte de outra – ou horizontalmente – as duas fórmulas são cognatas).
- Assim, uma teia de fórmulas é lançada sobre o corpus (pág. 161).

Claramente, não é nisso que os epistemólogos diriam que consiste o coração material da dedução. No entanto, é isso que se torna visível a partir da prática da dedução, uma vez que a ideologia do rigor foi posta de lado. Mais precisamente, em vez de “deduzir com rigor”, vamos descobrindo, um a um, os vários ingredientes com que se faz o “rigor”. Dedução, torna-se uma

⁹ Esta é uma distinção semiótica chave “As letras nos diagramas são indicadores úteis. Eles não representam objetos, eles estão sobre eles” (p. 47).

atividade tão difícil quanto caminhar em uma margem traiçoeira, tentando não se desviar do pequeno caminho por onde nossos poucos predecessores passaram, para não ser engolido por rachaduras rápidas. O “problema com deduções” é uma leitura tão fascinante quanto o “problema com experimentos” nas mãos de Shapin e Schaffer. Se há uma coisa que você não pode fazer enquanto caminha por uma dedução, é olhar ao redor e admirar a paisagem e se gabar de ter encontrado um novo caminho para a verdade! A um passo de distância, e aqui vai você...

Sugiro, portanto, que uma parte da resposta para "por que os gregos provas matemáticas do jeito que são?" é que as provas são compartimentadas de discussões mais amplas, de modo que sua estrutura é totalmente autônoma. Ao fazer matemática, não se faz mais nada. Em vez da estrutura multidimensional de interesses e implicações do discurso natural, a matemática grega abstrai as relações matemáticas. Isso talvez seja óbvio para uma ciência, mas a matemática grega não tinha ciência anterior para imitar a esse respeito (p. 214).

Sim, a ciência é autônoma, mas essa autonomia tem que ser alcançada. E alcançado a um grande custo. Exatamente o tipo de custo que a filosofia de Platão tentou evitar ao trazer a dedução (ou sua imitação) a todos os grandes problemas da época. O que fascina Netz, é como havia poucos matemáticos: ele chega a fazer sua prosopografia (em média, três nascem por ano em toda a bacia do Mediterrâneo –p.285!). A escassez deles é tão grande que nem mesmo Arquimedes consegue ter colegas...¹⁰

Era um empreendimento perseguido por redes ad hoc de autodidatas – redes para as quais a forma escrita era essencial; constantemente surgindo e desaparecendo, quase nunca conseguindo qualquer apoio institucional. O motor não desliza para frente de maneira uniforme e suave: ele dá solavancos e solavancos, sempre dando partida e reiniciando. Nossas expectativas de uma “disciplina científica” devem ser esquecidas. Um ‘jogo intelectual’ será uma aproximação mais próxima (pp. 291-292).

Novamente, “a centralidade da matemática, não deve ser projetada para trás no tempo”. Mas então há um problema, afinal, em insistir tanto na construção da autonomia: se esse novo estilo dedutivo é tão difícil de dominar, tão esotérico, se é um jogo perseguido por tão poucas pessoas, que se absterem de qualquer comentários gerais, quaisquer alegações de segunda ordem, qualquer aplicação à prática (por medo de parecer muito banal), que se afastam dos assuntos públicos, o que é que fascinou os platônicos? filósofos tanto que viram em tal “jogo” a invenção

¹⁰ “Arquimedes, no Método e em outros lugares, dá uma sensação de energia intelectual sem limites, clamando por alguma colaboração; o mundo não colaborou” (p. 286).

crucial que poderia ajudar a expulsar os sofistas da cidade? Pode não haver nenhum Milagre Grego, mas há um mistério de fato: como é que o candidato menos provável para o público – a formação da dedução – foi arrancado de seu uso apropriado e trazido para os assuntos públicos como *O Caminho para a Razão*? E pode-se acrescentar: o milagre é ainda maior, pois essa manobra deu certo até hoje: não há funcionário público que ouse esquecer o que Cálicles esqueceu: que a matemática é a chave do Bem Público e da Boa Vida. Esse best-seller ainda está à venda em qualquer banca de jornal.

Como todas as boas investigações em estudos científicos, Netz não toma o contexto como explicação para a ciência, mas, ao contrário, mostra como qualquer ciência específica elabora sua própria maneira altamente específica de se relacionar com um contexto. Mesmo assim, tenho que admitir, sua resposta é menos original sobre isso do que o resto do livro. O que ele faz é confirmar o conhecido argumento de Geoffrey Lloyd (1990; 2005): é justamente porque a vida pública na Grécia era tão invasiva, tão polêmica, tão inconclusiva, que a invenção, por “redes de autodidatas altamente especializadas”, de outra forma de encerrar uma discussão interminável assumiu um aspecto tão tentador. “Esses homens, que vivem em total obscuridade, parecem ter encontrado um nova maneira de concluir um argumento! Que alívio! Podemos usá-lo também?” Em nenhum outro lugar, exceto na Grécia, isso teria sido visto como um novo recurso bem-vindo.

(...) o desenvolvimento de argumentos rigorosos tanto em filosofia quanto em a matemática deve ser vista contra o pano de fundo da retórica, com suas próprias noções de prova. Foram as óbvias deficiências da retórica que levaram à aposta pela incontroversidade, por uma prova que vai além da mera persuasão. pág. 309 (...) Na cultura polêmica grega, essa característica da matemática adquiriu um significado que não possuía na China ou na Mesopotâmia¹¹. Para os gregos, a matemática era radicalmente diferente a esse respeito de outras disciplinas e, portanto, os matemáticos seguiam seus estudos com certo grau de isolacionismo (p. 310).

Todos os grandes livros de estudos científicos pertencem à “epistemologia política”, ou seja, eles não estendem a política à ciência, nem a ciência à política. Em vez disso, eles tentam entender de onde vem a diferença e como a distribuição de habilidades entre os diferentes domínios foi julgada. O livro de Netz consegue fazer exatamente isso para a mais resistente de todas as distinções, aquela entre ser convencido e ser persuadido, demonstração e retórica, *apo* e *epi-deixis*. Daí esta frase mais audaciosa: “Podemos agora dizer que a *apodeixis* matemática é, em parte, um desenvolvimento da *epideixis* retórica” (p. 293). Ele não diz que eles são

¹¹ Veja o contra-caso sobre a China em Chemla, et al 1999.

diferentes desde o início, ele aponta onde e por que eles começam a divergir. Com isso, os estudos de ciência devem poder avançar: mesmo este mais consagrado das todas as distinções podem ser explicadas e trazidas de volta à sua origem material precisa.

Mas com uma condição. A condição mais radical e original deste livro mais radical e original é que se designe a própria “deixis”, aquilo que é designado pelo dedo indicador... Isto é o que temos agora de compreender.

Voltemos agora ao matemático grego: nós o vemos formulando para si mesmo - silenciosamente, em voz alta ou mesmo por escrito - frases gregas. Muito provavelmente, ele não escreve muito - afinal, não há nada escrito especificamente sobre seu uso da linguagem. Por quatro capítulos, procuramos o matemático grego. Agora finalmente o encontramos: pensando em voz alta, em algumas fórmulas compostas por um pequeno conjunto de palavras, olhando para um diagrama, rotulando-o. Esta é a realidade material da matemática grega. Passamos agora a ver como a dedução é moldada a partir de tal material (p. 167).

Como transferir necessidades por meio de transformações

O que realmente vemos quando confrontados com um fenômeno científico? Nós somos levados a uma cena mais ou menos como esta: —“Isto, aqui”, diz um praticante designando a janela de algum instrumento com o dedo indicador. — “Não vejo nada” retruca um colega. — “Mas sim com certeza aqui, está vendo esse espinho?” — “Ah, sim, é isso que você quer dizer, isso é ótimo, agora eu vejo”. Tantos estudos científicos têm conseguido recuperar esse tipo de visibilidade emergente, esses dêiticos e a importância crucial que eles têm na simplificação de percepções desde que acompanhados por um monitoramento intersubjetivo atento e concentrado (GARFINKEL, et al. 1981; GOODWIN, 1995; KNORR e AMANN, 1990; LYNCH, 1985). A forma de vida experimental está constantemente criando esse tipo de cenas na interface entre o que os instrumentos inscrevem, o que o grupo local de colegas consegue extrair das inscrições, o que é finalmente definido como o fenômeno estável que foi testemunhado coletivamente e progressivamente endurecido em um fato genuíno — ou rapidamente dissipado como um artefato. Grande parte da força de convicção proporcionada pelos sítios experimentais vem dessa possibilidade de dêiticos passo a passo examinando os mundos locais scripto-visuais¹², constantemente inspecionáveis e coletivamente responsáveis.

O que era verdade de observação e experimentação, era precisamente o que não era suposto ser verdade de dedução. Aqui, argumentou-se que não havia dêitico e que não deveria

¹² Essa colaboração entre o script e o visual é uma característica dos diagramas mesmo em suas instanciações mais recentes (BASTIDE, 1990; KAISER 2005; LYNCH, 1991), exceto quando não são sobre nada (LYNCH, 1990)!

haver nenhum¹³. O próprio pensamento assume e faz sua mente percorrer os passos lógicos sem a ajuda de qualquer corda, qualquer diagrama, qualquer inscrição – exceto, na escola, para fins puramente pedagógicos (LAKATOS 1976). É por isso que a matemática, continuou o argumento, é tão diferente do resto da ciência. Não se baseia na inspeção passo a passo de uma realidade material previamente transformada para extrair de seus instrumentos novas intuições sobre o mundo empírico. É por isso que apenas uma explicação formalista do formalismo é necessária: nenhuma ênfase nas técnicas intelectuais explicará como uma mente de repente consegue evitar a referência e se afasta da realidade cotidiana para acessar uma realidade superior – uma que nenhuma quantidade de conhecimento empírico manifestação pode alguma vez expressar. Como todo garoto francês aprendeu com Poincaré “la géométrie est l’art de raisonner juste sur une figure fausse” (“a geometria é a arte de raciocinar corretamente sobre figuras que são mal construídas” – tradução de Netz, p.33). Não importa quão pouco confiável seja a figura, o raciocínio flui corretamente e sem esforço dela, pois está em outra dimensão completamente.

Isso pode ser verdade, hoje, entre matemáticos bem treinados. Depois de anos de prática, eles podem não ver mais o que é necessário para pensar, não mais do que um acrobata se lembra do que levou para pegar um trapézio em pleno andamento quinze metros acima do solo. Mas certamente não era verdade na Grécia, lembra-nos Netz, quando cada aspecto desse novo “jogo intelectual” teve de ser inventado aos poucos. Na época, os diagramas eram essenciais para alcançar uma certeza coletivamente inspecionável passo a passo. Quando escreveu o livro em análise, a presença indispensável dos diagramas foi por ele deduzida da semiótica dos textos (eles faziam alusão a características que não faziam sentido a menos que uma figura agora ausente tivesse sido designada pelo dedo dos matemáticos neste exato momento na argumentação). E ele perseguiu isso contra muito da sabedoria comum dos especialistas da matemática grega. Mas então algo extraordinário aconteceu com Netz: ele teve a sorte de ser justificado mais tarde pela descoberta de diagramas reais de uma cópia muito antiga de Arquimedes (NETZ, 2006).

Por que o diagrama é confiável? Primeiro, porque as referências a ele são referências a uma construção que, por definição, está sob nosso controle. Se alguém encontrasse um diagrama anônimo, seria impossível raciocinar sobre ele. O diagrama que se construiu, no entanto, também é conhecido por si mesmo porque é verbalizado. Observe a combinação: a presença visual permite uma visão sinótica, um fácil acesso ao conteúdo; a verbalização limita

¹³ Peter Galison (2002) contou a história da forma específica de iconoclastia própria da tradição formalista.

os conteúdos. O texto por si só é muito difícil de seguir¹⁴; o diagrama sozinho é selvagem e imprevisível. A unidade composta pelos dois é o assunto da matemática grega (p. 181).

Aqui vai outra divisão radical, aquela, desta vez, entre experimentação e dedução, o mundo empírico da física e o mundo “puramente lógico” da matemática. Para os matemáticos gregos, pelo menos, não era um mundo ideal, era de fato um experimento, altamente específico e totalmente surpreendente. O que acontece quando esta combinação única de um vocabulário limitado e a sintaxe estereotipada é obsessivamente aplicada às figuras, e apenas às figuras, não por causa da qualidade de seus desenhos, mas por causa de suas relações? Ou melhor, o contrário (veja como é fácil escorregar): o que chamamos de relações, e relações lógicas, são precisamente a descoberta feita pelos matemáticos gregos ao extrair esse tipo de fenômeno recém-visível do mundo empírico, à exclusão de todos os outros. O que agora consideramos uma “relação lógica” é o que você obtém quando refaz os passos dos geômetras gregos. A relação lógica também tem um acesso histórico a qualquer texto matemático com diagramas (EISENSTEIN, 1979).

A dedução, na verdade, é mais do que apenas deduzir. Para fazer a dedução, um deve ser adepto de perceber fatos relevantes, não menos do que combinar fatos conhecidos. O olho para o obviamente verdadeiro não é menos importante do que o olho para o resultado óbvio e, como mostra o entrelaçamento de pontos de partida e afirmações argumentadas, os dois olhos agem juntos (p. 171).

A matemática é empírica por completo. Se foi estranho Boyle descrever o que aconteceu com pássaros e velas dentro da armadilha artificial de uma bomba de ar, pense em quão bizarros experimentos matemáticos podem ter sido. Pense em experimentos em que diagramas mal desenhados (mas cuidadosamente rotulados) foram submetidos a inspeção para extrair apenas um tipo de conexão, a das relações transitivas entre diferentes partes dos diagramas em diferentes momentos da prova escrita. Se você acha estranho que os micróbios de Pasteur, uma vez cultivados em um prato, pudessem se tornar visíveis e responsáveis, então você deveria

¹⁴ Lembre-se que os gregos não separavam letras e tinham o sistema de notação mais complicado para cálculos. Por causa disso, os diagramas eram como oásis de clareza. Isso também está relacionado a uma razão técnica devido aos pergaminhos: os pergaminhos passaram a ser muito mais fáceis de ler para demonstrações do que os volumes, já que os diagramas estão no final poderia facilmente dobrar ou desdobrar os pergaminhos para ter sempre sinopticamente a conexão entre textos e visuais — algo muito difícil de se fazer com livros. Lembre-se também que antes da impressão ninguém tinha acesso a nenhum texto matemático com diagramas (EISENSTEIN, 1979).

achar o fato de que “relações lógicas” emergindo da placa de Petri dos “laboratórios planos” dos geômetras gregos não mais e não menos estranho¹⁵.

Na verdade, Netz é um pouco mais prudente aqui do que eu sobre o impacto ontológico de tal descoberta (lembre-se que ele é um classicista sério, não um estudante de ciências febril (LATOURE, 2007)):

Somos historiadores – não temos que responder a essas perguntas. Tudo o que temos a notar é que há uma decisão aqui, de focar nas relações na medida em que elas são transitivas. Se eles realmente existem independentemente da decisão é uma questão que cabe ao filósofo responder; o historiador registra a decisão¹⁶. Em algum momento, alguns gregos – impelidos pela aposta pela incontestabilidade, descrita em Lloyd (1990) – decidiram focalizar as relações na medida em que são transitivas, para exigir que nas discussões das relações de áreas e afins, o faz-de-conta da transitividade ideal deve ser entretido. Aqui está finalmente o faz-de-conta, a abstração verdadeiramente exigida pela matemática grega. Se a esfera é feita de bronze ou não é apenas imaterial. O requisito importante – o ponto em que a matemática decola do mundo real – é que se a esfera é igual em volume a alguns outros objetos, digamos $\frac{2}{3}$ do cilindro circunscrito, e este cilindro por sua vez é igual a algum outro objeto X, então a esfera será igual a X. Isso vale para 'igual' apenas em um sentido ideal, um sentido divorciado das aplicações e medições da vida real. E esta é a operação que, o faz de conta no coração da matemática grega (pp. 197-198).

Devemos ter cuidado neste momento. Basta um segundo de desatenção e corremos o risco de perder o ponto: o “ideal” não deve ser tratado “idealmente”, mas “materialmente”. Na verdade, “faz de conta” é um termo um tanto infeliz, uma possível reversão a um idioma (des)construtivista mais solto, mas a característica chave da descrição de Netz é indiscutível. A tecnologia intelectual de aderir às formas dessa maneira altamente específica permite que o “mundo ideal” emergja – ou melhor, permite que o mundo empírico seja deduzido como “ideal”. Do que é feito esse “ideal”? Como Poincaré diz, da tão tênue distância entre “raciocinar corretamente” e “uma figura mal desenhada”...

Poderíamos dizer que o ideal finalmente pousou em segurança! Uma façanha. Todos os outros — bem, quase todos — tomam o mundo ideal das relações lógicas como um outro mundo, simplesmente “descoberto” pelos gregos, e que sempre existiu em si mesmo sem

¹⁵ Deve-se lembrar que a extração de uma constante por meio de transformações só é possível porque o minúsculo mundo artificial da prova foi incrivelmente reduzido: “Para resumir, então, nossa primeira descrição: o léxico matemático grego é minúsculo, fortemente enviesado em direção a objetos particulares (cujas propriedades e relações são apenas esquematicamente dadas) e é invariável, dentro da obra e entre autores” (p. 108).

¹⁶ No entanto, todo o teor do livro de Netz claramente põe de lado, como muitos estudos científicos, a oposição tradicional entre construtivistas e idealistas: objetos matemáticos são reais porque são construídos. O mundo responde a essa prática com fecundidade por causa da artificialidade do laboratório plano. Esta é a solução de Netz para o quebra-cabeça kantiano do “julgamento sintético a priori”.

esforço. E, no entanto, toda a ideia de um mundo ideal de formalismo é tão irrealista como se você continuasse imaginando que todos os planos que cruzam os céus azuis de verão nunca pousam nem decolam e nunca são atendidos por qualquer equipe de terra da linha aérea. Aqui assistimos à própria colocação do próprio macadame da própria pista de ar de onde decola o “avião ideal” e ouvimos o rugido dos motores que o permitem voar! Tal é a determinação desse livro incrível. Mas qual é exatamente o fenômeno que tornou os matemáticos gregos tão entusiasmados e tão rapidamente produtivos, pelo menos no início? Podemos nomear mais precisamente a materialidade desse plano ideal?

Meu argumento é simples. Algumas declarações e argumentos são vistos como diretamente necessários – eles são os blocos de construção, os ‘átomos’ da necessidade. Estes, então, combinam-se de maneira preservadora da necessidade para produzir a necessidade da matemática grega (p. 168).

Os matemáticos gregos inventaram um caminho completamente novo: a preservação das necessidades por meio de sucessivas transformações. De repente, eles perceberam que, extraíndo apenas as relações que o texto poderia descrever, você poderia transferir a necessidade do início de uma prova para o seu fim. Desde que você indique cada transformação através dos diagramas com o ponto do dedo, e que você nunca deixe este procedimento passo a passo para o “conteúdo” ou para “o que realmente significa”. Certamente, todo leitor, por pior que tenha sido ensinado, deve ter sentido a mesma estupefação ao fazer geometria na escola: junto, sim, este é o mesmo que este, e este de novo é o mesmo que este, sim – Ok, e, oh, surpresa, surpresa, isso também é verdade para este. Tudo mudou, nada mudou. Se os maus alunos do século 20 ficaram tão surpresos com esse feito de *salva veritate*, imagine como deveria ter sido descobrir esse caminho incrível no meio da ágora no século V a.C. De fato, o suficiente para entorpecer o pequeno escravo do Mênon. Mas por que isso é tão extraordinário? Por que focar em apenas um tipo de relação permite decolar da realidade? Por causa da cadeia. Inventa uma “corrente que nunca se rompe”.

A maioria das afirmações [em Euclides] é a de equivalências. Eu tenho já notei no capítulo anterior a enorme repetitividade da relação ‘igualdade’ na matemática grega. Agora vemos a lógica significado dessa centralidade. (...)

Podemos dizer que a matemática grega é, em última análise, dedutiva, porque lida com relações transitivas. Esta resposta é parcialmente válida. O mundo empírico é recalcitrante, não cede à lógica, e isso porque se comporta por graus, por sombras finas, por múltiplas dimensões. Sombreando-se umas às outras, as cadeias de relações que operam no mundo real se desfazem após uma série de etapas; a quantidade de líquidos transferidos repetidas vezes de

vaso para vaso, finalmente diminuirá; a preferência de A a B e de B a C nem sempre implica a de A a C. Os objetos matemáticos são diferentes (p. 197)¹⁷.

Esse é o “ideal” – um copo de água que você pode esvaziar em outro copo sem parar, sem que nenhuma gota caia e que nenhum sol ardente evapore. No “mundo real” não há transformação que não adultere o que é transportado. No “mundo ideal”, aquele que os matemáticos estão inventando, ou descobrindo, você pode ter quantas transformações desejar (Netz é muito cuidadoso em realmente contar os passos nas provas sempre obtidas localmente: nunca são mais de quarenta) e ainda assim você consegue conservar a constante. Em outras palavras, você é capaz de ter ao mesmo tempo mobilidade e, ao mesmo tempo, imutabilidade (LATOURE, 1990)¹⁸. sombra da espada do soldado romano que vai te matar!

Sim, mas todos nós já sabemos disso. Esta é a curiosidade ocidental sobre a diferença entre o real e o ideal. Não, porque o que Netz faz é mostrar a você que “ideal” é um efeito gerado por um trabalho experimental não ideal e totalmente prático na própria superfície do diagrama com letras. Não é que a matemática seja “abstrata” — a abstração não é feita de abstrações mais do que o queijo é feito de queijo. É que fazer abstração é o que a matemática aprendeu a extrair do mundo empírico. As cadeias nunca se romperão e a imutabilidade será obtida através de todas as transformações apenas com a condição de que o caminho seja estritamente limitado às formas.

Mesmo a generalização requer ferramentas práticas, um princípio essencial dos estudos científicos. Com certeza, mas que ninguém se atreveu a aplicar à “generalidade” de teoremas e provas que geralmente tomamos como garantidos. E, no entanto, a generalidade também deve ser alcançada passo a passo. Temos que voltar a um ponto anterior que Netz faz aqui, e que é totalmente contra-intuitivo para aqueles que consideram o mundo ideal da matemática como já totalmente feito:

As proposições geométricas gregas não são sobre o espaço universal e infinito. Como se sabe, linhas e planos na matemática grega são sempre seções finitas da linha e do plano infinitos que projetamos. Eles são, é verdade,

¹⁷ E novamente: “O crucial é que a matemática grega depende tanto de relações de equivalência, como identidade, igualdade, proporcionalidade. Essas fórmulas operam em um duplo papel: uma vez como substrato para manipulação, mais uma vez como licença para manipulação $a:b::c:d$ é ao mesmo tempo um conjunto de objetos, no qual ' $a:b$ ', por exemplo, está pronto para substituição por outras proporções equivalentes, e é também uma afirmação sobre objetos, afirmando a substituíbilidade de ' $a:b$ ' e ' $c:d$ '. As relações de equivalência são tanto a matéria-prima quanto as máquinas na fábrica de provas gregas” (p. 196).

¹⁸ “A matemática grega é a troca de propriedades entre objetos. Os argumentos geralmente partem da existência de um conjunto de propriedades, para concluir que outra propriedade também é válida. Teoremas em geral afirmam que quando uma certa propriedade é obtida, outra também ocorre. As definições são mais práticas onde fornecem o edifício blocos para tais estruturas” (pp. 92-93).

indefinidamente extensíveis, mas são finitos. Cada proposição geométrica estabelece seu próprio universo - que é seu diagrama (p. 32).

Em outras palavras, as provas de Euclides não se desdobram em um espaço euclidiano — pelo menos, não ainda, não antes que séculos de trabalho tenham acabado por construí-lo. O grande paradoxo da demonstração cuidadosa de Netz do que é fazer demonstração, é que a extensibilidade da prova está diretamente correlacionada ao minúsculo mundo fechado no qual ela se baseia. É precisamente porque não é abrangente que pode se espalhar “por toda parte” — embora apenas “localmente”! Um ponto que não deve surpreender os de nós que estudamos redes, mas que ainda é maravilhosamente refrescante quando aplicado a teoremas...

A diferença é especialmente reveladora quando contrastada com o tipo de generalidade que a linguagem filosófica pretende alcançar (lembre-se que os diálogos de Platão tentam imitar a prática passo a passo dos matemáticos).

Bem pode Sócrates argumentar que a arte da medicina não estuda seu próprio interesse, mas as necessidades do corpo (...). Sim, tendemos a responder, isso tem alguma verdade nisso. Mas quanto? Como geral? Quão bem a afirmação poderia ser repetida, com outras artes substituindo a medicina? Verificar alguns casos (como faz Sócrates) é útil, mas não resolve nosso problema. Simplesmente não podemos prever como os termos podem se estender, porque as fronteiras e os próprios constituintes do universo conceitual que habitam são vagamente marcados. A simplicidade do léxico matemático, por outro lado, torna-o inspecionável. Sabemos não apenas o que o texto afirma, mas quais são as opções disponíveis se tentarmos manipulá-lo, esticá-lo. Em suma, então, a simplificação do universo, tanto em termos de diagrama qualitativo e em termos de linguagem pequena e bem regulada, possibilita a inspeção de todo o universo. Assim, a generalidade é possível (p. 26).

Sócrates e os platônicos podem tentar exagerar as vantagens do recém-descoberto “jogo intelectual” — generalidade, necessidades, universalidades — mas nunca conseguirão esconder que, para obter todas essas guloseimas, você deve primeiro restringir incrivelmente o universo e se ater a ele. as formas dos diagramas com letras sem nunca pular para o conteúdo - exatamente o que eles desejam fazer. O “laboratório plano” produz resultados apenas nas condições em que permanece plana.

Conclusão: o ditado de Poincaré

Eu apenas dei uma olhada na superfície do livro de Netz. Quase todos os parágrafos oferecem um tesouro de métodos, bem como de resultados para estudos científicos. Se algum dia conseguirmos escrever uma história alternativa da Razão, a metalinguagem para redescrever esse tipo de prática científica certamente se assemelhará – em precisão, em tom, em humor

também – muito ao que este livro alcançou no mais difícil de todos os temas: o que é deduzir rigorosamente uma consequência de uma premissa. Gostaria de terminar no seguinte ponto. Uma das grandes lições deste trabalho é que, embora passe tanto tempo nos diagramas, não se trata do visual em si, e certamente não se trata da dimensão imaginária da ciência. Pelo contrário, trata-se da literalidade obsessiva dos trabalhos diagramáticos, o foco principal dos matemáticos gregos, e precisamente o tipo de trabalho e foco que a “abstração” e o “formalismo” não deveriam precisar para alcançar resultados.

Ao delegar algumas, mas não todas, ações à 'imaginação', os matemáticos implicam que, no curso normal das coisas, eles literalmente querem dizer o que dizem: o círculo da prova é desenhado, não imaginado para ser desenhado. Não adianta dizer que o círculo foi desenhado em algum espaço geométrico, pois nesse espaço geométrico pode-se desenhar com a mesma facilidade uma esfera. Assim, a ação da prova é literal, e o objeto da prova deve ser o próprio diagrama, pois é somente no diagrama que se pode dizer que os atos de construção literalmente ocorreram (p. 53).

Nos estudos de ciência há agora uma grande atenção (para evitar dizer uma moda) para a dimensão da imagem da ciência. Com certeza, é um bom contrapeso ter prestado tanta atenção apenas às “ideias”. E, no entanto, a nova atenção às imagens pode não levar a lugar algum, porque, estritamente falando, não há imagem na ciência, mas apenas cascatas de transformações (PINCH, 1985) de uma inscrição para outra. Isolada, ou retirada de sua série de transformações, uma imagem científica não tem referente. O idealismo de uma ciência feita de ideias corre o risco de simplesmente ser substituído por um “imaginismo” de uma ciência feita de imagens. Em outras palavras, o fenômeno real sobre o qual se deve concentrar não são as ideias nem as imagens e o que elas podem se referir, mas é a troca entre o que se conserva e o que se descarta ao passar de um traço scripto-visual para outro na linha. Isso não é uma dimensão visual, mas, por outro lado, é exatamente o tipo de transferência de conservação de necessidade em que consiste a dedução¹⁹. Netz fornece as ferramentas para focalizar simultaneamente o material e as propriedades visuais dos diagramas sem ficar fascinado por suas imagens. A máxima de Poincaré, não diz que não precisamos de nenhum diagrama. O que realmente diz é que existe uma distância entre “pensar corretamente” e “desenhar mal”. A posição de Poincaré, portanto, não é de iconoclastia, pois não prega a abstinência de todas as figurações. A questão é definir

¹⁹ Também está no centro da atenção de Hutchins: “Dentro dessa unidade maior de análise, o que costumava parecer internalização agora aparece como uma propagação gradual de propriedades funcionais organizadas através de um conjunto de meios maleáveis” (1995, p.312) e mais genericamente do que chamei, por isso, de “móveis imutáveis”.

essa distância entre o pensamento e o desenho (esse aspecto de “faz de conta” em que Netz viu a maneira adequada de deduzir o “plano ideal”) com alguma precisão.

É só porque há um faz de conta inerente no diagrama que o faz de conta da transitividade é naturalmente entretido. ‘Isso é igual a isso, e isso a isso, então isso a isso’ – ‘Ah, é mesmo? Você as mediu?’ – “Vamos, não seja tolo. Não há nada para medir aqui – é apenas um diagrama.” “Nada para medir aqui”: eu inventei esta réplica. Mas está lá no original – no comportamento do diagrama. É justamente esse aspecto métrico, essas relações de medida, que o diagrama não se propõe a representar. Diagramas e fórmulas são, portanto, funcionalmente relacionados em um único estrutura (p. 198).

Se, como argumentei, há uma “guerra às imagens” tanto na ciência quanto na religião (LATOUR, 2002), a tentativa de Netz pode ser um dos poucos trabalhos a percorrer seu caminho, para usar a análise de Galison (2002), entre iconoclastia e idolatria: “Se ao menos não tivéssemos imagem; não podemos prescindir de imagens”. Pela primeira vez, então, temos um estudo verdadeiramente iconofílico do formalismo.

BIBLIOGRAFIA

Bastide, Françoise. (1990) 'The Iconography of Scientific Texts: Principle of Analysis', in M. Lynch and S. Woolgar (eds), *Representation in Scientific Practice*, (Cambridge, Mass: MIT Press): 187-230.

Cassin, Barbara (1995) *L'effet sophistique*. (Paris: Gallimard). Chemla, Karine, Donald Harper and Marc Kalinowski (1999) *Divination et rationalité en Chine ancienne*. (Paris: PUF).

Dear, Peter (1995) *Discipline and Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution*. (Chicago: University of Chicago Press).

Eisenstein, Elizabeth (1979) *The Printing Press as an Agent of Change*. (Cambridge: Cambridge University Press).

Galison, Peter (1997) *Image and Logic. A Material Culture of Microphysics*. (Chicago: The University of Chicago Press).

Galison, Peter. (2002) 'Images Scatter into Data. Data Gather into Images', in B. Latour and P. Weibel (eds), *Iconoclasm*, (Cambridge: MIT Press): 300-323.

Garfinkel, Harold, Michael Lynch and Eric Livingston (1981) 'The Work of a Discovering Science Construed with Materials from the Optically Discovered Pulsar', *Philosophy of Social Sciences*:131-158.

Goodwin, Charles (1995) 'Seeing in Depth', *Social Studies of Science* 25:237-284.

Goody, Jack (1977) *The Domestication of the Savage Mind*. (Cambridge University Press: Cambridge).

Hutchins, Edwin (1995) *Cognition in the Wild*. (Cambridge, Mass: MIT Press).

Kaiser, David (2005) *Drawing Theories Apart : The Dispersion of Feynman Diagrams in Postwar Physics*. (Chicago: The University of Chicago Press).

Knorr-Cetina, Karin and Klaus Amann (1990) 'Image dissection in natural scientific inquiry', *Science, Technology, & Human Values* 15: 259-283.

Lakatos, Imre (1976) *Proofs and Refutations*. (Cambridge: Cambridge U.P.).

Latour, Bruno. (1990) 'Drawing Things Together', in M. Lynch and S. Woolgar (eds), *Representation in Scientific Practice*, (Cambridge, Mass: MIT Press): 19-68.

Latour, Bruno. (1999) *Pandora's Hope. Essays on the reality of science studies*. (Cambridge, Mass: Harvard University Press).

Latour, Bruno. (2007). 'A Textbook Case Revisited. Knowledge as Mode of Existence' in E. Hackett, O. Amsterdamska, M. Lynch and J. Wacjman (eds) *The Handbook of Science and Technology Studies -Third Edition*. (Cambridge, Mass, MIT Press: 83- 112).

Latour, Bruno; and Peter Weibel (eds) (2002) *Iconoclash. Beyond the Image Wars in Science, Religion and Art* (Cambridge, Mass: MIT Press).

Livingston, Eric (1985) *The Ethnomethodological Foundations of Mathematical Practice*. (London: Routledge).

Lloyd, Geoffrey (1990) *Demystifying Mentalities*. (Cambridge: Cambridge University Press).

Lloyd, GER (2005) *The Delusions of Invulnerability. Wisdom and Morality in Ancient Greece, China and Today*. (London: Duckworth).

Lynch, Michael (1985) *Art and Artifact in Laboratory Science A Study of Shop Work and Shop Talk in a Research Laboratory*. (London: Routledge).

Lynch, Michael (1990) 'Pictures Of Nothing? Visual Construals In Social Theory', *Sociological Theory* 9:1-22.

Lynch, Michael (1991) 'Science in the Age of Mechanical Reproduction: Moral and Epistemic Relations between Diagrams and Photographs', *Biology and Philosophy* 6:205-226.

MacKenzie, Donald (2001) *Mechanizing Proof: Computing, Risk, and Trust (Inside Technology)*. (Cambridge, Mass: MIT Press).

Netz, Reviel (2003) *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics : A Study in Cognitive History*. (Cambridge: Cambridge University Press).

Netz, Reviel (2004) *Barbed Wire: An Ecology of Modernity*. (?: Wesleyan University Press).

Netz, Reviel (2006) Pinch, Trevor (1985) 'Observer la nature ou observer les instruments', *Culture technique*:88-107.

Rotman, Brian (1987) *Signifying Nothing. The Semiotics of Zero*. (London: Macmillan).

Rotman, Brian (1993) *Ad Infinitum. The Ghost in Turing Machine. Taking God out of Mathematics and Putting the Body Back In*. (Stanford: Stanford University Press).

Rosental, Claude (2003) *La Trame de l'évidence*. (Paris: P.U.F.).

Warwick, Andrew (2003) *Masters of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*. (Chicago: The University of Chicago Press).