

Rematec

Revista Matemática, Ensino e Cultura

ISSN: 1980-3141 | **e-ISSN:** 2675-1909 | **DOI:** 10.37084

2022
Número 42

**Trabajo Matemático y Tecnologías Digitales
para la Enseñanza de las Matemáticas**

REMATEC

Revista de Matemática, Ensino e Cultura

Trabajo Matemático y Tecnologías Digitales para la Enseñanza de las Matemáticas

Editores deste Número

Jesús Victoria Flores Salazar

Luis Andrés Castillo Bracho

Conselho Editorial

Amílcar Manuel do Rosário Oliveira, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Amílcar Pinto Martins, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Arthur Powell, Rutgers University de Newark, USA
Carlos Aldemir Farias da Silva, Universidade Federal do Pará, Brasil
Cláudia Lisete Oliveira Groenwald, Universidade Luterana do Brasil, Brasil
Cláudia Regina Flores, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil
Claudianny Amorim Noronha, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Edivania Santos Alves, Universidade Federal do Pará, Brasil
Elisabete Zardo Búrigo, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Emmánuel Lizcano Fernandez, Universidad Nacional de Educación a Distancia - Madrid, España
Fredy Enrique González, Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Maracay, Venezuela
Iran Abreu Mendes, Universidade Federal do Pará, Brasil
Isabel Cristina Rodrigues de Lucena, Universidade Federal do Pará, Brasil
Jesus Victoria Flores Salazar, Pontificia Universidad Católica de Lima, Perú
John A. Fossa, Universidade Estadual da Paraíba, Brasil
José Manuel Leonardo Matos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
Kaled Sulaiman Khidir, Universidade Federal do Tocantins, Brasil
Luis Carlos Arboleda, Universidad del Valle - Cali, Colombia
Luis Radford, Université Laurentienne, Canadá
Marcelo de Carvalho Borba, Universidade Estadual Paulista - Rio Claro, Brasil
Márcia Maria Alves de Assis, Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Brasil
Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires, Universidade Estadual de Feira de Santana, Brasil
Maria Célia Leme da Silva, Universidade Federal de São Paulo, Brasil
Maria da Conceição Xavier de Almeida, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Maria Cristina Araujo de Oliveira, Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil
Miguel Chaquiam, Universidade do Estado do Pará, Brasil
Pedro Franco de Sá, Universidade do Estado do Pará, Brasil
Rafael José Alves do Rêgo Barros, Instituto Federal da Paraíba, Brasil
Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Teresa Vergani, Universidade Aberta de Portugal, Portugal
Ubiratan D'Ambrosio, Universidade Anhanguera de São Paulo, Brasil
Wagner Rodrigues Valente, Universidade Federal de São Paulo, Brasil

Editores

Iran Abreu Mendes
Carlos Aldemir Farias da Silva

Projeto gráfico e Diagramação

Luis Andrés Castillo Bracho

Instituição Editora



Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática

Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática
(GPSEM/UFPA) Brasil

REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura

Grupo de Pesquisas Práticas Socioculturais e Educação Matemática - GPSEM

Ano 17 | n. 42 | Set.-Dez.

ISSN: 1980-3141

e-ISSN: 2675-1909

Prefixo DOI: 10.37084

Endereço para envio de artigos, sugestões e críticas:

<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec>

Contato:

revistarematec@gmail.com

Indexadores, Base de Dados e Repositórios



		
 Bibliografía Latinoamericana		
	 EUCLIDES JARAMILLO ARANGO	
		
		
 Revistas de livre acesso	 JOURNAL ABSTRACTING AND INDEXING SERVICE	 International Institute of Organized Research (I2OR)
		
		
 DIRECTORY OF OPEN ACCESS SCHOLARLY RESOURCES	 Eurasian Scientific Journal Index www.ESJIndex.org	 Directory of Research Journal Indexing
		
		 The latest Journal Tables of Contents
		
 INTERNATIONAL STANDARD SERIAL NUMBER		

Índice

Editorial

Jesús Victoria Flores Salazar
Luis Andrés Castillo B.

Artigos

Mediación del GeoGebra en la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones <i>Verónica Neira Fernández</i> <i>Tito Nelson Peñaloza Vara</i>	01-15
La derivada como velocidad instantánea desde el Espacio de Trabajo Matemático..... <i>María Verónica Ángel Cerda</i> <i>Romina Menares Espinoza</i>	16-28
Uso de GeoGebra y el Razonamiento Inductivo en un acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo. <i>Daysi García-Cuéllar</i> <i>Mihály Martínez-Miraval</i>	29-43
Orquestación Instrumental: Análisis Marginal de Funciones Económicas en Educación Virtual con el uso de GeoGebra..... <i>Jesús Victoria Flores</i> <i>Pedro Tasayco</i>	44-60
Evidencia de conocimiento docente especializado en espacios de trabajo matemático que usan recursos tecnológicos..... <i>José Vilella, Rosa Ana Ferragina</i>	61-78
O sistema Learning 6.5: Tecnologia eficaz para a educação a distância e online em ciência e tecnologia..... <i>Emile Clément Bonaventure Comlan</i> <i>Saddo Ag Almouloud</i>	79-110
Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas..... <i>Jorge Gaona</i> <i>Laurent Vivier</i>	111-138
Cartoons Matemáticos Digitais em salas de aula: tensões, dilemas, conflitos, superações e transformações na aprendizagem..... <i>Daise Lago Pereira Souto</i>	139-161
Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental..... <i>Cecilia Gaita, Francisco Ugarte</i> <i>Cintya Gonzales</i>	162-179
Eigenvalores e Eigenvectores: Espacio de Trabajo Matemático personal del professor..... <i>Nancy Saravia-Molina</i> <i>Edwin Cristian Julian Trujillo</i> <i>Jorge Luis Vivas Pachas</i>	180-192
Un acercamiento hacia la enseñanza de números reales con estudiantes de primer año de ingeniería..... <i>Rosa Elvira Páez Murillo</i> <i>Víctor Larios Osorio</i>	193-210

Trabajo Matemático y Tecnologías Digitales para la Enseñanza de las Matemáticas

Jesús Victoria Flores Salazar¹ y Luis Andrés Castillo Bracho²

Consideramos que en el área de Educación Matemática existe una tendencia cada vez más marcante por parte de la comunidad académica en analizar fenómenos didácticos en los que la tecnología digital juega un papel significativo, con la finalidad de comprender sus avances, aportes, etc. Por otro lado, también creemos que es necesario reflexionar sobre el trabajo matemático que se realiza cuando se interactúa con tecnología digital ¿qué matemática se moviliza al resolver una determinada tarea?, ¿cuáles son sus potencialidades y limitaciones? etc.

En ese sentido, se justifica la publicación de un número temático en la REMATEC - Revista Matemática, Ensino e Cultura, para discutir las relaciones existentes y/o para las contribuciones que las investigaciones sobre el trabajo matemático y/o tecnologías digitales emergen para la enseñanza de la matemática.

En el primero artículo, Verónica Neira Fernández y Tito Nelson Peñaloza Vara abordaron aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para analizar el desarrollo de estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima-Perú, cuando resuelven una tarea sobre el límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico. Los autores consideran que la mediación del GeoGebra permite la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones.

En el siguiente artículo, María Verónica Ángel Cerda y Romina Menares Espinoza, describen una investigación, enmarcada en un estudio de clases de japonés centrada en comprender la derivada como velocidad instantánea a través de una aplicación a la física. El análisis fue realizado desde la perspectiva de los Espacios de

¹ Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil (PUC-SP). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Directora del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y coordinadora de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0036-140X> . E-mail: jvflores@pucp.pe

² Magíster en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Universidad Federal de Pará (UFPA). Profesor Convidado de la Universidade Federal de Tocantins (UFT). Curso de Licenciatura de Matemática, Arraias, Tocantins.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5174-9148>. E-mail: luiscastleb@gmail.com.

Trabajo Matemático Personal que muestra una preponderancia en el trabajo semiótico instrumental. El análisis constata que los estudiantes confunden la noción de velocidad media con la de velocidad instantánea, lo que da cuenta de una debilidad como conceptos del área de la física que dominan los estudiantes.

En el tercer artículo, Daysi Julissa García Cuéllar e Mihály André Martínez analizan cómo estudiantes generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron fórmulas de geometría, para determinar el área de un conjunto de regiones limitadas por funciones polinómicas y, a partir de un proceso inductivo, obtuvieron antiderivadas de estas funciones y describieron un procedimiento semejante al que se utiliza con el TFC para resolver integrales definidas. Se concluye que el uso de GeoGebra asociado con un proceso inductivo posibilita la observación de regularidades y la formulación de generalizaciones relacionadas con el TFC.

En el siguiente artículo intitulado Orquestación Instrumental: Análisis Marginal de Funciones Económicas en Educación Virtual con el uso de GeoGebra de autoría de Jesús Victoria Flores Salazar y Pedro Tasayco Casas, analizan desde la perspectiva de la Aproximación y Orquestación Instrumental, una propuesta didáctica con propósito de organizar entornos tecnológicos para la enseñanza de la matemática de estudiantes de economía. La propuesta fue materializada por medio videoconferencias del Zoom y la gestión del aprendizaje se realiza con la medición del GeoGebra.

En el quinto artículo, José Villella y Rosa Ana Ferragina analizan una clase de geometría con estudiantes de 14 a 16 años, concebida como un espacio de trabajo matemático, gestionada por una docente que enseña geometría con recursos tecnológicos. El análisis considera la idea de Espacio de Trabajo Matemático, el modelo MTSK sobre el conocimiento especializado del profesor y las cualidades de un trabajo de tipo colaborativo. En el estudio se reflexiona junto con la docente que da clases, acerca de cuáles son las condiciones de la gestión de la enseñanza, que producen aprendizaje geométrico, cuando se usan recursos tecnológicos en las clases de matemática.

En el sexto artículo, Emile Clément Bonaventure Comlan y Saddo Ag Almouloud describen las potencialidades de un artefacto tecnológico denominado Learning 6.5, compuesto por cinco unidades tecnológicas. Los autores consideran el Learning 6.5 como un potente conjunto de herramientas de trabajo para el profesor, facilita el diseño y la creación de archivos electrónicos de materiales didácticos, de enseñanza de los estudiantes y de evaluación.

El siguiente artículo, intitulado Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas de autoría de Jorge Gaona y Laurent Vivier. En el artículo se caracteriza el valor epistémico tareas diseñadas y programadas por profesores en un sistema de evaluación en línea para matemáticas en una institución de educación superior en Chile. El valor epistémico es analizado desde la teoría de Espacio de Trabajo Matemático. Los resultados muestran que se privilegia un trabajo instrumental incluso en tareas donde se usan registros gráficos.

El octavo artículo de autoría de Daise Lago Pereira Souto, describe resultados de un proyecto de investigación intitulado M@ttoon: Matemáticas y dibujos animados en la Educación Básica y Superior de Mato Grosso desarrollada entre 2016 y 2022. La investigación fundamentada por la Teoría de la Actividad junto con la visión epistemológica que impregna el constructo Humanos-con-medios. La investigación de tipo cualitativa, siendo los instrumentos de producción de informaciones, la observación participante, entrevistas, chats y foros de discusión. Los resultados, cabe destacar que los movimientos expansivos de aprendizaje se produjeron a medida que se generaban dudas, incluyendo nuevas tecnologías, cambios en las reglas y formas de organización del trabajo.

El siguiente artículo intitulado Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental de autoría de Cecilia Gaita, Francisco Ugarte y Cintya Gonzales, presentan una propuesta de criterios que permiten valorar y modificar problemas para lograr un incremento progresivo en el nivel de algebrización de las actividades matemáticas realizadas por los alumnos. Para la construcción de los criterios fueron considerados los niveles de razonamiento algebraico del Enfoque Ontosemiótico. Los autores concluyen que el uso de los criterios propuestos ayudó a incorporar interrogantes que demandan el empleo de diversos lenguajes, evidenciando a través de la solución esperada que, en ese proceso, las prácticas matemáticas demandarán cada vez un mayor grado de generalización.

El décimo artículo, Eigenvalores e Eigenvectores: Espacio de Trabajo Matemático personal del profesor de autoría de Nancy Saravia-Molina, Edwin Cristian Julian Trujillo y Jorge Luis Vivas Pachas. Los autores analizan el trabajo matemático del profesor en el dominio del álgebra, específicamente, eigenvalores y eigenvectores de una matriz $n \times n$. Los resultados muestran la activación de la génesis Semiótica, Instrumental y Discursiva, así como la activación del plano vertical [Sem-Ins] en las producciones de la profesora de matemáticas.

El décimo primer artículo de Rosa Elvira Páez Murillo y Víctor Larios Osorio describen la puesta en práctica de tres actividades didácticas utilizadas en la enseñanza de la noción de número real, con estudiantes de primer año de la licenciatura en ingenierías. Estas actividades fueron analizadas desde el marco de la teoría de Espacios de Trabajo Matemático. Los resultados evidencian que la activación de la génesis instrumental con el artefacto tecnológico supera al artefacto simbólico, sin que haya una confrontación de lo obtenido con la TIC, propiciando un ambiente de confusión entre número y su valor aproximado.

Esperamos que este número temático de la Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC, sea el inicio de otros números temáticos asociados a esta línea como, por ejemplo, el uso de la historia en la enseñanza de la matemática y la tecnología digital, relaciones entre historia de la matemática y trabajo matemático, entre otros temas.

Mediación del GeoGebra en la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones

Verónica Neira Fernández¹

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

Tito Nelson Peñaloza Vara²

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

El presente artículo se basa en la investigación de Bejarano V. y Neira F. (2020), el cual se basa en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los estudiantes, cuando resuelven una tarea propuesta sobre el límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico. Analizaremos una de las actividades en la cual la mediación del GeoGebra permite la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones. Los participantes son estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima-Perú. Ampliaremos el análisis de la actividad presentada en el artículo de la investigadora para evidenciar que, el estudiante Julio articula estas aprehensiones mediante la mediación del GeoGebra.

Palabras clave: Límite de funciones, aprehensiones, GeoGebra, registro gráfico.

Mediation of GeoGebra in the articulation of apprehensions in the study of function limits

ABSTRACT

This article is based on the research of Bejarano V. & Neira, F. (2020), which is based on aspects of the Theory of Semiotic Representation Registers to analyze the articulation of perceptual, discursive and operative apprehensions developed by students when they solve a proposed task on the limit at a point of a real function of real variable, in the graphical register. We will analyze one of the activities in which the mediation of GeoGebra allows the articulation of apprehensions in the study of the limit of functions. The participants are students (17 to 21 years old) of Occupational Safety and Health Engineering at a public university in Lima-Peru. We will expand the analysis of the activity presented in the researcher's article to show that the student Julio articulates these apprehensions through the mediation of GeoGebra.

Keywords: Limit of functions, apprehensions, GeoGebra, graphic register.

¹ Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional Enrique Guzmán del Valle (UNE). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA). Lima, Perú. Endereço para correspondência: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2540-3530>. E-mail: vneira@pucp.pe.

² Magíster en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA). Lima, Perú. Endereço para correspondência: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1915-9682>. E-mail: npenalozav@pucp.pe.

Mediação do GeoGebra na articulação de apreensões no estudo dos limites de função

RESUMO

Este artigo é baseado na pesquisa de Bejarano V. e Neira, F. (2020), que se baseia em aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para analisar a articulação das apreensões perceptivas, discursivas e operacionais que os estudantes desenvolvem quando resolvem uma tarefa proposta sobre o limite em um ponto de uma função real de variável real, no registro gráfico. Vamos analisar uma das atividades nas quais a mediação do GeoGebra permite a articulação de apreensões no estudo do limite de funções. Os participantes são estudantes (17 a 21 anos) de Engenharia de Segurança e Saúde Ocupacional em uma universidade pública de Lima-Peru. Vamos ampliar a análise da atividade apresentada no artigo do pesquisador para mostrar que o estudante Julio articula estas apreensões através da mediação do GeoGebra.

Palavras-chave: Limite de funções, apreensões, GeoGebra, registro gráfico.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, existen investigaciones sobre límite de funciones, las cuales muestran la dificultad que presentan los estudiantes para entender la noción del límite de una función, las carencias en la coordinación de registros y la importancia de usar un software (GeoGebra) para realizar transformaciones en representaciones gráficas.

Tomás (2014), en su investigación tiene como objetivo analizar cómo las diferentes formas de representación semiótica de este objeto matemático, influyen en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación; el autor concluye que, usar diferentes sistemas de representación en la enseñanza de la noción del límite puede ayudar a los estudiantes a consolidar este concepto.

Con respecto al objeto matemático tenemos a Londoño, Narro y Vera (2014) quienes concluyen que los estudiantes tienen un mejor desempeño al usar el registro algebraico. Según las autoras, esto conlleva a que el concepto de límite de funciones no sea identificado en otros registros de representación. Por otra parte, Caglayan (2015) realiza una investigación con un enfoque basado en pruebas visuales para ayudar a comprender el concepto de límite de una función en un entorno de representaciones dinámicas; el autor concluye que GeoGebra es una herramienta que facilita que los estudiantes entiendan, exploren y obtengan experiencias en la observación de los límites y sus propiedades.

En base a estas investigaciones, Bejarano (2018) y Bejarano y Neira (2020) manifiestan que existe una preocupación, por parte de los investigadores, en estudiar la concepción que tienen los estudiantes con respecto a la noción del límite de una función en los distintos registros de representación semiótica, y resalta la importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza del límite de funciones. Su foco fue analizar la articulación de las apprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria para movilizar la noción del límite de una función real de variable real, que realizan los estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima. Toma como base algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y, un estudio de caso basado en Martínez (2006) como metodología de una investigación cualitativa. Para el presente artículo, consideraremos el análisis de la producción del estudiante Julio, cuya información fue triangulada con fichas de recojo de información, archivos de GeoGebra y grabación de la pantalla del computador con el uso del programa Camtasia Studio 8.

Con respecto al uso del GeoGebra, tenemos a Peñaloza y Salazar (2018) en su investigación sobre las aprehensiones y modificaciones, en el registro gráfico dinámico (RGD), que se desarrollan en un ambiente de representaciones dinámicas como el GeoGebra, el cual se basa en aspectos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas. Se configura el RGD con representaciones del paraboloide elíptico y se analizan las aprehensiones y modificaciones. Los autores concluyen que la Vista Gráfica del GeoGebra, permite realizar tratamientos, modificaciones y desarrollo de aprehensiones en los sujetos, así como establecer conjeturas y construcción de significados los cuales creemos que serían mejor asimilados en un medio de representaciones dinámicas.

También Muela Pillajo (2020), en su investigación se centró en analizar de qué manera se puede usar el software GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite para estudiantes de Bachillerato General Unificado. Se basó en la teoría APOE de Dubinsky en lo que se refiere a la descomposición genética del concepto de límite de una función. Se aplicó un instrumento compuesto por cinco tareas didácticas que cuenta con preguntas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma Geogebra.org. Uno de los principales hallazgos encontrados en esta investigación es la facilidad de comprensión que supone para los estudiantes el sistema de representación gráfica en comparación con los otros sistemas de representación. La autora concluye que el GeoGebra presenta unas características y recursos que resultan de gran utilidad pues presenta un enfoque dinámico, activo y participativo para la concepción dinámica del concepto de límite.

Todas estas investigaciones evidencian que hay una preocupación por mejorar el aprendizaje de los límites de funciones y de apoyarse en un software matemático que permita dotar de dinamismo a las representaciones del objeto estudiado, ya que hay una predominante postura en tratar la parte algebraica cuando se enseña este tema y, según los autores, el GeoGebra tiene las herramientas y los medios necesarios para apoyar al docente en su labor educativa conectando las representaciones algebraicas con las gráficas.

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función definida en cada número x de algún intervalo abierto que contiene a “ a ”, excepto posiblemente en el número “ a ” mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L , lo que se escribe como: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Límites laterales

Definición: Sea f una función definida en cada número x_0 de un intervalo abierto $\langle a, c \rangle$. Entonces: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$, se usa para denotar que L es el límite derecho de f en x_0 .

Definición: Sea f una función definida en cada número x_0 de un intervalo abierto $\langle a, c \rangle$. Entonces: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$, se usa para denotar que L es el límite izquierdo de f en x_0 .

Teorema: El $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existen y son iguales.

Límites infinitos

Definición: Sea f una función definida en cada número x de algún intervalo abierto I que contiene a a , los valores de $f(x)$ crece sin límite conforme x tiende a a , es decir $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee para todos los valores suficientemente cercanos a a , pero sin considerar el valor a . Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Definición: Sea f una función definida en cada número x de algún intervalo abierto I que contiene a a , los valores de $f(x)$ decrecen sin límite conforme x tiende a a , es decir $f(x)$ puede hacerse tan pequeño como se desee para todos los valores suficientemente cercanos a a , pero sin considerar el valor a . Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Nota: El $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, se puede leer como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es más infinito, pero este límite no existe y que el símbolo $+\infty$ solo indica el comportamiento de los valores de la función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a . Del mismo modo sucede con: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Definición de asíntota vertical

La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$i. \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Continuidad de una función en un número

Una función f es continua en un número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$i. f(a) \text{ existe}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a , entonces se dice que la función f es discontinua en a .

ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En la presente investigación, tomamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (2004) en la cual el autor manifiesta que:

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lengua natural, fórmula algebraica, gráfico, figura

geométrica.) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (p.14).

Según Duval (2012), los objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción, y por ello es necesario representarlos. De acuerdo con el autor, para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe cumplir tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: Formación, tratamiento y conversión.

La formación implica la selección de un conjunto de caracteres perceptibles y que son identificables como representación de lo que se quiere representar, dichos caracteres pueden ser signos diversos tales como puntos, paréntesis, números, relaciones de equivalencia, signos de agrupación, etc. El tratamiento ocurre cuando se realiza una transformación de la representación permaneciendo ésta en el mismo registro de representación, y llevándose a cabo por medio de las leyes propias de la representación; por ejemplo, una reconfiguración figural es un tipo de tratamiento para las figuras geométricas, y se realiza para resolver un problema que requiera información adicional obtenida por medio de dichas transformaciones. La conversión sucede cuando una transformación realizada a una representación de un registro, produce una nueva representación en un registro distinto a la inicial, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial, pudiendo realizarse esta transformación en un solo sentido o en ambos sentidos.

Según Duval (2004), existen cuatro tipos de registros que permiten estas actividades cognitivas, las cuales se resumen en el Cuadro 1:

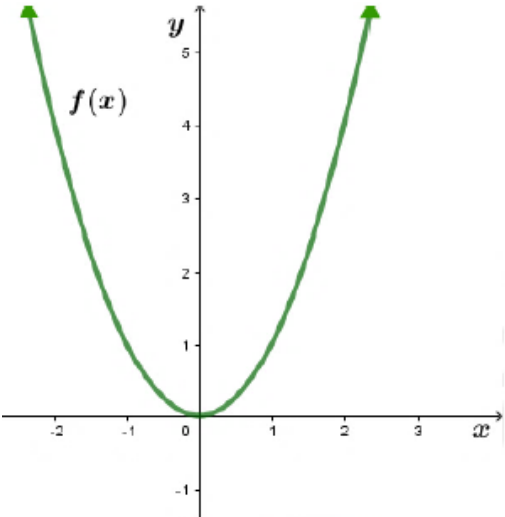
Cuadro 1 – Clasificación de los registros de representación discursiva y no discursiva

Registros de representación discursiva	Registros de representación no discursiva
Lengua Natural: ● Asociaciones Verbales (conceptos) ● Forma racional: - Argumentación a partir de observaciones, creencias. - Deducciones válidas a partir de uso de definiciones o teoremas. Sistemas de escritura: ● Numéricos (binarios, decimal, fraccionaria...). ● Algebraicos; simbólicas (lenguas formales). ● Cálculo.	Figuras geométricas planas o en perspectiva: ● Aprehensión operatoria y no sólo perspectiva. ● Construcción con instrumentos. Gráficos cartesianos: ● Cambios de sistemas de coordenadas. ● Interpolación, extrapolación.

Fuente: Bejarano (2018, p. 27)

Para el presente estudio, consideramos los siguientes registros de representación semiótica: registro en lengua natural, registro algebraico y registro gráfico. Según Bejarano (2018) los tipos de representaciones del límite de funciones en los registros de representación semiótica señalados se muestran en el Cuadro 2

Cuadro 2 – Registros de representación semiótica para límites de funciones

Registros de Representación para límite en un punto de una función real de variable real	
Registro de lengua natural	El límite de la función cuadrática cuando la variable independiente se aproxima a dos es cuatro
Registro algebraico	$\lim_{n \rightarrow 2} x^2 = 4$
Registro gráfico	 El límite de la función f cuando x se aproxima a 2, es 4

Fuente: Bejarano (2018, p. 28)

Según Duval (1994), una aprehensión es la acción de aprehender; es decir, comprender un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un determinado registro. Además, manifiesta que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural en Geometría, según su rol: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria, aprehensión discursiva y aprehensión secuencial. El autor manifiesta que la aprehensión perceptiva es la primera que aparece en el proceso cognitivo del estudiante y permite identificar o reconocer inmediatamente una forma u objeto matemático en el plano o en el espacio mediante la visión y de manera inconsciente. En el caso de las representaciones geométricas, también se presentan otras figuras geométricas y elementos secundarios que permiten definir o delimitar la representación mayor, las cuales según el autor se denominan unidades figurales o variables visuales.

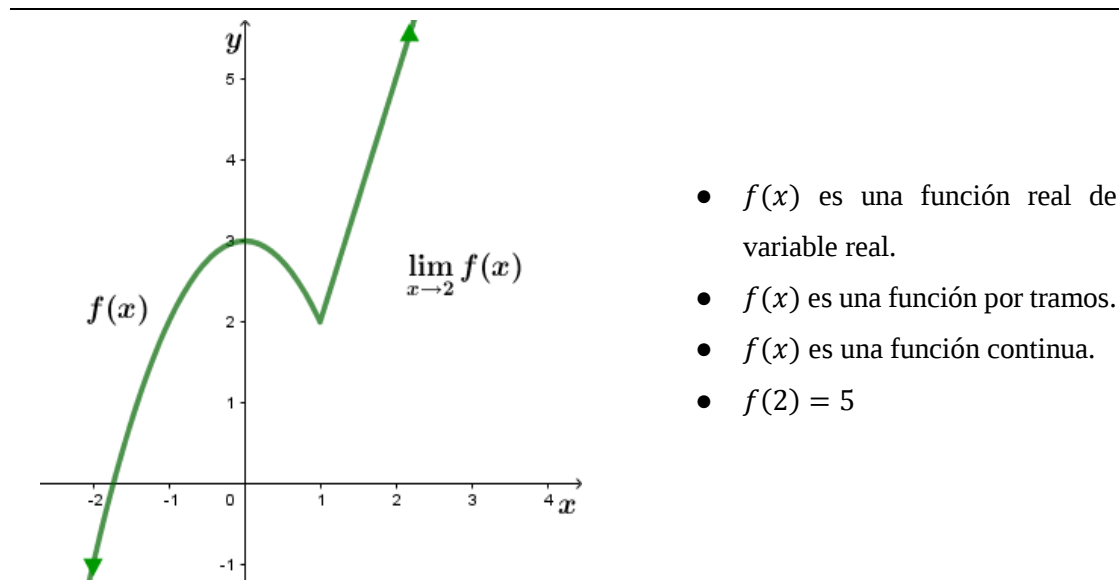
Ingar (2014) ejemplifica la aprehensión perceptiva dada por Duval en el aprendizaje de la geometría plana elemental, y lo adapta para la aprehensión perceptiva en el registro gráfico de funciones, para el estudio de visualización de los valores máximo y mínimo locales de

funciones en dos variables reales. Peñaloza (2016) también aplica la definición dada por Duval para el desarrollo de la comprensión perceptiva en la representación gráfica del paraboloide (circular y/o elíptico) en su respectivo estudio.

Bejarano (2018) adapta la comprensión perceptiva a una función real de variable real y menciona que, si un estudiante reconoce que una representación gráfica dada en una tarea sobre funciones corresponde a la representación de una función real de variable real, entonces podemos afirmar que el estudiante desarrolló una comprensión perceptiva y para ello debe identificar que hay una variable independiente y otra dependiente, así como reconocer los valores que asumen cada una de estas variables (lectura de los ejes coordenados), tal como se aprecia en el Cuadro 3.

Cuadro 3 – Comprensión perceptiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Comprensión perceptiva de $f(x) = 5$



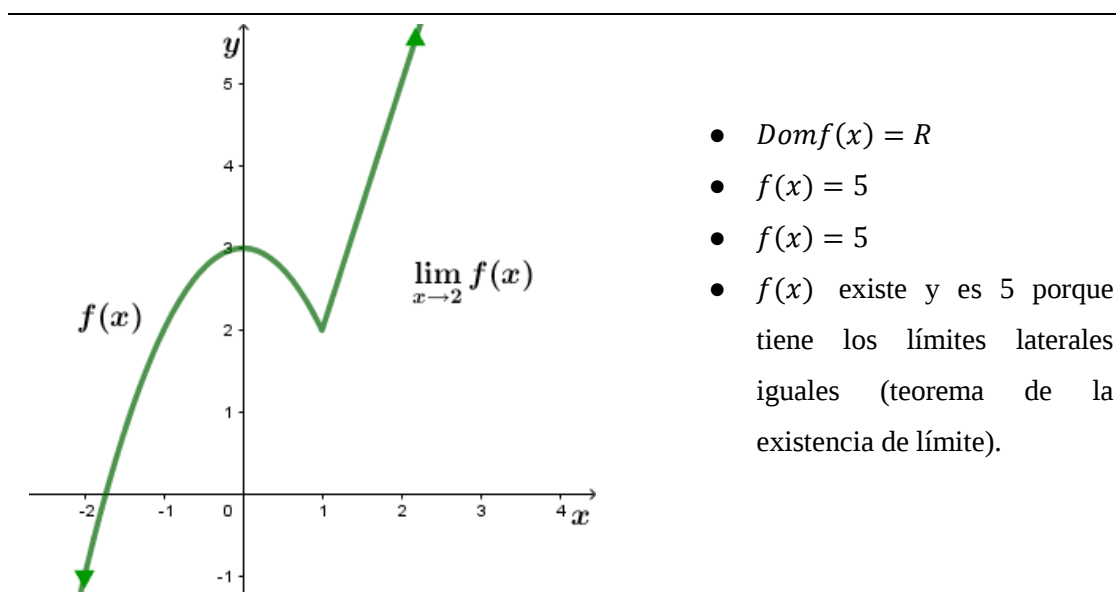
Fuente: Bejarano (2018, p. 29)

De acuerdo con Duval (1994), la comprensión discursiva en una representación figural es la acción mediante la cual el sujeto relaciona la representación del objeto matemático con propiedades matemáticas que no están dadas de forma explícita en la figura tales como teoremas, axiomas y propiedades, las cuales se evidencian mediante trazos, construcciones auxiliares, cálculos y/o procedimientos heurísticos que faciliten el desarrollo del discurso encaminado a realizar demostraciones o pruebas de la propiedad matemática.

Según Bejarano (2018), si el estudiante logra identificar propiedades relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real, que no están explícitas en la representación gráfica de la función, por ejemplo, el dominio de la función, el tipo de discontinuidad, entre otros, de tal manera que le permita calcular y analizar el límite en un punto de esta función real de variable real, se puede afirmar que el estudiante desarrolla una comprensión discursiva como se aprecia en el Cuadro 4:

Cuadro 4 – Aprehensión discursiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión discursiva de $f(x) = 5$



Fuente: Bejarano (2018, p. 30)

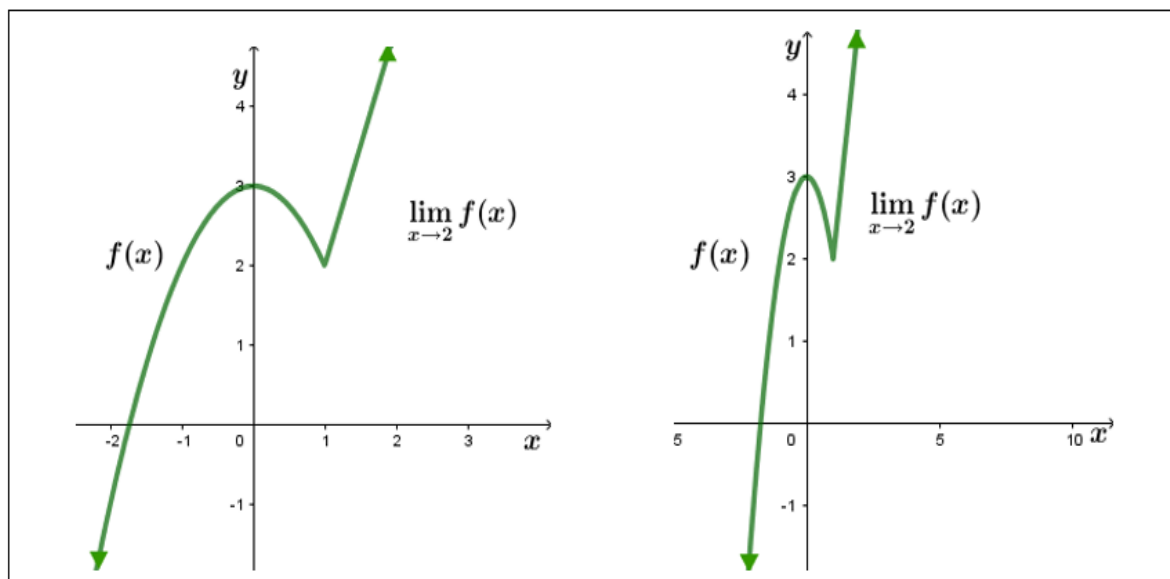
Según Duval (1994, p. 126), “Una figura proporciona una ayuda heurística. En tanto, una de sus modificaciones posibles muestra la idea de una solución”. El autor menciona que una aprehensión operatoria se da cuando se modifica la figura variando su dimensión. Esta consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial y esta queda transformada en otra llamada imagen.

Por otro lado, para una representación en el registro gráfico mediante un ambiente de representaciones dinámicas tal como el GeoGebra 3D, Peñaloza (2016) menciona lo siguiente:

El sujeto realiza una modificación óptica al utilizar las herramientas Alejar y Aproximar en GeoGebra 3D, con el propósito de que los elementos y características de la representación gráfica del paraboloides puedan ser reconocidos y estudiados con mayor detenimiento mediante acercamientos o alejamientos. (p. 32)

Bejarano (2018), considera que la modificación en el registro gráfico será la modificación óptica al realizar una variación de la dimensión de los ejes coordenados X e Y, el cual permitirá al estudiante analizar y estudiar conceptos relacionados al límite en un punto de una función real de variable real, donde usando las herramientas alejar, aproximar o desplazamiento de GeoGebra se cambia la dimensión de los ejes, tal como se aprecia en la Figura 1, que usando la herramienta desplazamiento vertical la dimensión del eje X cambia de uno a cinco. Con este tipo de modificación, el sujeto puede considerar valores cercanos al punto de análisis de límite, y construir significados.

Figura 1 – Modificación óptica de una función por variación de la escala de los ejes coordenados



Fuente: Bejarano (2018, p. 31)

Según Peñaloza (2016), un sujeto realiza una modificación posicional en una representación gráfica realizada en GeoGebra 3D, cuando se realizan traslaciones y rotaciones de la vista gráfica donde está representado el objeto, manteniéndose la forma y cambiando únicamente la posición de la representación del objeto respecto del observador (sujeto). Las herramientas de GeoGebra que permiten esta modificación son Rota la Vista Gráfica 3D y Desplaza Vista Gráfica, y son útiles para reconocer partes de la representación no accesibles a primera vista.

Según Duval (1994), el desarrollo de las aprehensiones se realiza de manera natural y espontánea, y puede desarrollarse más de una a la vez. En el estudio de la geometría, el autor sostiene que, para reconocer una representación figural como tal, el sujeto debe desarrollar la aprehensión perceptiva y al menos otro tipo de aprehensión, en ese sentido, Bejarano (2018; 2020) en la fase experimental de su estudio presenta actividades en relación al límite de funciones en un punto que permitan a los estudiantes desarrollar más de una aprehensión.

Así mismo, las representaciones de los objetos en un ambiente de representaciones dinámicas, tal como el GeoGebra, pueden estar sujetos a modificaciones de manera directa e indirecta. Al respecto, Peñaloza y Salazar (2018) sostienen lo siguiente:

Dependiendo del tipo de manipulación en la representación gráfica, la cual puede ser de manera directa o indirecta, hemos considerado dos tipos de tratamiento Gráfico-Dinámico: *tratamiento con deslizador* el cual se realiza de forma indirecta por medio de la modificación de los valores de elementos que definen la representación tales como coordenadas, coeficientes en representaciones algebraicas, incremento de desplazamientos y/o giros, entre otros, los cuales dependen de deslizadores; y *tratamiento sin deslizador* el cual se realiza directamente en las representaciones gráficas en puntos de la representación por medio del mouse. (pp. 67-68)

En la actividad a ser analizada en el presente estudio, el tratamiento será sin deslizador, es decir, de manera directa y con ayuda del mouse, se modificarán las escalas de los ejes para realizar acercamientos / alejamientos de la representación en la vista gráfica del GeoGebra.

METODOLOGÍA

Bejarano (2018) aplica en su investigación, aspectos de la metodología de un estudio de caso, en la que el caso es, la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico. Para ello identifica las aprehensiones que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción de límite de una función real de variable real en un punto, en la representación gráfica, usando GeoGebra y a lápiz con papel.

La parte experimental se llevó a cabo con tres estudiantes de Ingeniería de una universidad pública de Lima del curso de Cálculo 1. Para el análisis de la producción de los estudiantes, se usó una ficha de actividad, ficha de observación, ficha de recojo de información, archivos de GeoGebra y grabación de la pantalla con Camtasia 8. Según la investigadora, este material permitió la triangulación de datos, contrastar y comparar la información obtenida por los diferentes medios de indagación. Finalmente, con la información obtenida, la autora realizó un análisis de la articulación de las aprehensiones.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este artículo presentaremos el análisis de la producción del estudiante Julio a la pregunta 2c) de la actividad 2 de la fase experimental del estudio de Bejarano (2018). En la Figura 2 mostramos el texto de la pregunta 2 incluida en la ficha de actividades, y en la Figura 3 la representación gráfica de la función $f(x)$ en la vista gráfica provista en el archivo *P2.ggb* de GeoGebra.

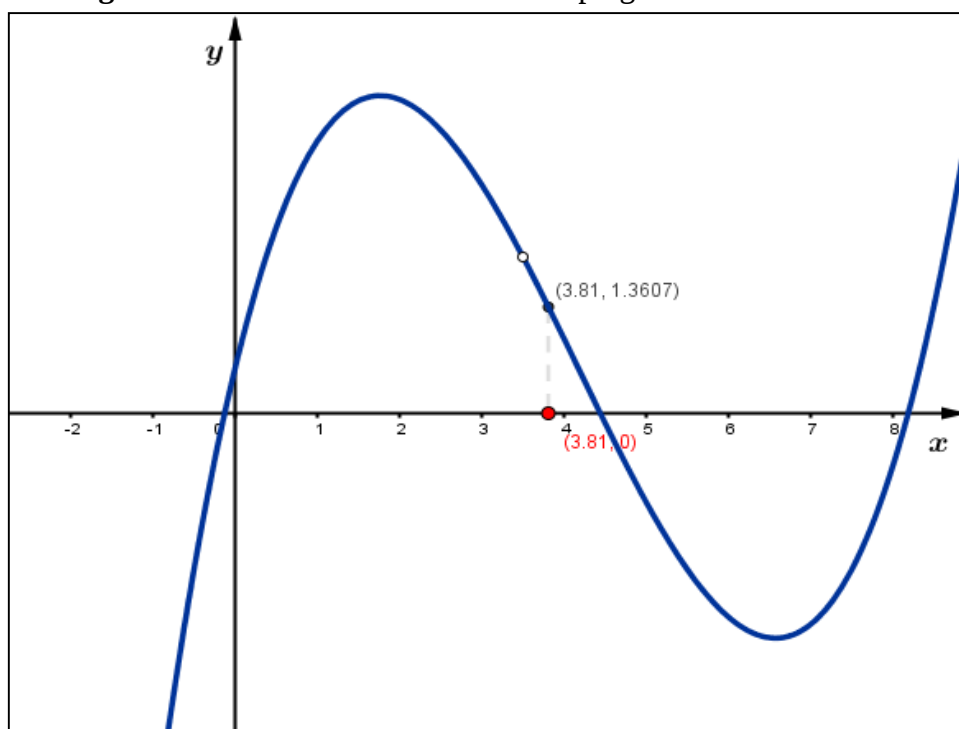
Figura 2 – Pregunta 2 de la actividad

2. Abra el *archivo P2*, a continuación responda los siguientes ítems:

- a) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3.5} f(x)$? Justifique.
- b) Usando las herramientas del Geogebra, explique por qué el $\lim_{x \rightarrow 3.5} f(x)$ NO es igual a 2
- c) ¿Existe el $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$? Explique

Fuente: Bejarano (2018, p. 87)

Figura 3 – Archivo de GeoGebra de la pregunta 2 de la actividad

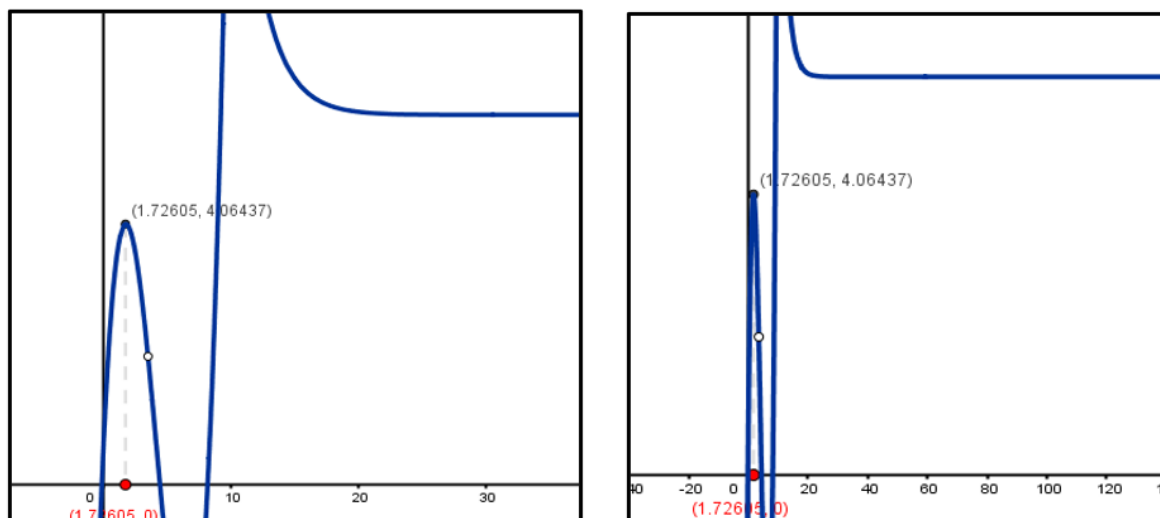


Fuente: Bejarano (2018, p. 61)

Según Bejarano (2018) el objetivo de esta pregunta es que el estudiante realice tratamientos en el registro gráfico que, le permitan movilizar conceptos relacionados al límite de una función real de variable real. En el desarrollo de esta pregunta, se espera identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico usando GeoGebra. En un inicio según la autora, el estudiante no desarrolla la aprehensión perceptiva para identificar el $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$, puesto que el valor $x = 2017$ no es visible en la vista gráfica de GeoGebra presentada inicialmente al abrir el archivo respectivo.

Esta necesidad hará que el estudiante modifique la escala en el plano cartesiano usando las herramientas alejar y/o desplazamiento, ello implicaría que el estudiante realizaría modificaciones ópticas y/o posicionales, y esto de acuerdo con Duval mostraría el desarrollo de una aprehensión operatoria, porque se modifica la dimensión de los ejes coordenados, pero se mantiene la forma y orientación de la representación gráfica de la función por tramos, tal como se muestra en la Figura 4. En este sentido, es necesario desarrollar la aprehensión operatoria de forma previa a la aprehensión perceptiva para estudiar la gráfica en valores más cercanos a $x = 2017$.

Figura 4 – Modificación óptica de la función $f(x)$

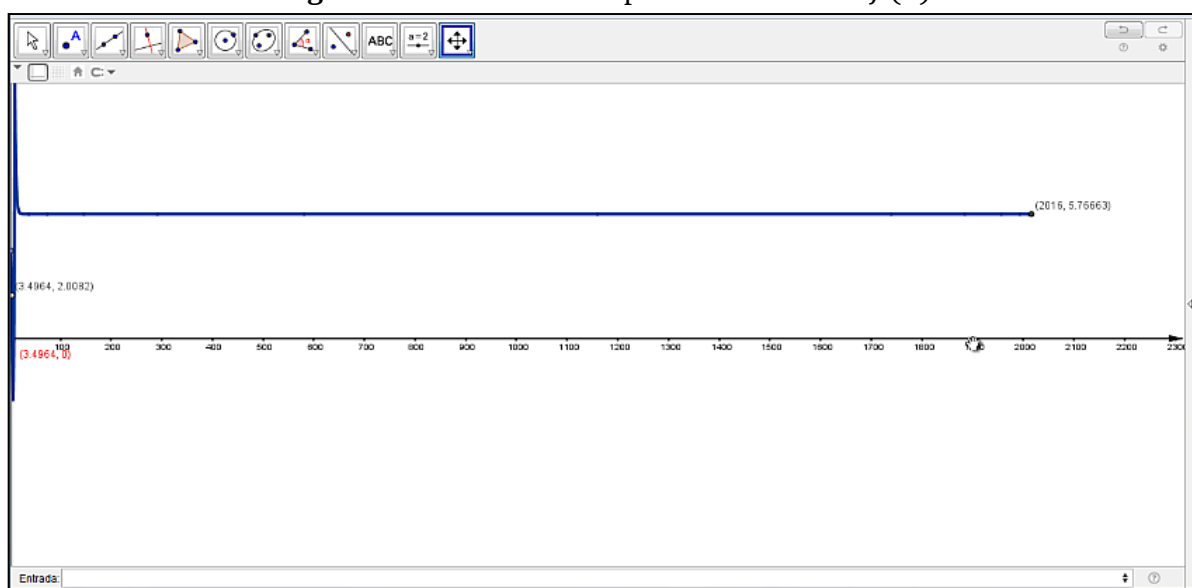


Fuente: Bejarano (2018, p. 69)

En un determinado momento, luego de realizado las modificaciones posicionales de tipo traslación hasta lograr observar el número 2016, según Bejarano (2018) el estudiante, mediante el desarrollo de su aprehensión perceptiva, podrá apreciar que la función solo está definida hasta $x = 2016$, y por tanto $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$ no existe, pues $2017 \notin Dom f$, esto evidencia el desarrollo de su aprehensión discursiva, pues reconoce el dominio de la función $f(x)$.

El estudiante Julio realizó cambios de dimensión en la escala del archivo de GeoGebra, usando la herramienta *desplazamiento*, tal como se aprecia en la captura del computador que se realizó con Camtasia Studio 8, en la Figura 5, lo cual corresponde a una modificación posicional de tipo traslación.

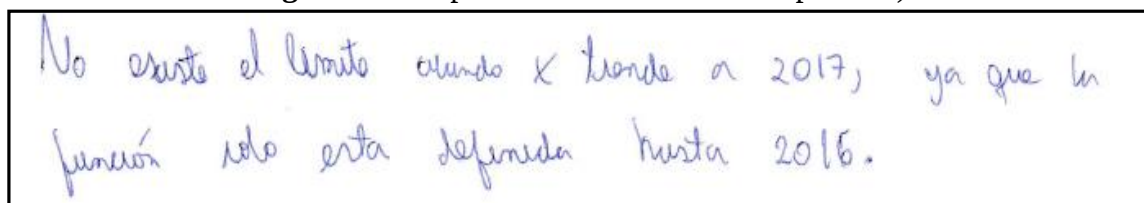
Figura 5 – Modificación óptica de la función $f(x)$



Fuente: Bejarano (2018, p. 70)

Una vez realizada dicha modificación, el estudiante Julio respondió usando un registro de lengua natural que, tal como muestra la Figura 6, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2016} f(x)$ pues la función solo está definida hasta el valor 2016, tal como se aprecia en la Figura 6.

Figura 6 – Respuesta del estudiante Julio para 2 c)



Fuente: Bejarano (2018, p. 70)

Según Bejarano (2018), el estudiante desarrolló una aprehensión perceptiva para observar que la función solo está definida hasta el valor de $x = 2016$; posteriormente identificó implícitamente que $2017 \notin \text{Dom} f$ lo cual mostró su aprehensión discursiva, pues reconoció el dominio de la función $f(x)$, en este caso el mayor valor del dominio. Luego sustentó que $\nexists \lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$, esto evidenciaría una aprehensión discursiva, pues el estudiante estaría usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto, dado que como la función solo está definida hasta $x = 2016$, no existen los límites laterales para el valor de $x = 2017$. Con ello Bejarano (2018) concluye que el estudiante Julio articuló las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva para concluir que $\nexists \lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$ lo cual se evidencia en el registro de lengua natural y no en el gráfico, ya que el medio de representaciones en este caso el GeoGebra, permite formular conjeturas mas no discursos ni demostraciones.

CONCLUSIONES

En el desarrollo de la actividad, el estudiante Julio logró articular las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria, que le permitieron concluir en la pregunta 2c) que $f(x)$ no existe. Esto se pudo evidenciar mediante la triangulación de los datos; con el Camtasia Studio 8, donde se observó que el estudiante realizó tratamientos y modificaciones en el registro gráfico, para cambiar las escalas en el archivo mostrado en GeoGebra, lo cual evidenció una aprehensión operatoria, que se produjo luego de que el estudiante realizará una aprehensión perceptiva; finalmente el estudiante articula lo anterior con la aprehensión discursiva para fundamentar, usando un registro de lengua natural, que el límite de la función f no existe cuando x tiende a 2017. Por otro lado, el uso de GeoGebra permitió a Julio y los demás estudiantes participantes de esta investigación una manera intuitiva de trabajar la noción de límite en un punto de una función real de variable real.

Es importante señalar el papel del medio de representaciones, en este caso el GeoGebra, en la actividad de Bejarano (2018) para el desarrollo de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva en un problema y en base a una necesidad: una representación parcial de la función cuyo límite no podía ser determinado a primera observación, ya que permitió al estudiante Julio establecer conjeturas las cuales probó posteriormente, señalando valores cercanos al dominio

de la función, en este caso el máximo valor $x = 2016$ y movilizándolo sus conocimientos previos para argumentar que el $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$ no existe ya que no existe el límite lateral izquierdo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, RIITMA por apoyo al desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

BEJARANO, V. L. **Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Posgrado. 2018. Disponible en: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12075>. Acceso en: 20 set. 2022.

BEJARANO, V. L.; NEIRA, F. V. **Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería**. (p. 500-508) Lima. 2020. Disponible en: <http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568>. Acceso en: 20 set. 2022.

CAGLAYAN, G. **Math majors' visual proofs in a dynamic environment: The case of limit of a function and the ϵ - δ approach**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(6), 797-823. 2015. Doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465>. Acceso en: 20 set. 2022.

DUVAL, R. **Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique**. Repères-IREM, (17), pp. 121-138. 1994. Disponible en: http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf. Acceso en: 20 set. 2022.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**. Traducción de Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995). 2004.

DUVAL, R. **Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat, 7(2), 266-297. 2012. Doi: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acceso en: 20 set. 2022.

INGAR, K.V. **A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais** (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil. 2014. Disponible en: <https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/11013/1/Katia%20Vigo%20Ingar.pdf>. Acceso en: 20 set. 2022.

LONDOÑO, N.; NARRO, P.; VERA, A. **Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación**. El Cálculo y su enseñanza. 5, p 91-106. 2013.

MARTÍNEZ, C. P. **El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica**. En Pensamiento & Gestión 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. 2006. Disponible en: <http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf>. Acceso en: 20 set. 2022.

MUELA PILLAJO, J. (2020). **El uso de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de Límite: una propuesta didáctica para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU)**. Trabajo de titulación previo a la obtención del Título de Licenciado en Ciencias de la Educación. Mención Matemática y Física. Carrera de Matemática y Física. Quito: UCE. 169 p. Disponible en <http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/22373>. Acceso en: 20 set. 2022.

PEÑALOZA, V. T. **Proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura mediado por el GeoGebra**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Posgrado. 2016. Disponible en: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7204>. Acceso en: 20 set. 2022.

PEÑALOZA, V. T., SALAZAR, J.V.F. **Aprehensiones y modificaciones en el registro Gráfico-Dinámico del paraboloide elíptico**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.20, n.1, pp. 061-083. 2018. Doi: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p61-83>. Acceso en: 20 set. 2022.

TOMÁS, J. B. P. **Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto** (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante). 2014. Disponible en: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf. Acceso en: 20 set. 2022.

Submetido em: 19 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

FERNÁNDEZ, Verónica Neira, VARA, Tito Nelson Peñaloza. Mediación del GeoGebra en la articulación de aprehensiones en el estudio de límite de funciones. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 01-15, Set.-Dez., 2021. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p01-15.id447>

La derivada como velocidad instantánea desde el Espacio de Trabajo Matemático

María Verónica Ángel Cerda¹
Universidad San Sebastián

Romina Menares Espinoza²
Universidad de Valparaíso

RESUMEN

En la presente investigación, enmarcada en un estudio de clases de japonés (Isoda et al., 2007), se ha diseñado una clase centrada en el objeto derivada. La clase elaborada tiene como objetivo comprender la derivada como velocidad instantánea a través de una aplicación a la física. Esta clase se implementó en un curso universitario de primer año (18-20 años). Los análisis se realizan desde la perspectiva del acercamiento de los estudiantes a los Espacios de Trabajo Matemático Personal (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016), que muestra una preponderancia en el trabajo semiótico instrumental. En cuanto a los errores podemos mencionar que los estudiantes confunden la noción de velocidad media con la de velocidad instantánea, lo que da cuenta de una debilidad como conceptos del área de la física que dominan los estudiantes.

Palavras chave: Derivada, velocidad instantánea, Espacio de trabajo matemático, estudio en sala de aula japonés.

The derivative as instantaneous velocity from the mathematical workspace

ABSTRACT

In the present research, framed in a Japanese classroom study (Isoda et al., 2007), a class focused on the derivative object has been designed. The class elaborated aims at understanding the derivative as instantaneous velocity through an application to physics. The class was implemented in a first-year university course (18-20 years old). The analyses are carried out framed in the students' personal Mathematical Workspaces (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016), where a preponderance in the instrumental semiotic work is evidenced. As for the errors, we can mention that students confuse the notion of average speed with that of instantaneous speed, which shows a weakness in terms of the concepts in the area of physics, which the students dominate.

Keywords: Derivative, instant velocity, Mathematical Working Spaces, Japanese-class study.

A derivada como velocidade instantânea do espaço de trabalho matemático

RESUMO

Na presente investigação, enquadrada num estudo em sala de aula japonês (Isoda et al., 2007), foi concebida uma lição centrada no objecto derivado. A lição visa compreender a derivada como velocidade instantânea através de uma aplicação à física. A turma foi implementada num curso universitário do primeiro ano (18-20 anos de idade). As análises são realizadas a partir da abordagem dos espaços pessoais de trabalho matemático dos estudantes (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016), onde é evidente uma preponderância do trabalho semiótico instrumental. Quanto aos erros, podemos mencionar que os estudantes confundem a noção de velocidade média com a de velocidade instantânea, o que mostra uma fraqueza em termos dos conceitos na área da física que os estudantes dominam.

Palavras-chave: Derivado, velocidade instantânea, Espaço de trabalho matemático, estudo em sala de aula

¹ Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Magíster en Matemática de la Universidad de Chile (Uch). Académica de la Universidad San Sebastián, Santiago, R.M., Chile. Av. Bellavista, 7, Recoleta, Santiago, R.M. Chile, CEP:8420524. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5711-4322>. E-mail: maria.angel@uss.cl.

² Doctora en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Académica del Instituto de Matemática de la Universidad de Valparaíso, Valparaíso, V Región, Chile. Av. Gran Bretaña 1111, Playa Ancha, Valparaíso, Chile. CEP: 243-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6071-3825>. E-mail: romina.menares@uv.cl.

japonés.

INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada está situado principalmente en los programas de estudio de asignaturas de primer o segundo año para carreras vinculadas a las ciencias exactas o las ingenierías –entre otras– a nivel universitario en Chile. En el currículum escolar vigente, la derivada se ubica en los dos últimos años de secundaria, en asignaturas electivas (MINEDUC, 2020). Una de las problemáticas evidenciadas dice relación con la manera mecánica y estandarizada con la que se abordan las derivadas en los distintos niveles de enseñanza (ver por ejemplo Zandieth, 2000 y González et al., 2013). En relación con esto, Artigue (1995) señala que, si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas, los estudiantes tendrán dificultades para lograr una comprensión de los diversos conceptos y metodologías que conforman el centro del objeto matemático.

El problema que abordamos en esta investigación es que los estudiantes muestran dificultades para comprender la derivada como razón de cambio instantánea. En este aspecto, Zandieth (2000) subraya la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la comprensión de la derivada, así como la influencia de los contextos en la construcción del significado.

En su trabajo, Orton (1983) –una de las primeras investigaciones sobre los errores y dificultades que tienen los estudiantes con respecto a la derivada (como se indica en Sánchez-Matamoros et al., 2008)– observó que la comprensión de la razón de cambio dependía del tipo de función utilizada. La mayoría de los alumnos contestó de manera correcta al preguntarles por la razón de cambio con funciones lineales, pero no sucedía lo mismo si la función no era lineal, lo que podía tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función. Esta investigación destaca la importancia de la relación entre la razón de cambio y el cociente incremental en la comprensión de la derivada.

Por su parte, la investigación de Vega et al. (2014), enmarcada en la teoría APOS (Dubinsky, 1991), propone una serie de actividades, donde una de ellas tiene relación con resolver un problema sobre razón de cambio para el desarrollo del aprendizaje de la derivada. Los autores concluyen que “los estudiantes lograron consolidar aprendizajes de nivel superior y fueron capaces de relacionar conceptos e integrar el concepto de derivada con otros esquemas” (p.423).

El objetivo de este artículo es categorizar el trabajo matemático personal de estudiantes de primer año de una universidad chilena, de las carreras de Agronomía, Contador Auditor, Bachillerato, Ingeniería Comercial y Biotecnología, quienes cursaban una asignatura común. El estudio se enmarca en una clase basada en el *Estudio de Clase japonés* (Isoda, Arcavi y Mena, 2007), la que está centrada en una *tarea* (Chevallard, 1999) que el estudiante debe desarrollar con el fin de que reconozca a la derivada como una razón de cambio instantánea. La clase implementada para este estudio corresponde a la tercera versión del diseño original, la cual es obtenida a partir de mejoras aplicadas con base en las observaciones de las experiencias de las primeras dos clases. El análisis de resultados de la clase se realiza bajo el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011, Kuzniak et al., 2016) (ETM) con el cual se

estudia el espacio de trabajo personal del estudiante, para reconocer mediante la activación de planos y génesis, el logro parcial o total del objetivo de la clase.

ASPECTOS TEÓRICOS

El objetivo del diseño e implementación de la clase propuesta es estudiar y favorecer la construcción del conocimiento por parte del estudiante, invitarlo a reflexionar en torno a una tarea matemática asociada a la derivada como una razón de cambio instantánea a partir de una aplicación a la física, y al mismo tiempo, identificar de qué manera el estudiante utiliza sus conocimientos previos para adquirir un nuevo saber.

El Espacio de Trabajo Matemático, ETM, desarrollado por Kuzniak (2011), es un constructo en el cual, los aspectos epistemológicos y cognitivos son fundamentales para la construcción de un objeto matemático y se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (Flores y Montoya, 2016).

Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático es un ambiente organizado para permitir el trabajo de personas que resuelven problemas matemáticos (matemático, profesor, estudiante) mediante la articulación de dos planos; el plano epistemológico y el plano cognitivo (Kuzniak, 2011).

El plano epistemológico está constituido por tres componentes o polos: el *Referencial Teórico*, que lo conforman principalmente las propiedades, los teoremas, las definiciones; el *Representamen*, constituido por signos o símbolos; y los *Artefactos*, que corresponde a los elementos materiales clásicos o no clásicos, y simbólicos. El plano cognitivo está también conformado por tres componentes: los procesos de *Visualización*, *Construcción* y *Prueba*. Los tres procesos se activan mediante el uso y la actividad cognitiva asociado al elemento del plano epistemológico. La articulación entre estos dos planos se realiza mediante un conjunto de génesis, que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011): semiótica (que relaciona al *Representamen* con la *Visualización*), instrumental (que relaciona a los *Artefactos* con la *Construcción*) y discursiva (que relaciona al *Referencial Teórico* con la *Prueba*).

Las génesis en los ETM

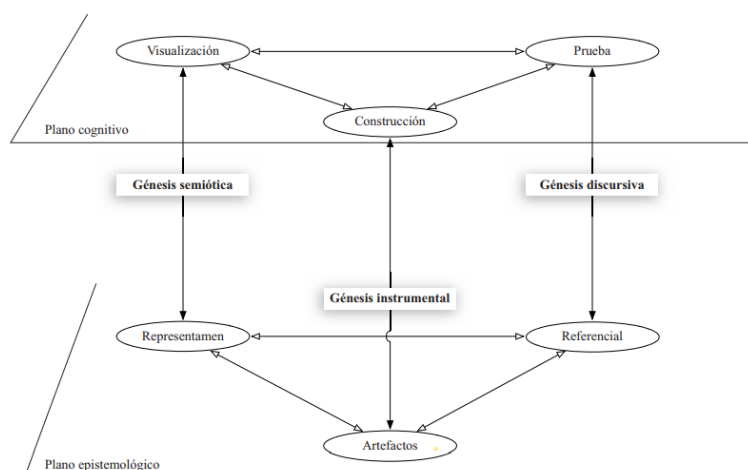
Como se ha señalado, para articular de manera operatoria los niveles epistemológicos y cognitivos con el fin de hacer posible el trabajo matemático esperado, se consideran tres génesis fundamentales, como se indica en Richard y Kuzniak (2014):

Una génesis instrumental, que hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático;

Una génesis semiótica basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporcionan un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios; esta génesis semiótica asegura, el establecimiento de la relación entre sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos vehiculados;

Una génesis discursiva de la prueba que utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumentada. (p.5)

Figura 1 – El espacio de trabajo matemático y su génesis

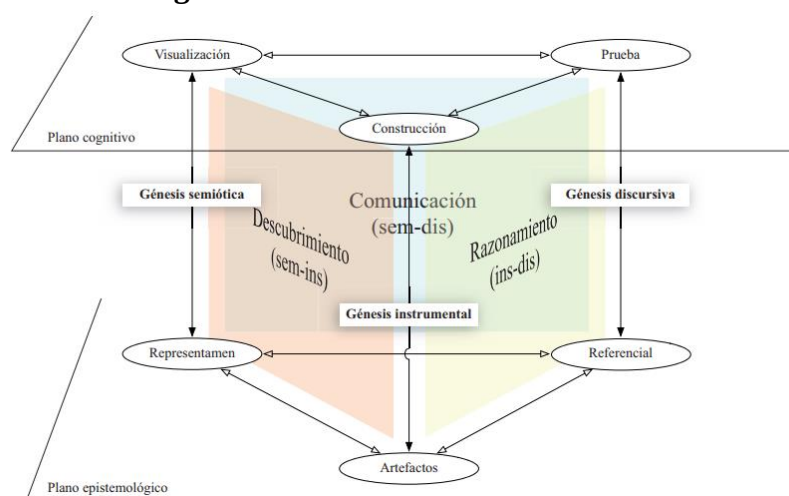


Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p.5)

Planos verticales en los ETM

Como se indica en Flores y Montoya (2016), las articulaciones, a partir de las génesis, no deben ser entendidas como la unión individual entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación activa, conjuntamente por dos o incluso tres génesis, que generan los llamados planos verticales (Richard y Kuzniak, 2014). Los autores identificaron tres planos verticales, en los que se generan distintas interacciones en relación con el objeto matemático. Estos planos son llamados: [Sem-Ins] que es generado cuando se activan las génesis semiótica e instrumental. En este plano se privilegia la identificación y la exploración de los objetos; el plano [Ins-Dis] que es generado por la activación de las génesis instrumental y discursiva, en él se identifican razonamientos que provienen de la exploración del objeto; y finalmente el plano [Sem-Dis], que es generado por la presencia de las génesis semiótica y discursiva, en el cual se identifican los razonamientos argumentativos.

Figura 2 – Planos verticales en el ETM



Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p.7)

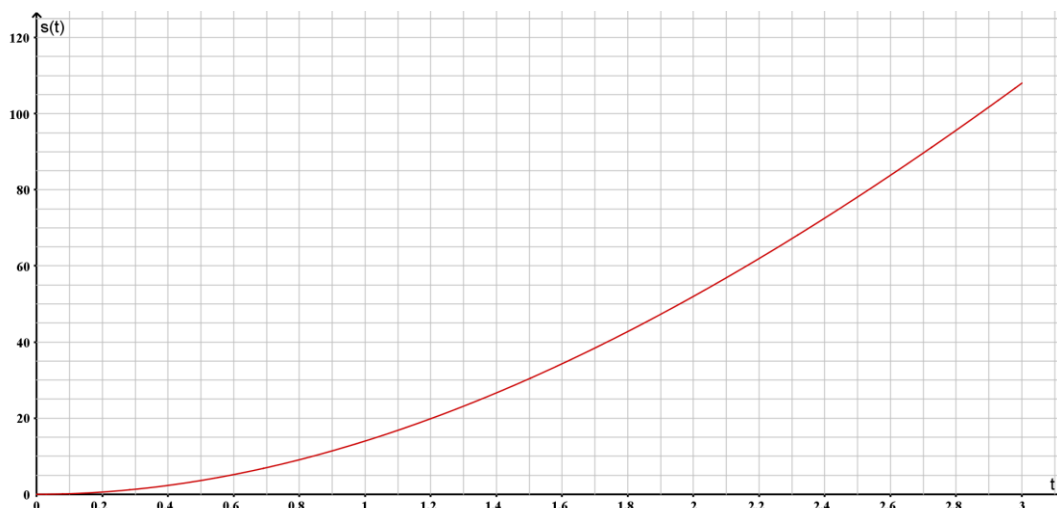
ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación es de tipo cualitativa, descriptiva (Hernández et al., 2016), enmarcada dentro del paradigma interpretativo. Se caracteriza el ETM del estudiante a partir de una clase implementada, enmarcada en un Estudio de Clase japonés (Isoda et al., 2007). El análisis se realiza bajo la perspectiva de los planos verticales, propuestos por Richard y Kuzniak (2014).

El diseño metodológico consta de cuatro etapas y su implementación se detalla a continuación:

1. Análisis preliminares. Se realiza un estudio epistemológico de la derivada y se analizan textos de estudio universitarios. Se buscan antecedentes que dan cuenta de la problemática planteada.
2. Análisis a priori. Se realizó un análisis a priori basado en la tarea de la clase, incluyendo conocimientos previos del estudiante, posibles estrategias, respuesta experta, posibles errores y dificultades, tiempos necesarios para cada parte de la propuesta y recursos a utilizar por los estudiantes.
3. Implementación. La clase se diseñó con base en una *tarea* (Chevallard, 1999), la cual se aplicó a un curso de primer año de universidad (18 a 20 años, aproximadamente). El grupo estuvo formado por 16 estudiantes, de los cuales 10 pertenecen a la carrera de Agronomía, 1 a la carrera de Contador Auditor, 1 estudiante de Bachillerato, 2 estudiantes de Ingeniería Comercial y 2 estudiantes de Biotecnología, quienes cursaban una asignatura común. La clase se desarrolló en un tiempo de 80 minutos y estuvo a cargo de una de las investigadoras. El instrumento de recogida de datos es una hoja con la *tarea* que se propone en la clase, la que se detalla a continuación:

En la *tarea* se muestra la función $s(t) = 15t^3 - t^2$ para $0 \leq t \leq 3$ y su gráfico, el cual indica la posición de un camión en ese intervalo de tiempo.



En el ítem a) de la tarea se pide a los estudiantes que verifiquen velocidades promedio dados en la siguiente tabla:

$[t_i, t_f] \text{ (horas)}$	$v = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i} \left(\frac{\text{km}}{\text{hora}} \right)$
$[1, 2]$	38
$[1,5 ; 2]$	43,25
$[1,85 ; 2]$	46,6275

Luego, se les pregunta:

¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[1, 2]$?, ¿el camión tiene la misma velocidad en cada instante de tiempo comprendido en el intervalo $[1,2]$?

En el ítem b) se indica que el chofer del camión mira el velocímetro justo a la segunda hora de haber iniciado su viaje, ¿qué vio el chofer? Explica con tus palabras.

4. Análisis a Posteriori. En esta etapa se consideraron las estrategias utilizadas por los estudiantes, errores evidenciados y para finalizar se contrasta el análisis a priori con las evidencias obtenidas a partir de la clase implementada.

Las categorías de análisis elaboraron con base en las posibles estrategias de los estudiantes y han sido levantadas según el marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011, Kuzniak et al., 2016) declarado y según los planos verticales (Richard y Kuzniak, 2014). Cada categoría se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 1 – Categorías de Análisis

Categorías	Descripción
Semiótica-Instrumental	SI1. Utiliza la gráfica de la función y la fórmula de velocidad promedio para verificar los valores dados en la tabla.
	SI2. Utiliza la gráfica, traza la tangente a la curva y determina su pendiente.

	SI3.	Utiliza la función posición y calculadora para verificar la velocidad promedio.
	SI4.	Utiliza los valores dados en la tabla para determinar la velocidad promedio
Semiótico-Discursivo	SD1.	Explica a partir de la tabla de valores dada que el camión no tiene la misma velocidad en cada instante.
	SD2.	Explica a partir del gráfico que el camión no tiene la misma velocidad en cada instante.
Instrumental-Discursivo	ID1.	Explica mediante la fórmula de velocidad promedio que el camión no tiene la misma velocidad en cada instante.
	ID2.	Explica mediante la elaboración de una tabla de valores cuál es la velocidad del camión justo en la segunda hora.
	ID3.	Explica a través del cálculo de un límite cuál es la velocidad justo en la segunda hora.

Fuente: elaboración propia

Los posibles errores y dificultades se organizaron en la tabla que se muestra a continuación (Tabla 2). Con ellos, fue posible establecer un plan de clase, presentado en los anexos (Anexo 1)

Tabla 2 – Dificultades, errores y devoluciones en los análisis a priori de clase a implementar

Dificultad	Error	Devolución
Dificultad para comprender cómo evaluar en la fórmula de velocidad promedio.	Evalúa incorrectamente en la fórmula de velocidad promedio, dado que no comprende cómo evaluar en ella.	¿Cuál es la función presente en la fórmula?
Dificultad para comprender la diferencia entre velocidad instantánea y velocidad promedio.	Indica que la velocidad en un instante determinado $t = a$ corresponde a la velocidad promedio en el intervalo $[0, a]$	¿Cómo se determina la velocidad promedio del camión para las primeras a horas de viaje?
Dificultad para reconocer que la velocidad instantánea corresponde a un límite de velocidades promedio.	Indica un valor errado para la velocidad en un instante determinado.	¿Cómo son los intervalos que se consideran en la tabla valores? ¿por qué se han considerado esos intervalos?
Dificultad para comprender qué significa determinar la velocidad en un instante cualquiera $t = a$.	Asigna un valor fijo para a y calcula la velocidad instantánea para dicho valor.	¿Qué representa $t = a$?
Dificultad para calcular el límite planteado para determinar la velocidad instantánea en $t = a$.	Comete errores de tipo algebraico al calcular el límite para determinar la velocidad instantánea en $t = a$.	¿Cuál fue el método utilizado para calcular el límite? ¿está correcta la factorización o simplificación (por ejemplo)?

Fuente: elaboración propia

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para analizar las producciones, usamos como nomenclatura E_i , que corresponde a las respuestas del estudiante i , con i desde el 1 al 16. El análisis evidenció que, en la primera parte

del ítem a) de la tarea, once estudiantes verifican que los valores proporcionados en la tabla son correctos. Estos estudiantes lo hacen de manera algebraica utilizando la función posición y la fórmula de velocidad promedio. Solamente dos estudiantes utilizan el gráfico para verificar los valores de la tabla, sin embargo, no logran obtener los datos proporcionados. Se observó que doce estudiantes responden correctamente la pregunta *¿cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[1, 2]$?*, de los cuales, solamente uno realiza nuevamente los cálculos y no responde a partir de la tabla. Se clasificaron las respuestas de los estudiantes según las categorías dadas en la Tabla 1, como se muestra en la Tabla 3:

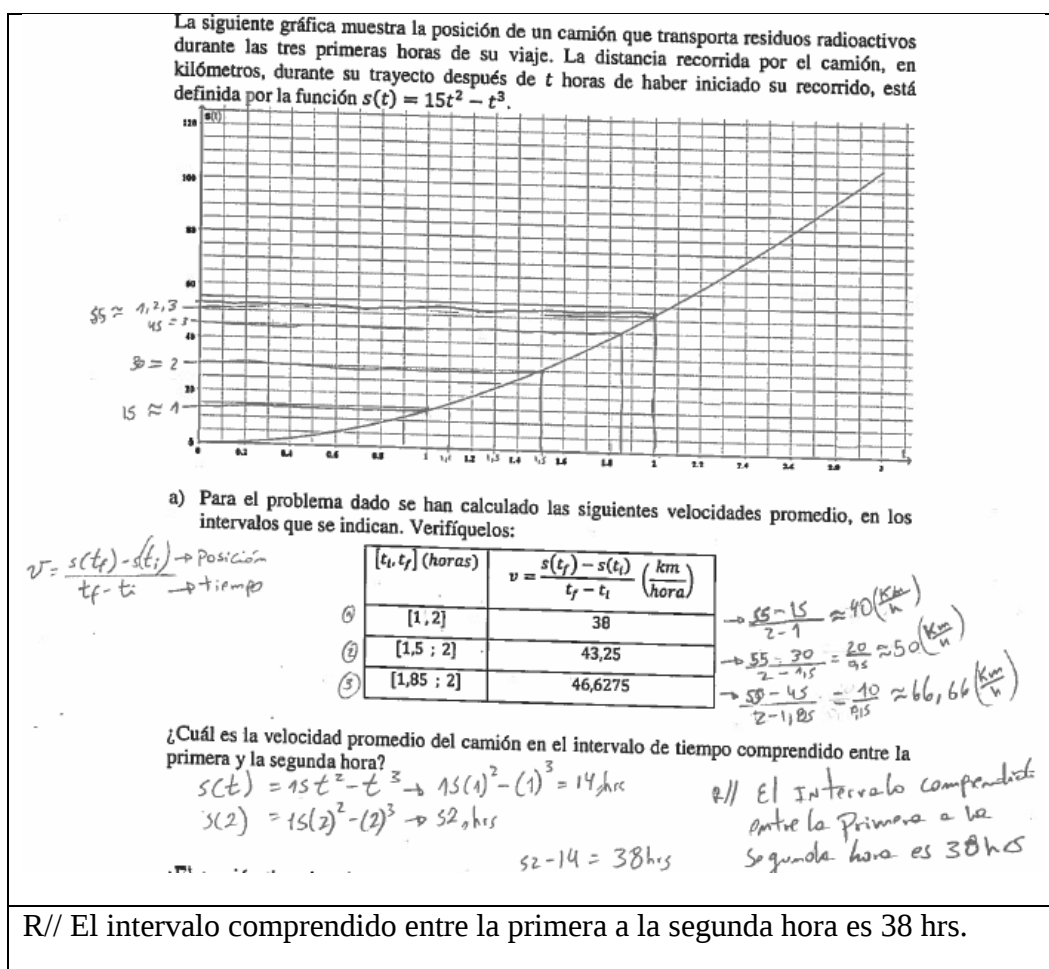
Tabla 3 – Clasificación estudiantes primera parte ítem a)

Categorías	Estudiantes
SI1	E6 – E7
SI2	Desierta
SI3	E1 – E4 – E5 – E7 - E8 – E9 – E10 – E11 – E12 – E13 – E14 – E15
SI4	E2 – E4 – E8 – E9 – E10 – E11 – E12 – E13 – E14 – E15 – E16

Fuente: elaboración propia

El estudiante E7 en la tabla anterior se encuentra en dos categorías, dado que, para verificar los valores proporcionados en la tabla utiliza el gráfico, es decir, se encuentran en SI1 y para responder la pregunta *¿cuál es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo comprendido entre la primera y la segunda hora?*, utilizan valores obtenidos, con la calculadora, a partir de la función dada algebraicamente para determinar las velocidades promedio. Como se muestra en la siguiente Figura 3.

Figura 3 - Producción estudiante E7



Fuente: Producción E7

Por otra parte, según lo evidenciado para la segunda pregunta del ítem a), podemos indicar que nueve estudiantes responden correctamente a la pregunta *¿el camión tiene la misma*

velocidad en cada instante de tiempo comprendido en el intervalo $[1,2]$?. Según las distintas estrategias utilizadas por los estudiantes, sus respuestas se han clasificado en la Tabla 4. Por ejemplo, E13 ha sido clasificado en la categoría SD1 dado que indica a partir de la tabla de valores (Figura 4).

Figura 4 – Respuesta del estudiante E13

No, luego de media hora aumento su velocidad y después de 15 min volvió a aumentarla.

Fuente: Producción E13

Tabla 4 – Clasificación segunda parte ítem a)

Categorías	Estudiantes
SD1	E15 – E13 – E12
SD2	E8 – E9 – E4
ID1	E7 – E6 – E2

Fuente: Elaboración propia

Para el ítem b) se tiene que 3 estudiantes responden correctamente a esta pregunta y se ubican en la misma categoría de análisis para la estrategia utilizada (ID2). La siguiente imagen muestra la respuesta dada por E12 (Figura 5), quien se ubica en la categoría ID2 como se indica en la Tabla 4.

Figura 5 – Producción de estudiante E12 para el ítem b)

La velocidad que vio fue aproximadamente de 48 km/h

t_i, t_f
 $[1,9, 2,1]$

$$v = \frac{(15 \cdot 2,1^2 - 2,1^3) - (15 \cdot 1,9^2 - 1,9^3)}{2,1 - 1,9}$$

$$v = \frac{56,889 - 47,291}{0,2}$$

$$v = 47,99 \text{ km/h}$$

Fuente: Producción E12

Tabla 5 – Clasificación para ítem b)

Categorías	Estudiantes
ID2	E8 – E9 – E12
ID3	Desierta
No sabe/no responde	E1

Fuente: Elaboración propia

También, notamos que la mayor parte de los estudiantes que responde de manera incorrecta este ítem, confunde velocidad promedio en intervalo $[0, 2]$ con velocidad instantánea en $t = 2$.

PRINCIPALES RESULTADOS

A partir del análisis realizado notamos que la tarea permite activar los distintos planos verticales (Richard y Kuzniak, 2014) en el ETM personal del estudiante, dado que encontramos estudiantes en todas las categorías definidas, a excepción de ID3. También observamos que los estudiantes que respondieron correctamente el ítem b) transitan por los tres planos verticales. Junto con lo anterior, se evidencia que los estudiantes han privilegiado el plano semiótico instrumental para la resolución de la tarea, lo que significa que se privilegian los métodos algebraicos, relegando el discurso. Además, nos llama la atención que ningún estudiante haya dibujado la recta tangente y calculado su pendiente, pues a nivel escolar y universitario, una de las definiciones de derivadas que se privilegian es justamente la que dice relación con la pendiente de la recta tangente en un punto (Vivier, 2010).

La principal dificultad evidenciada en los estudiantes fue diferenciar entre velocidad promedio y velocidad instantánea. Aquellos estudiantes que lograron diferenciar entre velocidad promedio y velocidad instantánea y además entendieron la idea de “proximidad” que se planteó en la tabla del ítem a), se acercaron a lograr el objetivo de la clase. Por lo tanto, se propone como proyección de este trabajo, plantear una actividad de laboratorio, en conjunto con la asignatura de física, con el objetivo de que los estudiantes asimilen estas nociones para que finalmente los relaciones con el concepto de derivada.

Finalmente, el marco teórico nos da cuenta de que se debe fortalecer la génesis discursiva y por lo tanto los planos que la involucran con el fin de construir un espacio de trabajo matemático completo (Kuzniak y Nechache, 2015).

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue categorizar las respuestas de estudiantes frente a una tarea compuesta por dos ítems, donde se enfrentaban a determinar la derivada de una función en un punto, entendida como la velocidad instantánea, según el contexto del problema.

Las categorías se conformaron gracias a un análisis a priori de la tarea, y pudieron contrastarse con las respuestas de los estudiantes que participaron en el estudio. Así, se pudo constatar que las respuestas privilegian el trabajo instrumental, con uso de algoritmos adquiridos en la formación de los estudiantes. En las respuesta, se evidencia el escaso trabajo

articulado de las tres génesis, sobre todo la génesis discursiva, que se identificó relegada. Sin embargo, la riqueza de la tarea se pudo observar cuando los estudiantes que responden correctamente, efectivamente coordinan las tres génesis del ETM.

Las dificultades para diferenciar la velocidad promedio de la velocidad instantánea nos hace concluir que hay dificultades para comprender la derivada como una razón de cambio, y su coordinación con su definición por límites. En este sentido, coincidimos con Zandieth (2000) sobre la importancia de que los estudiantes comprendan a la derivada como el cambio en un instante, y tomen conciencia sobre el contexto en que los problemas se presentan.

Dado que la categoría ID3 estuvo desierta en esta investigación y que en ID2 encontramos tres estudiantes, planteamos como proyección fortalecer el plano Instrumental Discursivo en una nueva implementación. Estas categorías pretenden generar el vínculo entre la definición de derivada en un punto y el concepto de velocidad instantánea. De este modo y dada la existencia de tránsito por los otros dos planos (Semiótico-Instrumental y Semiótico-Discursivo), la *tarea* planteada tiene potencial para ser una *tarea completa* (Kuzniak y Nechache, 2015), y de este modo favorecer la comprensión de la derivada como velocidad instantánea.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza* (pp. 97-140). Bogotá, Colombia: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. *Advanced Mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 95-123.

Flores, M. & Montoya, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática*, (28), 85-117.

González, J., Ruiz, O. Loera, E. Barrón, J. y Salazar, M. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Cultura Científica y Tecnológica, Edición Especial*, 51 (1).

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2016). *Metodología de la investigación*. México D.F: Mcgraw-hill interamericana.

Isoda, A., Arcavi, A. & Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A., Nechache A. (2015). Using the geometric working spaces in order to plan the teaching of geometry. *Proceeding of Congress Cerme 10*. Rescatado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Cerme.pdf

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

MINEDUC (2020). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14 (3), 235-250.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3) (número especial). <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2), 267-296.

Vega, M., Carrillo, J., Soto-Andrade, J. (2014). Análisis según el modelo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada, *Boletim de Educaçao Matemática (em linha)*, 28(48), 403-429.

Vivier, L. (2010). La noción de tangente en la educación media superior. Recuperado en: <http://funes.uniandes.edu.co/14940/>

Zandith, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (volume 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.

Submetido em: 23 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

María Verónica Ángel Cerda, VARA, Tito Nelson Peñaloza. La derivada como velocidad instantánea desde el Espacio de Trabajo Matemático. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 16-28, Set.-Dez., 2021. <https://doi.org/10.37084/REMATREC.1980-3141.2022.n42.p16-28.id448>

Uso de GeoGebra y el Razonamiento Inductivo en un acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo

Daysi Julissa García-Cuellar¹

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

Mihály André Martínez-Miraval²

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

El estudio tuvo como objetivo analizar cómo estudiantes universitarios generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra. Se considera la noción de esquema desde la perspectiva del enfoque instrumental, y cómo se movilizan estos esquemas en cada uno de los procesos que comprenden el razonamiento inductivo. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron fórmulas de geometría, para determinar el área de un conjunto de regiones limitadas por funciones polinómicas y, a partir de un proceso inductivo, obtuvieron antiderivadas de estas funciones y describieron un procedimiento semejante al que se utiliza con el TFC para resolver integrales definidas. Se concluye que el uso de GeoGebra asociado con un proceso inductivo posibilita la observación de regularidades y la formulación de generalizaciones relacionadas con el TFC.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo; Integral definida; Razonamiento inductivo; Áreas; GeoGebra.

Uso do GeoGebra e do Raciocínio Indutivo em uma Abordagem ao Teorema Fundamental do Cálculo

RESUMO

O objetivo do estudo foi analisar como estudantes universitários geram noções sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFT) usando o raciocínio indutivo através do uso do GeoGebra. A noção de esquema é considerada da perspectiva da abordagem instrumental, e como esses esquemas são mobilizados em cada um dos processos que compõem o raciocínio indutivo. Os resultados mostram que os estudantes utilizaram fórmulas geométricas para determinar a área de um conjunto de regiões delimitadas por funções polinomiais e, a partir de um processo indutivo, obtiveram antiderivadas dessas funções e descreveram um procedimento similar ao utilizado com o TFC para resolver integrais definidas. Conclui-se que o uso do GeoGebra associado a um processo indutivo permite a observação de regularidades e a formulação de generalizações relacionadas ao TFC.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo; Integral Definida; Raciocínio Indutivo; Áreas; GeoGebra.

¹ Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Docente en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú, miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y coordinadora de formación de profesores de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA-Perú), Lima, Lima, Perú. Dirección de correspondencia: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0243-6353>. E-mail: garcia.daysi@pucp.pe

² Estudiante de doctorado en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México (CICATA – IPN). Docente tiempo completo del departamento de ciencias, sección Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), miembro de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA-Perú), Lima, Lima, Perú. Dirección de correspondencia: Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima, Lima, Perú, CEP: 15088. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7734-1223>. E-mail: martinez.ma@pucp.edu.pe

Using GeoGebra and Inductive Reasoning in an Approach to the Fundamental Theorem of Calculus

ABSTRACT

The study aimed to analyze how university students generate notions about the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) by using inductive reasoning using GeoGebra. The notion of schema is considered from the perspective of the instrumental approach, and how these schemas are mobilized in each of the processes that comprise inductive reasoning. The results show that students used geometry formulas to determine the area of a set of regions limited by polynomial functions and, from an inductive process, obtained antiderivatives of these functions and described a procedure like that used with FTC to solve definite integrals. It is concluded that the use of GeoGebra associated with an inductive process makes possible the observation of regularities and the formulation of generalizations related to FTC.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus; Definite Integral; Inductive Reasoning; Areas; GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

Un gran número de investigaciones relacionadas con el concepto de integral definida se enfocan en el cálculo de áreas o de antiderivadas como cantidades fijas, lo que puede no favorecer el desarrollo de nociones como variación, covariación o acumulación, que parecen ser cruciales para conceptualizar la integral definida (THOMPSON; DREYFUS, 2016). Comprender un concepto, como la integral definida, a través de la resolución de problemas, implica pensar en el problema en términos de preguntas del tipo: cómo se relaciona la integral definida con el concepto de área bajo la curva, cómo se define la integral definida en términos de sumas de Riemann, o cómo se representa geométricamente el proceso de acumulación de áreas, de modo que se examinan diversas estrategias de resolución; esto promueve la construcción de conocimiento matemático y la búsqueda o construcción de significados de los conceptos involucrados en el enunciado de los problemas (SANTOS-TRIGO; AGUILAR, 2018). Como la integral definida se puede abordar a partir de situaciones de cambio, se sugiere incorporar en la resolución de problemas el uso de herramientas computacionales, porque juegan un papel importante en el desarrollo y comprensión de ideas matemáticas (CAMACHO-MACHÍN *et al.*, 2010)

La literatura centrada en el estudio de la integral definida, hace notar la importancia de generar nociones sobre este concepto a partir de procesos de aproximación del área de una región mediante sumas de Riemann, ya sea al comparar las diferentes maneras de utilizar la posición de los rectángulos como extremos derechos, izquierdos y puntos medios (CAGLAYAN, 2016), o analizar las aprehensiones en el registro gráfico que los estudiantes desarrollan (MARTÍNEZ-MIRAVAL; GARCÍA-CUÉLLAR, 2020) o identificar las acciones mentales que se ponen en juego en la resolución asociadas con el razonamiento covariacional de los estudiantes (MARTÍNEZ-MIRAVAL; GARCÍA-RODRÍGUEZ, 2022); o mediante procesos de acumulación de áreas para construir la función integral (ARANDA; CALLEJOS, 2017). En todos ellos, el factor común es el uso de GeoGebra a partir del diseño de applets que involucran deslizadores asociados a diversas herramientas del programa.

Existen propuestas que se orientan a abordar el concepto de integral definida mediante el desarrollo de un razonamiento geométrico, al relacionar la velocidad constante de un móvil en distintos tramos de tiempo e interpretar la distancia que recorre como una suma de áreas de rectángulos, o trabajar con una curva continua que modela una tasa de cambio del consumo de la electricidad respecto del tiempo, donde el área representa el consumo de electricidad,

fomentando con ello el desarrollo de razonamientos geométrico, numérico y analítico (NITTI; ÁLVAREZ, 2014). Del mismo modo, se estudia cómo los estudiantes desarrollan un aprendizaje procedimental, donde prevalece un razonamiento algebraico al presentar tareas relacionadas con técnicas de integración (SERHAN, 2015), e investigaciones donde que involucran fenómenos dinámicos para construir el concepto de integral definida como el límite de una suma, en donde se investiga acerca del razonamiento covariacional de los estudiantes (MARTÍNEZ-MIRAVALL; GARCÍA-RODRÍGUEZ, 2022).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) señalan que el uso de tecnologías digitales amplía la manera de representar, explorar y resolver los problemas o los objetos matemáticos y desarrolla en los estudiantes estrategias heurísticas como la cuantificación de cantidades, la generación de lugares geométricos, la visualización de cambios simultáneos, el arrastre y el uso de deslizadores. En cuanto al uso de applets como estrategia de enseñanza, permite diseñar entornos accesibles para que los estudiantes trabajen los conceptos bajo distintas representaciones, cambiando la visión algorítmica y analítica por otra que permite al estudiante realizar construcciones a partir de situaciones de cambio, de modo que conecte sus conocimientos previos con los nuevos adquiridos (ARANDA; CALLEJOS, 2017). Asociar un applet con instrucciones y con preguntas acerca de los cambios que el estudiante observa, resulta importante porque las ideas intuitivas que va desarrollando, le permiten dar sentido a los procesos matemáticos involucrados al trabajar la integral definida relacionado con la noción de área (MARTÍNEZ-MIRAVALL; GARCÍA-RODRÍGUEZ, 2022). Por lo que, el uso de tecnologías digitales provee al profesor de herramientas originales que ayudan a la enseñanza de temas de cálculo integral (CAGLAYAN, 2016).

Observamos que se ponen en juego distintos tipos de pensamiento al trabajar con la integral definida, según la propuesta planteada a los estudiantes. El razonamiento inductivo se considera como un recurso eficaz para construir conocimiento, y su fortaleza se debe, básicamente, al proceso de generalización que se realiza, que implica un proceso de abstracción, el cual está involucrado en la identificación de patrones que constituyen el núcleo para generar el nuevo conocimiento (CASTRO *et al.*, 2010). Resolver una tarea que promueva el razonamiento inductivo de los estudiantes, implica que pasen por tres procesos: “observación de regularidades, establecimiento de un patrón y formulación de una generalización” (SOSA *et al.*, 2019, p. 563).

Con el propósito de incentivar en los estudiantes a que realicen generalizaciones para dar sentido a ciertas nociones relacionadas con el estudio de la integral definida, nociones que son trabajadas en su mayoría como fórmulas, y no a partir de un proceso de construcción por parte de los estudiantes, se presenta este estudio que tuvo como objetivo analizar cómo estudiantes universitarios generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra.

REFERENTES TEÓRICOS

La manipulación de los deslizadores para relacionar los extremos del intervalo en el cual se acumula el área de una región con los límites de integración, y el reconocimiento de regularidades en los cambios que esto genera, pueden ser analizados desde el enfoque

instrumental desarrollado por Rabardel (1995) asociado con los tres procesos de razonamiento inductivo señalados por Sosa *et al.* (2019), basados en el trabajo de Polya (1967).

Enfoque Instrumental

La aproximación instrumental se centra en la dimensión tecnológica de la matemática educativa, la cual articula aspectos importantes de su integración en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Uno de los aspectos importantes que propone esta aproximación es la diferencia que existe entre lo que es un artefacto y un instrumento. De acuerdo con Rabardel (2011), la transformación progresiva del artefacto en instrumento es denominada como Génesis instrumental y surge cuando un individuo interactúa con un artefacto generando esquemas de utilización de este, es decir, que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto. Asimismo, señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne esquemas de utilización correspondientes.

En la presente investigación se considera como artefacto a la integral de una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a; b]$. Se espera que luego de la resolución de las tareas y de la generación de esquemas de utilización, los estudiantes transformen este artefacto integral definida en un instrumento que permita determinar el área de una región.

La Génesis Instrumental consta de dos dimensiones denominadas Instrumentalización e instrumentación, estas dependen de su orientación. La instrumentalización está orientada hacia la parte artefactual del instrumento en donde el sujeto se enriquece de las propiedades del artefacto, mientras que la instrumentación está orientada hacia el sujeto, específicamente en la construcción de esquemas de utilización por parte del sujeto cuando ejecuta ciertos tipos de tareas cuando utiliza el artefacto.

Rabardel (2011), a partir de esta noción de esquema de Vergnaud (1996), define los esquemas de utilización como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetir la misma acción o aplicarlas en nuevos contextos.

Rabardel (2011) indica que los esquemas de utilización se denominan así porque están relacionados con la utilización de un artefacto, el cual se da en dos niveles distintos y se asocian a dos tipos de esquemas distintos: las actividades relativas a las tareas “segundas”, asociado con lo que se denominan esquemas de uso, son tareas relacionadas con identificación y manejo de las propiedades y características del artefacto, en la presente actividad se espera que los estudiantes generen esquemas de uso asociados a conceptos como áreas de figuras geométricas, relación área – integral definida, antiderivadas, entre otros; y las actividades relativas a las tareas “primeras” o “principales”, asociado con lo que se denominan esquemas de acción instrumentada, son tareas relacionadas con el objeto de la actividad, donde el artefacto cumple el rol de medio para la resolución de la tarea, como dar sentido al TFC que les permita a los estudiantes resolver una integral definida.

Razonamiento Inductivo

Sosa *et al.* (2019), basados en el trabajo de Polya (1967), describen tres procesos que permiten comprender el razonamiento inductivo de un sujeto involucrado en la resolución de una tarea cuyo fin es generalizar un conjunto de casos particulares y obtener reglas generales

de ellos: 1) observación de una regularidad, es una acción mental relacionada con la observación de las características de cómo se dan los cambios en objetos que pueden estar representados numérica, figural o gráficamente, en la que se comparan elementos particulares para identificar similitudes o diferencias, esto es regularidades, a partir de las cuales se podrán establecer reglas generales; (2) establecimiento de un patrón, que implica reconocer lo que se repite en un conjunto de casos particulares, de modo que se realicen conjeturas las cuales pueden ser hechas de forma verbal, numérica u otra representación según el objeto de estudio. Este reconocimiento de la existencia de un patrón ayuda a organizar la información y cohesionarse con el fin de realizar una generalización de la situación planteada; y (3) formulación de una generalización, que se entiende como la transición del reconocimiento del patrón a una expresión utilizada como una regla general, la cual se genera a partir de una abstracción del conjunto de casos particulares.

METODOLOGIA

La metodología del presente estudio es de corte cualitativo y presenta un enfoque descriptivo e interpretativo. Bogdan y Biklen (2007) señalan que en este tipo de metodologías los resultados son altamente descriptivos, aunque los investigadores prestan mayor atención a los procesos de resolución; por otro lado, los investigadores que desarrollan metodologías cualitativas, al realizar el análisis de la información, por lo general, obtienen conclusiones basadas en la intuición, y los significados que los estudiantes generan sobre el objeto de estudio resulta esencial en este tipo de metodologías.

Sujetos de investigación

La investigación se desarrolló con un grupo de cinco estudiantes entre los 17 y 19 años que estuvieron matriculados en el curso Cálculo integral en el tercer semestre universitario. En este estudio se reporta las respuestas y procedimientos, dados de forma física y verbal, de una de las estudiantes a quien llamaremos Érika, quien desarrolló toda la actividad y aceptó hacerle una entrevista semiestructurada.

Las estudiantes tenían conocimientos sobre funciones, límites y derivadas, que fueron temas vistos en cursos de primer y segundo ciclo universitarios. Con relación a los conceptos relacionados con la integral definida, Érika tenía conocimiento de la noción de antiderivada y de la definición de integral de una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a; b]$ como el límite de una suma de Riemann asociado al cálculo de áreas: $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i)$, donde dichos conceptos fueron enseñados con énfasis en el uso de técnicas.

El TFC en los libros de texto

En los libros de texto básico que forman parte de diversas universidades, se presenta el TFC de forma similar. Haeussler et al. (2008) lo presenta de la siguiente manera: “Si f es continua en el intervalo $[a; b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a; b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ” (p. 653). Zill y Wright (2011) y Stewart (2010) indican que el TFC presenta dos partes: la primera relaciona la integración con la derivación (no trabajada en esta investigación), y la segunda, denominada forma antiderivada, se describe de forma similar a lo propuesto por Haeussler et al. (2008).

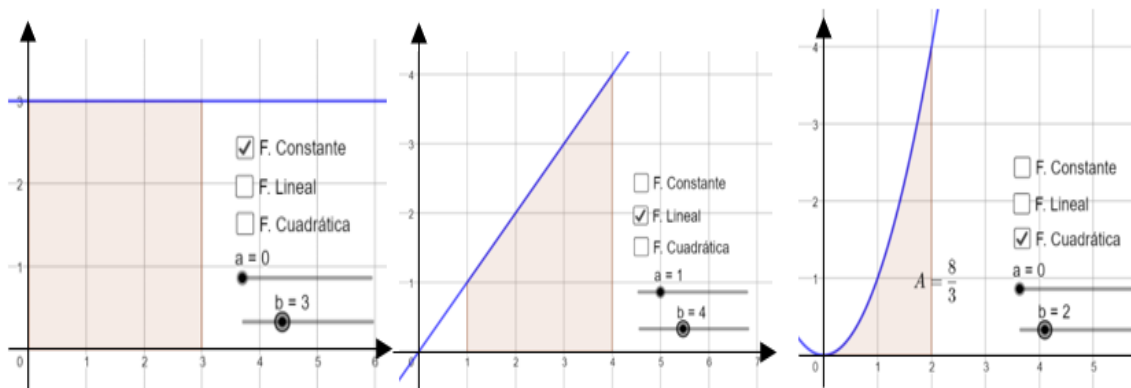
Descripción de la actividad y de los applets en GeoGebra

La actividad se desarrolló en una sola sesión de dos horas, y estuvo compuesta de tres tareas y se utilizaron dos applets. En la primera tarea, las estudiantes debían generalizar en términos de x el área que se acumulaba bajo la gráfica de tres funciones diferentes (una a la vez): constante, lineal y cuadrática, y el eje X , primero en el intervalo $[0; x]$ y luego en el intervalo $[1; x]$, para ello trabajaron casos particulares donde $x = \{1; 2; 3; 4\}$ y tuvieron que determinar el área de regiones mediante fórmulas de geometría para las dos primera funciones, y en el caso de la función cuadrática, el área era una información brindada por el applet.

La segunda tarea era deducir el valor de la integral definida utilizando las mismas funciones de la tarea 1, pero con límites de integración de $x = a$ hasta $x = b$, y luego describir un procedimiento que les permitiera determinar la integral definida de cualquier función en un intervalo dado. En la tercera tarea, las estudiantes utilizaron un segundo applet para determinar regiones sombreadas limitadas por la gráfica de una función y el eje X , con el objetivo de relacionar dicha región con el planteamiento de una integral definida para saber si esta calculaba su área o no.

El applet diseñado para que los estudiantes desarrollen la primera tarea, presenta tres casillas de control: constante, lineal y cuadrática, al activarlos se representan gráficamente las funciones $f(x) = 3$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ respectivamente, y también presenta dos deslizadores a y b que permiten construir y manipular los extremos de un intervalo en el que se define una región sombreada (figura 1).

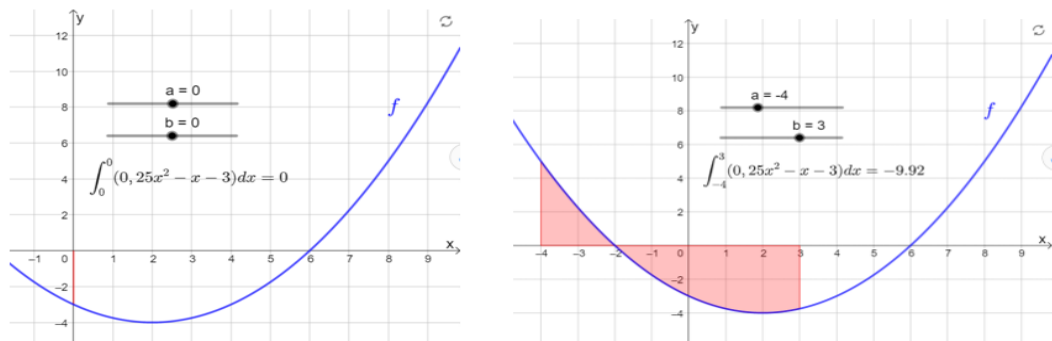
Figura 1 – Casillas de control y deslizadores del applet de la tarea 1



Fuente: Elaboración de los autores

El applet diseñado para que los estudiantes desarrollen la cuarta tarea, presenta la gráfica de la función $f(x) = 0.25x^2 - x - 3$, y dos deslizadores a y b con los que se manipula en intervalo en el que está limitada una región sombreada, así como los límites de integración de la integral definida planteada (figura 2).

Figura 2 – Gráfica y deslizador del applet de la tarea 3



Fuente: Elaboración de los autores

A continuación, se presenta cada una de las tareas y el análisis respectivo.

ANÁLISIS

La primera tarea de la actividad consistía en que los estudiantes, luego de leer el código QR con sus celulares, activan cada una de las tres casillas de control de GeoGebra y siguieran las instrucciones para completar las tablas mostradas en la actividad (figura 3).

Figura 3 – Instrucciones y vista gráfica de GeoGebra en la tarea 1

Lea el código QR mostrado en la figura. Marque las casillas y manipule los deslizadores según se indique en cada ítem.



TAREA 1

- Marque las casillas y complete las tablas que muestran a continuación.

Casilla: F. Constante
Deslizador: $a = 0$; $b = k$

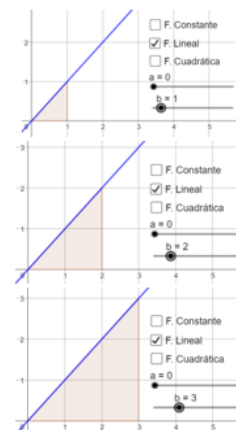
k	$A = \int_0^k 3 dx$
1	
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Lineal
Deslizador: $a = 0$; $b = k$

k	$A = \int_0^k x dx$
1	
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Cuadrática
Deslizador: $a = 0$; $b = k$

k	$A = \int_0^k x^2 dx$
1	
2	
3	
4	
x	



Lea el código QR mostrado en la figura. Marque las casillas y manipule los deslizadores según se indique en cada ítem.



- Marque las casillas y complete las tablas que muestran a continuación.

Casilla: F. Constante
Deslizador: $a = 1$; $b = k$

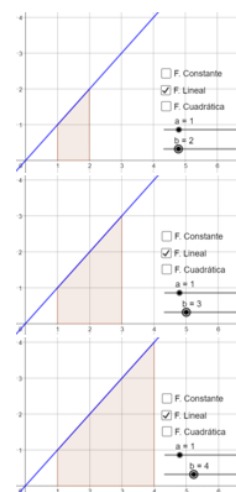
k	$A = \int_1^k 3 dx$
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Lineal
Deslizador: $a = 1$; $b = k$

k	$A = \int_1^k x dx$
2	
3	
4	
x	

Casilla: F. Cuadrática
Deslizador: $a = 1$; $b = k$

k	$A = \int_1^k x^2 dx$
2	
3	
4	
x	



Fuente: Elaboración de los autores

La estudiante Érika, luego de leer el código QR y obtener en su celular el ambiente de GeoGebra, marcó de forma ordenada cada una de las casillas y manipuló el deslizador b , configurado para que tenga incrementos de una unidad, con el fin de observar los cambios que se generaban en la vista gráfica del programa. Para las instrucciones en donde se fija el valor $a = 0$ y se consideran los valores de $b = \{1; 2; 3; 4\}$, cuando está activa la casilla F. Constante, se observa la función $f(x) = 3$, y al variar los valores del deslizador b se dibujan rectángulos de altura igual a 3 u, y de bases diferentes; si está activa la casilla F. Lineal, se observa la función $f(x) = x$, y al variar los valores del deslizador b se dibujan triángulos rectángulos e isósceles de catetos igual a b u, y cuando está activa la casilla F. Cuadrática, se observa la función $f(x) = x^2$, y al variar los valores del deslizador b se pinta una región de borde superior no lineal y aparece el área de dicha región. Un extracto de la entrevista semiestructurada expone lo que percibió la estudiante Érika a partir de los cambios y regiones observadas.

Investigador: ¿Qué observas luego de marcar cada casilla y manipular el deslizador b ?

Érika: En el primer caso veo rectángulos y cambia su ancho, en el segundo veo triángulos rectángulos y sus catetos cambian, pero son iguales, y en el tercero parece un triángulo, pero curvo, y cambia su área. Solo en este me dan el valor del área.

Investigador: ¿Y sabes cómo determinar el área de región en los dos primeros?

Érika: Sí, creo que el área del rectángulo es base por altura, y de un triángulo es entre 2.

Estas operaciones fueron utilizadas también cuando la instrucción era fijar el valor $a = 1$ y considerar los valores de $b = \{2; 3; 4\}$

Manipular el deslizador b y observar cambios unitarios en la base de los rectángulos y triángulos, ampliando las figuras geométricas, sin alterar sus formas, y ver los valores de área en la región no lineal, todos expresados en fracciones con denominador 3, es una fase del razonamiento inductivo que puede ser considerada como de *observación de una regularidad*.

Érika completó con valores numéricos cada una de las seis tablas, para ello movilizó su *esquema de uso área de figuras geométricas*, al reconocer las figuras geométricas sombreadas y determinar el valor de sus áreas mediante fórmulas de geometría. Al colocar el valor de las áreas en la segunda columna de cada tabla, que corresponde al valor de la integral definida, Érika movilizó su *esquema de uso área - integral definida*, al reconocer que la integral definida permite determinar el área de una región cuando la función que limita la región es positiva y continua en el intervalo de análisis.

En algunas de estas tablas claramente se ve el *establecimiento de un patrón*, porque los valores de la primera columna (límite superior de la integral definida) aparecían en el cálculo del área de la segunda columna (valor de la integral definida); en otros casos, se colocaba directamente los valores de las áreas de las regiones dibujadas, lo que no significa que la estudiante, mentalmente, no se haya dado cuenta del patrón, por ejemplo, para los valores de $b = \{1; 2; 3; 4\}$, GeoGebra presentaba como áreas: $1/3$, $8/3$, $27/3$, $64/3$ respectivamente, esto es, el numerador de las áreas era b al cubo. Por último, Érika *formuló una generalización* como una expresión en términos de x que vendría a ser un valor genérico del límite superior b de la integral definida (figura 4).

Figura 4 – Respuestas de Érika a la primera parte de la tarea 1

k	$A = \int_0^k 3 dx$	k	$A = \int_0^k x dx$	k	$A = \int_0^k x^2 dx$
1	$3 \times = 31=3$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$
2	$32=6$	2	2	2	$\frac{8}{3}$
3	$3.3=9$	3	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{27}{3}$
4	$3.4=12$	4	8	4	$\frac{64}{3}$
x	$3 \cdot x$	x	$\frac{x^2}{2}$	x	$\frac{x^3}{3}$

Fuente: Elaboración de los autores

Un extracto de la entrevista permitió conocer cómo interpretó Érika las expresiones obtenidas en términos de x .

Investigador: ¿Cómo interpretas las expresiones que has determinado?

Érika: Creo que son las antiderivadas de 3, x y x^2 , pero sin la constante.

Esta respuesta nos hace pensar que Érika generó su *esquema de uso área – antiderivada*, al construir una expresión (expresión generalizada) que permite determinar el área acumulación bajo la gráfica de una función positiva y continua desde $x = 0$ hasta un cualquier valor positivo.

Para la segunda parte de la tarea 1, donde se fija el valor $a = 1$ y se consideran los valores de $b = \{2; 3; 4\}$, se observa que la estudiante determina el área de toda la región hasta el valor de b con el que se trabaja, y se resta el área de la región limitada por la función y el eje X en el intervalo $[0; 1]$, movilizand con ello los esquemas descritos anteriormente. Érika, nuevamente *estableció un patrón y formuló una generalización* en términos de x que vendría a ser un valor genérico del límite superior b de la integral definida y un valor fijo de límite inferior que vale 1 (figura 5).

Figura 5 – Respuestas de Érika a la segunda parte de la tarea 1

k	$A = \int_1^k 3 dx$	k	$A = \int_1^k x dx$	k	$A = \int_1^k x^2 dx$
2	3	2	$\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 1.5$	2	$\frac{7}{3}$
3	6	3	$\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$	3	$\frac{27}{3} - \frac{1}{3}$
4	9	4	$\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 7.5$	4	$\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}$
x	$3x - 3$ $3(x-1)$	x	$\frac{x^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{x^2-1}{2}$	x	$\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3-1}{3}$

Fuente: Elaboración de los autores

Un extracto de la entrevista permitió conocer cómo interpretó Érika las expresiones obtenidas en términos de x .

Investigador: ¿Cómo interpretas las expresiones que has determinado?

Érika: Primero calculas las antiderivadas de 3, x y x^2 , y reemplazas el de arriba y luego le restas el de abajo.

Esta respuesta nos permite afirmar que Érika generó su *esquema de uso variación de antiderivada*, al describir cómo determinaría el valor de una integral definida involucrando el concepto de antiderivada.

La segunda tarea se planteó con la intención, primero de confirmar el proceso que iban a seguir los estudiantes en la tarea 1, lo de determinar el valor de una integral definida, para ello, se consideró de forma genérica las mismas funciones de la tarea 1, pero ahora definidas en un intervalo $[a; b]$; y segundo, para que los estudiantes describan de forma general un procedimiento de cálculo de integrales definidas (figura 6).

Figura 6 – Respuestas de Érika a la tarea 2

TAREA 2

Determine las siguientes integrales definidas en términos de a y b :

$A = \int_a^b 3 dx =$	$A = \int_a^b x dx =$	$A = \int_a^b x^2 dx =$
-----------------------	-----------------------	-------------------------

Luego, describa con sus palabras cómo determinaría la integral definida para cualquier función $f(x)$ definida en un intervalo $[a; b]$.

Érika desarrolló de forma correcta esta tarea, lo hizo de la manera en la que lo explicó en la entrevista semiestructurada, asimismo, presentó una descripción general del proceso de cálculo de una integral definida.

Figura 7 – Respuestas de Érika a la tarea

$A = \int_a^b 3 dx = 3(b-a)$	$A = \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$	$A = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$
------------------------------	---	---

1- Se halla la antiderivada de la función
 2- Se coloca en términos de los extremos a y b

Podemos afirmar que la estudiante generó su *esquema de acción instrumentada TFC*, con el cual pueden determinar el valor de una integral definida, para cualquier función continua definida en un intervalo cerrado, a partir del cálculo de una antiderivada de la función, la evaluación en ella de los límites de integración y posterior diferencia.

En la tercera tarea de la actividad, los estudiantes luego de leer el código QR con sus celulares, manipulaban los deslizadores para identificar una región sombreada en la vista gráfica de GeoGebra de modo que pudieran validar si la integral definida planteada permitía o no calcular el área de dicha región (figura 8). En esta investigación solo se presenta la respuesta de la estudiante Érika al ítem (a), que está relacionado con lo hecho en las tareas 1 y 2.

Figura 8 – Instrucciones y vista gráfica de GeoGebra en la tarea 3

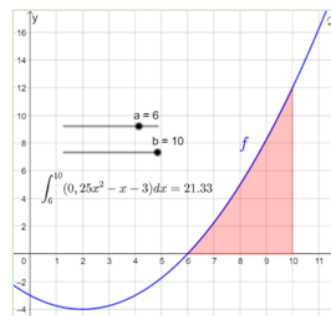
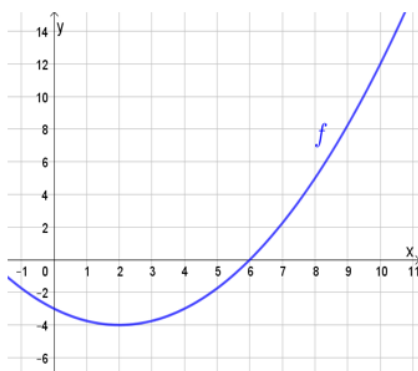
TAREA 3

Lea el código QR mostrado en la figura. Manipule los deslizadores según se indique en cada ítem y responda a lo que se plantea en cada ítem. En cada caso, indique si el valor de la integral planteada permite hallar el área de la región sombreada que se muestra en la vista gráfica del GeoGebra.



- Si su respuesta es afirmativa, explique el porqué de su respuesta.
- Si su respuesta es negativa, explique el porqué de su respuesta. Luego, determine el área de la región sombreada.

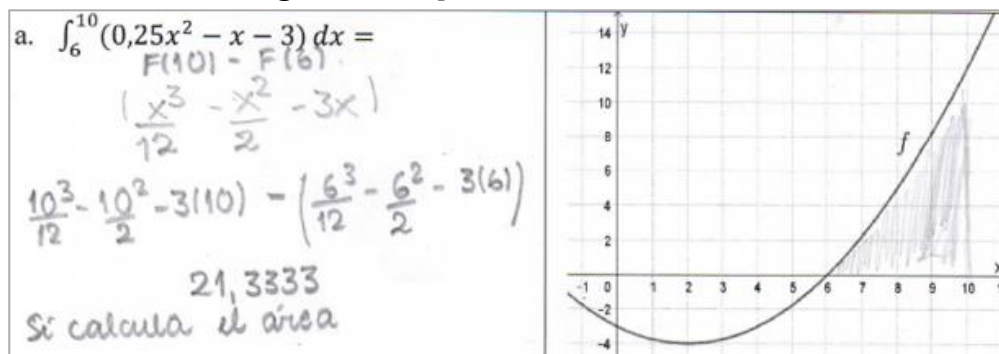
a. $\int_6^{10} (0,25x^2 - x - 3) dx =$



Fuente: Elaboración de los autores

La estudiante Érika, luego de leer el código QR y obtener en su celular el ambiente de GeoGebra, manipuló los deslizadores y asignó los valores $a = 6$ y $b = 10$. Con ello obtuvo una región sombreada limitada por la gráfica de una función f y el eje X en el intervalo $[6; 10]$, y el valor 21,33 de la integral $\int_6^{10} (0,25x^2 - x - 3) dx$. Para verificar la validez del resultado, Érika movilizó su esquema de acción instrumentada regla de Barrow y determinó la antiderivada $F(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} - 3x$, de la función $f(x) = 0,25x^2 - x - 3$, evaluó en ella los valores $x = 10$ y $x = 6$, y los restó, con lo cual corroboró el resultado mostrado en la vista gráfica de GeoGebra (figura 9).

Figura 9 – Respuestas de Érika a la tarea 3



Érika había aprendido a determinar el valor de una integral definida a partir del límite de una suma de Riemann; luego de la experiencia, Érika generó y movilizó distintos esquemas de utilización con los que transformó la integral definida en un instrumento para el cálculo de áreas a partir de la noción de antiderivada. Por lo tanto, Érika logró la génesis instrumental del concepto de integral definida.

DISCUSIÓN

La presente investigación tuvo por objetivo analizar cómo estudiantes universitarios generan nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al utilizar un razonamiento inductivo mediante el uso de GeoGebra

La integral definida como el límite de una suma de Riemann, asociada con el cálculo del área de una región limitada por la gráfica de una función en un intervalo dado, era un artefacto para Érika, dado que en una clase previa solo fue presentada como una definición formal del concepto de integral definida, y no se utilizó luego para el cálculo de áreas. El proceso inductivo permitió a Érika, dar sentido al concepto de antiderivada, vista como una función que permite determinar el área de una región que se acumula a medida que varía el extremo derecho de un intervalo, así como también crear conocimiento sobre la regla de Barrow que emplea antiderivadas para el cálculo de integrales definidas. Coincidimos con Castro et al. (2010) acerca de que el razonamiento inductivo tiene su fortaleza en el proceso de generalización, a partir del cual se genera nuevo conocimiento.

En la tarea 1 se desarrollaron las fases del razonamiento inductivo, y se pudieron identificar cómo los estudiantes generaron y movilaron distintos esquemas de uso del artefacto integral definida. En la fase denominada *establecimiento de un patrón*, se identificó el *esquema de uso área de figuras geométricas* y el *esquema de uso área – integral definida*, y en la fase denominada *formulación de una generalización* se identificó el *esquema de uso área – antiderivada* y el *esquema de uso variación de antiderivada*. Estos esquemas permitieron en la tarea 2, describir un proceso para resolver integrales definidas mediante el uso de antiderivadas, y generaron con ello el *esquema de acción instrumentada regla de Barrow*, asociado con la técnica para resolver integrales definidas que lleva su nombre. Este esquema de acción instrumentada fue puesto en práctica en un ejercicio de la tarea 3, razón por la cual decimos que Érika logró la génesis instrumental de la noción de integral definida. Más que una técnica para resolver una integral, el proceso inductivo permitió responder a una pregunta: ¿cómo se relaciona la integral definida y la noción de antiderivada, a partir de la acumulación de áreas?, que de acuerdo con Santos-Trigo y Aguilar (2018), responder a estas preguntas promueve la construcción de significados sobre los conceptos involucrados.

La herramienta casilla de control de GeoGebra permitió trabajar de forma ordenada con diferentes funciones polinomiales, y la herramienta deslizador de GeoGebra, tuvo un rol fundamental, porque permitió dinamizar los cambios en las regiones sombreadas, lo que al parecer influyó en la *observación de las regularidades*, así como también en un proceso acumulativo de áreas con el fin de que, al realizar una generalización, la expresión que se obtenga se relacione con una antiderivada. Estamos de acuerdo con Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) cuando mencionan que el uso de tecnologías digitales desarrolla en los

estudiantes estrategias relacionadas con la visualización de cambios simultáneos, el arrastre y la manipulación de deslizadores; así como con Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022) cuando señalan que el uso de applets asociado con preguntas particulares, puede posibilitar que los estudiantes den sentido a los procesos que realizan al realizar construcciones o generalizaciones a partir de situaciones de cambio.

CONCLUSIONES

El concepto de integral definida, por lo general, se trabaja a partir de un proceso de aproximación mediante sumas de Riemann, el cual, al ser abordado con tecnologías digitales, posibilita que el estudiante observe y coordine los cambios simultáneos que se dan entre diversas cantidades, buscando que se genere un aprendizaje más completo. Como el TFC se relaciona con conceptos como el de antiderivada, y este a su vez se puede obtener mediante procesos de acumulación de áreas al movilizar el extremo derecho del intervalo que define la región, sería recomendable el diseño de actividades que involucren situaciones de cambio, que puedan ser trabajadas con tecnologías digitales.

El uso de regiones geométricas posibilita que el estudiante utilice sus conocimientos previos sobre fórmulas de geometría, y al trabajar en casos particulares bajo un proceso inductivo, resulta favorable para formular generalizaciones. Sin embargo, cuando la función es más compleja, o si se requiere la comprensión de que los cambios en el área que se acumula y los cambios en el extremo derecho del intervalo son simultáneos y consideran a todos los valores reales en el intervalo trabajado, el razonamiento inductivo podría limitar esa comprensión. Por lo que sería recomendable, trabajar el TFC desde una perspectiva del razonamiento covariacional, a fin de lograr un aprendizaje más conectado a procesos que involucren fenómenos dinámicos.

Las tecnologías digitales pueden ser utilizadas para comprobar resultados, ya sea realizar gráficas de funciones, operaciones matemáticas, entre otras acciones. Sin embargo, el potencial de los sistemas de geometría dinámica, como es el caso de GeoGebra, es que permiten conectar diferentes herramientas a deslizadores con el fin de observar cambios dinámicos y simultáneos, permitir a los estudiantes movilizar nociones matemáticas relacionadas con la integral definida, asociadas a los esquemas de utilización generados, tanto en procesos de aproximación al área de una región, como en procesos de acumulación de áreas.

REFERENCIAS

- ARANDA, C.; CALLEJO, M. Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: Dos estudios de casos. **Bolema**, 31(58), 777-798, 2017. Acceso en: 18 ago. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13>
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Qualitative Research for Education. An Introduction to Theory and Methods**. 5. ed. Pearson, 2007.
- CASTRO, E.; CAÑADAS, M.; MOLINA, M. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. **Revista UNO**, 54, 55-67, 2010. Acceso en: 03 jun. 2022. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10481/26079>

CAGLAYAN, G. Teaching ideas and activities for classroom: integrating technology into the pedagogy of integral calculus and the approximation of definite integrals. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 47(8), 1261-1279, 2016. Acceso en: 18 jul. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1176261>

HAEUSSLER, E.; PAUL, R.; WOOD, R. **Matemáticas para administración y economía**. México, D. F.: Prentice Hall, 2008.

MARTÍNEZ-MIRAVALL, M.; GARCÍA-CUÉLLAR, D. [Estudio de las Apreensiones en el Registro Gráfico y Génesis Instrumental de la Integral Definida](#). **Formación Universitaria**, 13(5), 177-190, 2020. Acceso en: 10 jun. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177>

MARTÍNEZ-MIRAVALL, M.; GARCÍA-RODRÍGUEZ, M. Razonamiento Covariacional de Estudiantes Universitarios en un Acercamiento al Concepto de Integral Definida mediante Sumas de Riemann. **Formación Universitaria**, 15(4), 105-118, 2022. Acceso en: 08 set. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105>

NITTI, L.; ÁLVAREZ, M. Integral definida y función integral. Exploración, formalismo e intuición en los futuros profesores de matemática. **Yupana**, 7(13), 69-83, 2014. Acceso en: 05 jul. 2022. DOI: <https://doi.org/10.14409/yu.v1i7.4263>

PÓLYA, G. **Le découverte des mathématiques**. Paris: DUNOD, 1967.

RABARDEL, P. **Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. Framing the use of technology in problem solving approaches. **The Mathematics Enthusiast**, 10(1-2), 279-302, 2013. Acceso en: 09 jun. 2022. DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268>

SANTOS-TRIGO, M.; AGUILAR, D. **Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital**. En A. Ávila (ed.), Rutas de la Educación Matemática (pp. 148-167). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C., SOMIDEM, 2018.

SERHAN, D. Students' understanding of the definite integral concept. **International Journal of Research in Education and Science**, 1(1), 84-88, 2015. Acceso en: 12 jul. 2022. Disponible en: <https://www.ijres.net/index.php/ijres/article/view/20>

STEWART, J. **Cálculo de una variable: Conceptos y contextos**, Cuarta edición. México, D. F.: Cengage Learning, 2010.

SOSA, L.; APARICIO, E.; CABAÑAS, G. Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, 14(3), 563-581, 2019. Acceso en: 08 jun. 2022. DOI: <https://doi.org/10.29333/iejme/5769>

VERGNAUD, G. **A teoria dos campos conceptuais**. En Jean Brun (org), Didáctica das matemáticas. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996.

ZILL, D.; WRIGHT, W. **Cálculo. Trascendentes Tempranas**. México, D. F.: McGraw-Hill, 2011.

Submetido em: 19 de setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de novembro de 2022.

Publicado em: 08 de dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

GARCÍA-CUÉLLAR, D. J.; MARTÍNEZ-MIRAVAL, M. D. Uso de GeoGebra y el Razonamiento Inductivo en un Acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 29-43, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449>

Orquestación Instrumental: Análisis Marginal de Funciones Económicas en Educación Virtual con el uso de GeoGebra

Jesús Victoria Flores Salazar¹

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

Pedro Tasayco Casas²

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

En este artículo se presenta y analiza, con base en la Aproximación y Orquestación Instrumental, una propuesta didáctica cuyo objetivo es organizar entornos tecnológicos para la enseñanza de la matemática de estudiantes de economía con la finalidad de favorecer la interpretación del análisis marginal en funciones económicas en modalidad de educación virtual. Para ello, se emplea el software de videoconferencias del Zoom mientras que la gestión del aprendizaje se realiza con la medición del GeoGebra. La investigación pretende identificar tipos de esquemas de utilización que movilizan los estudiantes, esto a partir de la observación de sus técnicas instrumentadas, cuando desarrollan las actividades de la propuesta didáctica.

Palabras clave: Análisis Marginal; Genesis instrumental; Orquestación Instrumental; Educación virtual; Derivada.

Instrumental Orchestration: Marginal Analysis of Economic Functions in Virtual Education using GeoGebra

ABSTRACT

This article presents and analyses, based on Instrumental Approximation and Orchestration, a didactic proposal that aims to organize technological environments for the teaching of mathematics to economics students in order to improve the interpretation of marginal analysis in economic functions in a virtual education modality. For this purpose, Zoom videoconferencing software is used, while learning management is carried out with the support of GeoGebra. The research pretends to identify the types of usage schemes that students mobilize, based on the observation of their instrumental techniques, when they develop the activities of the didactic proposal.

Keywords: Analysis marginal; Instrumental Genesis; Instrumental Orchestration; virtual education; derivative.

¹ Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil (PUC-SP). Docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Directora del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y coordinadora de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0036-140X> . E-mail: jvflores@pucp.pe

² Magister en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9228-2644> . E-mail: pedro.tasayco@pucp.edu.pe

Orquestração Instrumental: Análise Marginal de Funções Econômicas no Ensino Virtual usando GeoGebra

RESUMO

Este artigo apresenta e analisa, com base na Aproximação Instrumental e Orquestração, uma proposta didática cujo objetivo é organizar ambientes tecnológicos para o ensino de matemática para estudantes de economia com o objetivo de favorecer a interpretação da análise marginal em funções econômicas em uma modalidade de educação virtual. Para este fim, é utilizado o software de videoconferência Zoom, enquanto a gestão da aprendizagem é realizada com a medição do GeoGebra. A pesquisa visa identificar os tipos de esquemas de utilização mobilizados pelos estudantes, com base na observação de suas técnicas instrumentais, quando realizam as atividades da proposta didática.

Palavras-chave: Análise Marginal; Gênese Instrumental; Orquestração Instrumental; Educação Virtual; Derivada.

INTRODUCCIÓN

A inicios del año 2020, la población mundial se vio en la obligación a permanecer en cuarentena debido al COVID-19, en ese momento no sabíamos que tan grave sería esta pandemia y que implicaciones tendría en la población y especialmente en la educación. A raíz de estos sucesos, las instituciones educativas del mundo optaron por migrar a una educación virtual. Usamos el término *educación virtual* en el sentido de Lara (2002), quien afirma que la educación virtual es la modalidad educativa que eleva la calidad de la enseñanza, que respeta su flexibilidad o disponibilidad (en cualquier momento, tiempo o espacio) y que integra los tres modos: asincrónico, sincrónico y autoformación.

Por otro lado, cabe resaltar que los sistemas educativos no estaban preparados para este cambio tan abrupto, tanto desde el punto de vista tecnológico como metodológico. Era necesario poner a la tecnología digital al servicio de la educación, pero ello trajo consigo algunas dificultades como, por ejemplo, encontrar el canal o medio tecnológico más apropiado para realizar el proceso de enseñanza- aprendizaje y por otro lado que los estudiantes se adapten a esta nueva modalidad de enseñanza. El presente artículo pretende aportar a la comunidad educativa una investigación relacionada al análisis marginal de funciones económicas en un entorno de educación virtual mediante la orquestación de distintos artefactos tecnológicos dirigido a estudiantes de economía. En tal sentido, se presenta una secuencia, con base en la Aproximación y Orquestación Instrumental para la educación virtual. Específicamente se presenta una configuración didáctica adaptada (Şay y Akkoç, 2016) al análisis marginal de funciones económicas, pues lo que se pretende es propiciar en los estudiantes de economía técnicas instrumentadas y por ende, inferir los posibles esquemas de utilización que serían movilizados por los mismos. Además, se asume que previamente el docente ha trabajado el tema de la derivada, eso significa que poseen esquemas de uso de la derivada, monotonidad, valores extremos de una función, es decir nociones básicas del Cálculo Diferencial.

En cuanto al Cálculo Diferencial se sabe que es un instrumento poderoso para describir el cambio, medirlos y predecirlos. En tal sentido, la derivada es una pieza importante cuando se necesita cuantificar o medir algún fenómeno y los cambios que ello implican. Sin embargo, la educación universitaria prioriza la enseñanza de la derivada en forma algorítmica, mediante construcciones y demostraciones rigurosas (Artigue, 1995). Es decir, los estudiantes cumplen

con el propósito de calcular límite, derivar, encontrar los puntos donde una función alcanza su máximo o mínimo valor, pero difícilmente logran transferir aquellos conocimientos a otras áreas, por ejemplo, la Economía específicamente al análisis de funciones económicas mediante el análisis marginal. Sobre este aspecto Dolores (2007) afirma “difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentran en esencia de este concepto” (p.1). La precaria comprensión del concepto de derivada implica grandes pérdidas de habilidades a nivel profesional, más aún en estudiantes de economía que requieren de la noción de marginalidad para la toma de decisiones en su ámbito laboral.

Con relación a los trabajos en economía, Stanley Jevon, Carl Menger y León Walras formalizaron los conceptos tradicionales de la economía, mediante la introducción de los conceptos de utilidad marginal y maximización. Por eso, son considerados los precursores del marginalismo en la economía pues fueron los primeros en proponer la ley de la utilidad decreciente e incorporarlo al principio de equilibrio general de la economía. Por ello, usamos el término análisis marginal cuando hacemos uso de la derivada o diferencial para predecir el cambio de valor de una función en un contexto económico (ingreso, costo, utilidad, producción, etc.) como consecuencia de aumentar una unidad de la variable independiente (Lial y Hungerford, 2000). Además, las funciones marginales de las funciones económicas más trascendentes (ingreso, costo, utilidad o producción) son fundamentales para el análisis de un determinado contexto económico aportando información valiosa a la toma de decisiones. El economista y escritor Gregory Mankiw en su libro “Principios de Economía” afirma que el análisis marginal es uno de los diez principios de la economía más importantes además regula la manera de cómo las personas racionales toman decisiones en función de la noción de marginalidad.

Por otro lado, investigaciones de Mercapide, Feudel, Albán y Ruíz brindarán una perspectiva de la forma en la que es tratado el análisis marginal en funciones económicas. Mercapide (2018) comprende la problemática del proceso de aprendizaje y enseñanza de funciones y derivadas. El autor plantea una propuesta didáctica en busca de aportar una herramienta que permita la enseñanza y aprendizaje más eficaz de conceptos de cálculo, la cual se realizó en dos etapas. En la primera, se aplicó un cuestionario para graduar el nivel de los problemas planteados, establecer una mejor redacción, mejorar la rúbrica, etc. Y en la segunda etapa, implementa las mejoras de la etapa anterior y busca comprobar los conocimientos de los estudiantes en funciones y derivadas. El autor resalta la importancia del *software* GeoGebra pues permite mostrar al mismo tiempo representaciones algebraica, gráfica y tabular. También, Feudel (2016) se centra en tres preguntas ¿Qué conocimientos acerca de la derivada necesitan obtener los estudiantes de economía? ¿Qué conocimiento deberían tener los estudiantes de economía antes de ingresar a la universidad? ¿Qué conocimientos tienen los estudiantes de economía sobre la derivada después de llevar los cursos de matemática? El autor señala que, los estudiantes de economía después de haber llevado los cursos de matemática deben comprender la derivada en sus representaciones gráfica como pendiente de la recta tangente, verbal como la razón de cambio instantánea y física como la velocidad. Esta investigación concluyó que para los estudiantes es más importante la parte operativa de las derivadas relacionadas a la regla de derivación que la parte conceptual.

Además, que los estudiantes no consideran importante la derivada en contextos económicos. Otra investigación importante es la de Albán (2017) tiene por finalidad favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de resolución de problemas de optimización en estudiantes de primer semestre de economía. Para ello, planteó una secuencia sobre la derivada aplicada a la economía. Además, se realizaron encuestas a estudiantes y entrevistas a docentes de la facultad de economía para establecer criterios importantes en el tema de estudio. El autor resalta la importancia de la enseñanza basada en problemas (EBP) y concluye que la EBP satisface el proceso de enseñanza aprendizaje funcionando como mediador pedagógico. También, Ruíz (2016) en su investigación se centró en la enseñanza y aprendizaje de funciones y derivadas en estudiantes del primer año de bachillerato. Organizó cuatro secciones en la secuencia didáctica, justamente la cuarta sección tuvo la finalidad de trabajar la comprensión de funciones y derivadas mediante funciones económicas como el costo, ingreso y utilidad. El autor indica que tanto la propuesta como los textos deben estar centrados en la interiorización, asociación y aplicación de los conceptos aprendidos. Además, señala que los estudiantes deben ser capaces de relacionar situaciones cotidianas con los conceptos matemáticos y económicos aprendidos.

Las investigaciones de Mercapide (2018), Feudel (2016) y Albán (2017) apuntan a que existe una concepción de la derivada en los estudiantes enfocada en un aprendizaje mecánico. Asimismo, los investigadores mencionados señalan la eficiencia del *software* GeoGebra en la enseñanza de las derivadas por sus características dinámicas y gráficas las cuales promueven el pensamiento reflexivo. Mientras que Ruiz (2016) indica que la enseñanza de la derivada en estudiantes de economía debe apuntar al razonamiento e interiorización del concepto de derivada.

En base a que el profesor es pieza fundamental del proceso de enseñanza aprendizaje pues es quien, con su experiencia y conocimiento de las matemáticas, implementa las propuestas didácticas en el aula para alcanzar los objetivos didácticos, planteamos un cuestionamiento que norteará este artículo, cómo *el profesor organiza y planifica una secuencia didáctica en la que se utilice como medio la tecnología digital para la interpretación del análisis marginal de funciones económicas*. Para dar respuesta a esta cuestión se utiliza como fundamento teórico la Aproximación y Orquestación Instrumental.

APROXIMACIÓN Y ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL

En la actualidad existen teorías propias del área científica de Didáctica de la Matemática que permiten analizar el uso o mediación de la tecnología digital, la que presentamos en este artículo es la Aproximación y Orquestación Instrumental. Para poder entender adecuadamente la noción de Aproximación Instrumental, tal como fue definida (Rabardel y Verillon, 1985), es necesario tener claro las nociones claves como son esquemas de utilización, artefacto e instrumento, proceso de Genesis Instrumental y Orquestación Instrumental (Trouche, 2005).

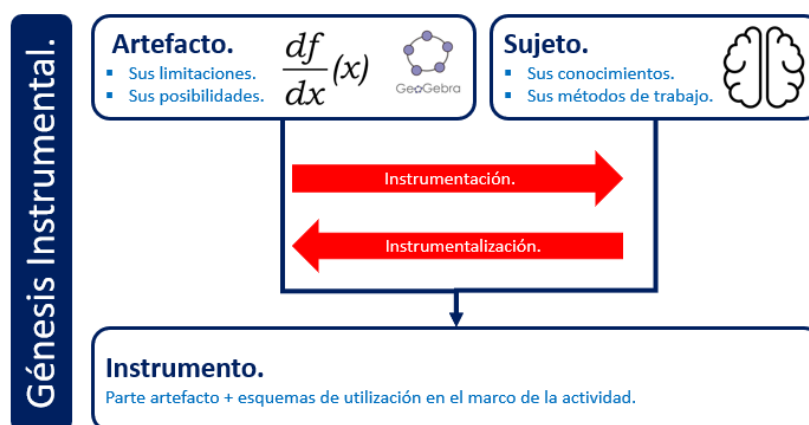
Con relación a artefacto Béguin y Rabardel (2000) afirman que “el artefacto puede ser material o simbólico, producido por el sujeto o por otros, con uno o más esquemas asociados, resultantes de la propia construcción del sujeto, autónomo o de una apropiación de esquemas sociales ya formados fuera de él” (p. 8). Una característica fundamental de un artefacto es su intencionalidad, pues esta define su existencia. Para el presente artículo, la derivada funge de artefacto, dado que, a partir de ella y a través de una Orquestación Instrumental promoveremos

el análisis marginal de funciones económicas en estudiantes de economía. Otra noción fundamental es la noción de esquema, fundamentado en la noción de esquema de (Vergnaud, 1990). En ese sentido, Rabardel (2011) señala que es “la organización invariante de la conducta del sujeto para una clase de situaciones, tanto en términos de acción y actividad simbólica” (p. 164). Cuando los esquemas se relacionan a la utilización de un artefacto serán denominados esquemas de utilización, las cuales refieren a dos dimensiones de la actividad. Además, los esquemas de utilización se clasifican en tres tipos: Esquemas de Uso (EU), Esquemas de acción instrumentada (EAI), Esquemas de Actividad Colectiva Instrumentada. (EACI).

Los *Esquemas de Uso* relativos a las tareas segundas pueden situarse en el nivel de esquemas elementales y lo que los caracteriza es su orientación, hacia las tareas segundas que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto. Además, los *Esquemas de Acción Instrumentada*, consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Lo que los caracteriza es que son relativos a las “tareas primeras”, estos afloran como consecuencia de la asimilación y reestructuración de los esquemas de uso y de otros esquemas en oportuna correspondencia. También dado que los procesos de enseñanza y de aprendizaje se suelen dar en entornos de actividades colectivas donde un mismo artefacto puede ser usado por un mismo grupo de sujetos, en simultaneo, donde se están generando y usando esquemas específicos, todo ello son condiciones favorables para que emerjan los *Esquemas de Actividad Colectiva Instrumentada*.

En cuanto al instrumento Rabardel (2011) lo define como un artefacto en acción. El instrumento tiene componente artefactual (material o simbólica) asignada por el sujeto o sujetos, pero también componente de esquema de utilización, cualidad adquirida como consecuencia de la construcción propia del sujeto, este proceso es llamado *Genesis instrumental*, el cual se construye a partir de un proceso doble de instrumentación e instrumentalización. Por otro lado, Trouche (2004), reconoce que en el proceso de Génesis Instrumental existen dos dimensiones, la *instrumentalización* que está orientada al artefacto cuando se transforma el artefacto o potencia con fines específicos y la *instrumentación* cuando va dirigida al sujeto guiando el desarrollo y la apropiación de los esquemas de acción instrumentada obteniendo una eficaz repuesta en la tarea. (ver figura 1).

Figura 1: Componentes de la génesis instrumental en la investigación



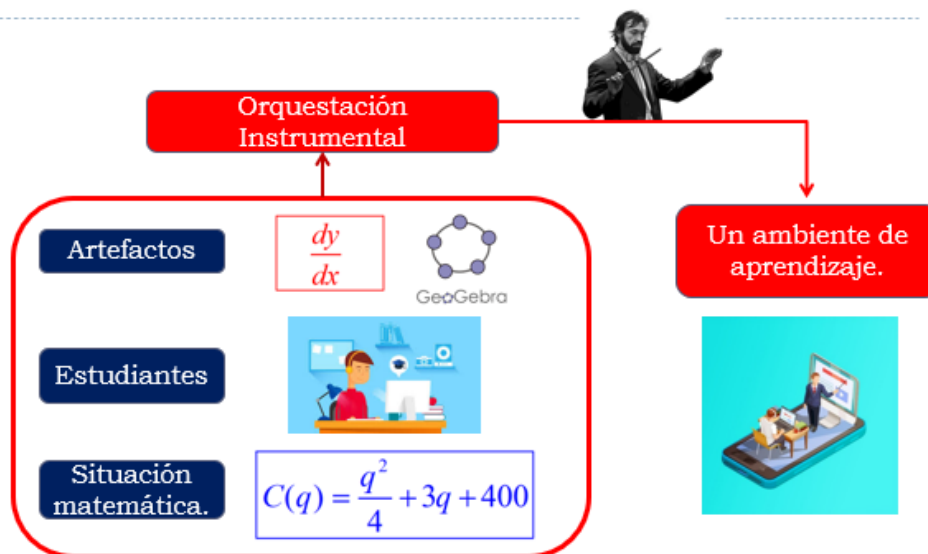
Fuente: Tasayco (2021, p. 26)

Como nos encontramos en tiempos donde la tecnología digital es parte de nuestra vida cotidiana, por ende, era inevitable su incursión en la educación. Sin embargo, la pandemia de COVID-19 aceleró ese proceso de incorporación, pero ha sido una transición muy abrupta. Desde inicios de siglo investigadores, como Lagrange, Artigue y Trouche ya vislumbraban la inserción de la tecnología digital en la enseñanza de la matemática. Prioritariamente las investigaciones se han centrado en la *Genesis instrumental* por parte del estudiante, pero el engranaje principal que hace posible este proceso es el profesor, pues es el responsable de planificar, estructurar y ejecutar el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Por eso, Drijvers et al (2010) indica que para lograr la Génesis Instrumental esperada es necesario ser orientada por el profesor a través de una *Orquestación Instrumental* en una determinada situación matemática. Pierce y Ball (citado en Drijvers et al. 2010) señalan que “el proceso de un maestro que desarrolla una Orquestación Instrumental se guía por su conocimiento, experiencia y puntos de vista sobre la Educación Matemática y el papel que cumple la tecnología” (p. 216). La presente investigación tiene como objetivo lograr la construcción de un instrumento, el análisis marginal. En tal sentido, dado que los esquemas no son observables pero las técnicas si los son e incluso pueden ser enseñadas, Lagrange (1999), señala que las técnicas cambian cuando se incluyen dispositivos tecnológicos, dichos cambios no deben ser considerados triviales.

Además, la *Orquestación Instrumental* (Trouche, 2005), plantea la gestión, por parte del docente, de los artefactos y los sujetos en un determinado entorno de enseñanza-aprendizaje. Metafóricamente, el docente interpreta al director de orquesta y es quien diseña la partitura (secuencia didáctica) con el objetivo de fijar las armonías (tareas, directivas del docente, etc.) para obtener el sonido y ritmo esperado (génesis instrumental), también es responsable del monitoreo de las situaciones matemáticas tal como lo haría el director de orquesta con sus músicos. La *Orquestación Instrumental* al ser arreglo sistémico e intensional tiene un foco y orden definido y es elaborado para responder a una necesidad identificada con antelación. La figura 2 representa los elementos de la orquestación instrumental de la presente investigación.

Figura 2: Elementos de la Orquestación Instrumental de la investigación



Fuente: Tasayco (2021, p. 29)

La figura 2, muestra la organización el escenario donde se integran y articulan los elementos de una **Orquestación Instrumental** propuesta por esta investigación en educación virtual. Donde los sujetos son estudiantes de economía, con artefactos materiales (papel y lápiz) y simbólicos (derivada) en un contexto de la enseñanza del análisis marginal de funciones económicas donde la gestión del aprendizaje se realiza mediante el software de videoconferencias del Zoom y con el apoyo del GeoGebra. En la presente investigación usaremos el término educación virtual cómo la modalidad educativa que eleva la calidad de la enseñanza, que respeta su flexibilidad o disponibilidad (en cualquier momento, tiempo o espacio) (Lara, 2002). Alcanza su apogeo con la tecnología digital e integra los tres métodos: asincrónico, sincrónico y autoformación. Por otro lado, se diferencian tres fases en una Orquestación Instrumental (Trouche, 2004; Drijvers, Kieran y Marriotti, 2010) la *Configuración Didáctica*, el *Modo de Ejecución* y el *Desempeño Didáctico*.

La *Configuración Didáctica* es la organización del entorno del proceso de enseñanza-aprendizaje y de los artefactos que participaran en la actividad intensional (Trouche, 2004). Implica la selección de los artefactos que participaran, así como la organización de estos para cumplir los objetivos planteados. En ese sentido, Drijvers (2012) afirma que “una configuración didáctica es una disposición de artefactos en el entorno, o, en otras palabras, una configuración del escenario de enseñanza y los artefactos involucrados en él” (p. 266). La configuración didáctica de la presente investigación tiene como característica original que el proceso de enseñanza-aprendizaje será a través del software de video conferencia del Zoom (educación virtual). Los artefactos son la derivada y el software libre del GeoGebra mientras que la gestión del aprendizaje se hará posible por medio del applet del GeoGebra. Este applet permitirá a los estudiantes de economía ver las características dinámicas que tienen las funciones económicas en especial el cambio en el margen (análisis marginal) para lo cual harán uso del deslizador del GeoGebra.

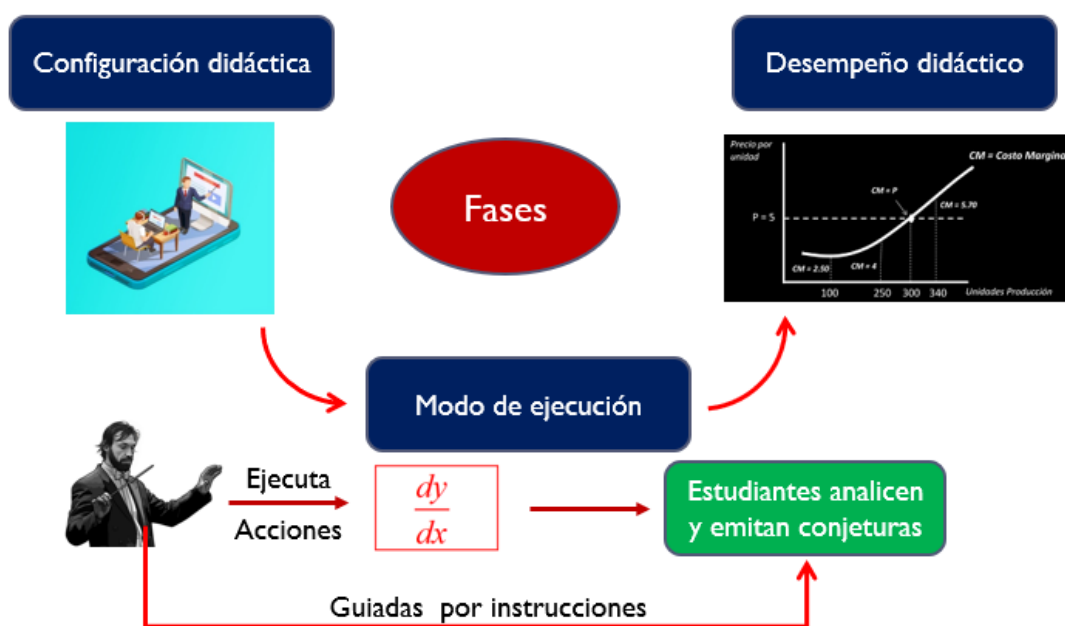
El *Modo de Ejecución* es la manera como el docente lleva a cabo las acciones que permitan orientar la actividad intensional. Contempla decisiones como la elaboración del material, forma de poner en marcha las actividades intensionales, y una de las importantes es usar la Configuración Didáctica para lograr el objetivo esperado, por consiguiente, tiene que tomar “decisiones sobre el modo de ejecución puede ser vistas como parte del diseño de una trayectoria hipotética del aprendizaje” (Drijvers et al., 2010, p.215). En el mismo sentido, Drijvers (citado en Say y Akkoc, 2016) afirma que “se define como las decisiones del profesor sobre la forma cómo o de qué manera configura una tarea al proporcionar ciertos roles para que los artefactos logren sus intenciones didácticas” (p.3).

En la presente investigación, el Modo de Ejecución está dado en un entorno de educación virtual con el apoyo del GeoGebra y el docente comandará el proceso a través de una video conferencia del Zoom con sus estudiantes (sujetos). Para ello, cuenta con una actividad exploratoria y dos actividades con Orquestación Instrumental. La actividad exploratoria está diseñada para identificar, individualmente, que conocimientos previos tienen los sujetos sobre el artefacto derivada. La actividad con *Orquestación Instrumental I* se caracteriza por que el proceso de enseñanza y de aprendizaje se hace a través del estudiante Sherpa (alumno guía). La actividad con *Orquestación Instrumental II* por su parte es desarrollada en parejas previamente seleccionadas por el docente. El rol del docente cambia en función del tipo de orquestación, en

ciertas oportunidades funge de experto mientras que en otros momentos cumple el rol de “coach” con el objetivo que el estudiante alcance a construir la noción de marginalidad a través de las actividades orquestadas.

Además, el *Desempeño Didáctico* (Drijvers et al., 2010) es uno de los elementos claves para una integración exitosa de artefactos en un entorno de aprendizaje es la asistencia institucional y social de este proceso de acción individual e indican que este concepto es comparable con la interpretación musical, donde se pone en manifiesto la coordinación entre los músicos (sujetos) y el director de orquesta (Docente). La figura 3 sintetiza las fases de la Orquestación Instrumental en el presente trabajo.

Figura 3 – Fases de una orquestación instrumental en la investigación



Fuente: Tasayco (2021, p. 32)

La investigación está organizada mediante una **configuración didáctica** a través de una educación virtual con **modo de ejecución** realizada mediante la plataforma de videoconferencias del Zoom desde donde el docente orientará el proceso de enseñanza y de aprendizaje con la asistencia del GeoGebra y una actividad propuesta, siendo monitoreada y guiada por el **desempeño didáctico** con el propósito de lograr la Génesis Instrumental individual y colectiva de estudiantes de economía. En la actualidad existen diferentes herramientas tecnológicas que hacen posible que existan diferentes *tipos de orquestación*. La investigación de Tabach (2013, como se citó en Şay y Akkoç, 2016) distingue diez tipos de orquestación, nosotros adaptamos dos de ellas a nuestra propuesta en educación virtual.

La primera propuesta didáctica con orquestación la denominaremos **Sherpa en el Trabajo**, se caracteriza por que el proceso de enseñanza se da en torno a estudiante Sherpa, quien funge de mediador y guía. Es el encargado de dirigir y realizar la tarea asignada mediante el uso del applet en GeoGebra con el apoyo del docente, todos los participantes se encontrarán interconectados mediante una videoconferencia del Zoom y estarán viendo la solución del estudiante sherpa. Este tipo de orquestación estimula el manejo colectivo del artefacto y de los esquemas de utilización. Desde el punto de vista investigativo, el estudiante sherpa está

compartiendo sus técnicas instrumentadas y por ende sus esquemas de acción instrumentadas las cuales son observadas por sus compañeros, los cuales pueden compararlas con las propias.

La segunda propuesta didáctica con orquestación instrumental la denominaremos **Trabajar y Saltar** se caracteriza por cuanto el proceso de enseñanza-aprendizaje se dará en parejas previamente seleccionadas en base a la actividad exploratoria mediante la opción de grupos pequeños del Zoom. El docente interactúa con cada grupo con el objetivo de monitorear el avance de la tarea asignada o brindar orientación a los integrantes. Cabe señalar que para esta investigación usaremos el término “saltar” a la acción de interactuar con los diferentes grupos por parte del docente. Este tipo de orquestación favorece, a que estando en grupos pequeños, puedan compartir sus esquemas de utilización y manejo del artefacto. También tienen un fuerte alcance colectivo, puesto que, cuando los grupos socializan sus soluciones estarán revelando sus técnicas instrumentadas a todos los estudiantes. Para el presente artículo, solo se explicará la primera propuesta didáctica con orquestación.

SHERPA EN EL TRABAJO

A continuación, se presenta la pregunta 1 de la actividad, así como las posibles técnicas instrumentadas y esquemas de utilización de las cinco preguntas.

Figura 4: Enunciado - pregunta 1.

01. Con la ayuda del GeoGebra grafique la función producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ en unidades, donde L representa la fuerza laboral medida en horas trabajador y K representa el capital medido en miles de soles además calcule $Q(20, 50)$, $Q(100, 2\sqrt{5})$ e interprete dichos resultados.

Fuente: Tasayco (2021, p. 66)

Los esquemas de acción instrumentada están vinculados con los esquemas mentales del sujeto y por ende no son visibles, pero se pueden inferir a partir de las técnicas instrumentadas que el sujeto usa al momento de realizar la tarea. Es decir, son la parte perceptible de un esquema de acción instrumentada, y están formado por un conjunto de evidencias (elementos matemáticos). En tal sentido, la tabla 1 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de resolver la pregunta 1 de la actividad con orquestación.

Tabla 1 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 1

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
- Configurar vista 3D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. - Digitar la regla de correspondencia de la función producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas. ($x = L$, $y = K$, $z = Q$)	Esquemas de uso - Definición de funciones de varias variables y valor puntual de una función. Esquemas de acción instrumentada - El valor de la función de varias variables en un punto dado en un contexto

- Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producción. $(Q(20,50) = 28.85$ y $Q(20,50) = 28.85)$ económico en concordancia con las unidades dadas.

Figura 5: Enunciado - pregunta 2.

02. Si fijamos el valor de uno de los insumos, el capital en 50 mil soles, el gráfico la función Producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función $Q(L)$.

Fuente: Tasayco (2021, p. 68)

Uno de los puntos importantes que permitieron el avance de la teoría económica es la incorporación de modelos matemáticos que represente el comportamiento económico de los mercados y usar sus características matemáticas como base para tomar decisiones que permitan el uso eficiente de los factores productivos. En tal sentido, el estudiante al resolver la pregunta tiene que tomar algunas decisiones, a partir de este modelo matemático, como por ejemplo considerar gráfica la función producción en base a valores discretos o continuos. Otro aspecto para considerar sería el conjunto de valores de entrada de la función producción ($L \geq 0$) para que esta tenga sentido desde el punto de vista económico (dominio). En consecuencia, la tabla 2 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de desarrollar la pregunta 2 de la actividad con orquestación.

Tabla 2 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 2

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
• Configurar vista 2D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. • Digitar la regla de correspondencia de la función producción a corto plazo $Q(L)$ en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas. ($x = L$, $y = Q$) • Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producción a corto plazo. ($Q(0) = 0$, $Q(1) = 4.78$, $Q(4) = 7.25$ y $Q(8) = 10.99$) • Trazar la curva de la función producción a partir de los puntos calculados basados en	Esquemas de uso • Definición de funciones de una variable y su valor puntual. • Definición de continuidad y monotonicidad de funciones de una variable. Esquemas de acción instrumentada • El valor de la función producción como la cantidad producida por cada trabajador que participa en el proceso productivo. • A medida que se incluyen más trabajadores al proceso productivo, la cantidad total producida aumenta según

las características de funciones como la continuidad y crecimiento.

la monotonidad de la función y por la representación gráfica.

Figura 6: Enunciado - pregunta 3.

03. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$, por ejemplo, el capital ($K = 50$) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función $PMe(L)$. ¶

Fuente: Tasayco (2021, p. 70)

Siguiendo con la lógica de tomar decisiones en base al modelo matemático, se hace importante el análisis de la productividad (producto medio) y el estudiante luego de realizar la gráfica de PMe^L puede plantearse algunas preguntas como por ejemplo ¿Cuál es más conveniente en un proceso productivo alcanzar el máximo de la función producción o alcanzar la máxima producción media? ¿la elección tomada usa los factores productivos de manera eficiente? Todas estas dudas podrían ser aplacadas en base a las gráficas de las funciones antes mencionadas y con el entendimiento del cambio de la función en el contexto económico. La tabla 3 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de realizar la pregunta 3 de la actividad con orquestación.

Tabla 3 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 3

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
- Configurar vista 2D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. - Digitar la regla de correspondencia de la función producto medio a corto plazo $PMe(L)$ en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas ($x = L$, $y = PMe$) - Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producto medio a corto plazo. ($PMe(1) = 4.78$, $PMe(2) = 3.63$, $PMe(4) = 2.75$ y $PMe(8) = 2.08$) - Trazar la curva de la función producto medio a partir de los puntos calculados basados en las características de funciones como continuidad, crecimiento y forma hipérbolica.	Esquemas de uso - Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. - Definición de continuidad, monotonidad y características gráficas de funciones de una variable Esquemas de acción instrumentada - El valor de la función producto medio a corto plazo como la cantidad promedio producida por cada trabajador que participa en el proceso productivo. - A medida que se incluyen más trabajadores al proceso productivo, la cantidad producida por cada trabajador disminuye según la monotonidad de la función y por la representación gráfica

Figura 7: Enunciado de la pregunta 4.

04. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$, por ejemplo, el capital ($K = 50$) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función $PMg(L)$.

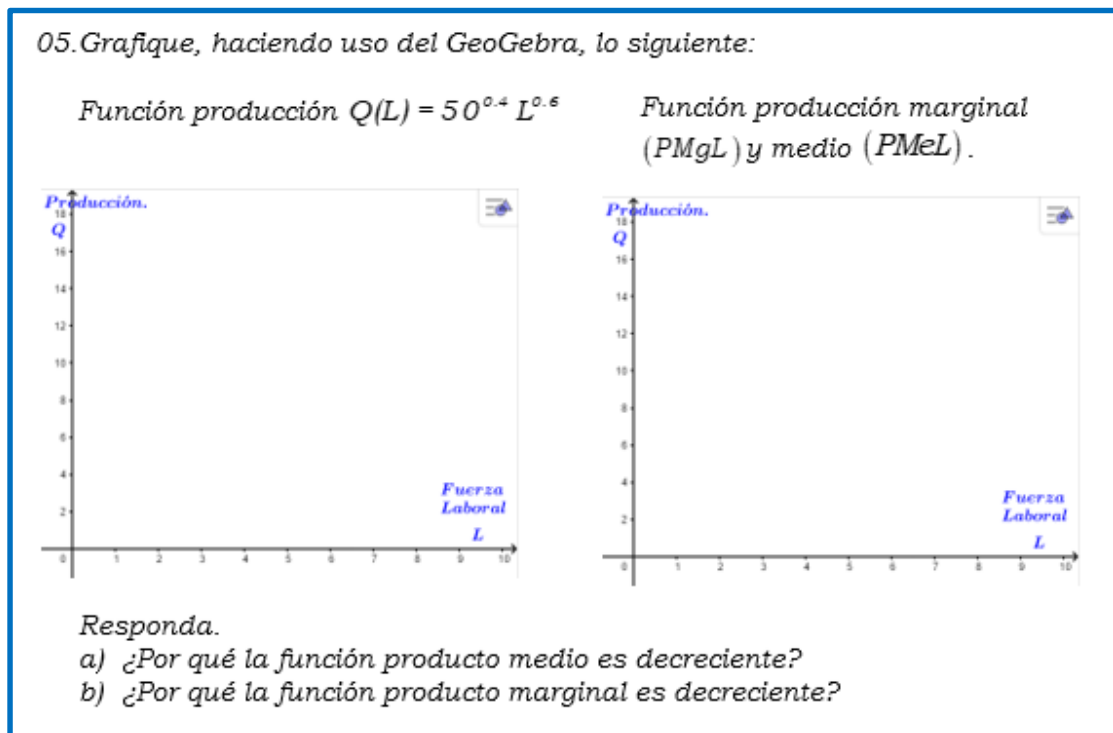
Fuente: Tasayco (2021, p. 71)

El objetivo del presente artículo es lograr en los estudiantes de economía el desarrollo del análisis en el margen, en tal sentido esta pregunta tiene como fin apropiar a los estudiantes de las características básicas de la función marginal, así como su relación con la función producción. Del entendimiento de esta relación se pueden llegar a conclusiones muy importantes como dónde encontrar el valor máximo de la función producto marginal e inferir la ley de rendimientos decrecientes. Esta ley propone que a partir de cierto nivel de empleo se obtienen valores de producción sucesivamente menores al agregar más trabajadores al proceso productivo. La tabla 4 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de realizar la pregunta 4 de la actividad con orquestación.

Tabla 4 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 4

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
• Configurar vista 2D del GeoGebra y ajustar la escala de los ejes. • Determinar la regla de correspondencia de la función producto marginal a corto plazo ($PMg^L = Q'(L_0)$) • Digitar la regla de correspondencia de la función producto marginal a corto plazo PMg^L en el interfaz algebraico del GeoGebra adecuándolas a las variables económicas. ($x = L$, $y = PMg^L$) • Usar el interfaz algebraico para calcular los valores numéricos requeridos de la función producto medio a corto plazo. ($PMg^L(1) = 2.87$, $PMg^L(2) = 2.17$, $PMg^L(4) = 1.65$ y $PMg^L(8) = 1.25$) • Trazar la curva de la función producto marginal a partir de los puntos calculados basados en las características de funciones como continuidad, crecimiento y forma convexa.	Esquemas de uso • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonicidad y características gráficas de funciones de una variable. • Reglas de derivación. Esquemas de acción instrumentada • El valor de la función producto marginal a corto plazo como la cantidad adicional producida cuando se incrementa un trabajador en el proceso productivo. • La monotonía de la función producto marginal a corto plazo, justificándola en base a la variación de la función por unidad adicional. • La función producto marginal a corto plazo mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función producción.

Figura 8: Pregunta 5.



Fuente: Tasayco (2021, p. 73)

La intención de esta pregunta es poder contrastar las diferentes funciones económicas ($Q(L)$, PMe^L , PMg^L) analizadas en esta actividad con orquestación a través de la visualización de sus gráficas. En base a ellos establecer relaciones matemáticas como monotonidad, valores extremos y óptimos. En consecuencia, el estudiante debería diferenciar tres zonas del proceso productivo.

La primera zona abarca hasta alcanzar el “óptimo técnico” (PMe^L es máxima) donde el incremento la fuerza laboral logrará el aumento de la productividad media. La segunda corresponde desde el “óptimo técnico” hasta el “máximo técnico” ($Q(L)$ es máxima) donde se planteará el dilema de cuantos trabajadores contratar y por último la tercera zona que va desde el “máximo técnico” en adelante, en esta zona no sería conveniente agregar más trabajadores puesto que haría que la producción decreciera. La comprensión de cómo se relacionan estas funciones económicas en estas diferentes zonas ayudaría a los estudiantes de economía en el proceso de toma de decisiones en su vida laboral. La tabla 5 y 6 muestra las técnicas instrumentadas esperadas, así como los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que deberían aflorar al momento de resolver la pregunta 5a y 5b respectivamente.

Tabla 6 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 5a

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
• Técnica instrumentada 1. A partir de la regla de la función $PMe^L = \frac{Q(L)}{L} = \frac{50^{0.4}L^{0.6}}{L} = \frac{50^{0.4}}{L^{0.4}}$ Dado que el numerador es una constata y el denominador la variable (L) que crece, se infiere que el cociente (producto medio) decrece • Técnica instrumentada 2. A partir de la gráfica de la función producción y basados en su forma cóncava creciente, podemos argumentar que a medida que se incorpora más trabajadores la variación de la producción no están significativa en comparación a la cantidad total de trabajadores lo cual conlleve a que el promedio disminuya (PMe^L decreciente).	Esquemas de uso • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonidad y características gráficas de funciones de una variable. Esquemas de acción instrumentada • El valor de la función producto medio a corto plazo como la cantidad promedio producida por cada trabajador en el proceso productivo. • La monotonía de la función producto medio a corto plazo, justificándola en base a la variación promedio de la función por unidad adicional. (valores discretos)

Tabla 6 – Técnicas instrumentadas y posible esquemas de utilización de la pregunta 5b

Técnica instrumental esperada	Posible esquemas utilización
• Técnica instrumentada 1. A partir de la regla de la correspondencia de la función producción y usando las reglas de derivación. $PMg^L = \frac{dQ(L)}{d(L)} = \frac{d(50^{0.4}L^{0.6})}{d(L)} = \frac{50^{0.4} \cdot 0.6}{L^{0.4}}$ Dado que el numerador es una constata y el denominador la variable (L) que crece, se infiere que el cociente (producto marginal) decrece • Técnica instrumentada 2. A partir de la gráfica de la función producción y basados en su forma cóncava creciente, podemos argumentar que a medida que se incorpora	Esquemas de uso • Definición de funciones de una variable y valor puntual de una función. • Definición de continuidad, monotonidad y características gráficas de funciones de una variable. • Reglas de derivación. Esquemas de acción instrumentada • El valor de la función producto marginal a corto plazo como la cantidad adicional producida cuando se incrementa un trabajador en el proceso productivo. • La monotonía de la función producto marginal a corto plazo, justificándola en

más trabajadores al proceso las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función producción disminuye (PMg^L decreciente).

base a la variación de la función por unidad adicional. (valores discretos)

- La función producto marginal a corto plazo mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función producción. (valores continuos)

ALGUNAS CONSIDERACIONES

Para llevar a cabo lo planteado en la presente investigación el docente debe tener conocimientos sobre las diferentes herramientas tecnológicas existentes actualmente y elegir aquella que mejor le sea útil para su propuesta didáctica. En tal sentido, hay que tener presente las potencialidades y restricciones que tienen los artefactos cuando pretendemos incluirlo en nuestras propuestas didácticas.

La intención de la propuesta didáctica es aportar una manera diferente de abordar la noción de marginalidad siendo este concepto económico muy trascendente para los estudiante y egresados de la carrera de Economía. En tal sentido, incluir el software libre GeoGebra ayudaría a la visualización de las características dinámicas de las funciones económica y propiciar en el estudiante alcance la génesis instrumental mediante estas orquestaciones propuesta en la investigación.

En cuanto a la orquestación basada en el estudiante sherpa, se recomienda elegirlo con anticipación en función de la actividad exploratoria por cuanto debe tener ciertas características que ayudarían al propósito de la actividad. El estudiante sherpa debe tener habilidad comunicativa, ordenado al mostrar sus resultados y empático. Si bien es cierto que el proceso de enseñanza gira en torno a él, los procesos de instrumentación también se pueden dar a través de la participación de los otros estudiantes al aportar ideas para solucionar alguna de las tareas. Permite que todos los estudiantes tengan la oportunidad de reaccionar, interactuar y por ende realizar aportes, si bien es cierto que el docente es quien gestiona la orquestación, pero la actividad se gira en torno del estudiante sherpa.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., & GÓMEZ, P. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. **Ingeniería didáctica en educación matemática**, v. 1, p. 97-140, 1995. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf> . Consultado en: 01 jun. 2021.

BÉGUIN, P., Y RABARDEL, P. Concevoir pour les activités instrumentées. **Revue d'intelligence artificielle**, v. 10, n. 10, p. 1-10, 2001. Disponible en :

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.472.2482&rep=rep1&type=pdf> . Consultado en : 5 sept. 2020.

DRIJVERS, P., DOORMAN, M., BOON, P., REED, H. Y GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool : instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, v. 75, p. 213–234, 2010. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>. Consultado en: 20 jun. 2021.

DRIJVERS, P. (2012). **Teachers Transforming Resources into Orkestrations**. In G. Gueudet, B. Pepin, y L. Trouche (Eds.), From text to “lived” resources; mathematics curriculum materials and teacher development (pp. 265–281). New York, NY: Springer.

FEUDEL, F. Relevant knowledge concerning the derivative concept for students of economics-A normative point of view and students' perspectives. **Hall**, 2016. Disponible en: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337944>. Consultado en: 15 nov. 2021.

LARA, L. Análisis de los recursos interactivos en las aulas. **Segundo congreso virtual: Integración sin barreras en el siglo XXI**. Argentina, 2002. Disponible en: http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_43/nr_479/a_6424/6424.pdf. Consultado en: 12 ene. 2021.

LAGRANGE, J. B. Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: A two-year classroom experiment with the TI-92. **International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education**, vol. 6, n. 2, p.143-65, 1999.

LIAL, M., Y HUNGERFORD, T. **Matemáticas para administración y economía**. México, D. F: Pearson Educación, 2000.

MERCAPIDE ARGÜELLO, G. **Dificultades de aprendizaje del cálculo y enseñanza de la economía. Los conceptos de función y derivada**. 2018, Tesis (Maestría). Universidad de Cantabria, España. Disponible en: <http://hdl.handle.net/10902/13733>. Consultado en: 25 oct. 2020.

RABARDEL, P. **Los hombres y la tecnología. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad de Industrial de Santander, 2011.

RUIZ, P. **Los conceptos matemáticos de función y de derivada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía**. 2016, Tesis (Maestría). Universidad de Cantabria, España. Disponible en: <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/8902>. Consultado en: 05 set. 2020.

SAY, R. & AKKOC, H. Beyond Orchestration: Norm Perspective in Technology Integration, In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.) **Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, 2015. Disponible en: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289469>. Consultado en: 09 oct. 2020.

TABACH, M. Developing a general framework for instrumental orchestration. **Proceedings of the 8th Congress of European Research of Mathematics Education**, Antalya, Turkey. 2013. Disponible en: http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG15/WG15_Tabach.pdf . Consultado en: 21 oct. 2020.

TROUCHE, L. Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestration. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, vol. 9, n. 3, p. 281-307, 2004. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>. Consultado en: 10 jul. 2020.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. **Didactique des mathématiques**, v. 25, p. 91-138, 2005. Disponible en: <https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathematiques-necessite-des-orchestrations/>. Consultado en: 02 oct. 2020.

VERILLON, P., & RABARDEL, P. Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. **European Journal of Psychology of Education**, vol. 10, n. 1, p. 77-101, 1995. Disponible en : <https://www.jstor.org/stable/i23419823>. Consultado en: 30 oct. 2020.

VERGNAUD, G. Théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, vol. 10, n. 23, p. 133-170-213, 1990. Disponible en : https://gerardvergnaud.files.wordpress.com/2021/09/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf . Consultado en: 10 set. 2020.

Submetido em: 23 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

SALAZAR, J.V.F.; TASAYCO, P. Orquestación Instrumental del Análisis Marginal de Funciones Económicas en un entorno de Educación Virtual. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, v. 17, n. 42, p. 44-60, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p44-60.id450>

Evidencia de conocimiento docente especializado en espacios de trabajo matemático que usan recursos tecnológicos

José Vilella¹

Centro de Estudios en Didácticas Específicas. Laboratorio de Investigación en Ciencias Humanas. CONICET-UNSAM

Rosa Ana Ferragina²

Centro de Estudios en Didácticas Específicas. Laboratorio de Investigación en Ciencias Humanas. CONICET-UNSAM

RESUMEN

En este artículo compartimos el análisis de la planificación de una clase de geometría – concebida como un espacio de trabajo matemático- gestionada por una docente que enseña geometría con recursos tecnológicos. Se propone un marco teórico que toma en consideración la idea de Espacio de Trabajo Matemático, el modelo MTSK sobre el conocimiento especializado del profesor y las cualidades de un trabajo de tipo colaborativo. Se reflexiona junto con la docente que da clases a estudiantes de 14 a 16 años, acerca de cuáles son las condiciones de la gestión de la enseñanza, que producen aprendizaje geométrico, cuando se usan recursos tecnológicos en las clases de matemática.

Palabras clave: Conocimiento especializado; Espacio de Trabajo Geométrico; Recursos tecnológicos; Trabajo colaborativo; Enseñanza de la Geometría.

Evidence of specialized teaching knowledge in mathematic workspaces that use technological resources

ABSTRACT

In this article we share the analysis of the planning of a geometry class – conceived as a mathematic workspace – managed by a teacher who teaches geometry with technological resources. A theoretical framework is proposed that takes into consideration the idea of Mathematic Workspace, the MTSK model on the specialized knowledge of the teacher and the qualities of a collaborative work. It is reflected together with the teacher who teaches students from 14 to 16 years old, about what are the conditions of teaching management, which produce geometric learning, when technological resources are used in mathematics classes.

Keywords: Specialized knowledge; Mathematic Workspace; Technological resources; Collaborative work; Teaching Geometry.

Evidências de conhecimento especializado em espaços de trabalho matemático que utilizam recursos tecnológicos

RESUMO

Neste artigo compartilhamos a análise do planejamento de uma aula de geometria – concebida como espaço de trabalho matemático – gerenciada por um professor que ensina geometria com recursos tecnológicos. Propõe-se um arcabouço teórico que leve em consideração a ideia de Espaço de Trabalho Matemático, o modelo MTSK sobre o conhecimento especializado do professor e as qualidades de um trabalho colaborativo. Reflete-se junto com o professor que ensina alunos de 14 a 16 anos, sobre quais são as condições da gestão do ensino, que produzem

¹ Doctor en Didáctica de la Matemática (UHU). Docente e investigador (CEDE-LICH-UNSAM-CONICET), San Martín, Buenos Aires, Argentina. Martín de Yrigoyen 3100. (1650) San Martín. Buenos Aires. Argentina.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2834-2809>. E-mail: jose.vilella@unsam.edu.ar

² Magister en Didáctica de la Matemática (UNSAM). Docente e investigador (CEDE-LICH-UNSAM-CONICET), San Martín, Buenos Aires, Argentina. Martín de Yrigoyen 3100. (1650) San Martín. Buenos Aires. Argentina.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6684-305X>. E-mail: rosana.ferragina@gmail.com

aprendizagem geométrica, quando os recursos tecnológicos são utilizados nas aulas de matemática.

Palavras-chave: Conhecimento especializado; Espaço de trabalho geométrico; Recursos tecnológicos; Trabalho colaborativo; Ensinando Geometria.

INTRODUCCIÓN

La relación entre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, puede investigarse a partir de problemas profesionales de quienes se ocupan de la comunicación del saber geométrico en las aulas. En el análisis de estos problemas, la clase se considera como un objeto de estudio en el que se estudia la interacción y la interdependencia que se da entre docentes, estudiantes y los contenidos a enseñar (STYLIANIDES, A. y STYLIANIDES, G.;2013).

Este artículo se centra en un aspecto de la relación descripta: el que toma en cuenta los momentos de la clase de geometría en la que quien enseña, asume profesionalmente la decisión de usar recursos tecnológicos, como artefactos, para gestionar las secuencias de enseñanza que diseña para sus clases. (HOYLES, 2004). Esta decisión profesional, se enmarca en la clase caracterizada como un espacio de trabajo matemático (KUSNIAK, 2011) en el que quien enseña muestra evidencias de conocimiento especializado para esa tarea (CARRILLO, et al 2018). El estudio que se describe, analiza la actuación docente, en el marco de la gestión de un trabajo colaborativo (BEDNARZ, 2004) entre investigadores y docentes.

MARCO TEÓRICO

Los registros de la práctica de la enseñanza, ayudan a ejemplificar, a partir de diferentes representaciones acerca del enseñar matemática, diferentes ideas teóricas (VILLELLA y STEIMAN; 2021). La práctica de la enseñanza es incierta, impredecible (COLS, 2000) e imposible de analizar sin incluir su dimensión moral. Al considerar a la enseñanza de la matemática como una práctica social, se hace foco en las transformaciones en su entorno físico, social e individual que produce. En este sentido, se puede afirmar que construye saberes matemáticos, formas de actuar y de pensar que la diferencian de otro campo de prácticas; utiliza recursos creados para estos ambientes donde se desarrolla, así como otros que sufren transformaciones en su uso. A través de las prácticas, las personas que participan de la enseñanza de la matemática, se convierten en docentes y estudiantes de una institución escolar y de un espacio curricular determinado (VILLELLA, et al; 2021)

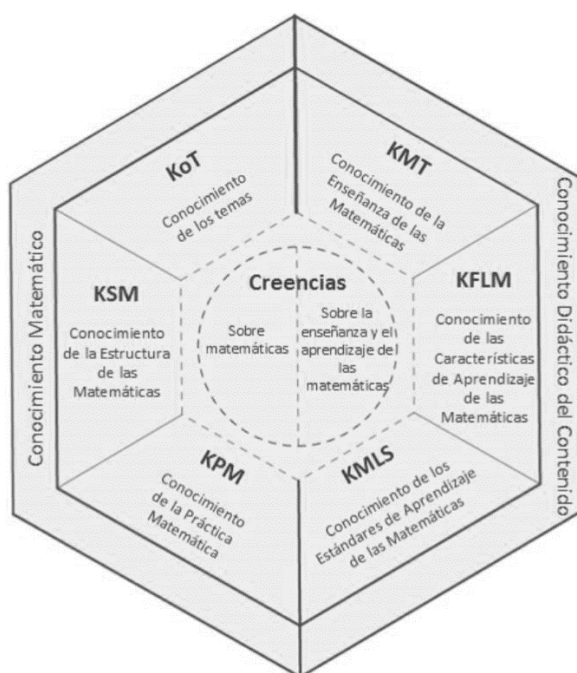
Las y los docentes que enseñan matemática, se asumen profesionales de la enseñanza cuando, entre otras cualidades, consideran que el proceso de resolución de problemas a los que enfrentan a sus estudiantes, produce como resultado la construcción de conocimiento matemático localmente adaptado. El conocimiento especializado de quien enseña, se erige como un modo de comprensión de los contenidos matemáticos prescriptos curricularmente, ligado a la comprensión de cómo se los aprende y, por ende, cómo se los puede enseñar (VILLELLA, et al, 2018). Así, este conocimiento adquiere un carácter especializado (en el sentido atribuido en el modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas-Mathematical Teacher Specialized Knowledge-MTSK-*) que contempla:

- el conocimiento de los temas, de la estructura de la matemática y del hacer matemática (conocimientos sobre y de la matemática) y,

- conocimientos de la enseñanza de la matemática, de las características del aprendizaje de la matemática y del curriculum de matemática (conocimientos pedagógicos y didácticos) (fig.1).

Además, se entrecruzan con las creencias y concepciones acerca de la matemática y su enseñanza (CARRILLO et al, 2018). La especialización se refiere a la ayuda en el diseño de situaciones de enseñanza – toma en cuenta las relaciones entre los propios contenidos, y relaciones con otros contenidos de otras materias- y análisis de resultados de aprendizaje.

Figura 1 – Modelo MTSK



Fuente: Carrillo et al (2018,p.240)

En concordancia con Shulman (1986) y los aportes de Carrillo et al (2018), se define el conocimiento pedagógico del contenido (Pedagogical Content Knowledge- PCK-) como la fusión del contenido matemático a enseñar y su didáctica, en orden a hacerlo asequible a las y los estudiantes con los cuales será trabajado. En este artículo, se caracteriza ese conocimiento especializado de la geometría compuesto por dos dominios diferenciados: el del conocimiento matemático (Mathematical Knowledge -MK-) y el PCK que incluyen varios subdominios, imbuidos por las creencias y concepciones que las y los docentes poseen acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (fig.1). Se complementa, a partir de los estudios de Mishra y Koehler (2006), con la comprensión de las y los docentes sobre la interacción entre contenido geométrico, didáctica de la geometría y uso de recursos tecnológicos. De esta forma, ese conocimiento queda conformado por el:

- Conocimiento del contenido (Content Knowledge -CK-): qué sabe quién enseña acerca del contenido geométrico que hace circular en su aula.

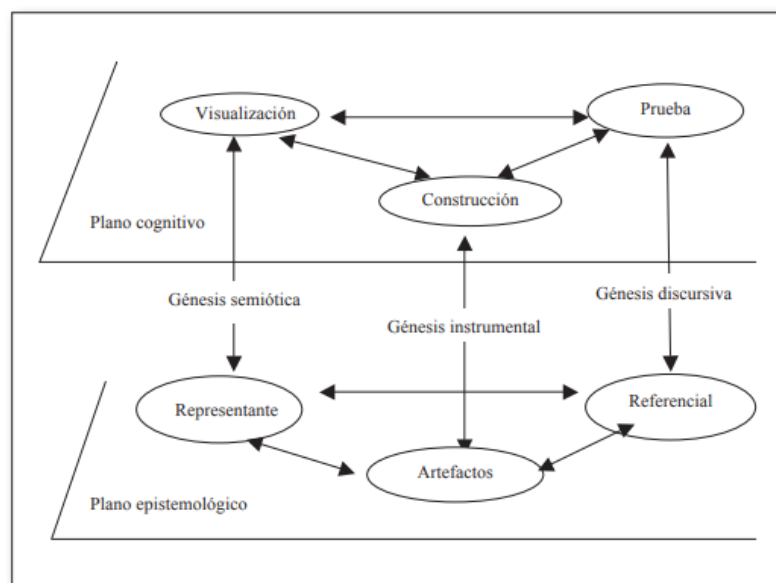
- Conocimiento pedagógico (Pedagogical Knowledge -PK-): qué conocimiento tienen las y los docentes sobre prácticas de enseñanza, estrategias y métodos para promover el aprendizaje de las y los estudiantes.
- Conocimiento de la tecnología (Technological Knowledge -TK-): qué conocimiento de las y los docentes sobre las tecnologías pueden integrarse en la planificación y gestión de sus clases en orden a lograr aprendizaje en las y los estudiantes.

La interacción de estos tipos de conocimiento, genera la necesidad de analizar también:

- Conocimiento tecnológico del contenido (Technological Content Knowledge-TCK-): conocimiento sobre cómo puede ser representado el contenido geométrico a estudiar a través de las tecnologías: capacidad de utilizar la tecnología disponible para contenidos de la materia.
- Conocimiento pedagógico del contenido (PCK): cómo los temas se organizan en problemas en orden a representar y adaptarse a los diversos intereses y habilidades de las y los estudiantes.
- Conocimiento tecnológico pedagógico (TPK): conocimiento sobre cómo usar las tecnologías en las prácticas de enseñanza, estrategias y métodos para promover el aprendizaje del contenido geométrico a estudiar por parte de las y los estudiantes.
- El conocimiento tecnológico del contenido pedagógico (TPACK): relaciona tecnología, didáctica y contenido geométrico que permite a las y los docentes desarrollar estrategias de enseñanza, apropiadas y específicas al contexto en el que trabajan.

La reflexión sobre la enseñanza, supone analizar la actuación estudiantil fomentada por la gestión docente en el aula de matemática, el papel de los recursos en la transformación de los espacios de trabajo creados ad-hoc, el estudio del sentido del conocimiento mediado por los diferentes recursos seleccionados, los aspectos sociales e institucionales que tensionan ese espacio de trabajo matemático (KUSNIAK, 2011). Estos espacios son ambientes organizados, que permiten resolver tareas matemáticas y están formados por dos planos: el cognitivo y el epistemológico. En el plano cognitivo se incluyen los procesos de visualización, construcción y prueba, necesarios para la resolución de los problemas que se pueden presentar desde cualquiera de los capítulos que conforman la matemática escolar. En el campo epistemológico, se ubica al representante (íconos, figuras, símbolos que aluden a los objetos matemáticos), artefactos (recursos con potencial de ser usados por cada estudiante como un instrumento para el aprendizaje) y referencial (temas matemáticos a los que se hace alusión en cada actividad) (fig.2).

Figura 2- Espacio de Trabajo Matemático



Fuente: Kusniak (2011, p.18)

Las componentes de los planos se articulan mediante tres génesis: semiótica (asociada a las representaciones de los objetos matemáticos), instrumental (permite que los artefactos que pueblan el aula se transformen en instrumentos; una entidad mixta que comprende el artefacto y componentes cognitivos relacionados con los esquemas de uso) y discursiva (da sentido a las definiciones, propiedades, funciones...en el entramado del razonamiento matemático que responde al dominio puesto en juego – geométrico, algebraico, analítico...). Así, el aula es un espacio de trabajo matemático (ETM), que en este artículo será geométrico, por el dominio conceptual al que hace referencia. La construcción de esta aula se configura, en lo que se da en llamar paradigmas geométricos. Estos paradigmas toman en cuenta tres ejes: el filosófico (creencias), el cognitivo (modos de pensamiento que puede ser intuitivo, deductivo o experimental) y el epistemológico (geometría como conocimiento). En el aula, estos paradigmas modelizan espacios geométricos diferentes:

- ✓ *Geometría natural*: aula en la que los objetos están definidos por el modelo geométrico, en correspondencia con la realidad espacial y local de las y los estudiantes. Los medios de prueba son de tipo material y se utilizan artefactos para la representación del objeto en un universo concreto.
- ✓ *Geometría axiomática natural*: aula en la que la geometría es concebida como un esquema de la realidad. La validación se apoya sobre un sistema axiomático. Los problemas que se estudian, no usan todos los axiomas para validar sus soluciones.
- ✓ *Geometría axiomática formalista*: aula en la que los objetos geométricos provienen del formalismo del modelo geométrico elegido. La validación se realiza exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo

geométrico subyacente (es el que se da en el espacio de trabajo en el que se estudian, junto con la geometría euclidiana, las no -euclidianas.)

Cuando las o los docentes proponen un problema, las y los estudiantes generan proyectos de solución. Este diálogo entre lo epistemológico y lo cognitivo, hace que el aula sea un espacio de trabajo geométrico dinámico (fig. 2). De acuerdo con el tipo de proyecto diseñado por los grupos de estudiantes, las aulas constituyen distintos espacios geométricos:

- ✓ *El espacio de referencia:* es el espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios geométricos. Quienes resuelven los problemas, usan propiedades y proposiciones propias de la geometría.
- ✓ *El espacio idóneo:* es el espacio definido en términos didácticos. El protagonismo de este espacio recae en la acción docente.
- ✓ *El espacio personal:* es el espacio definido por las y los estudiantes, de acuerdo con sus conocimientos y capacidades cognitivas, al reflexionar acerca de los conocimientos aprendidos y los que pusieron en práctica para resolver los problemas. Es un espacio en el que la figura docente también cobra importancia, como estructuradora de la reflexión estudiantil.

Pensar el aula de la manera descripta, dota a quien enseña de herramientas profesionales para reflexionar sobre: las concepciones epistemológicas que cada docente tiene sobre la matemática y cómo ésta influye en el diseño, gestión y evaluación del proceso de enseñanza; la elección y organización de las secuencias de actividades propuestas a las y los estudiantes; el análisis didáctico del conjunto de tareas desarrollado por el grupo de estudiantes como forma de solución a esas secuencias y las justificaciones que realizan sobre las mismas.

Este tipo de estudio puede adoptar la forma de trabajo colaborativo. Con este formato, se intenta producir conocimiento relevante sobre la práctica profesional y encontrar canales de diálogo entre el llamado mundo de la investigación y el mundo de la práctica. De esta manera, se da curso a un proceso de producción de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, que se realiza en forma conjunta entre grupos de investigación y docentes que interactúan para contribuir desde sus especificidades a la construcción de saberes. Estos saberes surgen de la reflexión sobre la práctica de enseñar geometría y vuelven a ella para dotar de sentido a las decisiones que las y los docentes toman a diario en el proceso de enseñanza. La implementación de esta metodología colaborativa, supone intervenciones en la geometría que se enseña que no sólo son fértiles en términos de aprendizaje estudiantil, sino también para la reflexión docente acerca de cómo se enseñan. La construcción del conocimiento didáctico, se nutre del ejercicio del juicio crítico frente a la de toma de decisiones en la práctica, dependiendo de las condiciones imperantes y las apuestas en el contexto de la acción específica con la asistencia de una o un investigador en el área. Esta construcción de conocimiento relacionado con una determinada práctica profesional, se funda en la comprensión docente de las situaciones de enseñanza dentro de las cuales se desarrolla profesionalmente y en donde se asume como una o un profesional que puede reflexionar sobre las mismas. En esta perspectiva, el grupo investigador dialoga con el grupo docente desde el interior del contexto en que éste opera, para entender cómo fundamentan e implementan sus decisiones. (BEDNARZ, 2004)

METODOLOGÍA

En este artículo mostramos cómo reflexionamos junto con una docente que enseña en la escuela secundaria³ de la provincia de Buenos Aires, Argentina, con la intención de responder si las decisiones que toma, mejoran el aprendizaje geométrico en contextos escolares reales. Además, qué recursos tecnológicos para la enseñanza, pueden usarse para lograr la mejora que se busca; cómo gestionar esos recursos en el aula; cómo fundamentar esas decisiones.

Nuestro primer acercamiento fue a través de un encuentro realizado en plataforma Zoom. La primera de las actividades de esa reunión, fue informarle a la docente qué es lo que nos motivaba como grupo investigador (GI), qué nos proponemos con esta investigación. Le contamos y fundamentamos nuestro accionar y le preguntamos qué es lo que ella esperaba de estos encuentros (BEDNARZ, 2004). Planteamos que esta investigación intenta probar formas de estudiar el conocimiento especializado que se evidencia en el aula donde se enseña geometría con recursos tecnológicos. (FERRAGINA; 2012) La docente, a la que llamaremos Soledad (S), planteó que quería tener acceso a otras formas de gestionar los recursos en el aula y, a partir de ello, evaluar si la calidad del aprendizaje mejoraba o no.

Luego de este intercambio de motivaciones, pedimos a Soledad que respondiera la siguiente pregunta con tres palabras: ¿qué se genera en tu aula cuando se usa tecnologías (TIC) para resolver las actividades? Las palabras que usó fueron: **asombro** relacionado con la potencialidad de los recursos tecnológicos; **pelea** como analogía referida al clima en la que la discusión, la argumentación y las necesidades de convencer al otro se hacen, algunas veces, en climas vehementes; **investigación** como forma de encarar el diseño y ejecución de proyectos de solución a los problemas planteados.

Propusimos a Soledad, trabajar en sesiones de 45 minutos de duración, con el fin de diseñar juntos las actividades a desarrollar en su aula de geometría en la que se usarían recursos tecnológicos. De las sesiones se extrajeron algunos registros de los diálogos que muestran algunos aspectos de las fases de una investigación de diseño (KELLY et al., 2008; SHAVELSON et al., 2003) que se cumplieron, se trabajó con un software elegido por la docente para ensayar diferentes soluciones a un mismo problema, se extrajeron conclusiones de esos procesos.

³ La escuela que tiene como estudiantes, jóvenes de 12 a 17 años.

RESULTADOS

Presentamos los resultados de la investigación a través de la descripción de las sesiones de trabajo en las que, a través de sus siglas o de aclaraciones con sus nombres, marcamos la evidencia del conocimiento especializado de la docente en el tipo de espacio de trabajo diseñado, de acuerdo con un paradigma geométrico priorizado.

Soledad trajo a la *primera de las sesiones*, la actividad de la fig. 3 que seleccionó de un repertorio de situaciones que tiene en su haber.

Leímos conjuntamente la actividad y mantuvimos un diálogo del que compartimos un extracto:

Soledad (S): - Traje esta actividad porque me encanta

Grupo Investigador (GI): - ¿qué quiere decir que te encanta?

S: - Me permite hacer muchas cosas en el aula

GI: - ¿Por ejemplo?

S: - Para poder asignar un cartel a una figura, los chicos tienen que ver (resalta su pronunciación) y apelar a su memoria para recordar propiedades. Es un desafío.

GI: - Claro, y como hay carteles que sirven para más de una figura se va a producir debate. ¿Cómo te lo imaginás?

S: - ¿El debate? (hace una pausa) Va a ser divertido porque conociendo el grupo, van a querer convencer al otro que tienen la verdad y están en lo cierto

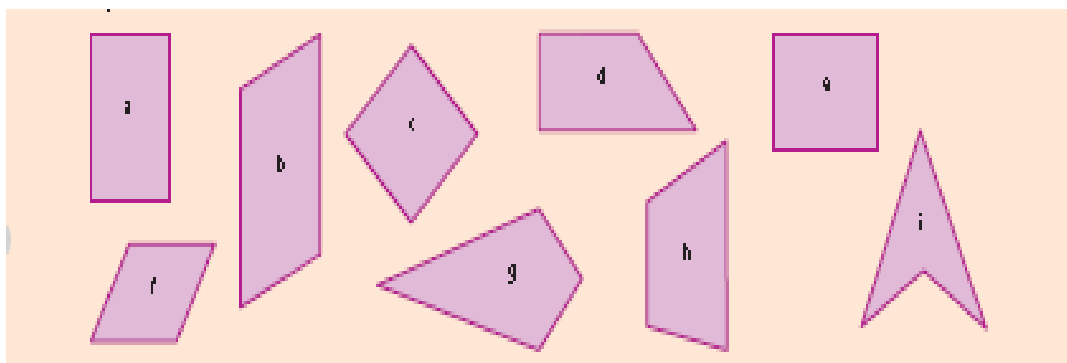
GI: - ¿Vos serías moderadora del debate?

S: - ¡Claro! (muy enfática) Yo quiero que ellos hablen, armen ideas, las justifiquen, debatan entre ellos si son ciertas o no, se convenzan y quieran convencer. De esa forma actuaría (resalta el verbo) el proceso de demostración que quiero que sigan

GI: - ¿Los carteles te van a dar esas posibilidades? Te proponemos analizar cada uno de ellos para anticipar lo que los chicos puedan decir ¿te parece?

Figura 3- Actividad seleccionada por la docente para el trabajo en el aula

Seleccionen entre los carteles que siguen a las figuras, cuál corresponde a cada una de ellas.



Carteles:

1. Las diagonales se cortan entre sí
2. Las diagonales son congruentes
3. Solo dos de sus lados son paralelos
4. Los lados opuestos son congruentes y paralelos. Los ángulos opuestos son congruentes
5. Tiene dos pares de lados iguales y adyacentes
6. Todos los lados son congruentes. Los lados opuestos son paralelos. Todos los ángulos son rectos.
7. Las diagonales son perpendiculares
8. Las diagonales son las bisectrices de los ángulos de los vértices

9. Una diagonal forma dos triángulos iguales
10. Las diagonales forman cuatro triángulos iguales.

Fuente: Docente Soledad

El intercambio abrió una discusión epistemológica acerca del contenido de los carteles, lo que nos permitió dialogar acerca de cómo el problema propuesto, aporta al aula un riesgo motivado por la incertidumbre y un desafío cognitivo de valor para el aprendizaje (espacio de trabajo idóneo; KMT; KMLS). La discusión se organizó sobre estos interrogantes: qué contenidos trae el grupo de estudiantes al aula, cuando resuelven la actividad; qué contenidos incorporan al resolver la actividad; qué evaluará la profesora cuando se resuelve esta actividad; qué decisiones tomará Soledad antes, durante y después de implementar esta actividad (espacio de trabajo idóneo y personal; KoT; KSM; KFLM)

Compartimos con Soledad algunas ideas acerca de la demostración en el aula y acordamos con ella que esta práctica matemática (KPM), entra en el abanico de los problemas profesionales referidos a la enseñanza de la geometría, en tanto implica para quien enseña la necesidad de discernir entre considerarla una herramienta de la actividad matemática de las y los estudiantes, o un objeto de enseñanza. (KSM; KPM) La demostración es una herramienta esencial de prueba, una manera de validar un enunciado, un género discursivo cuya estructura hace posible en forma simultánea la comunicación y la evaluación. En este contexto, el problema de enseñanza consiste en reflexionar sobre la evidencia que supone aquello que se ve en una figura. Es decir, problematizar la evidencia en orden a tensionar la racionalidad del grupo de estudiantes (espacio de trabajo idóneo y personal; geometría axiomática natural). Se erige, entonces, como una escisión entre mostrar al estudiante cómo se hace para demostrar para que lo copie u orientar a construir – aunque en forma desprolija, caótica y tal vez incompleta- sus propios enunciados que, siendo válidos, les permitan argumentar sobre la verdad de aquello que están afirmando. En la primera opción se copia una demostración, en la segunda se construye un camino posible a la demostración (espacio de trabajo personal – idóneo; KPM; KFLM). Diferenciamos demostrar de otras competencias a desarrollar en el aula, como la de *explicar* se asumiría la acción de despejar las razones que hacen que algo ocurra para lo que se puede usar el lenguaje cotidiano. El resultado obtenido será considerado como *prueba*, cuando las y los estudiantes puedan usar una serie de enunciados organizados de acuerdo con un conjunto bien definido de reglas. (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría axiomática natural; KMT)

En la *sesión 2* trabajamos sobre las supuestas respuestas que podrían dar las y los estudiantes a la actividad y qué decisiones tomaría Soledad frente a ellas. Dialogamos sobre la posibilidad de que, en la clase, las y los estudiantes pueden usar propiedades sin que las enuncien con precisión. (espacio de trabajo personal; geometría natural; KFLM; KMT) Conversamos entonces acerca de qué hacer cuando ellos recurran a la ostensión para justificarse (espacio de trabajo idóneo; geometría natural; KoT; KMT):

GI: - *¿Pensaste qué hacer si uno de los alumnos te dice que la figura “e” se lleva la mayor parte de los carteles?*

S: - *Pero pueden usar más de un cartel para cada figura*

GI: - *Sí, claro. Y lo que responde no es incorrecto. Pero: ¿cómo lo justificaría si le preguntaras por qué?*

S: - *Me diría, es un cuadrado y tiene todas las propiedades posibles. (Riendo) ¡El cuadrado es perfecto!*

GI: - *¿Pero es un cuadrado? Digamos que se parece a un cuadrado... (con tono de duda)*

S: - *¡No! ¡Claro! (entre asombrada y exultante). Si me dice eso y yo lo acepto, ganó -lo- que- se -ve- y -no- lo- que- se- dice (separando cada palabra)*

GI: - *¿Cómo?*

S: - *Él ve un cuadrado, pero: ¿está seguro de que lo es? Tiene que usar propiedades*

GI: - *¿Cómo te parece desafiarte?*

S: - *¡Construyendo! (con mucho énfasis)*

En esta sesión se evidencia una evolución en la planificación de la clase: se toma conciencia del rol que en ella juegan los contenidos, el lenguaje y el tipo de racionalidad que sustentan las pruebas producidas. (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural; KMT; KoT; KSM; KPM) Un nuevo problema profesional tensiona el conocimiento especializado de la docente: la ruptura entre el mundo sensible que nos devuelve imágenes a través de figuras donde la eficacia del dibujo supone la verdad del contenido y el racional que, con rigor, deja de lado lo que se ve y se apoya en el método a partir del cual se relacionan la verdad y el conocimiento. (geometría axiomática natural; espacio de trabajo idóneo-personal; KSM; KPM; KMT; KFLM)

Con las tecnologías de lápiz y papel, ese pasaje se vería forzado por las necesidades pedagógicas. Con la irrupción de un Software de Geometría Dinámica (SGD) en el aula, el pasar del trazado preciso de las figuras a su estudio, es una ruptura que lleva a las y los estudiantes a acceder a la teoría, en tanto deben alejarse de la singularidad del evento para cotejar un significado contra otro, una pertinencia contra otra, una racionalidad contra otra. (espacio de trabajo personal; geometría axiomática natural; TK; TCK; TPACK). El grupo de estudiantes tiene que asumir que la validez de un enunciado es legítima cuando se confirma como necesaria, en contraposición a otros enunciados que son sólo posibles. (espacio de trabajo personal; geometría axiomática natural; KPM; KSM; KFLM; TCK) Esto supone asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos; verificar una proposición de un caso para el cual no se asume que, si funciona ahora, entonces funcionará siempre; explicar las razones de validez de una aserción para la validación de transformaciones de un objeto en calidad de representante de una determinada clase; centrarse en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural-formalista; KPM; KFLM; PCK; TPK)

En la sesión 3 nos centramos en la selección del SGD que se podría introducir en el aula con el fin de generar un escenario que cumpla con las condiciones acordadas.

GI: - *¿Usarás lápiz y papel o SGD para gestionar la discusión de esa figura y ese cartel?*

S: - *Voy por GeoGebra. Me encanta*

GI: - *¿Los chicos lo usan?*

S: - *Sí, en la escuela lo usamos todos*

GI: - *¿Qué les propondrías hacer?*

S: - *Eh... (dudando) ¡Ya sé! (con alegría). Les pediría que construyan un cuadrado y que, usando las herramientas disponibles, vayan probando si se cumplen o no las propiedades*

GI: - *¿Cuál sería el enunciado de la actividad?*

Seguimos trabajando con Soledad en ese enunciado y en los para qué de cada una de las acciones que les pediría hacer a los grupos de estudiantes y de aquellas que retomaría de las que esos grupos, espontáneamente, decidieran realizar. (espacio de trabajo personal; geometría natural; KPM; KMT; KFLM; TK; TCK)

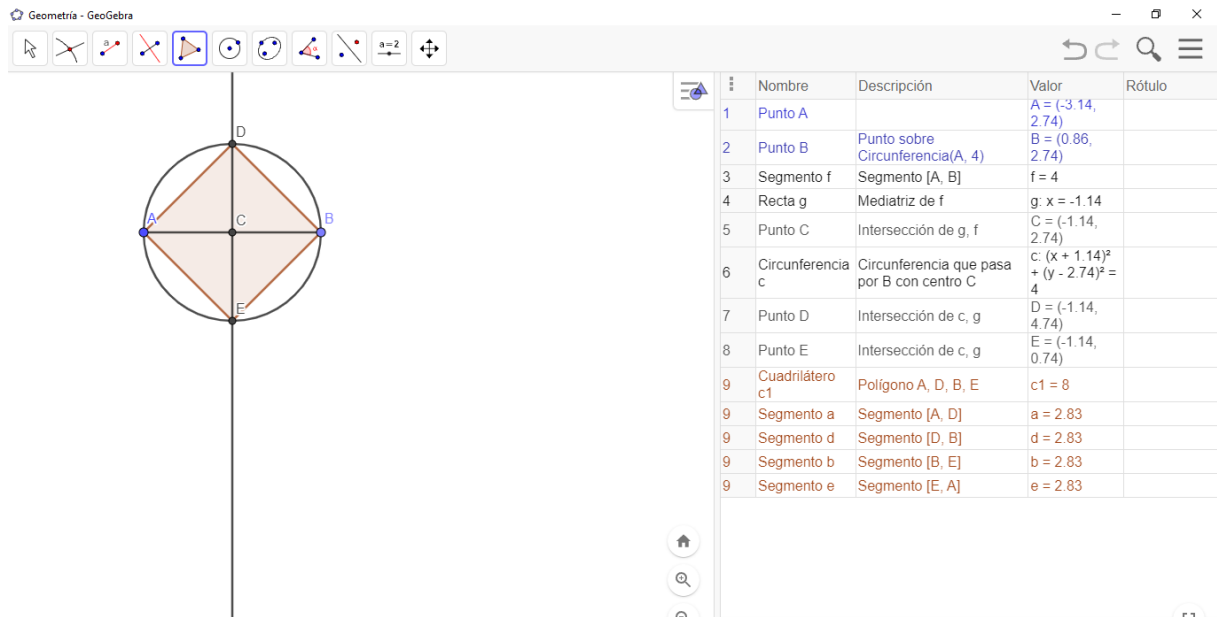
De esta manera, acordamos que la consigna sería: *Demostrar que la asignación de la mayoría de los carteles a la figura “e” sólo es posible, si “e” es un cuadrado.*

Supusimos que el aula mostraría una actividad diferente, caracterizada por la aparición de prácticas directas avaladas por el *software*: arrastrar, medir, ocultar/exponer, trazar, hacer zoom... y aquellas que fomentaría Soledad con una intervención pensada e intencional: conjeturar, validar, verificar, corroborar una conjetura, argumentar, visualizar, sistematizar información y relaciones matemáticas, justificar, explorar. (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría natural- axiomática natural; PCK; TCK; TPACK)

Las construcciones así logradas se convertirán en los objetos de experimentación sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso. Así, se contribuye a superar la tensión entre los procesos de visualización y los de justificación, para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático. (espacio de trabajo idóneo-referencial; geometría axiomática formalista; PCK; TPK; TPACK) Por ello, insistimos en la planificación de la actividad superando la idea de sólo proponer al grupo de estudiantes, una construcción: la tarea de construcción tendría que ser un problema en cuya solución, las y los estudiantes pongan en juego sus conocimientos previos, y las posibilidades del *software*. Producir un dibujo en entornos favorecidos por un SGD implica preservar propiedades espaciales durante el arrastre; requiere del uso de propiedades geométricas para su construcción, y coloca en un segundo plano los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva. (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría axiomática formalista; PCK; TPK; TPACK; KFLM) He aquí el desafío profesional de la enseñanza que, al resolverse, brinda evidencia de un conocimiento especializado que se vehiculiza generando abstracciones a partir de las acciones que se realizan sobre los objetos matemáticos y su representación.

En la *sesión 4* analizamos algunas de las producciones de las y los estudiantes que Soledad seleccionó y trajo a nuestros encuentros. Las presentó de acuerdo con lo que ella consideró de mayor a menor grado de satisfacción con la respuesta esperada. Argumentó que esa satisfacción, estuvo relacionada con el uso o no de las propiedades (espacio de trabajo personal-idóneo; geometría axiomática natural; KoT, KSM; KPM; KFLM). Así, el grupo de estudiantes denominado Grupo 1, propuso la solución que se muestra en la figura 4.

Figura 4- Solución propuesta por el grupo de estudiantes 1



Fuente: Elaboración propia

Soledad dijo que este grupo le manifestó que en su protocolo pueden leerse las decisiones que tomaron. Argumentaron que primero decidieron construir un segmento de longitud dada, al que le trazaron su mediatriz. Con esto, dijeron asegurarse determinar el punto medio del segmento, la perpendicular que pasara por él y así, ya tenían carteles de las diagonales tomados en cuenta. Aseguraron que usaron ese punto medio para trazar una circunferencia con ese centro. A esa circunferencia pertenecen los extremos del segmento. Marcaron las intersecciones y esos nuevos puntos, junto con los otros dos extremos del segmento original, son los vértices de la figura. Los unieron con la herramienta polígono y el protocolo confirma lo que buscaban: el ADBE es un cuadrado (espacio de trabajo personal; geometría axiomática natural).

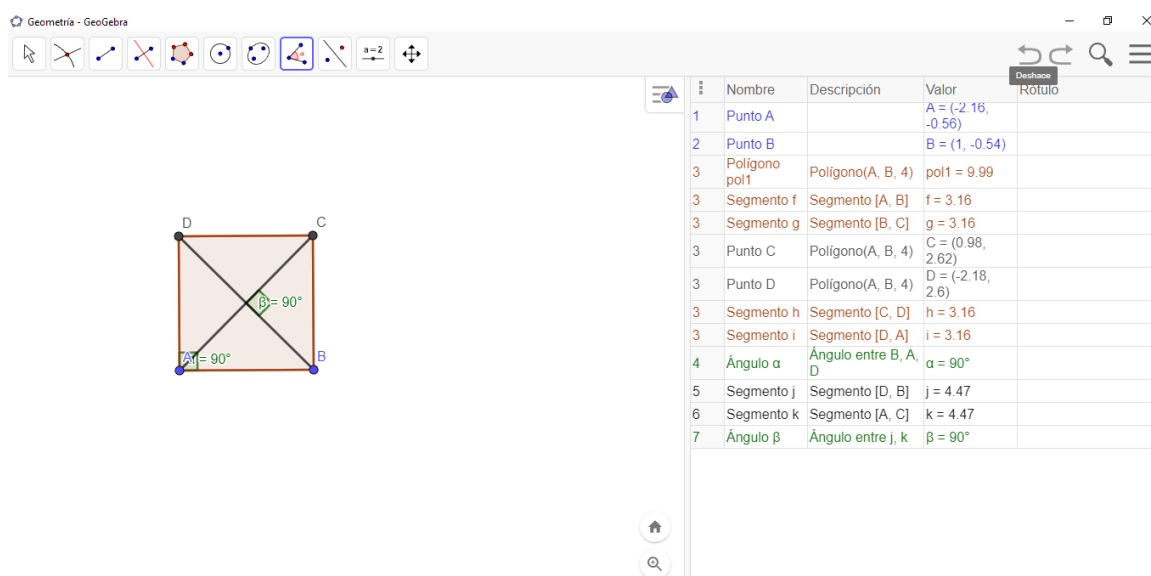
Al dialogar con Soledad, le preguntamos cómo había gestionado el diálogo con el grupo y qué puede ella decir de esta producción. Al respecto nos dijo que ella les pidió que explicaran lo que habían hecho diciendo porqué habían tomado esa decisión (espacio de trabajo idóneo-personal; geometría natural-axiomática natural; TK; TCK; TPK). Luego les preguntó por qué el grupo afirmaba que el ADBE es cuadrado. Soledad manifestó que el grupo sólo pudo contestarle “por lo que te dijimos antes” (espacio de trabajo personal; geometría natural). Ante la producción del grupo 1, Soledad aseguró que le pareció correcto el uso de las propiedades para gestionar el recurso que hizo el grupo y que, si bien requiere de algunos ajustes que va a hacer en la próxima clase cuando gestione un debate general, la producción es correcta y se ajusta al diseño curricular (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural; TPK; TPACK; KFLM; KMLS)

Al presentar la producción del grupo 2, Soledad manifestó su sorpresa por lo interesante del punto de partida, en cuanto al contenido usado y lo pobre de la producción general (KoT; KPM; KFLM). La producción del grupo 2 se muestra en la figura 5.

Al analizar la producción, Soledad relata que ella interpretó que el grupo decidió construir un cuadrado, para lo que usaron polígono regular. Al preguntarles porqué lo habían decidido, dijo recibir como respuesta que, si no tenían un cuadrado, no podían avanzar (espacio de trabajo personal; geometría natural). Además, sin que mediara intervención por parte de ella, dijo que el grupo se adelantó a aclararle que en la pantalla se ve lo que dicen los carteles 5 y 6 y también el 1 (espacio de trabajo personal; geometría natural). Es el momento en el que ella intervino con la pregunta: ¿qué quiere decir se ve? (espacio de trabajo idóneo; geometría axiomática natural; PCK; TPK; TPACK) para lo que el grupo dudó en responder y como ejemplo probaron lo que dice el cartel 7 midiendo el ángulo y, como es recto, las diagonales son perpendiculares. Ahí le dijeron que así sale todo el resto. (espacio de trabajo personal; geometría natural-axiomática natural).

Nuestra intervención hizo foco en la lectura que Soledad pudo hacer de la producción del grupo y que anticipó en el criterio de su selección y puntualizó cómo ella, gestionó las preguntas para hacer aparecer los contenidos que debieron usarse para la demostración, cuestionando la cualidad ostensiva de la figura como recurso (espacio de trabajo idóneo; PCK; TPACK; KoT; KMT).

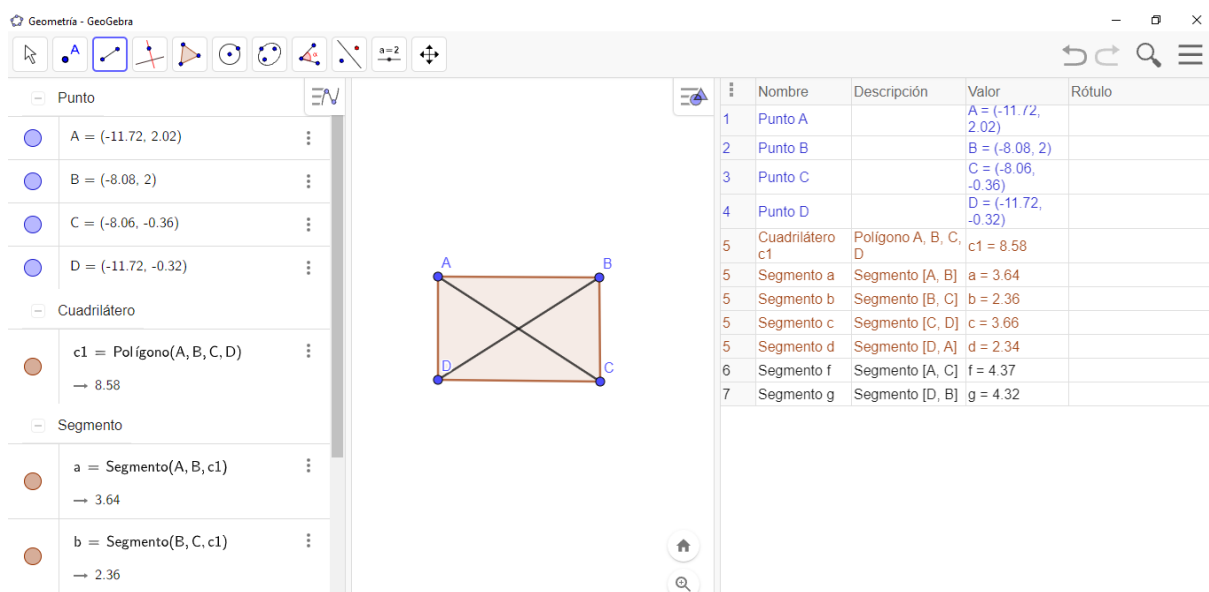
Figura 5- Solución propuesta por el grupo de estudiantes 2



Fuente: Elaboración propia

La sesión finalizó con el análisis de la producción del grupo de estudiantes 3 que, de acuerdo con el criterio de Soledad, fue el que menos calidad matemática presentó. Se muestra en la figura 6.

Figura 6- Solución propuesta por el grupo de estudiantes 3



Fuente: Elaboración propia

Soledad describió a este grupo como muy reticente al uso del SGD. Calificó la reticencia, en que sus integrantes manifiestan que no les gusta usar tecnología para trabajar (espacio de trabajo personal). Cuando pasó por la máquina en la que estaban trabajando, Soledad les preguntó cómo habían pensado la solución. El grupo respondió que, basándose en el protocolo de construcción, pueden probar que se cumplen las propiedades de los carteles 7,1,2,8,9 y 10, en ese orden. (espacio de trabajo personal; geometría natural). Ella comenta que no hurgó en más detalles y sólo cerró su intervención con la siguiente pregunta: ¿pudieron probar que ABCD es un cuadrado? (TPACK; KMT).

Al analizar juntos esta respuesta estudiantil, acordamos con Soledad en cómo lo actitudinal interfirió en la producción y que requiere del diseño de otras estrategias de enseñanza: permitir el uso de lápiz y papel, recortes de hojas, etc. (KMT; KFLM; KPM). Además, pensamos en cómo organizar los intercambios docentes-estudiantes cuando la motivación no se hace presente (KMT).

CONCLUSIONES

A partir de las sesiones relatadas, afirmamos que con Soledad trabajamos en el polo prueba del espacio de trabajo de su aula (fig. 2) ya que, para reflexionar sobre la demostración, ella necesitó pensar en cómo articular los elementos del espacio personal e idóneo de acuerdo con el modelo geométrico del referencial (eventualmente utilizó el polo visualización que tensionó cuando traspasó lo que se ve en la pantalla para centrarse en las condiciones de construcción de las figuras en ella reflejada). En Soledad, los componentes del plano cognitivo y epistemológico se relacionaron uno a uno, como se puede inferir a partir de la fig.2, y también a través de una relación de planos verticales. De acuerdo con las características de los grupos estudiantiles del aula, Soledad deberá estar atenta a las provocaciones didácticas estudiantiles que se manifiestan cuando éstos expresan su confusión respecto de los contenidos y reaccionan

de acuerdo con las exigencias inmediatas de la situación planteada (las y los estudiantes responden al problema planteado fluctuando entre el modelo de la geometría natural y el de la geometría axiomática natural). De no tomarse en cuenta lo anterior, Soledad no enseñará a demostrar, no propondrá realizar pruebas intelectuales: se conformará con un uso oportuno de pruebas pragmáticas y con minimizar la dificultad que podrán tener las y los estudiantes al pasar de una prueba pragmática a una intelectual. En próximas sesiones de trabajo con este grupo investigador, tendremos que ofrecer a Soledad la oportunidad de reflexionar acerca del rol del dibujo y el uso de SGD en las demostraciones que propiciará que aparezca en su aula. Así, esta aula mostrará un espacio de trabajo geométrico personal inestable, ya que el proceso de prueba del plano cognitivo estará tensionado por la visualización. Esta tensión didáctica, entre cómo Soledad gestionará su propio espacio de trabajo idóneo y personal que se manifiesta a través de qué decisiones toma para diferenciar su propia manera de resolver el problema y demostrar la validez de su propuesta de solución, de la que hagan sus estudiantes. Estas decisiones la llevará a reflexionar acerca de si: aceptará pruebas pragmáticas como demostración, en cómo gestionará el pasaje de argumentaciones expresadas de forma oral a formas escritas, tomará en consideración el peso que en los grupos estudiantiles juega el dibujo en las producciones (génesis figural).

La intervención del GI en la elaboración y análisis de la actividad para el aula, muestra un ejemplo de cómo reflexionar con una docente acerca de la posibilidad de utilizar un paradigma geométrico apropiado a cada grupo de estudiantes. Esto se logra al potenciar armónicamente los polos del espacio de trabajo matemático (fig.2) sin hacer que ninguno de ellos sea preponderante (por ejemplo, no abusar del polo de visualización) y generando la circulación entre el polo prueba y el referencial, al proponer redacciones de justificaciones que recurran al formalismo y leyes del lenguaje matemático. Así, estaremos proponiendo a las y los estudiantes actividades que les permitan: *interpretar* lo que se les propone; *comprender* la información dada y establecer relaciones con los comandos que provee el programa; *formular* y *comprobar conjeturas* acerca de los conceptos que está aprendiendo; *diseñar* estrategias para confirmar o refutar sus conjeturas; *resumir* la información incorporada; *comunicar* los resultados de sus hallazgos intentando definir aquello que lograron construir.

Un estudio de diseño como el que compartimos, permite relacionar la práctica educativa y los análisis teóricos, a través de informes situados (SKOVSMOSE, 2009) sobre el aprendizaje de las y los estudiantes:

- relacionando directamente el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido; testeando las teorías en la práctica;
- trabajando con las y los docentes en la construcción del conocimiento; reconociendo los límites de la teoría;
- capturando las especificidades de la práctica y las ventajas potenciales de adaptar la teoría a su contexto de forma iterativa y refinadora;
- estudiando los problemas cotidianos del aula, de las escuelas y de las comunidades que influyen en la enseñanza y el aprendizaje, adaptando la enseñanza a estas condiciones (KELLY et al., 2008; SHAVELSON et al., 2003).

Los resultados nos permiten tomar en consideración que, en un trabajo colaborativo como el descripto, se hacen evidentes componentes del conocimiento especializado del profesor

(MTSK- fig.1). Los diálogos tomados de las sesiones de trabajo, muestran cómo MTSK permite disgregar el conocimiento con propósitos analíticos, y caracterizar la enseñanza como una actividad situada, en la que la puesta en acto de conocimientos, procesos y habilidades docentes, le otorga visos de una actuación profesional. El registro de lo actuado, la discusión de lo anotado, el intercambio de puntos de vista sobre los pasos dados, pone en evidencia la necesidad de conocer en profundidad los temas de geometría que se están usando y las decisiones didácticas que focalizan en el análisis del rol de estudiantes como productores de conocimientos matemáticos en el nivel secundario de enseñanza. Los elementos con los que continuaremos indagando sobre el PCK y TPACK de Soledad a través de otro tipo de dispositivos que nos permitan dialogar con ella acerca de:

- *lo que se entiende por objeto*: todo aquello que puede ser indicado, señalado o referenciado cuando se hace, comunica o aprehende geometría. Asumimos así la metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas a la geometría y que nos permite llenarla de objetos de enseñanza –por lo tanto, de elementos que pueden ser analizados en la práctica– tomando como tales a los conceptos, las propiedades, las representaciones, los argumentos...
- *el significado de los objetos geométricos* a partir de la acción que efectúan las y los estudiantes con relación a dichos objetos por intervención de sus docentes, en particular en aulas que, como espacio de trabajo matemático, usan tecnologías informáticas para organizar las secuencias de enseñanza.
- *la idea de aula como una comunidad* constituida por estudiantes y docentes involucrados en una misma clase de situaciones problemáticas: las del aprendizaje de la geometría a través de recursos tecnológicos, que conlleva a realizar prácticas sociales compartidas condicionadas por los instrumentos disponibles, las reglas y sus modos de funcionamiento.
- *las cualidades de un proceso de enseñanza de un objeto geométrico* para un grupo de estudiantes por parte de profesionales de la enseñanza que asumen conscientemente lo que dicen las instituciones matemáticas y didácticas sobre el objeto de estudio en entornos tecnológicos.
- *la necesidad de analizar del sistema de prácticas* que tiene lugar en la clase de geometría, con el objeto de que sirva al estudio de las y los estudiantes y las evaluaciones de sus aprendizajes, así como al mejoramiento de las prácticas de enseñanza.
- *la importancia de evidenciar el rol profesional en la enseñanza* cuando, las y los docentes diseñan situaciones para que sus estudiantes aprendan contenidos en entornos que hacen dialogar la percepción con la deducción y que no se conforman con la descripción, sino que invitan a los resolutores al análisis y el trabajo colaborativo.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo es parte del proyecto PICT-2019-03051 radicado en el LICH-UNSAM-CONICET. Los autores son miembros de la red iberoamericana MTSK.

REFERENCIAS

BEDNARZ, N. Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. In M. Niss, E. Emberg (Eds.) **Proceedings of the International Conference on Mathematics Education**, Copenhagen, Denmark, 4-11 july, 2004.

CARRILLO J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L.C., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., VASCO, D., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILAR-GONZÁLEZ, RIBEIRO, M., y MUÑOZ-CATALÁN, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.

COLS, E. La enseñanza y los profesores: metáforas, modelos y formas de enseñar. **Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación**, IX (17), 8 – 22, 2000.

FERRAGINA, R. (ed.) **GeoGebra entra al aula de Matemática**. Montevideo: Ediciones Espartaco, 2012

HOYLES, C., NOSS, R. y KENT, P. On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms, **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 9(3), 309-326, 2004.

KELLY, A. E., LESH, R. A. y BAEK, J. Y. (Eds.) **Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching**. New York, NY: Routledge, 2008.

KUZNIAK, A. L'espace de travail mathématique et ses génèses. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 16, pp. 9-24, 2011.

MISHRA M., KOEHLER, J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record** Volume 108, Number 6, pp. 1017–1054, 2006.

SHAVELSON, R. J., PHILLIPS, D.C., TOWNE, L. y FEUER, M.J. On the science of education design studies. **Educational Researcher**, 32(1), 25-28, 2003.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, 15(2), 4-14, 1986.

SKOVSMOSE, Ole. **Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica**. Bogotá: Una empresa docente, 1999.

STYLIANIDES, A. y STYLIANIDES, G. Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. **ZDM. Mathematics Education**, 45(3), 333-341, 2013.

VILLELLA, J; FIORITI, G; FERRAGINA, R; LUPINACCI, L; BIFANO, F; ALMIRÓN, A. A professional development experience in Geometry for High School teachers: introducing teachers to Geometry workspaces. Herbst, P; Cheah, U; Jones, K; Richard, P. (eds)

International Perspectives on the teaching and learning of Geometry in secondary schools.
Cham: Springer, pp197 – 214, 2018.

VILLELLA, J., FIORITI, G., FERRAGINA, R., BIFANO, F., LUPINACCI, L., ALMIRÓN, A., VICTORIA GÜERCI, y SUSANA AMMANN. (2021). Train as a Math Teacher: Creative and Proactive Process of Professional Development. **Social Education Research**, 2(2), 241-255, 2021. <https://doi.org/10.37256/ser.222021894>.

VILLELLA, J., y STEIMAN, J. De un artículo periodístico a una secuencia de enseñanza de geometría: la mirada didáctica general en diálogo con la específica. **En Clave Didáctica** 2, 7-18, 2021. http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/en-clave-didactica/2020_Revista-CEDE_2.pdf.

Submetido em: 24 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

VILLELLA, José; FERRAGINA, Rosa Ana. Evidencia de conocimiento docente especializado en espacios de trabajo matemático que usan recursos tecnológicos. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 61-78, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p61-78.id451>

O sistema Learning 6.5: Tecnologia eficaz para a educação a distância e online em ciência e tecnologia

Emile Clément Bonaventure Comlan¹
Directeur de Beijing Elearning Technology

Saddo Ag Almouloud²
Universidade Federal da Bahia

RESUMO

Este artigo, de cunho teórico-descritivo, tem por objeto descrever as potencialidades de um artefato tecnológico denominado Learning 6.5, composto por cinco unidades tecnológicas intituladas ScienceWord 6.5, Class 6.5, Skill 6.5, Marking 6.5 e Symtone 6.5, que permitem, respectivamente, processamento de texto e criação de testes executáveis no computador; ensino e apresentações científicos; realização de cursos, tarefas e exames a distância e online; correção online de deveres de casa e exames; e ensino a distância por modalidade online. O Learning 6.5 é um conjunto poderoso de ferramentas de trabalho para o professor, que facilita a elaboração do projeto e a subsequente criação de arquivos eletrônicos de materiais didáticos, de ensino e de avaliação dos alunos. Além disso, facilita a criação de objetos dinâmicos de aprendizagem que facilitam a descrição de conceitos científicos complexos. O sistema Learning 6.5 pode popularizar a confecção de materiais didáticos para cursos científicos dinâmicos e animados. A integração entre as tecnologias de processamento de texto científico, de apresentação científica e multimídia e de internet, faz dele uma ferramenta com potencial para a melhora das experiências e dos resultados da aprendizagem online.

Palavras-chave: Tecnologia; Educação a distância e online; Ensino de ciências; Learning 6.5.

The Learning 6.5 system: Effective technology for distance and online education in science and technology

ABSTRACT

The object of this theoretical-descriptive article is to describe the potentialities of a technological artifact called Learning 6.5, composed of five technological units (ScienceWord 6.5, Class 6.5, Skill 6.5, Marking 6.5 and Symtone 6.5) that respectively allow word processing and the creation of tests executable on the computer, scientific teaching and presentations; distance and online courses, assignments and exams; online homework correction and exams; and online distance learning. Learning 6.5 is a powerful set of working tools for the teacher. It facilitates the design and creation of electronic files for teaching materials, student teaching and assessment. In addition, it facilitates the creation of dynamic learning objects that make it easier to describe complex scientific concepts. The Learning 6.5 system demystifies and popularizes the capture of dynamic, animated science course materials. Its integration of scientific word processing technology, scientific presentation technology, and multimedia and internet technologies greatly enhances online learning experiences and outcomes.

Keywords: Technology; Distance and online education; Science education; Learning 6.5.

¹ Doctorat en Probabilités et Statistiques à l'Université Normale de l'Est (Shanghai) E-mails: 2144669753@qq.com / ecomlan@yahoo.com Sites web: www.novoatest.com / www.scienceoffice.com

² Doutorado em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I – França. Professor no Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História de Ciências da UFBA. Rua Antonio Turati, 78, Vila Celeste, São Paulo – SP, CEP 02464-050. <https://orcid.org/0000-0002-8391-7054> . E-mail: saddoag@gmail.com.

El sistema Learning 6.5: tecnología eficaz para la enseñanza a distancia y en línea de la ciencia y la tecnología

RESUMEN

El objeto de este artículo, de carácter teórico y descriptivo, es describir las potencialidades de un artefacto tecnológico denominado Learning 6.5, compuesto por cinco unidades tecnológicas, ScienceWord 6.5, Class 6.5, Skill 6.5, Marking 6.5 y Symtone 6.5, que permiten, respectivamente, el tratamiento de textos y la creación de pruebas ejecutables en el ordenador; la enseñanza y las presentaciones científicas; los cursos a distancia y en línea, las tareas y los exámenes; la corrección de tareas y los exámenes en línea; y la formación a distancia en línea. Learning 6.5 es un potente conjunto de herramientas de trabajo para el profesor. Facilita el diseño y la creación de archivos electrónicos de materiales didácticos, de enseñanza de los estudiantes y de evaluación. También viabiliza la creación de objetos de aprendizaje dinámicos que facilitan la descripción de conceptos científicos complejos. El sistema Learning 6.5 desmitifica y populariza la captura de materiales dinámicos y animados para cursos de ciencias. Su integración de la tecnología de procesamiento de textos científicos, la tecnología de presentación científica y las tecnologías multimedia y de internet mejora enormemente las experiencias y los resultados del aprendizaje en línea.

Palabras clave: Palabras clave: Tecnología; Educación a distancia y en línea; Enseñanza de las ciencias; Learning 6.5.

INTRODUÇÃO

Um dos objetivos das tecnologias digitais na Educação é proporcionar ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimentos e à superação de dificuldades de aprendizagem. Elas também podem auxiliar os professores na construção de situações de ensino que tenham potencial para uma aprendizagem significativa de determinados conceitos. Para alcançar esses objetivos, é necessário formar os professores para que eles tenham condições de enfrentar os novos desafios provocados pela integração das TIC na Educação,

Goulart e Bacon (2016, p. 256) afirmam que, entre as várias dimensões que interferem na integração de tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem de disciplinas científicas – a Matemática, por exemplo –, destacam-se a epistemológica, a semiótica, a cognitiva, a institucional e a do professor (ator central da integração).

Almouloud (2018) assevera que a introdução de artefatos tecnológicos no campo da Educação deve ser analisada por meio de um olhar global sobre os dispositivos de formação e evidencia a necessidade de explicitar os modelos subjacentes de aprendizagem. O processo didático é questionado pela presença das mídias que, por sua limitação técnica, por sua capacidade de virtualização, por suas potencialidades na dinâmica da comunicação, vão agir como verdadeiro ator da formação. O modelo didático deve ser, portanto, reformatado para que a mídia tenha lugar nos processos educativos.

No que diz respeito ao professor, o dispositivo midiático é frequentemente objeto de uma longa apropriação/instrumentação que, às vezes, encontra-se no centro da prática de ensino. Por outro lado, o professor seleciona e transpõe os saberes por meio de um ou vários dispositivos midiáticos que, por sua vez, influem em sua escolha.

Chaachoua (2000) observa que um dos obstáculos relacionados às tecnologias aplicadas à Educação diz respeito aos efeitos da “transposição informática” (BALACHEFF, 1994). Para Balacheff (1994), o desenvolvimento dos ambientes informáticos e sua introdução na escola e na formação de professores são acompanhados de fenômenos relativos à transposição informática relacionada ao tratamento do conhecimento. No contexto do desenvolvimento de um software educativo, essa transposição é importantíssima e significa, de fato, uma

contextualização do conhecimento que pode ter consequências importantes sobre os resultados das aprendizagens. O autor afirma ainda que, além das restrições e condições relacionadas ao processo da transposição didática, temos as relativas à modelização e à implementação informática do saber a ensinar: restrições da modelização compatível, restrições ligadas à linguagem informática e as que dizem respeito à capacidade de armazenamento das máquinas.

Nesta perspectiva, o objeto deste texto é descrever as potencialidades de um artefato tecnológico denominado Learning 6.5 (COMLAN, s/d), desenvolvido por Beijing eLearning Technology (BET). Este artefato é composto por cinco unidades tecnológicas (ScienceWord 6.5, Class 6.5, Skill 6.5, Marking 6.5 e Syntone 6.5) que permitem, respectivamente, processamento de texto e criação de testes executáveis no computador; ensino e apresentações científicas; realização de cursos, tarefas e exames a distância e online; correção online de deveres de casa e exames; e ensino a distância por modalidade online.

Geralmente, um processador de texto é utilizado para digitar, formatar e possivelmente trazer mais modificações em um documento antes que ele seja impresso ou salvo. Quando se trata de um documento científico, a situação se torna totalmente diferente. Dificuldades estabelecidas porque tais documentos, por sua própria natureza, conteriam fórmulas matemáticas, fórmulas químicas, desenhos geométricos, representações gráficas etc. Para encontrar uma forma de contornar essas dificuldades, as universidades e outras instituições recorrem ao uso de alguns processadores de texto científicos.

Apesar de parecer trazer um alívio, a solução acima mencionada é apenas aparente, pois os documentos científicos digitados continuam sendo uma verdadeira dor de cabeça, necessitando do uso combinado de processador de texto comum e editores científicos especializados, mas levando invariavelmente a um resultado não satisfatório.

A aumento da complexidade na preparação de um documento científico ocorreu veloz e drasticamente nas áreas de pesquisa, educação, biblioteca digital, indexação de documentos e aplicações da Internet. Também o crescente volume de trabalhos acadêmicos, tutoriais, trabalhos de teste em matemática, física, química e todos os tipos de materiais didáticos exigiu o uso de uma ferramenta poderosa e abrangente para o processamento de tais documentos científicos. Em um clima tão exigente, uma forma de realizar a automação completa do escritório, alcançar a digitalização completa dos livros científicos e resolver a transmissão e indexação online deles tem sido a questão inevitável na agenda mais urgente do desenvolvimento futuro.

O sistema Learning 6.5 é uma tecnologia de nova geração, com uma combinação de tecnologia de rede e um conjunto de softwares revolucionários e versáteis que facilitam não apenas a criação e operação de uma escola virtual digital, mas também o processamento de qualquer tipo de documento científico, a criação de projeto de qualquer tipo de apresentação ou slide de ensino científico e o ensino e a avaliação a distância, envolvendo várias aplicações das ciências matemáticas e utilizando um computador.

Em resumo, por meio de um ambiente tecnológico sofisticado e natural, o sistema Learning 6.5 pode desmistificar e popularizar a produção de materiais eletrônicos dinâmicos e interativos de aprendizagem ao vivo e a criação de salas de aula virtuais para o ensino e avaliação do conhecimento científico e técnico, tanto em sala de aula quanto online. Os professores podem criar facilmente suas próprias aulas online e gerenciar seus cursos e avaliações com o Learning 6.5. Eles não precisam de um assistente.

Nas próximas seções, descrevemos as potencialidades educativas e administrativas do Learning 6.5.

O SISTEMA LEARNING 6.5: UMA SOLUÇÃO EFICAZ PARA OS DESAFIOS TECNOLÓGICOS DA EDUCAÇÃO CIENTÍFICA

Em nossa introdução, destacamos algumas características do sistema Learning 6.5. Apresentamos nesta parte os três problemas resolvidos pelo sistema Learning 6.5.

1. O desenvolvimento de conteúdo interativo animado e dinâmico no ensino das disciplinas científicas e técnicas

A tecnologia de processamento de texto científico ScienceWord 6.5, a tecnologia de avaliação Skill 6.5 e a tecnologia de apresentação científica Class 6.5 do sistema Learning 6.5 facilitam a criação de cadernos eletrônicos para todos os assuntos, incluindo:

- atividades de aprendizagem animadas com objetos de aprendizagem animados e interativos que tornam a aprendizagem divertida e mais fácil de entender; e
- testes para autoavaliação no computador ou em tablets online ou offline, em classe e em casa.

Estas ferramentas facilitam o autoestudo e a revisão de conhecimentos e são à prova de alterações para que possam ser reutilizados por outros aprendizes.

2. O ensino a distância e online

A plataforma Symtone do sistema Learning 6.5 oferece um ambiente virtual flexível que integra ferramentas interativas e torna possível, pela primeira vez na história do ensino a distância, uma experiência real e efetiva de estudante-professor frente a frente.

3. A avaliação efetiva a distância e online

A tecnologia de avaliação Skill 6.5 do Sistema Learning 6.5 permite a organização online eficaz de exames estatais (certificado do ensino fundamental, exames de admissão ao ensino médio, exames de admissão à universidade etc.) e exames universitários.

DETALHES SOBRE OS CINCO COMPONENTES DO CONJUNTO DE SOFTWARES DO SISTEMA LEARNING 6.5

No Quadro 1, apresentamos de forma sintética, as funcionalidades dos cinco componente do Learning 6.5, cuja descrição mais detalhada é realizada em seguida.

Quadro 1 - Os cinco componentes do sistema Learning 6.5

				
ScienceWord 6.5	Class 6.5	Skill 6.5	Marking 6.5	Symtone 6.5

Processamento de texto e criação de testes executáveis no computador	Ensino e apresentações científicas	Cursos, tarefas e exames a distância e online	Correção dos deveres de casa e exames online	Ensino a distância online
--	------------------------------------	---	--	---------------------------

Fonte: construção dos autores

Descrevemos esses cinco componentes, iniciando por ScienceWord .5.

ScienceWord 6.5

Hoje o ScienceWord 6.5 é o único software que oferece solução global de processamento de texto na produção de documentação científica e técnica, tornando possível combinar e integrar perfeitamente palavras, fórmulas, gráficos, curvas e diagramas lógicos em um único documento. ScienceWord 6.5 leva o usuário a uma nova era de completa digitalização e automação nos campos da ciência e da educação em geral.

Na verdade, o ScienceWord 6.5 é um software excepcional para processamento de texto, com características inigualáveis há muito tempo aguardadas pela comunidade científica. Ele não só realiza o processamento de textos comuns, como é feito na maioria dos programas tradicionais, mas também facilita muito o processamento de documentos científicos e técnicos complexos de todos os tipos, incorporando implementação direta de fórmulas matemáticas, desenhos e construções dinâmicas, estruturas químicas, bioquímicas e farmacológicas tanto em 2D como em 3D, bem como gráficos de funções sobre fornecimento de dados ou expressões analíticas.

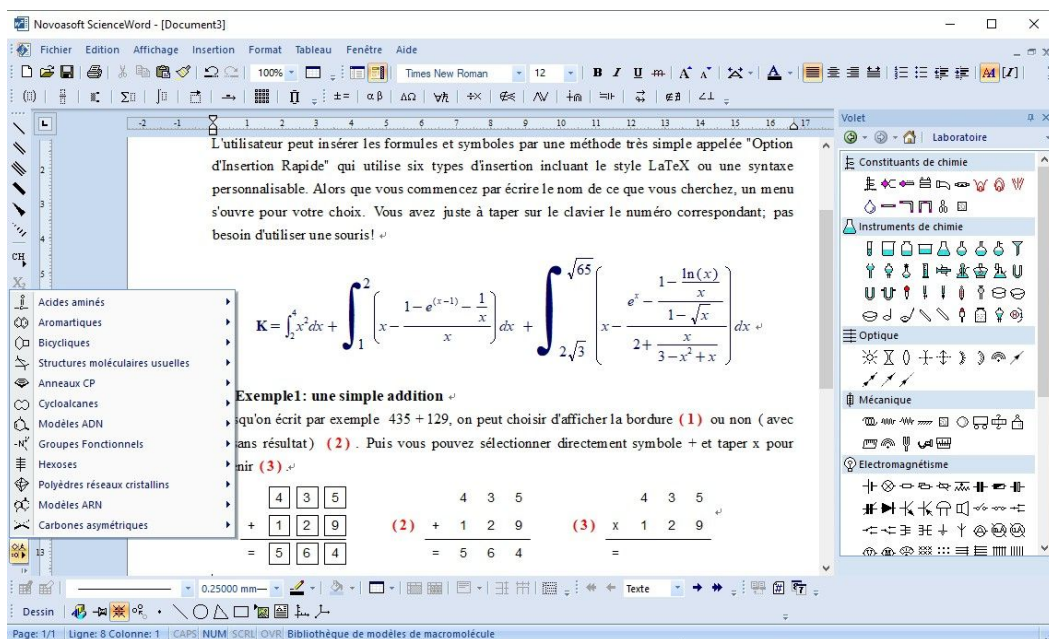
No ScienceWord 6.5 estão disponíveis também manipulações aritméticas, tais como divisões longas, em um formato utilizável pelos alunos da escola básica. Os desenhos de aparelhos científicos para experimentos de física, química e biologia de acordo com os currículos do Ensino Médio e do Ensino Superior e diagramas de circuitos indispensáveis para a documentação elétrica e eletrônica, também são tratados de forma eficiente em ScienceWord 6.5. O software também permite o intercâmbio e a pesquisa em rede para todos os tipos de documentos.

A ScienceWord 6.5 veio de fato para atender às expectativas daqueles que desejam ter um processador de texto no qual as tarefas são fáceis de executar, não exigindo de forma alguma um conhecimento prévio profundo. É uma ferramenta eficiente para criar arquivos eletrônicos de recursos de ensino e avaliação.

É um excelente software de processamento de texto que facilita muito a entrada e publicação de documentos científicos de todos os tipos (Figura 1), incluindo fórmulas matemáticas, ligações e grupos químicos, construções geométricas e dinâmicas, representação gráfica (na reta real, no plano e no espaço), ferramentas de experiência, operações aritméticas etc. Além disso, permite a criação de bancos de dados de testes ou exames que podem ser executados em um computador. Finalmente, tem um modo de ensino muito conveniente para a

realização de cursos. ScienceWord é, de fato, o formato universal através do qual toda a comunidade científica poderia facilmente se comunicar em todos os níveis de educação.

Figura 1 - Exibição normal da interface de ScienceWord 6.5



Fonte: imagem gerada a partir do ScienceWord 6.5

Figura 2 - As ferramentas do quadro branco de Science Word

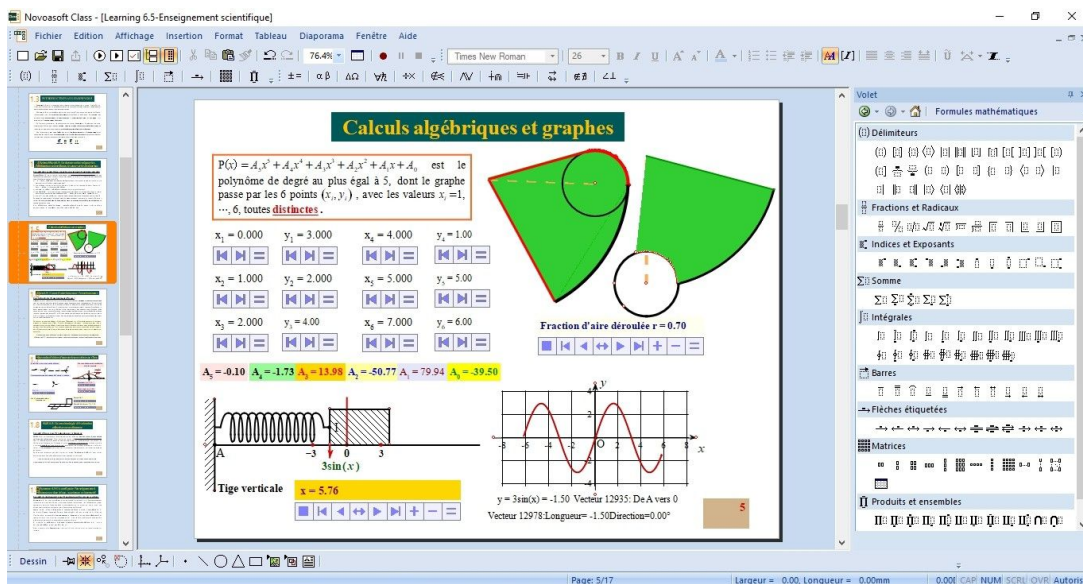


Fonte: imagem gerada a partir de ScienceWord 6.5

O Class 6.5

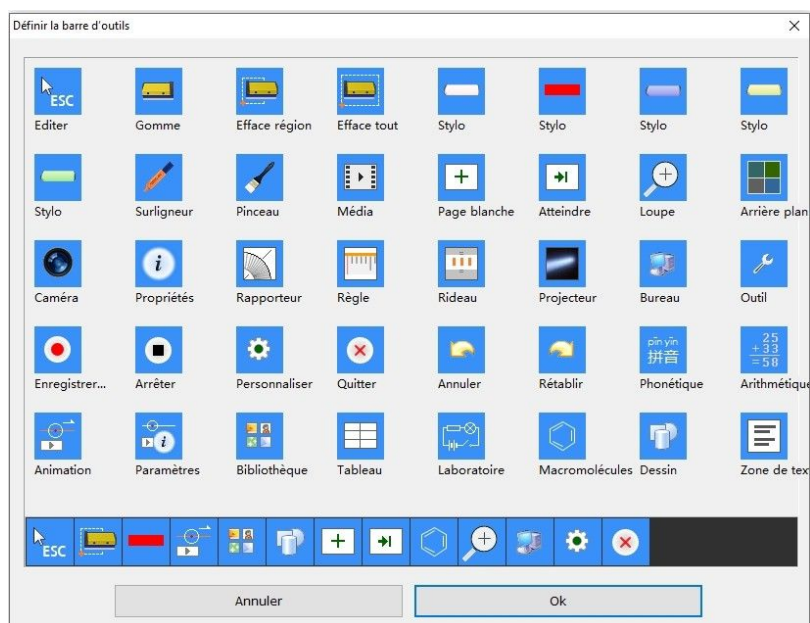
É uma ferramenta poderosa que facilita a criação de slides animados e interativos para temas científicos ou conteúdos de qualquer tipo destinados ao ensino. A entrega de um curso científico equipado com poderosas ferramentas de quadro branco é feita de forma eficiente e eficaz no modo de ensino. É uma peça-chave da tecnologia de ensino que garante a integração efetiva das TIC (computador + projetor) na oferta de cursos científicos e técnicos (Figuras 3 e 4).

Figura 3- Exibição normal da interface de Class 6.5



Fonte: imagem gerada a partir de Class 6.5

Figura 4 - As ferramentas de quadro branco de Class



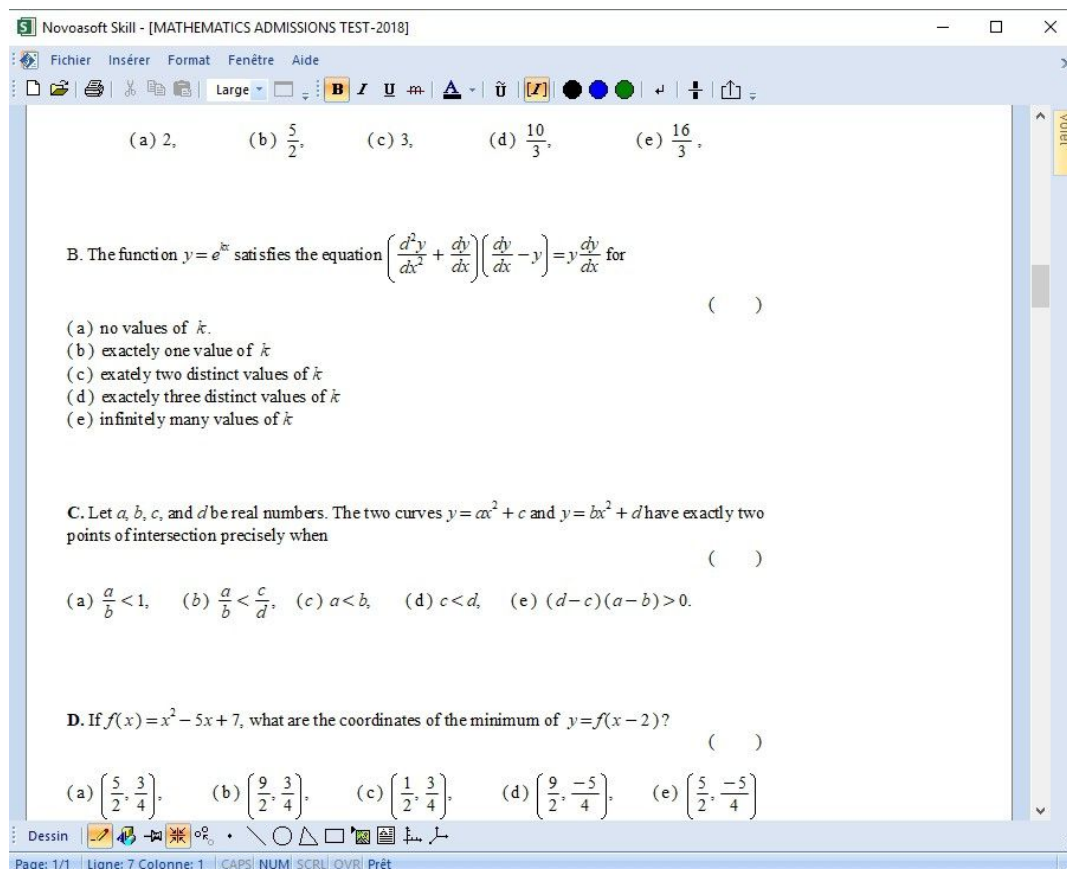
Fonte: imagem gerada a partir de Class 6.5

Skill 6.5

É um programa revolucionário para composição online no computador. Está equipado com todas as funções científicas necessárias para escrever respostas ou soluções detalhadas em matemática, química, física, biologia etc. O estudante pode simplesmente utilizar uma caneta para completar um teste ou tarefa em um tablet ou computador com tela sensível ao toque, o que ocorre de forma mais conveniente do que em papel.

O Skill 6. 5 é de fato a tecnologia de avaliação mais adequada e avançada para sistemas de gestão da aprendizagem em instituições educacionais (Figura 5).

Figura 5 - Exibição normal da interface de Skill



Fonte: imagem gerada a partir de Skill 6.5

O Skill 6.5 proporciona um ambiente onde se pode facilmente escrever todo tipo de expressões matemáticas, desenhar estruturas químicas, fazer construções geométricas e dinâmicas e desenhar ferramentas experimentais utilizando o teclado.

Em uma tela sensível ao toque, o estudante ou aluno pode utilizar um estilete para escrever manualmente. Além disso, o Skill 6. 5 tem um instrumento multifuncional que serve como régua, bússola e transferidor. O usuário também tem a opção de utilizar uma régua e um quadro comum.

Skill 6. 5 tem uma folha de desenho eletrônico com fundo amarelo (Figura 6) que pode ser posicionada abaixo ou acima da área de escrita, tornando muito conveniente a sua utilização. Com o Skill 6.5, os erros de escrita ou desenho são apagados sem deixar rastro. Os alunos que fazem um teste e os professores que o corrigem não terão mais de lidar com várias folhas de composição.

Figura 6 - folha de desenho eletrônico de Skill 6. 5

The screenshot shows a digital drawing tool interface with a circuit diagram and handwritten calculations. The circuit diagram, labeled 'Figure 1.1', shows a transformer with a primary winding connected to a 14.4 kV source. The secondary winding is connected to two parallel loads: a 120 V load and a 240 V load. The primary current is labeled I_1 and the secondary current is labeled I_2 . The transformer is labeled 'X1' and 'X2'.

Handwritten calculations in the 'Answer' section:

$$P_1 = 3 \text{ kW} \quad F_{P_1} = 0,8 \quad S_1 = \frac{P_1}{F_{P_1}} = 3750 \text{ VA}$$

$$P_2 = 5 \text{ kW} \quad F_{P_2} = 0,85 \quad S_2 = \frac{P_2}{F_{P_2}} = 5882,4 \text{ VA}$$

$$P_{12} = 30 \text{ kW} \quad F_{P_{12}} = 0,9 \quad S_{12} = \frac{P_{12}}{F_{P_{12}}} = 33333,3 \text{ VA}$$

Calculations for currents:

$$I_1 = \frac{S_1}{V_1} = 31,25 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{S_2}{V_2} = 49,02 \text{ A}$$

$$I_{12} = \frac{S_{12}}{V_{12}} = 24,51 \text{ A}$$

Handwritten note: 'b) J'ignore les pertes du transformateur, car il n'y a aucune façon de les déterminer.'

Handwritten note in a yellow box: 'Ceci est un brouillon électronique très commode, d'une grande flexibilité, en particulier extensible.'

Fonte: imagem construída a partir de Skill 6.5

Symtome 6.5

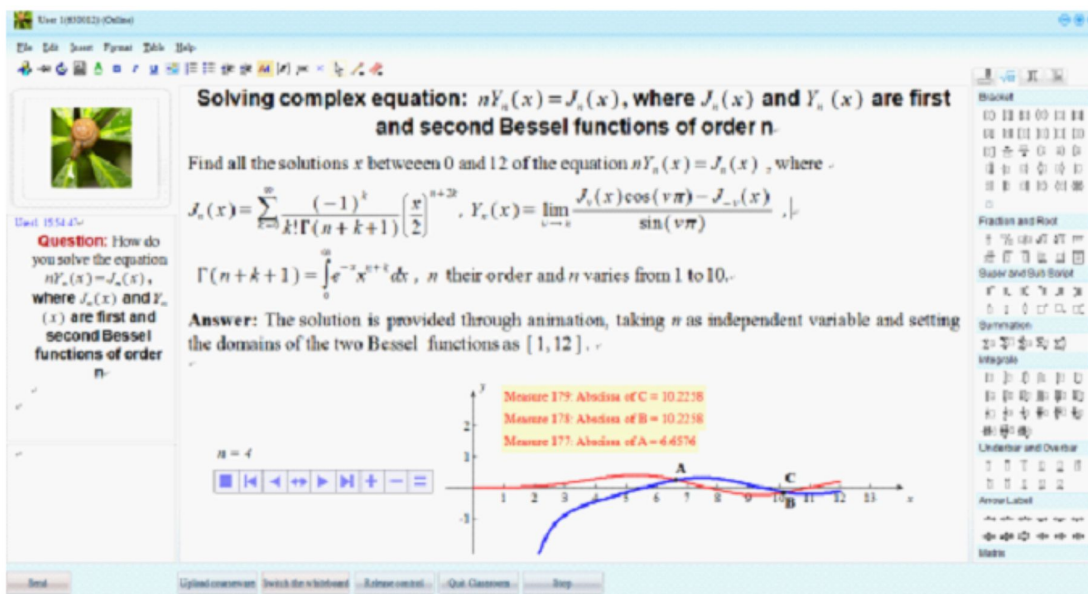
O Symtome 6.5 é uma ferramenta para o ensino a distância, síncrona, assíncrona e interativa. É uma plataforma de aprendizagem a distância que integra perfeitamente ferramentas científicas, comunicação instantânea e tecnologias de vídeo, melhorando assim significativamente o ensino com exigência de requisitos mínimos de capacidade de hardware e largura de banda da Internet.

O Symtome, por intermédio de Class, abre PowerPoint e MS Word para a realização de apresentação pública instantânea a distância pela Internet. Tudo o que é necessário é um computador com Symtome instalado e uma conexão à Internet. Então, a comunicação remota pode ocorrer:

- de computador para computador;
- de computador para quadro branco interativo; e
- De quadro branco interativo para quadro branco interativo.

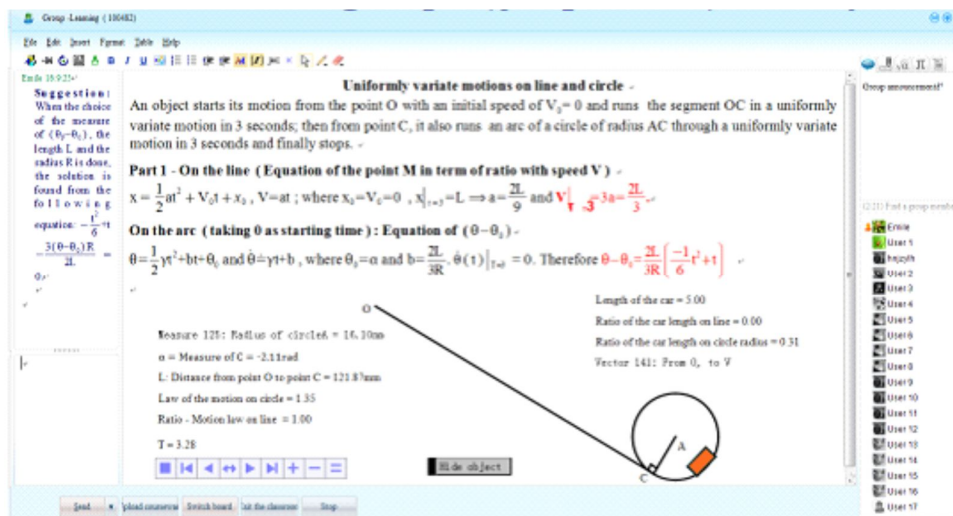
O resultado é perfeito quando cada parte utiliza um quadro branco interativo, no qual é possível escrever com uma caneta, criando a situação tradicional da sala de aula, mas com a vantagem de ter pronto de forma instantânea todo o conteúdo da comunicação. (Figuras 7 e 8)

Figura 7 - Comunicação individual com Symtone



Fonte: imagem gerada a partir do Symtone 6.5

Figura 8 - Comunicação de grupo (até 500) com Symtone



Fonte: imagem gerada a partir do Symtone 6.5

A tecnologia da rede do sistema Learning 6.5

A tecnologia da rede do sistema Learning 6.5 oferece a oportunidade de criar facilmente uma escola virtual e facilita a construção de:

1. cursos online, tarefas e exames com marcação automática de data de entrega e relatório resumido dos resultados;
2. cursos de formação online; publicações periódicas online, revistas, bibliotecas e livrarias.

Observação: uma escola virtual (ou universidade) é composta de várias séries (ou faculdades); uma série é composta de várias classes (ou departamentos). O registro é feito no site web: <https://www.novoatest.com>

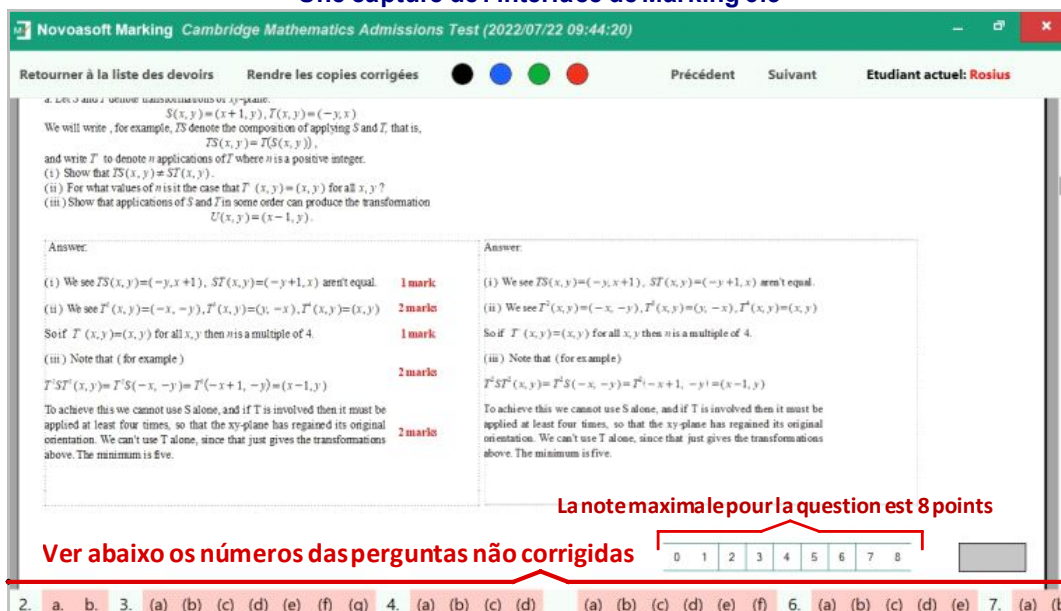
Marking 6.5: uma tecnologia para a marcação online de tarefas e exames baseados em computador

Marking 6.5 é um programa muito conveniente para a correção de tarefas no computador. Esta correção pode ser feita com o mouse ou com um estilete (se a superfície suportar o estilete).

Quando a correção ocorre com um estilete, tudo acontece como no caso clássico de um teste de papel, no qual se podem circular os erros de escrita, escrever comentários de acordo com os passos reais da marcação, reproduzir de forma muito prática a cena tradicional da operação de troca de lote. As tarefas graduadas são entregues a cada aluno de uma determinada classe com um único clique. (Figuras 9 a 14)

Figura 9 - Escolha de tarefas

Une capture de l'interface de Marking 6.5



Fonte: imagem gerada a partir de Marking 6.5

Figura 10 - Disposição das tarefas em uma página Web do Sistema Learning 6.5 de um professor

Mes cours -

Disposer le devoir -

Analyse des données -

Gestion de classe

Message

Enseignant Emile COMLAN

Devoir Cloud/Epreuve

Mes devoirs personnels/Epreuves

Devoirs personnels

Mes Essais (14)

Mes nouveaux devoirs (0)

Examens (8)

Epreuves du BAC (5)

Répertoire Chapitres et Sections

Pas de Chapitres

Numéro d'ordre	Nom du devoir	Moment de création	Opération
1	Exercice de la classe de 7	2021-08-04 15:31:54	Aperçu Disposition
2	Exercice de la classe de 6	2021-08-04 09:16:07	Aperçu Disposition
3	Mr Liao	2020-12-13 07:55:27	Aperçu Disposition
4	TEST 333	2020-12-10 14:57:47	Aperçu Disposition
5	TEST 6_2_Final_2	2020-12-10 11:10:05	Aperçu Poursuivre la disposition Annuler Détails de la disposition
6	EPREUVE DE SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES 001	2020-12-10 08:34:12	Aperçu Disposition
7	TEST 6_2_Final_2	2020-12-10 07:50:57	Aperçu Poursuivre la disposition Annuler Détails de la disposition
8	TEST 5_Final	2020-12-09 07:05:06	Aperçu Poursuivre la disposition Annuler Détails de la disposition
9	TEST 4_Final	2020-12-09 06:38:21	Aperçu Poursuivre la disposition Annuler Détails de la disposition
10	TEST 4_Final	2020-12-09 06:07:30	Aperçu Poursuivre la disposition Annuler Détails de la disposition
11	TEST 3 3	2020-12-09 05:32:09	Aperçu Poursuivre la

Fonte: imagem gerada a partir de Marking 6.5

Figura 11 - Uma visão de um curso na página Web do Sistema Learning 6.5 de um professor

Mes cours - Disposer le devoir - Analyse des données - Gestion de classe

Message Enseignant Emile COMLAN

Leçons Cloud

Cours particuliers

Leçons Cloud Class Mes premiers cours (3)	Répertoire Chapitres et Sections Pas de Chapitres	<table> <tr> <th>Numéro d'ordre</th> <th>Titre du didacticiel</th> <th>Taille du fichier</th> <th>Moment de création</th> <th>Opération</th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>Fonctions convexes et suites</td> <td>249.76K</td> <td>2020-01-21 10:29:54</td> <td>Aperçu Continuer à distribuer Annuler Détails de la distribution</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE</td> <td>670.84K</td> <td>2020-01-09 07:25:29</td> <td>Aperçu Distribution</td> </tr> </table>	Numéro d'ordre	Titre du didacticiel	Taille du fichier	Moment de création	Opération	1	Fonctions convexes et suites	249.76K	2020-01-21 10:29:54	Aperçu Continuer à distribuer Annuler Détails de la distribution	2	GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE	670.84K	2020-01-09 07:25:29	Aperçu Distribution
Numéro d'ordre	Titre du didacticiel	Taille du fichier	Moment de création	Opération													
1	Fonctions convexes et suites	249.76K	2020-01-21 10:29:54	Aperçu Continuer à distribuer Annuler Détails de la distribution													
2	GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE	670.84K	2020-01-09 07:25:29	Aperçu Distribution													

Fonctions convexes et suites

Catalogue des didacticiels

Tableau de simulation du didacticiel

Définition 1-1

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ est dite concave (respectivement convexe) sur cet intervalle si, pour tout couple (x_1, x_2) de $]a, b[$, on a :

$$\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad \text{respectivement} \quad \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

Fig 1: f est concave

Fig 2: f est convexe

➤ Remarque

f est une fonction convexe sur $]a, b[$ si et seulement si $(-f)$ est une fonction concave sur $]a, b[$

Fonte: imagem gerada a partir de Marking 6.5

Figura 12 - Página web de um estudante do sistema Learning 6.5

Mes leçons -

Mes devoirs -

Ma classe

Message

Camarade_de_classe student

Derniers devoirs

Devoirs précédents

Liste des questions manquées

Suivi des résultats

Nom du devoir:

Nom du devoir

Titre de la bibliographie:

Titre de la bibliographie

Temps de soumission:

Moment de début

Temps d'arrêt

Discipline :

Mathematics

Numéro d'ordre	Nom du devoir	Source du devoir	Discipline	Temps de soumission	Numéros des questions manquées	Opération
1	Extrait de l'examen de l'année 2015 d'entrée dans les tablisements d'enseignement suprieur gnral	Epreuves du BAC	Mathematics	2020-01-11 05:43:37	Question 4. , Question 10. , Question 16. , Question 17. , Question 17.	Enregistrez les questions manquées pour la répétition
2	BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE	Epreuves du BAC	Mathematics	2020-01-09 09:46:54	Question 1. , Question 1. , Question 1. , Question 2. , Question 2. , Question 3. , Question 3.	Enregistrez les questions manquées pour la répétition

Page d'accueil

Page précédente

1

Page suivante

Dernière page

1

1/1

15

Fonte: imagem gerada a partir de Marking 6.5

Figura 13 - Página eletrônica corrigida do sistema Learning 6.5

Questions manquées:

4.

10.

16.

17.

8.

Le diagramme de l'algorithme du bloc de programme est dérivé de la «technique de perte plus soustractive» des classiques de la mathématique chinoise antique «neuf chapitres d'arithmétique». Pour la mise en œuvre de ce de programme, on consid ère que les entrées de a et b sont respectivement 14 et 18. Alors la sortie pour a doit être ()

Start

Enter a, b

Yes

No

$a \neq b$

Yes

No

$a > b$

$a = a - b$

$b = b - a$

Enter a

End

A. 0

B. 2

C. 4

D. 14

Réponse de l'étudiant: B

5.0Note

Réponse et Analyse

Ce bouton affiche la réponse et l'analyse du problème

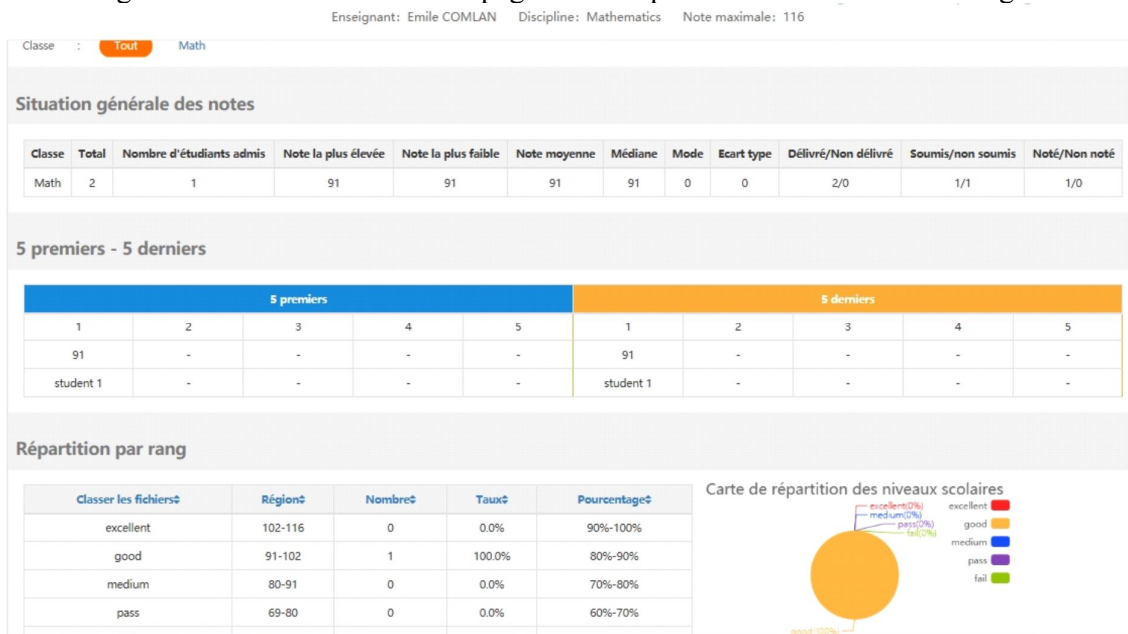
Fonte: imagem gerada a partir de Marking 6.5

REMATEC, Belém (PA), v. 17, n. 42, p. 79-110, Set.-Dez., e-ISSN: 2675-1909, 2022
DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p79-110.id452

91

CC BY NC ND

Figura 14 - Análise de dados na página de um professor do sistema Learning 6.5



Fonte: gerado a partir de Marking 6.5

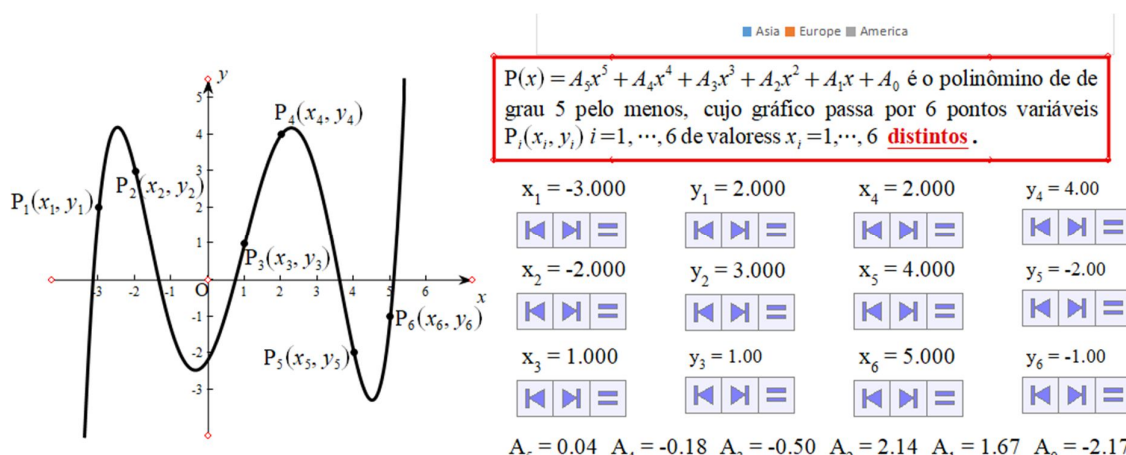
OS CONCEITOS REVOLUCIONÁRIOS DE MODO DE ENSINO E ANIMAÇÃO DE TEXTO

Descreveremos a seguir algumas das potencialidades da combinação de ScienceWord e Class no ensino de ciências.

Modos de ensino de ScienceWord e Class: conveniência inigualável na entrega do curso

Durante o desenvolvimento do curso, o professor pode modificar certos elementos da lição. Ele pode até mesmo inserir novas páginas ou slides para fins de demonstração sem perturbar o público (Figura 15).

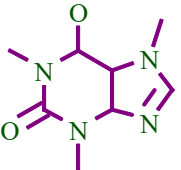
Figura 15 -Possibilidades de articular ScienceWord e Class



Fonte: imagem gerada a partir de ScienceWord e Class 6.5

Temos uma flexibilidade na animação do texto com Class 6.5. Qualquer seleção, mesmo em uma célula de uma tabela, incluindo texto, fórmulas, desenhos e imagens, pode ser animada de várias formas, facilitando a criação de sequências de animação.

Quadro 2 - Cálculos de expressões matemáticas e estruturas químicas

Biologia celular	Expressões e estruturas químicas
 A necrose é uma forma de dano celular que resulta na morte prematura de células em um tecido.	Atenção! A edição de equações químicas com a seguinte $2\text{H}_2\text{O}_2 \xrightarrow[\Delta]{\text{FeCl}_3} 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2\uparrow$ e o desenho das estruturas como a seguinte  , podem ser feitos facilmente nos ScienceWord 6.5 e Class 6.5.
Cálculos e expressões matemáticas	
Learning 6.5 oferece uma maneira muito simples de editar os cálculos do curso primário, tais como, $\frac{x^2 - e^{(x-1)} - \frac{1}{x}}{x}$ ou para escrever uma expressão de matemática tal que $K = \int_1^2 \left(x - \frac{x^2 - e^{(x-1)} - \frac{1}{x}}{x} \right) dx$	

Fonte: construção dos autores

A edição nos aplicativos de Learning 6.5 oferece:

- a maneira mais revolucionária e simples de escrever uma fórmula matemática;
- a maneira mais natural de fazer construções geométricas e dinâmicas;
- uma forma natural, baseada no comportamento humano, de desenhar laços químicos;
- uma flexibilidade única para desenhar gráficos de funções;
- uma grande facilidade de manuseio da notação vertical das operações aritméticas da escola primária, seja em inglês, francês, chinês ou outros formatos.

O CONCEITOS REVOLUCIONÁRIOS DE EDIÇÃO DE TEXTOS DO SISTEMA LEARNING 6.5 E DO DESENHO DE SUITE 6.5

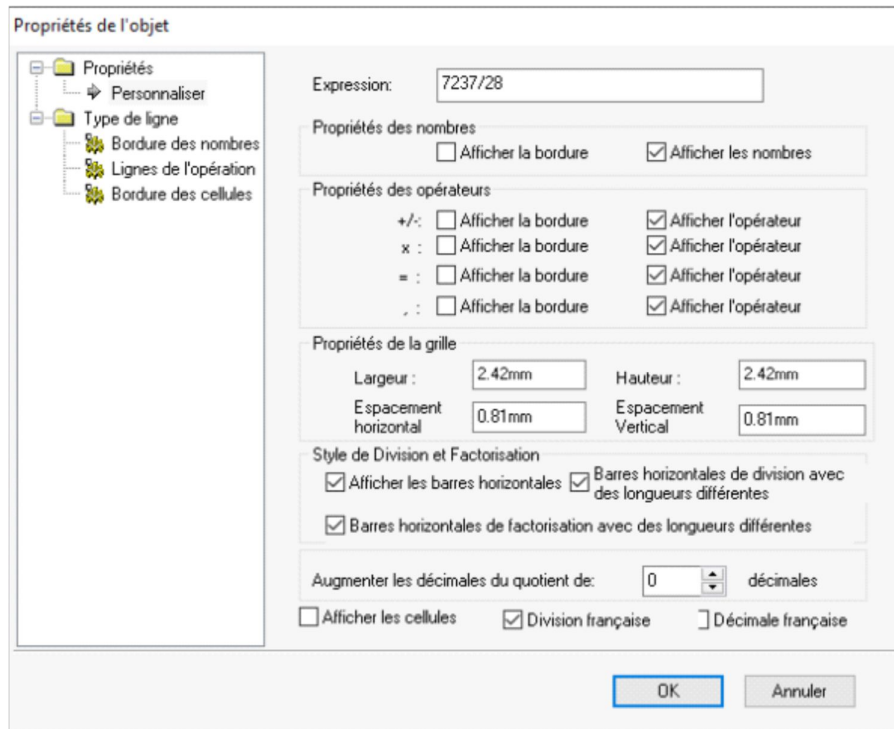
O sistema apresenta uma flexibilidade inigualável na execução de operações aritméticas de escolas primárias. É fácil realizar as operações aritméticas usuais: adição, subtração, multiplicação, divisão, MMC (mínimo múltiplo comum) e MDC (máximo divisor comum) de dois números, decomposição de um número inteiro em um produto de fatores de números primos.

Por exemplo, para realizar a operação de divisão de 7203 por 28, basta escrever 7203/28 na janela de expressão da caixa de diálogo das operações aritméticas. Em seguida, desmarque a opção "Mostrar fronteira". Em seguida, escolha o formato (divisão em inglês ou francês) e

clique em "OK". Quando o ponteiro do mouse tomar a forma de um "+", basta clicar na página de trabalho para obter o resultado.

O resultado da divisão francesa é mostrado em preto e o resultado da divisão inglesa em vermelho.

Figura 16 – Opções para realizar operações



Fonte: construção dos autores.

Na Figura 17, estão representadas algumas outras operações alfanuméricas fáceis de usar.

Figura 17 - Algumas operações realizadas com o sistema

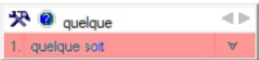
7 2 3	2 8	$\begin{array}{r} 25 \\ 28 \overline{) 723} \\ \underline{56} \\ 163 \\ \underline{140} \\ 23 \end{array}$	$\begin{array}{r} A 8 7 \\ + 2 B 7 \\ \hline = 8 7 C \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 D 7 \\ \times E \\ \hline = 5 6 1 \end{array}$
-------	-----	--	---	---

Fonte: imagem gerada a partir do sistema Learning 6.5

A escrita das expressões matemáticas

As expressões matemáticas são escritas como um texto comum. O usuário pode inserir fórmulas e símbolos através de um método muito simples chamado "Opção de inserção rápida". Quando ele começa a escrever o nome do símbolo, abre-se um menu (Figura 18). Ele então só terá de digitar o número correspondente ao símbolo. Não há necessidade de um mouse.

Figura 18 – A escrita de expressões matemáticas

$\forall \alpha \geq 0, \exists \varepsilon \geq 0 \setminus x - x_0 \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq \alpha$	
Francês: Quelque soit alpha supérieur ou égal à 0, il existe epsilon supérieur ou égal à 0 tel que valeur absolue de x moins x indice 0 inférieur ou égal à epsilon implique valeur absolue de f (x) moins f (x indice 0) inférieur ou égal à alpha	Anglais: For all alpha greater or equal to 0, tl exists epsilon greater or equal to 0 such that abso value of x minus x subscript 0 less or equa epsilon implies absolute value of f (x) minus subscript 0) less or equal to alpha
quelque 	For 

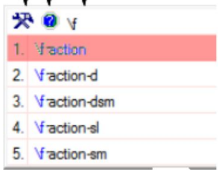
O usuário pode, se desejar, personalizar o tamanho dos integrais de acordo com o conteúdo, como mostrado na expressão abaixo.

$$k(x) = \int_2^4 x^2 dx + \int_1^2 \left(x - \frac{1 - e^{(x-1)} - \frac{1}{x}}{x} \right) dx + \int_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{65}} \left(x - \frac{e^x - \frac{1 - \ln(x)}{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) dx$$

Botão de ajuste de opção de inserção rápida

Botão de ajuda

Zone de syntax



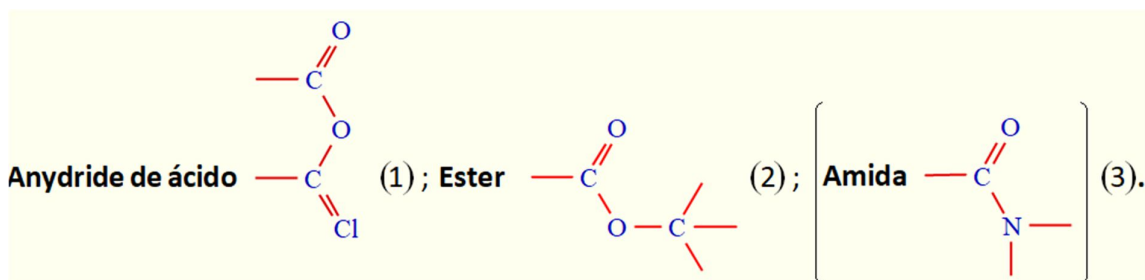
Fonte: construção dos autores

Edição das estruturas e equações químicas

A escrita, formatação e inserção de fórmulas químicas é natural e inteligivelmente simples no Class 6.5. Ligações químicas e símbolos químicos, em um tipo de agrupamento parcial, beneficiam-se do mesmo tipo de formatação e orientação geométrica variável. As estruturas químicas são geralmente muito flexíveis e com simetria variável, consistindo em símbolos químicos, ligações químicas únicas, grupos químicos e macromoléculas.

Deve-se observar que os grupos químicos são caracteres compostos (unidades estruturais que consistem em caracteres comuns e outros símbolos). Eles podem ser inseridos no texto ou em modelos matemáticos em uma disposição harmoniosa, como mostrado nos exemplos de compostos carbônicos apresentados na Figura 19.

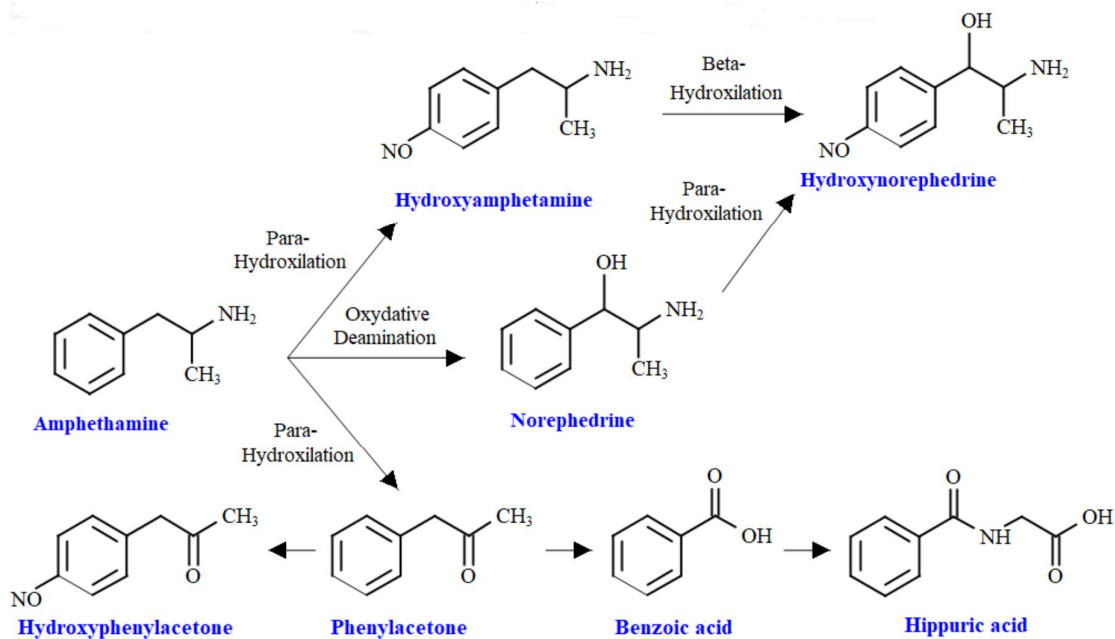
Figura 19 - Exemplo de construção de estruturas químicas



Fonte: Construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Apresentamos, na Figura 20, um exemplo de grupos químicos que descrevem as vias metabólicas da anfetamina. O usuário pode facilmente redefinir a formatação dos símbolos e vínculos de qualquer número desses grupos químicos.

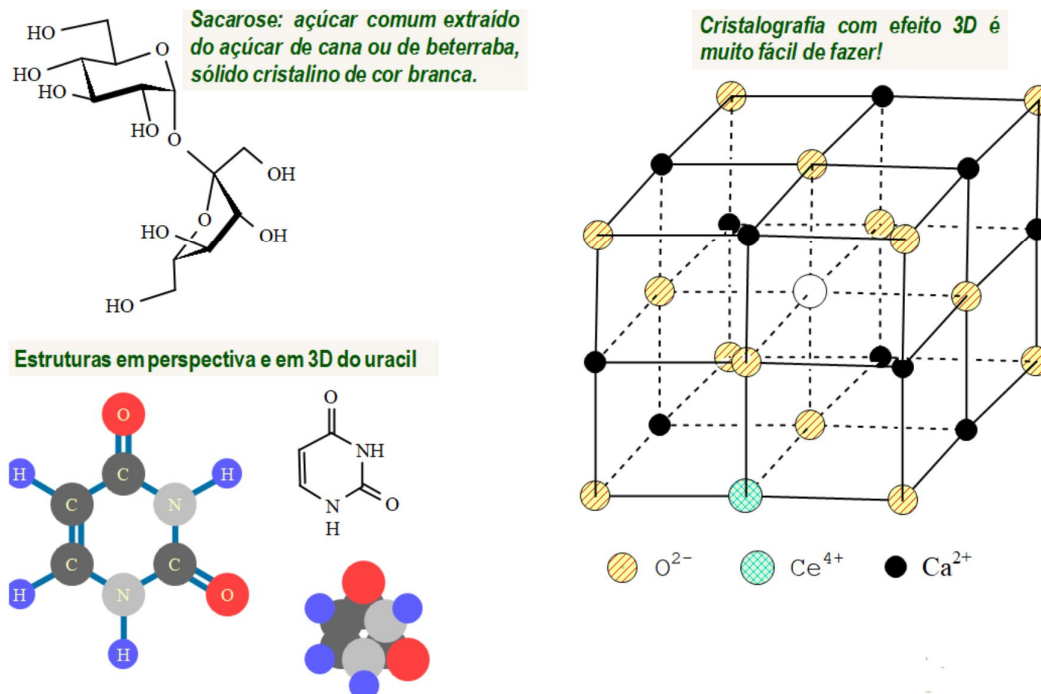
Figura 20 - Representação de grupos químicos que descrevem as vias metabólicas da anfetamina



Fonte: Construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Na figura 21, temos outros exemplos de estruturas químicas que foram construídas a partir do sistema.

Figura 21 – Exemplos de construção de estruturas químicas



Fonte: Construção dos autores a partir do sistema.

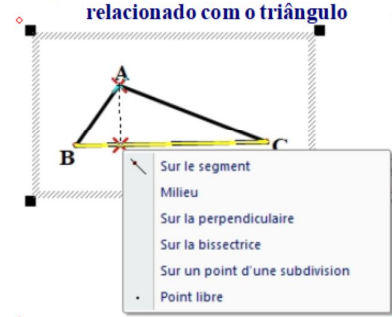
As ferramentas de construções geométricas

O sistema Learning 6.5 tem um enorme potencial para construções geométricas e dinâmicas. O desenho utiliza três princípios: desenho lógico, desenho inteligente e propriedades do objeto. É realizado com base em elementos planos, transformações geométricas, ferramentas de laboratório e o conceito de animação utilizando variáveis independentes e funcionais (Figuras 22 e 23).

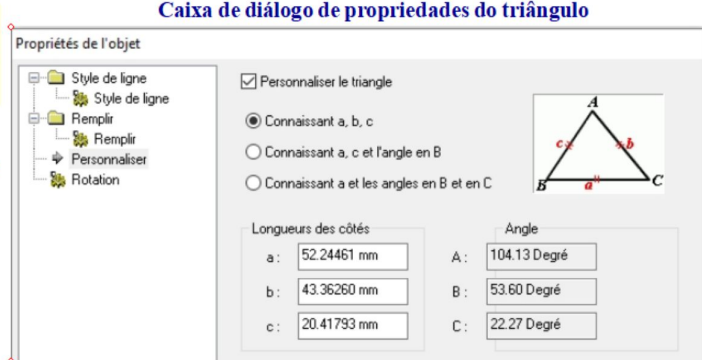
Figura 22 – Algumas das opções de desenho e medições

Aqui apresentamos um exemplo de algumas das opções de desenho e medição para o triângulo.

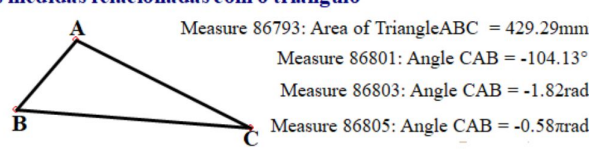
Algumas opções para design inteligente relacionado com o triângulo



Caixa de diálogo de propriedades do triângulo



Algumas medidas relacionadas com o triângulo



Measure 86793: Area of TriangleABC = 429.29mm²
 Measure 86801: Angle CAB = -104.13°
 Measure 86803: Angle CAB = -1.82rad
 Measure 86805: Angle CAB = -0.58πrad

As utilidades do desenho lógico do triângulo

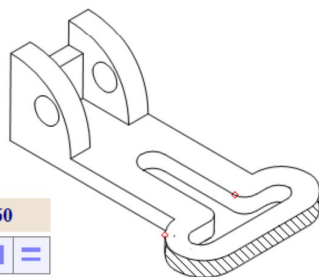
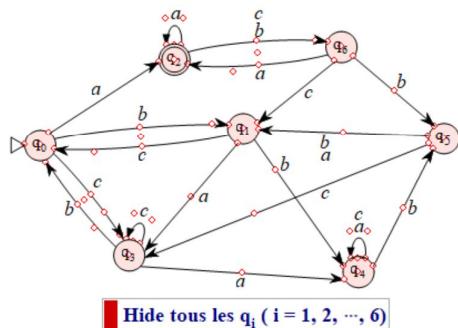


Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

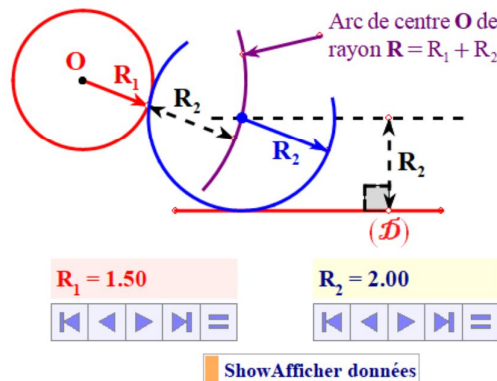
Figura 23 - Exemplos de gráficos e desenhos geométricos

1. Gráficos e automatos

A construção utiliza apenas o círculo, o segmento de reta, a elipse, a curva e o vetor de Bézier!



2. Construção de um arco circular de raio R tangente a um círculo de centro O , raio R e uma reta $(\mathcal{D})$



3. Desenho do engenheiro

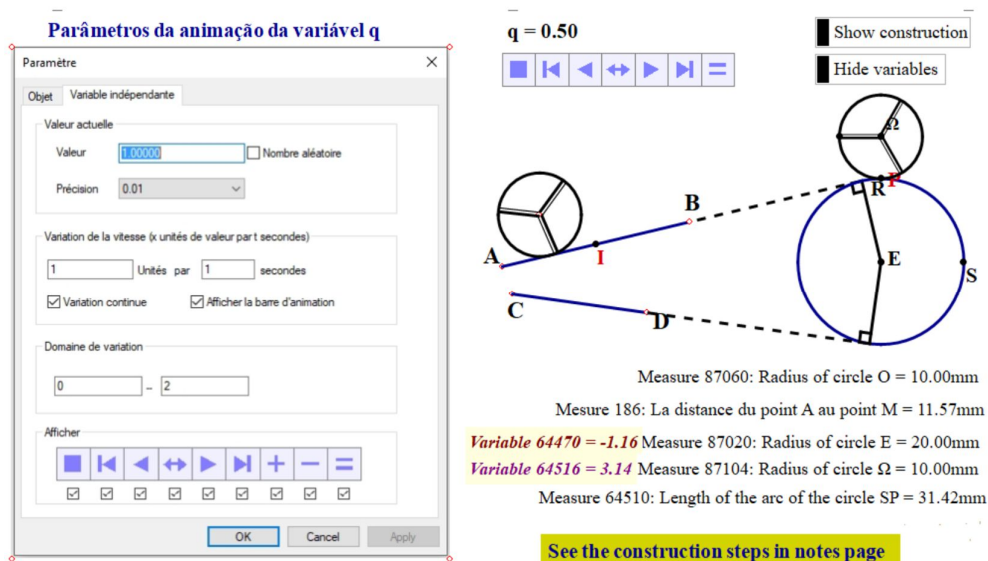
Ao lado a construção de uma parte de máquina de dimensões variáveis.

Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Exemplo de construção dinâmica

Uma variável independente “ q ” é utilizada para animar duas rodas em uma reta e um círculo. Enquanto essa variável pode significar qualquer coisa, como um comprimento, uma área, uma unidade de força etc., aqui ela expressa as abscissas do ponto I em coordenadas lineares (A, B) e o valor do ângulo polar de um ponto variável P do círculo com centro E (Figura 24).

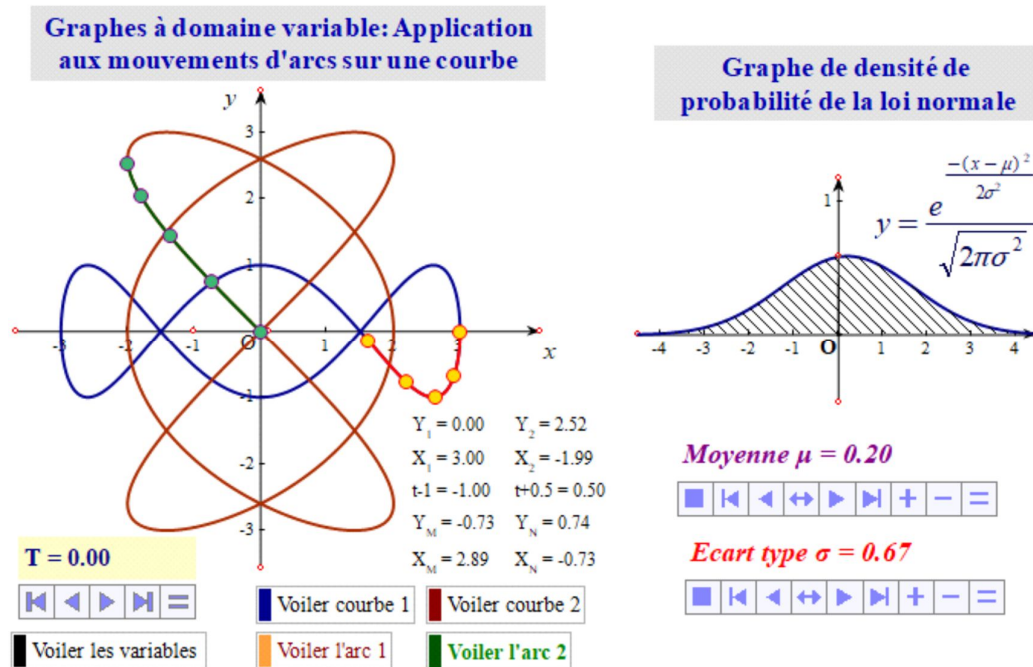
Figura 24 -Exemplo de construção dinâmica



Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Exemplos de representações gráficas no plano

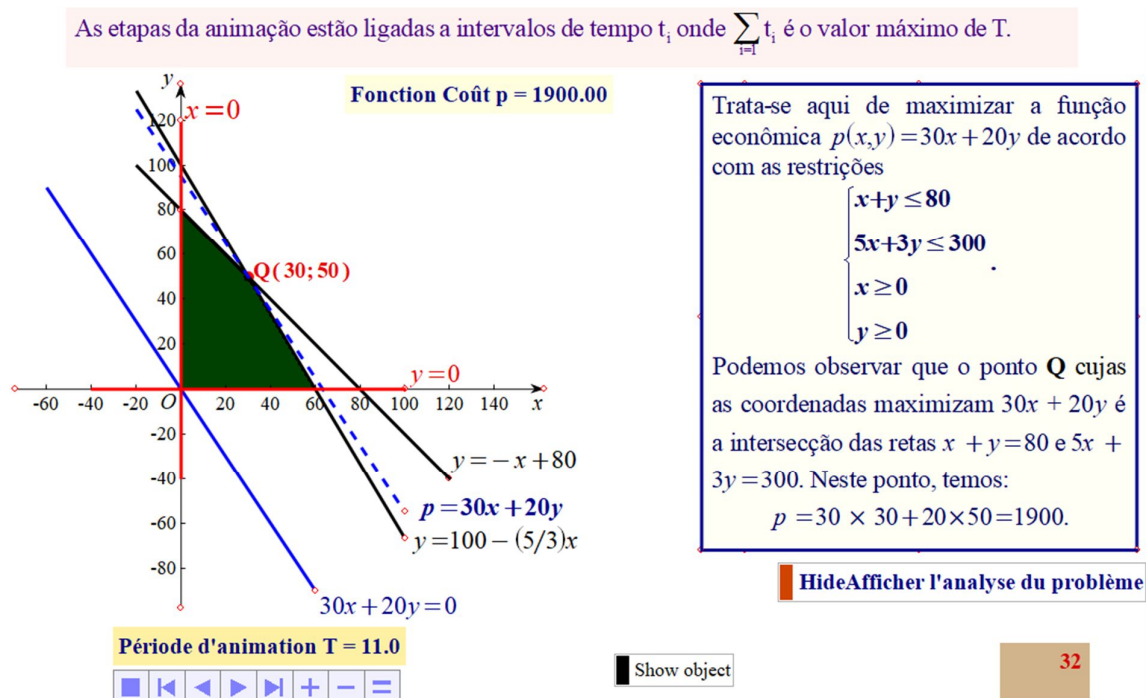
Figura 25 – Exemplos de representações no plano



Fonte: construção dos autores apoiando-se no sistema

O Learning 6.5 tem também aplicações práticas em geometria analítica, como por exemplo, na solução de problema de otimização (Figura 26).

Figura 26 - Exemplo de aplicações em geometria analítica

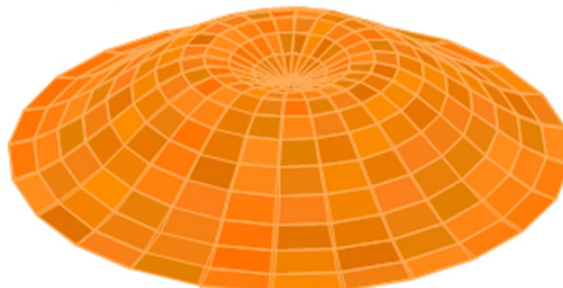


Fonte: construção dos autores a partir do sistema 6.5

O suíte 6.5 permite também figura em geometria analítica 3D como na Figura 26. A Figura 26 representa o gráfico da onda polar cuja função é definida por:

$$F(t, r) = \left[r \cos(t), r \sin(t), r^2 \frac{\cos(r)}{1 + r^2} \right]$$

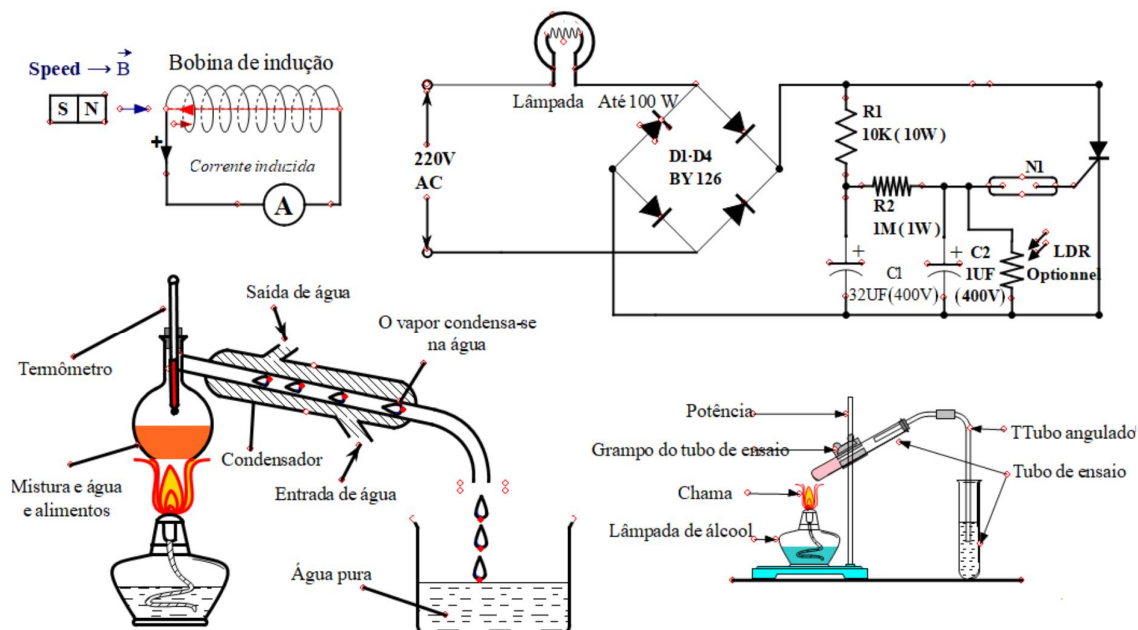
Figura 27 – Gráfico da onda polar



Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

O usuário pode facilmente desenhar configurações experimentais complexas a partir de uma ampla gama de ferramentas de laboratório em física, química etc., como na Figura 28.

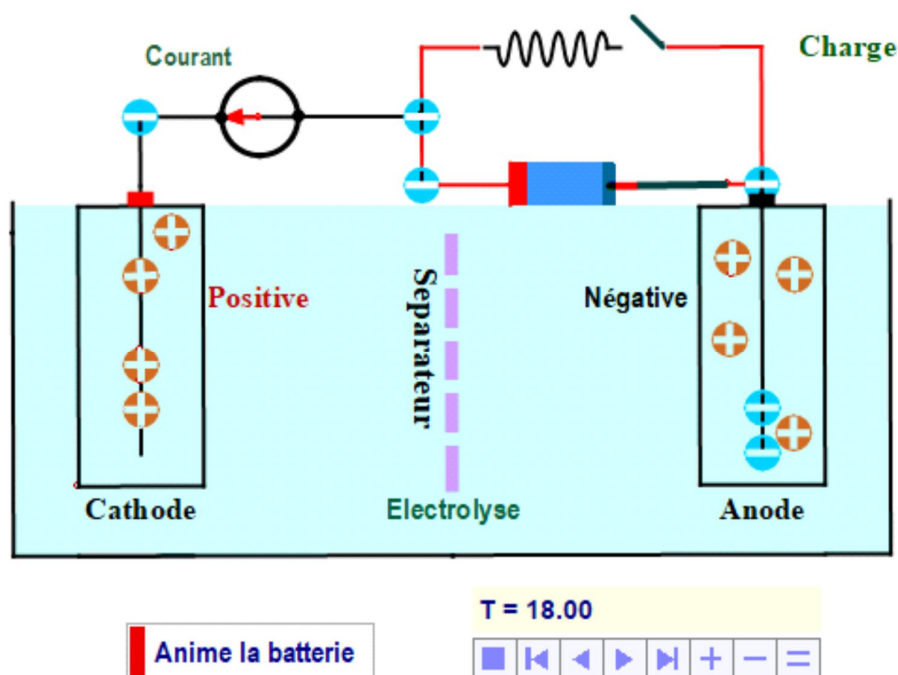
Figura 28 - Representação de configurações experimentais complexas



Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

O Learning 6.5 permite fazer animações sobre determinados elementos de uma figura, como a animação sobre o ciclo de uma bateria (Figura 29)

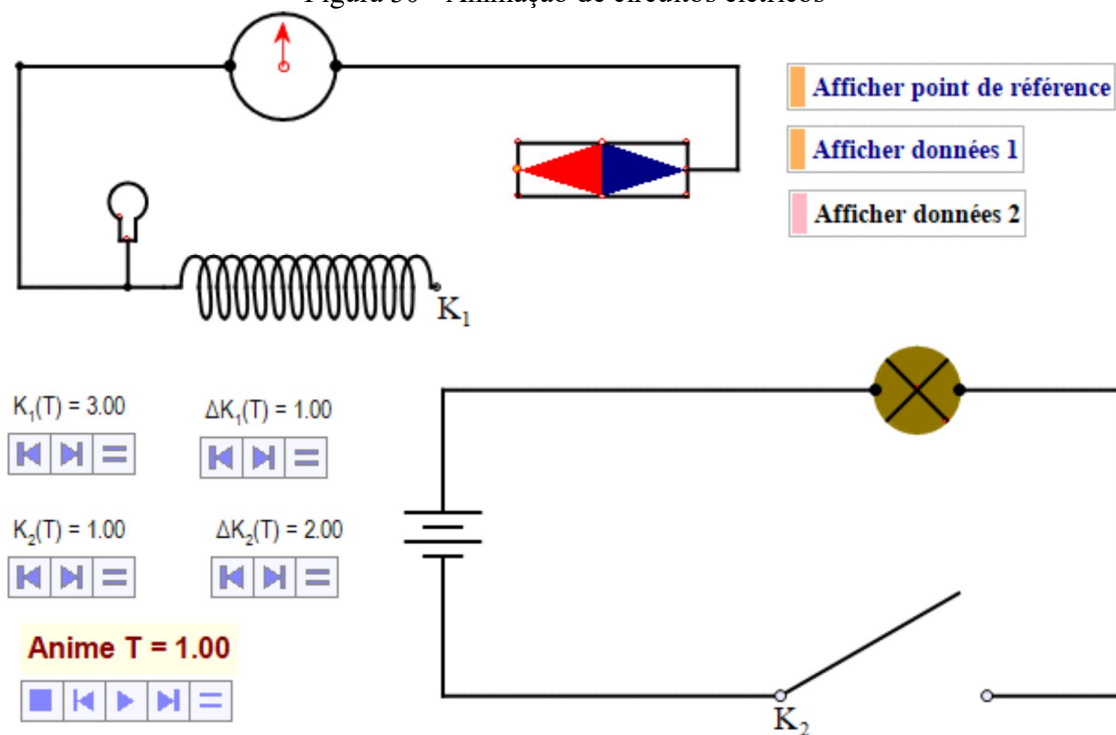
Figura 29 - Ciclo de recarga e descarga de uma bateria recarregável



Fonte: Construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

O usuário pode alterar a ordem de animação dos circuitos elétricos (Figura 30) e até completar o desenho com outras sequências de animação.

Figura 30 - Animação de circuitos elétricos

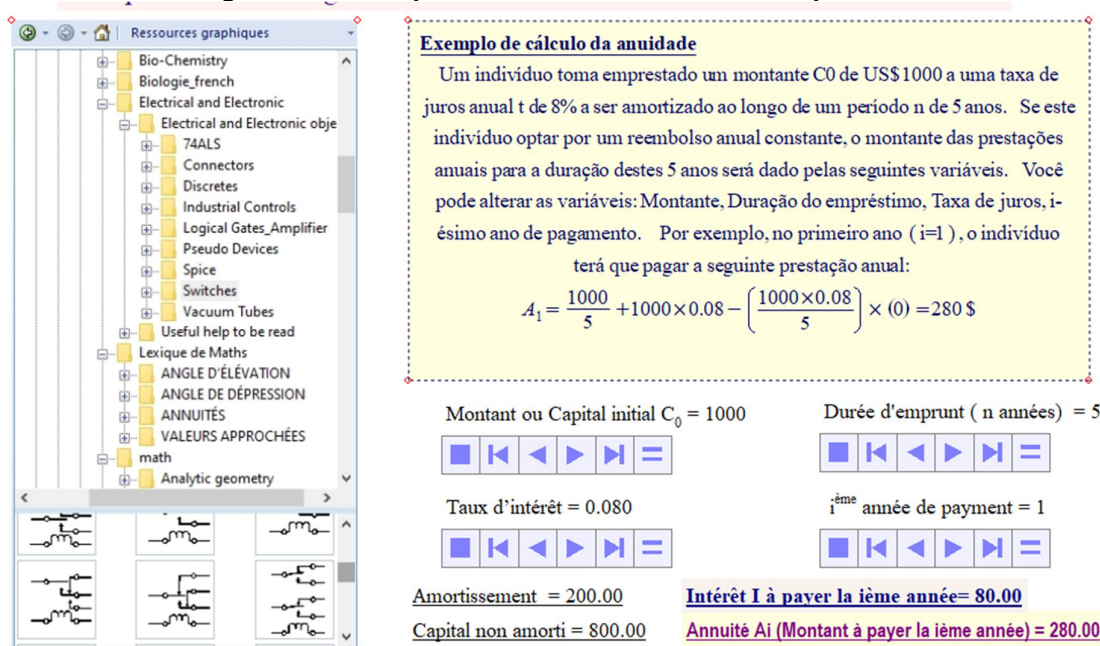


Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

BIBLIOTECA GRÁFICA - RECURSOS GRÁFICOS

O usuário pode facilmente criar uma biblioteca e salvar todos os tipos de recursos gráficos nela (Figura 31). O elemento de curso dinâmico abaixo sobre o cálculo da anuidade é um exemplo de um recurso gráfico na biblioteca.

Figura 31 – Exemplo de cálculo de anuidade de empréstimo



Exemplo de cálculo da anuidade

Um indivíduo toma emprestado um montante C_0 de US\$ 1000 a uma taxa de juros anual t de 8% a ser amortizado ao longo de um período n de 5 anos. Se este indivíduo optar por um reembolso anual constante, o montante das prestações anuais para a duração destes 5 anos será dado pelas seguintes variáveis. Você pode alterar as variáveis: Montante, Duração do empréstimo, Taxa de juros, i -ésimo ano de pagamento. Por exemplo, no primeiro ano ($i=1$), o indivíduo terá que pagar a seguinte prestação anual:

$$A_1 = \frac{1000}{5} + 1000 \times 0.08 - \left(\frac{1000 \times 0.08}{5} \right) \times (0) = 280 \$$$

Montant ou Capital initial $C_0 = 1000$ Durée d'emprunt (n années) = 5

Taux d'intérêt = 0.080 $i^{\text{ème}}$ année de payment = 1

Amortissement = 200.00 Intérêt I à payer la $i^{\text{ème}}$ année = 80.00

Capital non amorti = 800.00 Annuité A_i (Montant à payer la $i^{\text{ème}}$ année) = 280.00

Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

CONSTRUÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO CIENTÍFICO

O sistema Learning 6.5 facilita a criação de objetos de aprendizagem dinâmicos que podem ser utilizados repetidamente sem serem alterados.

Exemplos de objeto de aprendizagem do ensino superior

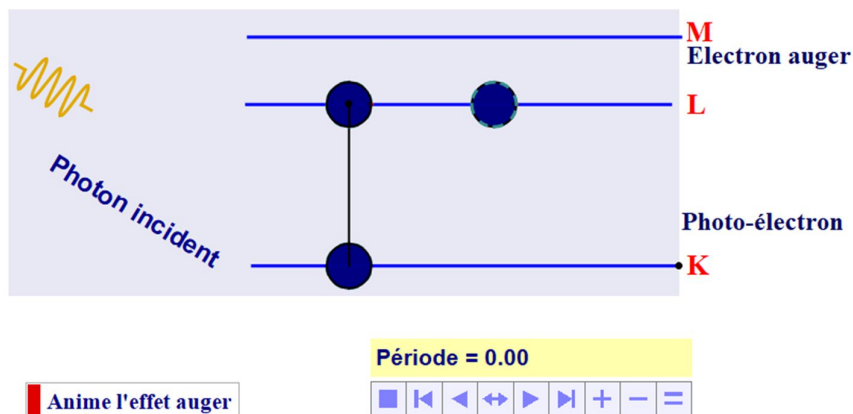
Apresentamos exemplos de objetos de aprendizagem que podem ser criados apoiando-se nos recursos do Learning 6.5.

Exemplo 1: efeito Auger

Há absorções fotoelétricas (Figura 32) que não levam à emissão de raios X. Sob certas circunstâncias, um elétron é ejetado, resultando em uma transição sem radiação. Este processo é chamado de efeito Auger³.

³ “O efeito Auger consiste numa transição eletrônica que ocorre quando um átomo ejeta um elétron sem haver a emissão de fótons. Inicialmente, é um fenômeno físico em que um átomo neutro libera um elétron de sua camada eletrônica, provocando a emissão de outro elétron. Esta condição ocasiona uma lacuna no átomo, que pode ser preenchida por outro elétron proveniente das camadas eletrônicas mais externas. Esta transição é acompanhada da ejeção de um elétron com energia cinética.” Fonte: Wikipedia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Efeito_Auger . Acesso: 14 set 2022.

Figura 32 – Ilustração de absorções fotoelétricas

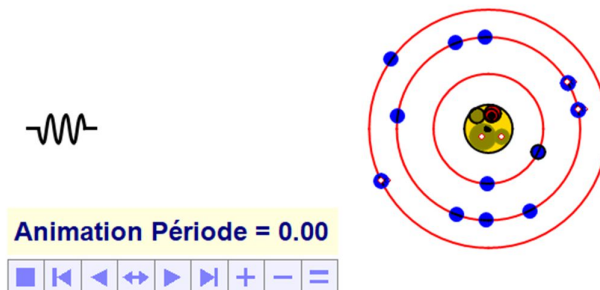


Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Exemplo 2: ejeção fotoelétrica de k elétrons por radiação energética e fotoabsorção elétrica

Os raios X são produzidos quando elétrons de uma camada interna do átomo são ejetados, deixando um espaço, e quando ocorre a substituição por elétrons de uma órbita mais alta, isto resulta na emissão de raios X característicos (Figura 33).

Figura 33 – Representação da ejeção de k elétrons por radiação energética e fotoabsorção



Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

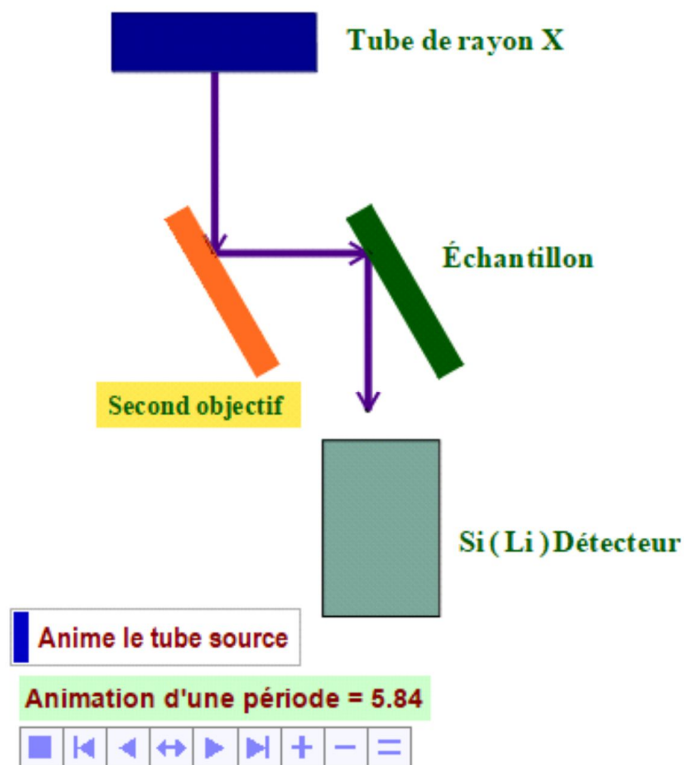
Exemplo 3: ilustração de uma fonte de tubo de raios X (Figura 34) - modos de excitação direta e secundária

O tubo de excitação da fonte de raios X auxilia na análise da espectrometria de raios X.

Excitação direta: os raios X vêm do ânodo (alvo dos raios X do tubo) e são direcionados para a amostra.

Excitação indireta: os raios X deixam um alvo secundário variável e viajam em direção à amostra.

Figura 34 - Ilustração de uma fonte de tubo de raios X

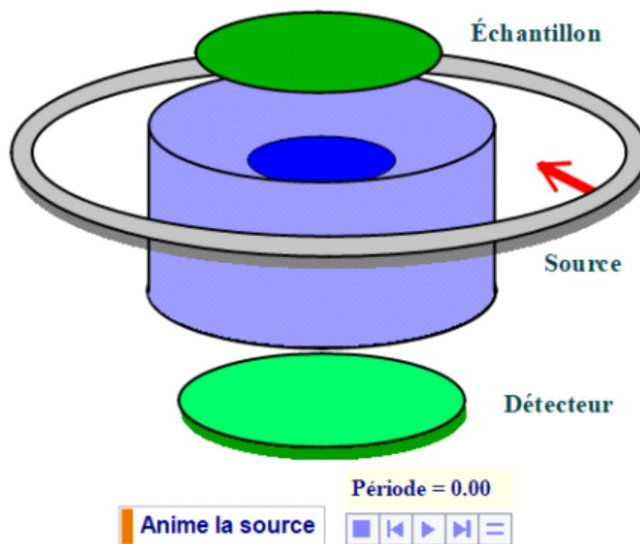


Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Exemplo 4: Fonte e excitação

Ilustração de uma fonte de excitação de raios X de um radioisótopo na geometria de uma fonte detetora de amostras de um espectrômetro de raios X.

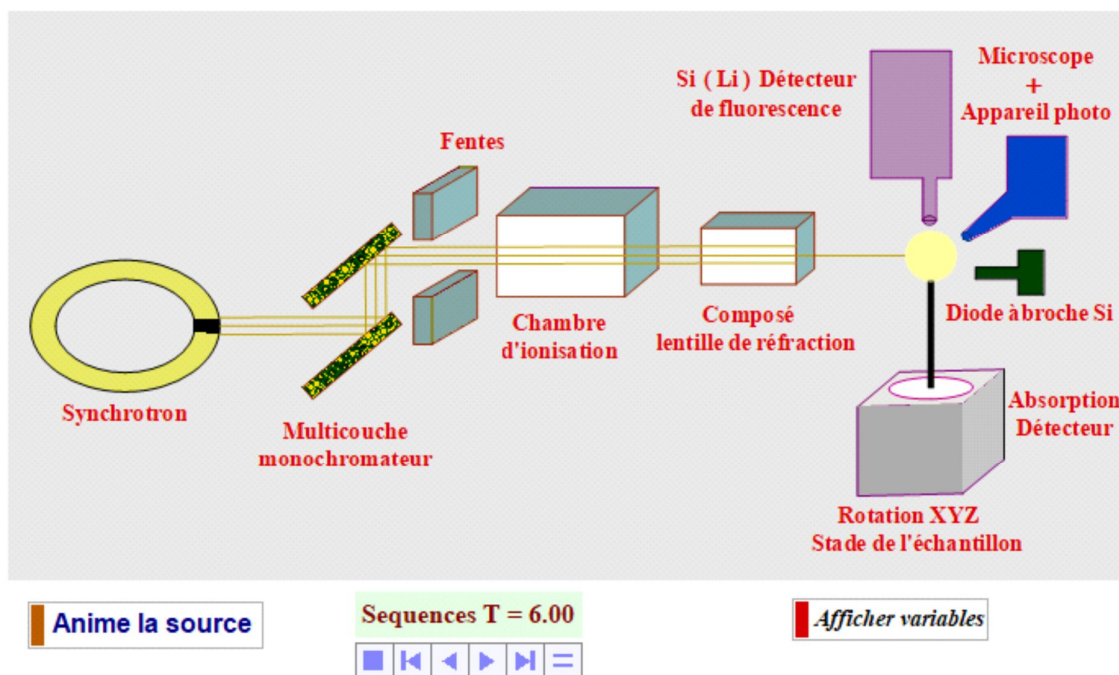
Figura 35 - Ilustração de uma fonte de excitação de raios X



Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Exemplo 5: fonte de raios X sincrotrônicos que produz fótons de raios X intensos e monoenergéticos (Figura 36).

Figura 36 – Representação de uma fonte de raios X produzindo fótons de raios X



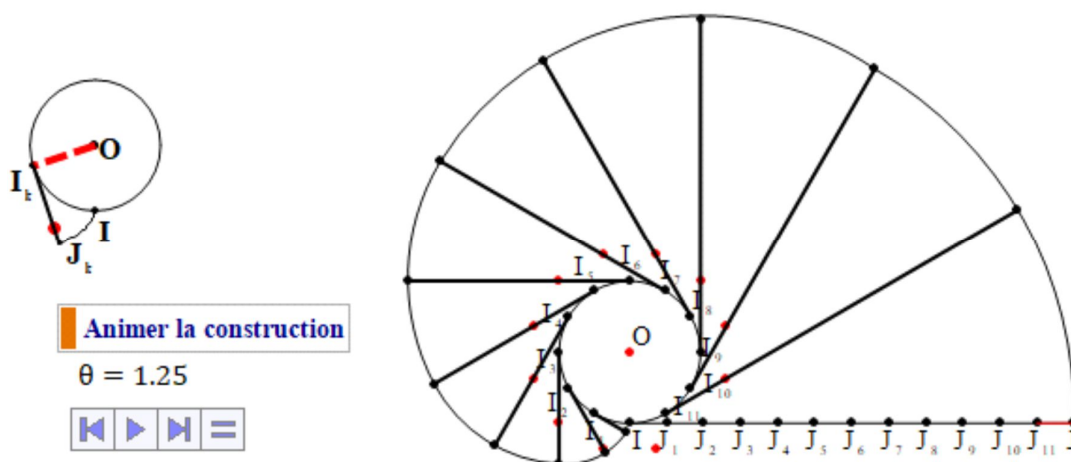
Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5.

Exemplo de um objeto de aprendizagem em educação técnica

Construção prática do involuto do círculo pelo método locus

$IJ_k = \widehat{II_k} = R\theta \text{ rd}$, onde R é o raio do círculo e θ o ângulo $\bullet IOI_k$. Para gerar as 12 tangentes, do involuto, selecione a variável independente, depois a tangente atual. Em seguida, clique no utilitário "Gerar a trajetória".

Figura 37 - Técnica para a construção de um involuto do círculo usando uma série de arcos



Fonte: construção dos autores a partir do sistema Learning 6.5

Apresentamos agora exemplos de objetos de aprendizagem para escolas secundárias.

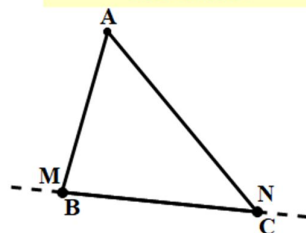
Exemplo 1 de um objeto de aprendizagem no curso secundário

Atividade: Esta atividade é uma aplicação prática da reta real na verificação do teorema de Thales. Os estudantes serão solicitados a relacionar a abscissa x de um ponto M em um quadro de referência com a relação $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ das medidas algébricas da AM e AB .

Atividade: Verificação do teorema de Thales

1. Desenhe três pontos A, B e C distintos e não-alinhados.
2. Desenhe o segmento AB com A como ponto de partida.
3. Desenhe o segmento AC com A como ponto de partida.
4. Selecione o segmento AB , depois clique no utilitário na barra de desenho " " para desenhar um ponto qualquer M da reta (AB) .
5. Desenhe a abscissa x do ponto M no quadro de referência.
6. Traçar o ponto de intersecção N do paralelo ao M e a linha .
7. Exibe o y -abscissa de N no quadro . Mova o ponto M com o mouse e veja que $x=y$.
8. Designamos por $x = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ e $y = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$. O que valem $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ respectivamente no referenciais cartesianos (A, B) e (A, C) ?
9. Finalmente, o que se pode dizer $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$?

Resultado da atividade



Measure 139528: Abscissa of M on the axis = 1.0000

Measure 139566: Abscissa of N on the axis = 1.0000

Déplacer le point: Du point de M au point B

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = 1; \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$$

Exemplo 2 de atividade pedagógica no curso secundário

O objetivo desta atividade é ajudar os estudantes a compreender a relação fundamental entre trigonometria e o gráfico da função senoidal, e dar-lhes experiência prática na localização de um ponto no círculo e no plano, na construção do projetivo de um ponto em uma linha reta, e no uso apropriado de medidas angulares em graus e radianos.

Atividade: Relação fundamental da trigonometria

$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ e gráfico de $\sin(x)$

1. Desenha um círculo $\mathcal{C}$ de centro Ω , um ponto variável M de $\mathcal{C}$, depois, insère le bouton d'animation de insère le bouton d'animation de M .
2. Exibe o ângulo polar θ do ponto M .
3. Desenhar os segmentos que unem o centro do círculo aos pontos I e J dos ângulos polares respectivos 0° e 90° .
4. Definir a variável funcional $x_1^2 + y_1^2$ onde (x_1, y_1) são as coordenadas de M no referencial $(\Omega, \overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J})$.
5. Sejam $x_1 = \cos(\theta)$ e $y_1 = \sin(\theta)$. O que podemos dizer da soma $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$ quando θ varia?
6. Desenha o ponto $P(\theta \text{rd}, \sin(\theta))$ do referencial $(\Omega, \overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J})$.
7. Anime o ponto M .

Resultado da atividade

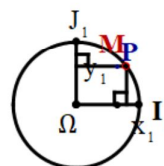
$$x_1 = 0.7968$$

$$y_1 = 0.6042$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 1.000$$

$$\angle M = 0.65 \text{rad}$$

Vector 139416: From x_1 , to M



Anime la construction

Observação: o lugar geométrico de P é o gráfico de $y=\sin(x)$, com $x\in[0, 2\pi]$.

QUAIS SÃO OS USUÁRIOS POTENCIAIS DO SISTEMA LEARNING 6.5?

O Learning 6.5 é um conjunto poderoso de ferramentas de trabalho para o professor. Ele facilita o projeto e a criação de arquivos eletrônicos de materiais didáticos, ensino e avaliação dos alunos. Além disso, facilita a criação de objetos dinâmicos de aprendizagem que facilitam a descrição de conceitos científicos complexos.

Na prática, o professor pode utilizar:

- (i) ScienceWord para publicações, criação de arquivos eletrônicos de fichas pedagógicas e criação de bancos de dados de testes de avaliação baseados em computador;
- (ii) Class para criação de slides para apresentações e ensino em sala de aula e online;
- (iii) Skill para avaliar os estudantes.
- (iv) Symtome para o ensino e trabalho colaborativo a distância.

O Learning 6.5 é também uma poderosa ferramenta de aprendizado que os estudantes podem utilizar para apreciar e compreender conceitos matemáticos e suas aplicações em outras disciplinas, como física, bioquímica, engenharia etc.

Os estudantes podem utilizar esta ferramenta para estudar figuras geométricas, modelos científicos e, em geral, realizar atividades práticas com conceitos matemáticos que estimulam o ensino centrado no aluno e induzem à exploração ativa de soluções de problemas, criatividade, pensamento analítico e crítico. Além disso, alunos e estudantes poderão utilizar o Learning 6.5 para testes de avaliação de alta qualidade em todas as disciplinas.

Especificamente, o estudante poderá utilizar:

- (i) ScienceWord para digitação de relatórios científicos, dissertações, apresentações científicas etc.;
- (ii) Class para fazer apresentações e realizar atividades educacionais;
- (iii) Skill para tarefas, testes práticos e exames.

O Learning 6.5 é um conjunto de ferramentas altamente eficazes para a preparação de relatórios técnicos, o desenho de apresentações padrão e científicas e a avaliação de executivos nas administrações pública e privada.

Especificamente, os setores da administração pública e privada poderão utilizar:

- (i) ScienceWord para escrever relatórios técnicos incluindo fórmulas, desenhos técnicos com a possibilidade de acrescentar ilustrações animadas etc.
- (ii) Class para criar facilmente slides de apresentação interativos e animados de qualquer tipo.
- (iii) Skill para avaliação executiva e testes de recrutamento.
- (iv) Symtome para trabalho colaborativo remoto.

Em Benin, o Ministério da Educação Secundária não só recomendou o componente ScienceWord do Learning 6.5 desde novembro de 2004, mas também o adquiriu e treinou vários professores e inspetores em seu uso. Em 2017, a Universidade de Abomey-Calavi formou 45 representantes de todos os departamentos no uso do Learning 6.5.

Em Gana, o Ministério da Educação, em junho de 2012 e abril de 2013, adotou o Pacote Learning para todas as escolas e institutos técnicos e teve mais de 1000 professores treinados. Todas as principais universidades públicas, tais como a Universidade de Gana, Kwame N'Krumah Science & Technology University (KNUST), Universidade de Cape-Coast, realizaram vários treinamentos para professores na faculdade de ciências. Cerca de 20 institutos de professores também foram treinados para a correta utilização do pacote.

Em Mali, o Ministério da Educação treinou um bom número de inspetores nos campos científicos no uso do Learning 6.5. O Centre de Formation pour le Développement (C.F.D.) treinou mais de 600 professores no uso do Learning 6.5.

Outras instituições, como a École Normale Supérieure (EnSup), a École Nationale des Ingénieurs (E.N.I.), o Institut Polytechnique Rural de Formation et de Recherche Appliquée (IP/IFRA) também formaram professores no uso da suíte Learning 6.5.

OBSERVAÇÕES FINAIS

O sistema Learning 6.5 desmistifica e populariza a captura de materiais de cursos científicos dinâmicos e animados. Sua integração de tecnologia de processamento de texto científico, tecnologia de apresentação científica e tecnologias multimídia e de Internet, melhora muito as experiências e os resultados da aprendizagem online.

Além disso, no contexto do ensino online, o sistema Learning 6.5 tem a vantagem única de proporcionar uma gestão de ponta a ponta de todo o processo, incluindo: a informatização de materiais de ensino e avaliação, a distribuição e entrega de cursos on-line, a organização de tarefas e exames estatais, bem como a marcação e compilação de resultados on-line.

O Beijing eLearning Technology (BET) promove o uso do pacote Learning 6.5 e, com a ajuda de seus consultores, organiza cursos de treinamento sobre o uso do sistema Learning 6.5. O BET fornece às escolas e instituições educacionais em geral um banco de dados de recursos de ensino, avaliação e aprendizagem. Estas escolas e institutos podem usar a suíte Learning 6.5 para criar seus próprios recursos e adicioná-los a este banco. O novo banco enriquecido é, sem dúvida, inestimável na promoção da aprendizagem autodirigida que atende as necessidades específicas dos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Integração de tecnologias digitais no ensino: reflexões sobre práticas e formação de Professores. Revista Debates em Educação, vol. 10.22, pp. 205-230, 2018. In: Integração de tecnologias digitais no ensino: reflexões sobre práticas e formação de professores | Almouloud | [TESTE] Debates em Educação (ufal.br)

BALACHEFF N. Transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (eds) **Vingt ans de didactique des mathématiques en France** (pp.364-370). Grenoble : La Pensée Sauvage, 1994.

CHACHOUA, Hamid. **Usage des TICE dans l'enseignement** : Quelles compétences pour un enseignant des mathématiques ? Jun 2000, Paris, France. 2000. Disponível em: <https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00000591>. Acesso em : 20 jun. 2022.

COMLAN, Emile C. B. Le Système Learning 6.5. Une technologie efficace pour l'enseignement scientifique et technique à distance et en ligne. Brochure (s/d)

COMLAN, Emile C. B. ScienceWord, PagePlayer and Symtone Three Outstanding Tools for: Word Processing, Public Presentation & distance education Working, Learning & Teaching (s/d). In: <https://mgmpmatsatapmalang.files.wordpress.com/2012/05/facts-about-scienceword-pageplayer-symtone.pdf>

COMLAN, Emile C. B. ScienceWord and PagePlayer Physics and Bio Chemistry laboratory tools (s/d), In: https://hobbydocbox.com/Drawing_and_Sketching/96788843-Scienceword-and-pageplayer-physics-and-bio-chemistry-laboratory-tools-dr-emile-c-b-comlan-novoasoft-representative-in-africa.html

GOULART, M. B. e A. L. P. BACCON (2016), “Formação de professores e o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática: que elementos considerar?”, em *Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa*, pp. 255-273, Ponta Grossa, UEPG, DOI: <https://doi.org/10.7476/9788577982158>

Submetido em: 21 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

COMLAN, Emile C. B., ALMOULOUD, Saddo Ag .O sistema Learning 6.5: Tecnologia eficaz para a educação a distância e online em ciência e tecnologia. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 42, p. 79-110, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p79-110.id452>

Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas

Jorge Gaona¹

Universidad de Playa Ancha

Laurent Vivier²

Université Paris Cité

RESUMEN

La participación de los profesores en el diseño de recursos digitales ha cobrado importancia el último tiempo, particularmente en el diseño de recursos para la evaluación en línea. Este artículo busca caracterizar el valor epistémico de un conjunto de tareas diseñadas y programadas por un dos profesores en un sistema de evaluación en línea para matemáticas en una institución de educación superior en Chile. El valor epistémico es estudiado a través del Espacio de Trabajo Matemático idóneo potencial mediante un análisis cualitativo de los enunciados de las tareas diseñadas, las retroalimentaciones y los algoritmos que los definen. Los resultados muestran que se privilegia un trabajo instrumental incluso en tareas donde se usan registros gráficos. También, aparecieron fenómenos particulares ligados a la parametrización y programación de tareas, los cuales impactan el valor epistémico de estas.

Palabras clave: Profesores; Espacio de Trabajo Matemático; función; programación; diseño de tareas

Epistemic value of tasks designed in an online assessment system with feedback for mathematics

ABSTRACT

The design of digital resources by teachers has become more important in recent times, particularly online assessment. This article seeks to characterize the epistemic value of a set of tasks designed and programmed by two instructors in an online assessment system for mathematics at a higher education institution in Chile. The epistemic value is studied through the suitable potential Mathematical Working Space (MWS) by means of a qualitative analysis of the statements, the feedback and the algorithms that define them. The results show that instrumental work is privileged even in tasks where graphic records are used. Also, particular phenomena linked to the parameterization and programming of tasks, which impact the epistemic value of these.

Keywords: teachers; Mathematical Working Space; function; programming; task design

Valor epistêmico das tarefas projetadas em um sistema de avaliação on-line com feedback para matemática

RESUMO

A participação de professores no projeto de recursos digitais ganhou importância recentemente, particularmente no projeto de recursos para avaliação on-line. Este artigo procura caracterizar o valor epistêmico de um conjunto de tarefas projetadas e programadas por dois professores em um sistema de avaliação on-line para matemática em uma instituição de ensino superior no Chile. O valor epistêmico é estudado através do espaço de trabalho matemático potencialmente adequado por meio de uma análise qualitativa das declarações das tarefas projetadas, dos feedbacks e dos algoritmos que as definem. Os resultados mostram que o trabalho instrumental é privilegiado mesmo em tarefas onde são utilizados registros gráficos. Também surgiram fenômenos particulares ligados à parametrização e programação de tarefas, que têm um impacto sobre seu valor epistêmico.

Palavras-chave: professores; espaço de trabalho matemático; função; programação; desenho de tarefas.

¹ Docteur en Didactique des Mathématiques, Université Paris Cité, France. Profesor e investigador en la Universidad de Playa Ancha, Valparaíso. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6367-529X>. E-mail: jorge.gaona@upla.cl.

² Docteur en Mathématiques Université de Tours, Tours, France. MC Laboratorio LDAR, Universidad París, Francia. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9203-8756>. E-mail: laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de evaluación en línea con retroalimentación en matemáticas, son un tipo de tecnología con un uso sostenido en el tiempo, el cual viene incentivado por las posibilidades de su implementación a gran escala y con una interacción cada vez más sofisticada entre el estudiante y la máquina. Además, este tipo de sistemas genera una gran cantidad de datos que pueden ser aprovechados por estudiantes, profesores e investigadores (Stacey, Steinle, Price, & Gvozdenko, 2018; Stacey & Wiliam, 2013).

Al hacer un análisis de la literatura de sistemas de evaluación en línea que cuentan con retroalimentación, se advierte que hay una serie de artículos que muestran que su uso tiene efectos positivos en el rendimiento y variables socio-afectivas (Chow, 2015; González, Jover, Cobo, & Muñoz, 2010; Roschelle, Feng, Murphy, & Mason, 2016; Sancho-Vinuesa & Escudero, 2012). También hay una serie de artículos que muestran que el rendimiento varía según el tipo de formato de las preguntas (opción múltiple o respuesta abierta) y el tipo de retroalimentación en tareas sobre resolución de problemas (Attali, 2015; Attali e Kleij, van der, 2017) o según el tiempo en que se entrega la retroalimentación en álgebra y matemáticas de nivelación (Bokhove & Drijvers, 2012; Gaona, Reguant, Valdivia, Vásquez, & Sancho-Vinuesa, 2018).

Todos los artículos mencionados anteriormente, presentan diferencias en la tecnología que utilizan, los temas matemáticos tratados o la edad de los estudiantes con los que se trabaja. Sin embargo, hay algunos elementos convergentes. Todos utilizan tecnología con características técnicas específicas para los enunciados, los sistemas de entrada de respuestas, los sistemas de validación y/o los sistemas de feedback hacia los estudiantes. La mayoría de estos sistemas parametrizan algunos números, símbolos o gráficos de los enunciados, dotándolos de un carácter aleatorio. En los sistemas de entrada se advierte el uso de editores de ecuaciones para el ingreso de respuesta o deslizadores para un trabajo en entornos geométricos. En los sistemas de validación se utiliza un CAS (Computacional Algebra System) o un sistema de Cálculo Geométrico para determinar si la respuesta ingresada es correcta o no, por ejemplo, evaluando si dos expresiones son matemáticamente equivalente o características adicionales, como, por ejemplo, si una expresión está factorizada o simplificada. Finalmente, se constatan distintos tipos de retroalimentación: de tarea (correcto o incorrecto); de proceso (solución paso a paso) o retroalimentación a medida que el estudiante va resolviendo un procedimiento algebraico. Prácticamente no se usan preguntas de selección múltiple, salvo en los casos donde es una de las variables de comparación (Attali, 2015; Attali e Kleij, van der, 2017).

Otro elemento que tienen en común estos artículos es que no hay una discusión sobre los aspectos epistemológicos de las preguntas propuestas o su retroalimentación, cuando se discute, se hace más bien sobre aspectos generales. Solo se estudian los efectos en distintas variables, medido en términos estadísticos, pero, no hay un análisis cualitativo más detallado sobre esta relación.

Recientemente, hay trabajos que se centran en elementos epistemológicos en las tareas y en el feedback proporcionado en distintos temas matemáticos En funciones lineales (Barana et al., 2021), fracciones (Gaona e Menares, 2021), lectura de gráficos (Gaona, Hernández e Bravo, 2022) y números complejos (Gaona, López e Montoya-Delgadillo, 2022). Sin embargo, en estos trabajos el diseño de tareas es realizado por los investigadores desde una perspectiva

teórica, es decir, los profesores no tienen un rol activo en el diseño de las tareas, lo cual puede afectar la integración de estos recursos digitales en su trabajo como docentes, puesto que, si son diseñados por expertos, podría existir una lejanía con las tareas habituales que realizan los docentes en clases (Hoyle, Noss, Vahey, & Roschelle, 2013, p. 1068). En esta misma línea, (Jones e Pepin, 2016) plantean que, en relación al diseño de recursos tecnológicos, es importante, por una parte, tomar en cuenta qué diseñar y por otra, cuál es el papel de los profesores en este proceso, tanto por garantizar la calidad de los recursos y la cercanía a lo que ellos trabajan en clases, como porque la participación en este proceso, es una oportunidad de desarrollo profesional docente.

En la Universidad Tecnológica de Chile INACAP (INACAP de aquí en adelante), entre el 2015 y el 2018, se desarrolló el proyecto SEDOL-M, el cual tenía como objetivo diseñar e implementar un sistema de evaluación en línea para el trabajo autónomo de los estudiantes de matemática I³, como complemento de las clases presenciales. Este proyecto partió en un campus y el 2018 abarcó a 8 de los 26 campus con los que cuenta la institución a lo largo de Chile (Vásquez e Gaona, 2016). Actualmente este proyecto sigue vigente, pero de forma autónoma en cada campus. Una de las particularidades del proyecto es que el diseño y la programación de las tareas que conforman SEDOL-M estuvo a cargo de equipos de profesores de cada uno de estos campus.

SEDOL-M es un proyecto masivo y en los artículos publicados sobre él, no se discute el trabajo matemático que los profesores proponen a los estudiantes a través de las tareas y retroalimentaciones concebidas en la plataforma. Es por esto que, en este artículo, se discute sobre el valor epistémico de las tareas (Artigue, 2002, p. 248), el cual se estudiará a través del Espacio de Trabajo Matemático o ETM (Kuzniak e Richard, 2014), específicamente con la idea de ETM idóneo potencial. Este estudio se hará a partir del análisis de los enunciados y se complementará con análisis de los algoritmos que definen las tareas. De forma más específica, las preguntas de investigación que guían este trabajo son:

- ¿Cuál es el impacto, de la participación de los profesores como diseñadores y programadores, en el trabajo matemático idóneo potencial de las tareas que conforman un sistema de evaluación en línea?
- ¿Cuál es la influencia de la programación en los objetos matemáticos de los enunciados?
- ¿Cuál es la influencia de los objetos matemáticos elegidos en la programación de estos?

En este artículo, del total de tareas diseñadas en el proyecto, se analizan 9 tareas sobre función afín y cuadrática, diseñadas por 2 profesores de dos campus. Se estudia el algoritmo que las define y algunas de las iteraciones del enunciado con su respectiva retroalimentación.

³ Es una asignatura cuyo nombre es común a todas las carreras, pero, varía en las unidades que la componen según el área en que se dicte. Tiene algunas unidades que se repiten en muchas áreas como álgebra o funciones polinómicas y otras que se dan exclusivamente en un área como trigonometría y números complejos que solo se dicta en Electricidad y Electrónica.

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO SEDOL-M

Este proyecto fue impulsado por el Centro de Innovación en Educación (CIEDU) de INACAP a partir de un pequeño proyecto desarrollado por un grupo de profesores de uno de los campus de la institución, financiado mediante un fondo interno en el año 2013.

En el 2015, INACAP decidió escalar el proyecto, tomando en cuenta que los resultados positivos a pequeña escala y en entornos controlados son difíciles de replicar con profesores ordinarios (Artigue, 2011). Dada la envergadura de la institución y del proyecto, se diseñó una estrategia de escalamiento paulatino la cual se basó principalmente en la formación de equipos de diseño en cada campus, quienes programaron cada una de las preguntas que componen el sistema y con quienes se discutieron decisiones con respecto a las reglas de implementación, tanto para el profesorado, como para los estudiantes.

El proyecto recomenzó en agosto del 2015, con una fase de diseño en un solo campus. El 2018 ya se había extendido a 8 campus, que es el número actual de campus que trabajan con el sistema, afectado a un poco más 13.000 estudiantes y 120 profesores a cargo, de los cuales 32 son diseñadores. En el proceso de diseño, se crearon 370 preguntas, todas con parámetros aleatorios, donde en más del 90% se debía ingresar un objeto matemático como respuesta. Además, en el diseño, se contempló una retroalimentación paso a paso para cada pregunta. En total, abarcaron 10 tópicos diferentes (proporciones y porcentajes, álgebra, funciones y trigonometría, entre otros).

En este artículo, se analiza lo desarrollado para funciones de primer y segundo grado. Esta fue la primera unidad que diseñaron. Previamente habían tenido un taller de inducción en febrero del mismo año. Había un profesor del primer campus que los acompañó en el proceso de diseño, resolviendo las dudas que tuviesen sobre programación.

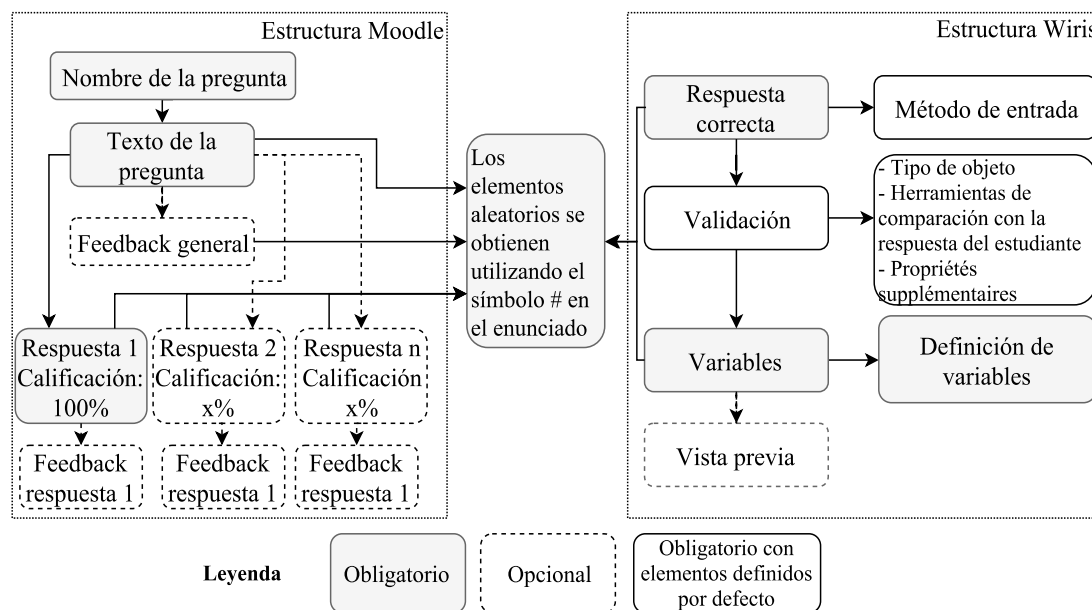
Aspectos tecnológicos

Existen diversos sistemas para desarrollar evaluaciones en línea en matemáticas, cada uno tiene limitaciones y potencialidades. En este caso, el desarrollo de las tareas se realizó en una plataforma Moodle⁴, que tenía instalado MathType (editor de ecuaciones), Calcme (sistema de cálculo simbólico) y Quizzes (sistema para aleatorizar los enunciados), todos desarrollados por Wiris⁵. Estos software permiten diseñar preguntas números, símbolos y gráfico aleatorios. Además, es posible construir una retroalimentación paso a paso en función de los parámetros aleatorios. En la figura 1 se muestra, de forma esquemática, lo que deben definir los profesores al momento de diseñar una pregunta.

⁴ <http://www.moodle.org>

⁵ www.wiris.com

Figura 1 – Decisiones que deben tomar los profesores al diseñar una pregunta de respuesta corta con Wiris y Moodle.



Fuente: Elaboración propia

El enunciado es un archivo Moodle XML que contiene elementos fijos y variables. Los fijos, son cadenas de texto y los variables, pueden ser números, símbolos, textos o gráficos aleatorios que son definidos en el enunciado con el símbolo “#” en un algoritmo con un lenguaje propio de Wiris. Una vez que estos elementos se definen, se realiza una vista previa, la cual muestra una de las posibles iteraciones que puede tener la pregunta.

Para ejemplificar, en el enunciado: “Calcular $\$ \#a+3\$$ ” implica que $\#a$ es un elemento que será aleatorio y que se definirá en un algoritmo, por ejemplo, se podría definir como: $a = \text{aleatorio}(-10,10)$ lo que implica que a puede tomar valores enteros entre -10 y 10 incluyendo los extremos. Por lo tanto, algunas iteraciones de esta tarea podrían ser: “Calcular $-5+3$ ”, “Calcular $0+3$ ”, entre otros. Los elementos aleatorios del enunciado, la respuesta y la retroalimentación en función de los parámetros del enunciado, se definen en un algoritmo (ver por ejemplo Figura 3 y Figura 5).

Una de las características más valoradas por profesores y estudiantes es la retroalimentación, puesto que, como lo indican (Sancho-Vinuesa e Escudero, 2012) la retroalimentación pertinente les ayuda a los estudiantes decidir sobre su propio aprendizaje y les entrega un referente de qué es lo que se espera de ellos. Esto es coherente con estudios que muestran que la retroalimentación es uno de las más grandes influencias en el aprendizaje y el logro, sobre todo si su entrega es oportuna, pertinente, está centrada en la tarea y cómo hacerla. Además, se obtienen mejores resultados cuando se compara con otros tipos de retroalimentación, como elogios, recompensas y castigos (Hattie e Timperley, 2007, p. 84) o cuando se complementa con formas específicas de implementarlo, como por ejemplo el feedback diferido (Gaona *et al.*, 2018). Todos los componentes descritos anteriormente sirvieron para construir la matriz de datos, teniendo como fin permitir, no tan solo estudiar el trabajo matemático potencial del enunciado y su retroalimentación, sino que, además, a partir

del análisis de los algoritmos, estudiar las decisiones de los profesores al programar y su influencia en la variabilidad de las tareas y su potencial de trabajo matemático.

MARCO TEÓRICO

El Espacio de Trabajo Matemático o ETM (Kuzniak, Montoya-Delgadillo e Richard, 2022; Kuzniak e Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay e Elia, 2016) permite identificar y analizar el trabajo matemático de un sujeto, tomando en cuenta aspectos epistemológicos y cognitivos del tema abordado y de quien resuelve respectivamente. Estos aspectos se articulan mediante las génesis semiótica, instrumental y discursiva (ver Figura 2 – Decisiones que deben tomar los profesores al diseñar una pregunta de respuesta corta con Wiris y Moodle

). Acá la palabra génesis se utiliza en un sentido amplio y hace referencia, tanto al comienzo de un proceso, como su desarrollo e interacción entre los polos de los planos epistemológico y cognitivo.

En nuestro trabajo, para identificar el valor epistémico de las tareas, identificaremos cuáles son las génesis que activan preguntas de la plataforma y para esto, es indispensable identificar si, dado un objeto matemático (tal como una función o una fórmula), es posible establecer si está siendo usado como una herramienta semiótica, artefacto simbólico o herramienta teórica. En el plano epistemológico, se encuentran los objetos y/o herramientas, que permiten desarrollar el trabajo matemático y se definen tres polos: el *representamen*, los artefactos y el referencial teórico. De acuerdo a Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016), en el modelo de los ETM, los objetos matemáticos pueden convertirse en herramientas o viceversa. Por otra parte, en el plano cognitivo, se encuentran tres procesos, a través de los cuales se intenta dar cuenta de la actividad matemática: visualización, construcción y prueba.

Cabe observar que, para poder identificar las génesis que se activan o privilegian en la resolución de una tarea, necesitamos identificar en cuál de los tres polos del plano epistemológico se encuentra un objeto matemático en particular. El estatus de un objeto o herramienta en relación al polo en el cual se encuentra, estará más bien dado por su utilización, que por una característica intrínseca.

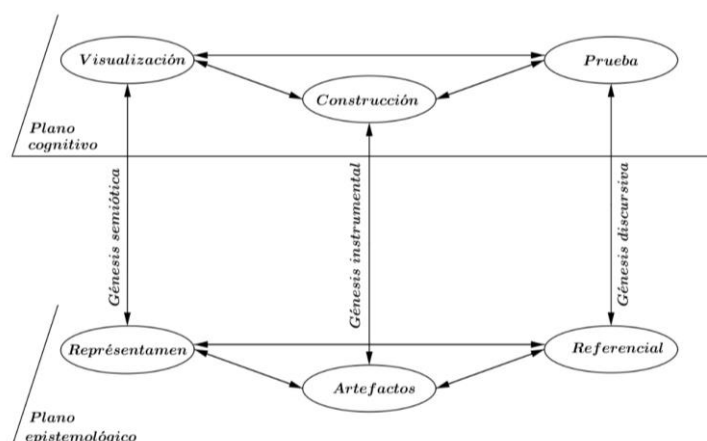
A saber, diremos que un objeto o herramienta matemática está en el polo del *representamen* cuando se utiliza como una herramienta semiótica, en otros términos, cuando se trabaja a partir de su visualización y se tomen en cuenta las relaciones entre sus unidades figurales y no solo la percepción visual que provee el acceso directo al objeto. Los objetos del polo de los artefactos (materiales o simbólicos) se identificarán cuando se trabaje herramientas materiales (como regla y compás), herramientas informáticas (como una calculadora CAS) o artefactos simbólicos.

Para los dos primeros casos, dada su naturaleza, son fácilmente identificables, en cambio, el artefacto simbólico lo identificaremos cuando un objeto matemático o un algoritmo se utilice como una herramienta para obtener un resultado y no se tomen en cuenta sus propiedades, vale decir, cuando su uso no esté apoyado en el referencial teórico. Así, asociaremos el estatus de simbólico a un uso totalmente naturalizado y rutinizado, en el que no se discuta ni cuestione su validez ni justificación.

Finalmente, en el polo del referencial teórico están las propiedades, teoremas y axiomas que dan sustento al discurso matemático. Este polo no se debe pensar solo como una colección

de propiedades, porque al dar soporte a las justificaciones deductiva, debe estar organizado de forma coherente y bien adaptado a las tareas que se les pide a los estudiantes que resuelvan (Kuzniak, Tanguay, *et al.*,2016).

Figura 2 – Decisiones que deben tomar los profesores al diseñar una pregunta de respuesta corta con Wiris y Moodle



Fuente: Elaboración propia

Tal como lo indican Kuzniak, Tanguay, *et al.* (2016), la matemática es ante todo una actividad humana y no solo una lista de signos y propiedades. Por esta razón, este modelo considera un segundo nivel centrado en el sujeto, considerándolo como un sujeto cognitivo cuyos procesos mentales están en interacción con el plano epistemológico a través de una actividad matemática específica. Los tres procesos que se consideran en el plano cognitivo son: la visualización, la construcción y la prueba. La visualización, está relacionada con la interpretación de signos y la construcción interna de la representación de los objetos y sus relaciones. La construcción, está relacionada con la utilización de artefactos (materiales o simbólicos), junto con esquemas de uso para producir elementos tangibles como escritos o dibujos y también para la observación, exploración y experimentación mediada por un artefacto. Finalmente, la prueba, está relacionada con el proceso de justificación mediante herramientas teóricas y no solamente una validación empírica, la cual se podría entender más como el proceso de construcción antes descrito.

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. La semiótica conecta el proceso de visualización en el plano cognitivo con el *representamen* en el epistemológico. Esta génesis puede partir por el signo en el *representamen* que es decodificado por el sujeto mediante la visualización. También puede partir por el sujeto que codifica y produce un signo.

La instrumental conecta el proceso de construcción en el plano cognitivo con el polo de los artefactos. Cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, está compuesta de dos procesos: el de instrumentalización y el de instrumentación. El primero, comprende la emergencia y evolución de los esquemas de uso del artefacto y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto. El segundo parte desde el sujeto y es relativo a la emergencia y evolución de los esquemas de uso y de las acciones instrumentadas, su

constitución, funcionamiento, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos. El trabajo matemático podría ser considerado rutinizado si es que no se conecta con la validación y justificación de los artefactos (Flores Salazar, Gaona e Richard, 2022).

Finalmente, la discursiva, conecta el proceso de prueba con el polo del referencial teórico en el plano epistemológico y está asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades. En este último caso, el foco está puesto en las propiedades y teoremas, por lo que se está pensando en razonamientos que van más allá de los visuales o instrumentales, pero que pueden ser desencadenadas por estos (Kuzniak, Tanguay, *et al.*, 2016, p. 727).

Cuando no es posible distinguir qué génesis está siendo privilegiada, lo que se da de manera frecuente, el trabajo matemático se puede caracterizar mediante la conexión de dos génesis, considerando algunos de los tres planos verticales (Coutat e Richard, 2011): semiótico-instrumental, semiótico-discursivo o el instrumental-discursivo.

Por otra parte, el trabajo matemático en una institución de educación se puede describir a través de tres niveles, el espacio definido por la institución, denominado ETM de referencia (Montoya-Delgadillo e Reyes Avendaño, 2022); el ETM organizado por el profesor, denominando ETM idóneo (Henríquez-Rivas, Kuzniak e Masselin, 2022) y el ETM de resolución de problemas efectivos tanto del profesor como del alumno, denominado ETM personal (Menares Espinoza e Vivier, 2022).

En este artículo, trabajamos específicamente con la idea de ETM idóneo potencial, donde potencial se entiende como aquellos recursos de aprendizaje construidos y organizados con el objetivo de activar un trabajo matemático específico, los cuales, se transforman en efectivo una vez que un estudiante trabaja con ellos y se analiza el trabajo que realiza. En el caso de una tarea cualquiera, al tener varios caminos de solución, el ETM potencial puede ser amplio, sin embargo, como el profesor programó la retroalimentación, podemos estudiar cuál es el trabajo matemático que espera del estudiante o a cuál lo quiere inducir. Entonces, a través del ETM idóneo potencial, estudiaremos el valor epistémico de las tareas diseñadas en la plataforma, particularmente de las tareas sobre funciones de primer y segundo grado, analizando algunas de sus iteraciones y también los algoritmos y enunciados que las definen.

Además, queremos estudiar la relación entre el ETM idóneo potencial que proponen los profesores y las decisiones de diseño en los algoritmos, es decir, la dimensión instrumental del diseño. Generalizando la definición de artefacto como un conjunto de proposiciones que serán o no utilizadas por un individuo (Béguin e Rabardel, 2000), podemos considerar el espacio virtual de diseño en la plataforma como un artefacto, por lo que también se produce una génesis instrumental, pero de naturaleza diferente a la que se produce en el trabajo matemático de quien resuelve una tarea. Esta diferencia se da porque los objetivos son diferentes, puesto que el profesor diseñador debe tomar decisiones para crear un enunciado, activando algunas de las proposiciones que proporciona una plataforma, mientras que, quien resuelve una tarea debe transformar en instrumento un artefacto material, simbólico o informático para responder a la tarea propuesta.

Nos interesa la génesis instrumental del diseño porque podría haber una influencia bidireccional entre el proceso de programación y el ETM potencial de las tareas, en el sentido

que, por una parte, queriendo parametrizar un enunciado particular se deben resolver desafíos específicos de programación y por otra parte, las limitaciones y fortalezas en las destrezas de programación de los diseñadores, junto con las limitaciones de la plataforma, pueden modificar el ETM potencial de la tarea diseñada.

RECOLECCIÓN DE DATOS Y METODOLOGÍA

El análisis se centra en 9 tareas, 5 sobre funciones de primer grado y 4 sobre funciones de segundo grado, creadas por una profesora Fernanda del campus Renca y el profesor Leonardo del campus Santiago Sur de INACAP. Todas las tareas de la plataforma son contextualizadas (a petición de la institución) y cada profesor trabajó varias tareas en torno a un solo contexto.

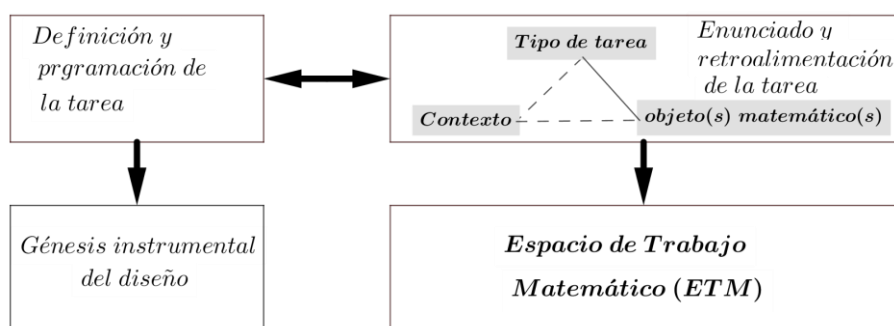
Como fuente de datos se utilizaron tres componentes que conforman una tarea en la plataforma: el enunciado, el algoritmo y una vista previa de la tarea.

Para el análisis, se examinaron tres características explícitas de la tarea: el contexto, el tipo de tarea y el objeto matemático (su representación y características). A partir de estas características posteriormente se analizó la dinámica entre los componentes del ETM que produce la tarea, tal como se esquematiza en la **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

Además de lo anterior, analizamos, a través de la génesis instrumental (Béguin e Rabardel, 2000), la definición de la tarea y particularmente el algoritmo que la define.

Utilizaremos la noción “tipo de tarea” de (Chevallard, 1999, p. 2), para quien esta se expresa por un verbo y una acción precisa. Por ejemplo, “Calcular la imagen de $x=1/3$ bajo la función $f(x)=x^2-x+1$ ” o “Graficar la función $f(x)=(x-1)/2$ ” son tareas que permiten definir los *tipos de tareas* como “Calcular la imagen de un valor” o “Graficar una función”.

Figura 3 – Elementos puestos en juego para el análisis de las tareas



Fuente: Elaboración propia

El tipo de tarea tiene un objeto matemático asociado, el que podría aparecer de forma explícita o no. Del objeto matemático, se distinguen sus características, las cuales son observables a partir de la representación semiótica (Duval, 1993) elegida por el profesor. En el caso de la plataforma, es posible analizar, además, el algoritmo que la define. A través de su representación, se distinguen algunas características particulares, por ejemplo, en el caso de la

función, la naturaleza de los coeficientes de la función o los números que aparezcan en el plano donde se represente.

Además, en el esquema de la figura 3, el contexto aparece conectado con una línea punteada, puesto que no siempre hay un contexto extra matemático. En caso de que se utilice uno, se analizará si el contexto podría influir en el tipo de tarea o en el objeto/herramienta matemática puesto en juego. Complementando lo anterior, se distinguirá si el contexto usado es artificial o auténtico. Se entenderá por artificial cuando no sea posible justificar que un contexto dado sea modelizado por un objeto matemático específico. Por ejemplo, un contexto que modeliza el precio de un producto, en función de las unidades producidas, implica que el dominio de la función debería ser discreto. Cabe destacar, que la flecha del enunciado y retroalimentación de la tarea va solo en dirección al ETM porque los profesores, al diseñar, no se basaron en este marco teórico o en algún otro y más bien, se guiaron por las indicaciones del programa de estudio.

Para el análisis particular, se utilizan las categorías de análisis del ETM, que dependen de los elementos de la figura 3, a saber, dependen de los componentes del enunciado, que, a su vez, varían según el algoritmo que los definen. Estos elementos pueden intencionar la activación de una génesis, plano específico o una circulación entre estos componentes (Montoya, Mena-Lorca, & Mena-Lorca, 2014).

RESULTADOS

ETM potencial de las tareas de la profesora Fernanda.

Fernanda creó 4 tareas, en las cuales utilizó una función cuadrática de la forma $f(x) = a_1x - a_2x^2$ (con a_1 y a_2 aleatorios). Utilizó un contexto que modeliza el ingreso en una fábrica de pantalones en términos de la cantidad de unidades vendidas. Este contexto lo denominamos artificial, puesto que no es posible justificar que este fenómeno es efectivamente modelizado por una función cuadrática. El coeficiente libre igual a cero de la función se eligió por el contexto, ya que cuando no se fabrican pantalones, es decir, $x=0$, el ingreso es cero. En forma global, las tareas propuestas se resumen en la tabla 1.

Tabla 1 – Tareas diseñadas por la profesora Fernanda..

Enunciados	Retroalimentación	
	Génesis instrumental	Génesis semiótica
T1: Calcular la imagen de un valor a partir de una función representada de forma algebraica (ver figura 4(a))	Se hacen cálculos rutinarios para calcular la imagen	Se establece una correspondencia entre los elementos contextuales del enunciado y la pre-imagen de la función
T2: Calcular las raíces de una función a partir de una función representada de forma algebraica (ver figura 4(b))	La fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es usada como artefacto simbólico	Se usa un gráfico para mostrar las raíces buscadas

T3: Estimar el máximo de una función representada de forma gráfica (ver figura 5)	La graduación y la cuadrícula se utilizan como herramienta semióticas
T4: Calcular el máximo de un valor a partir de una función representada de forma algebraica (ver figura 6)	Se utiliza la fórmula $b/2a$ como artefacto simbólico

Fuente: elaboración propia

En T1 (figura 4(a)) pide calcular la imagen de un valor a partir de una función representada de forma algebraica. Se debe establecer una correspondencia entre los datos del enunciado y la función, identificando el argumento de la función donde se evalúa, cómo y dónde se reemplaza ese valor, lo que es un trabajo en la génesis semiótica. Luego, el trabajo es principalmente de cálculo rutinario. En la retroalimentación, se hace la evaluación de la función y se muestran los resultados del cálculo, lo que incentiva un trabajo en la génesis instrumental.

En T2 (figura 4(b)) pide calcular las raíces de una función a partir de una función representada de forma algebraica. Como la función es siempre de la forma $f(x) = a_1x - a_2x^2$ (coeficiente libre igual a cero), al igualar a cero y plantear la ecuación cuadrática hay varias estrategias para obtener el resultado. En la retroalimentación, la profesora traza el gráfico de la función y marca las raíces en el gráfico, activando la génesis semiótica y trabajando la solución desde otro punto de vista. Luego, indica que hay que igualar a cero y utiliza la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para encontrar los valores que solucionan la ecuación, utilizando la fórmula como un artefacto simbólico y por tanto activando la génesis instrumental.

Figura 4 – Enunciado de T1 a la izquierda (a) y enunciado de T2 a la derecha (b) de la profesora Fernanda.

Pablo tiene una fábrica de pantalones, donde sus ingresos mensuales están dados por la función $I(p) = -5 \cdot p^2 + 130 \cdot p$, donde p es la cantidad de pantalones que fabrica en el mes.

¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 12 pantalones?

Observación:

- Ingresa la cifra sin puntos.

Respuesta:

840 

[Comprobar](#)

Pablo tiene una fábrica de pantalones, donde sus ingresos mensuales están dados por la función $I(p) = -10 \cdot p^2 + 80 \cdot p$, donde p es la cantidad de pantalones que fabrica en el mes.

Determina ¿Qué cantidad de pantalones se deben fabricar, de tal manera que su ingreso sea igual a cero?

Observaciones:

- El número de pantalones debe ser distinto de cero.

- Debes ingresar la cifra sin puntos.

Respuesta:

8 

[Comprobar](#)

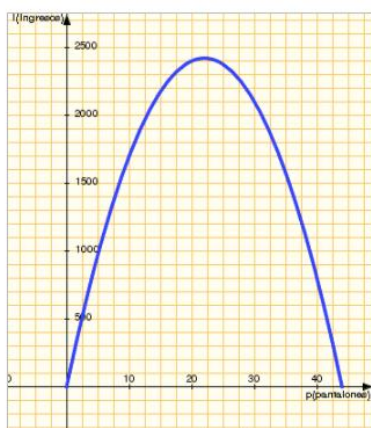
Fuente: Elaboración propia

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1

Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

A partir del siguiente gráfico, estime la cantidad p de pantalones que es necesario producir para obtener el ingreso máximo I , y estime cuál sería su valor.



Observaciones:

- Ingrese la respuesta sin unidades de medida
- Ingrese la cifra sin puntos

Respuesta:

$p = 22$ ☒ ☒

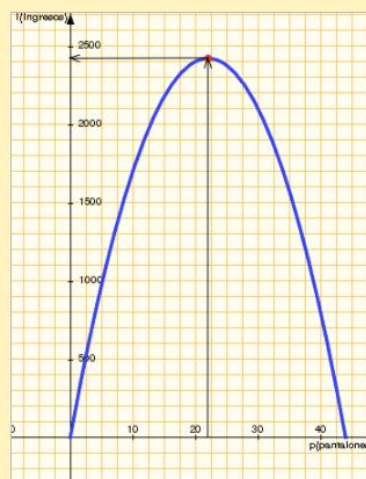
$I = 2410$ ☒ ☒

[Comprobar](#)

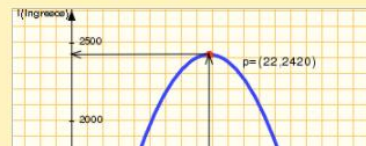
Muy buena estimación

Los ingresos de Pablo están dados por la función $I(p)$, donde p es el número de pantalones, tal como se observa en el siguiente gráfico.

Luego, trazamos una flecha desde el punto (marcado en rojo), hasta el eje vertical, que representa la imagen, que a su vez representa el ingreso I , tal como como se observa en el siguiente gráfico.



Finalmente, se obtiene que al producir 22 pantalones, se obtiene el ingreso igual a 2420, que representa el par ordenado $(22, 2420)$, tal como se observa en el siguiente gráfico.



Hay dos características a destacar de esta retroalimentación. Por una parte, el gráfico no lo conecta con los resultados algebraicos obtenidos con la fórmula, por ejemplo, estimando los valores en el gráfico antes de calcularlos o ubicando las soluciones en el gráfico, es decir, no se articulan la génesis semiótica con la instrumental. Por otra parte, el uso de la fórmula no es precisamente la estrategia más eficiente, puesto que el coeficiente libre igual a cero, permitiría resolverlo, por ejemplo, factorizando.

Figura 2

Enunciado de T4 a en la parte superior (a), comienzo de la retroalimentación parte inferior izquierda (b) y parte final de la retroalimentación parte inferior derecha (c).

Pablo tiene una fábrica de pantalones, en la cual sus ingresos mensuales están dados por la función $I(p) = -p^2 + 220 \cdot p$, donde p es la cantidad de pantalones que fabrica en el mes.

¿Qué cantidad de pantalones debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

¿Cuál es el mayor ingreso que puede obtener Pablo, en su fábrica de pantalones?

Observación:

- Ingresar las cifras sin puntos ni unidades de medida

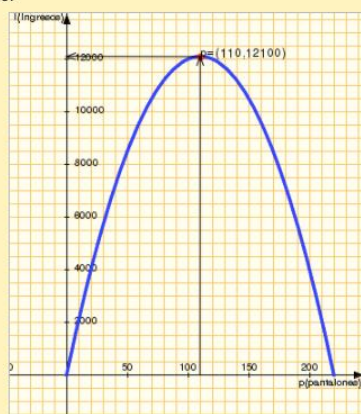
Respuesta:

$p = 110$ ✓

$I = 12100$ ✓

Los ingresos de Pablo están dados por la función $I(p) = -p^2 + 220 \cdot p$, donde p es el número de pantalones.

Si observas el siguiente gráfico, el vértice de la parábola (punto rojo), representa la cantidad de pantalones que se deben producir para obtener el mayor ingreso.



Si consideras que la forma general de una función de segundo grado está dada por:

$$I(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$$

La expresión que permite calcular la cantidad de pantalones está dada por:

$$p = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Luego si consideramos la función de ingresos $I(p)$, donde $a = 1$ y $b = -220$, y se reemplazan en la expresión que permite calcular p , se tiene que:

$$p = \frac{-(-220)}{2 \cdot 1}$$

$$p = \frac{220}{2}$$

$$p = 110$$

Finalmente, reemplazamos la cantidad de pantalones p en la función de ingresos $I(p)$, donde se obtiene que

$$I(110) = 220 \cdot 110 - 1 \cdot (110)^2$$

$$I(110) = 12100$$

En T3 (

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1(a)), Fernanda pide estimar el máximo de la función. A través de la retroalimentación (

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1(b)), guía un trabajo en la génesis semiótica, donde la cuadrícula funciona como herramienta para pilotar la visualización.

En T4 pide el máximo de la función (ver Figura 2), pero, a diferencia de T3, la función está representada de forma algebraica. En la retroalimentación, Fernanda entrega primero un gráfico de la función (al igual que en T2) y lee el resultado exacto del máximo, activando la génesis semiótica. La iteración, que se muestra en la Figura 2, se eligió precisamente para mostrar un caso donde en el gráfico se indica el valor exacto de la ordenada (2420) aun cuando, no es posible obtener ese valor solo por visualización, por lo que en estos casos podría inducir en los estudiantes una noción de que la lectura de gráficos es exacta.

Luego, utiliza la fórmula $-b/2a$ para obtener el valor de la abscisa y luego evalúa el resultado en la función para encontrar el valor de la ordenada, trabajando la génesis instrumental. A pesar de que las observaciones precedentes, la elección que hizo Fernanda, de utilizar la representación gráfica en una pregunta con un enunciado algebraico, abre una serie de posibilidades en la retroalimentación. Por ejemplo, a partir del gráfico, podría haber obtenido la abscisa del vértice como el punto medio entre la estimación de las intersecciones de la función y el eje horizontal, conectando la génesis semiótica con la discursiva, al evocar la propiedad de simetría de las funciones cuadráticas.

En las tareas y retroalimentaciones propuestas por Fernanda se advierten algunos fenómenos relacionados con la dimensión instrumental del diseño que detallaremos a continuación.

Dimensión instrumental del diseño de Fernanda

En la Figura 3 se muestra el algoritmo de la tarea 3. Este algoritmo en las primeras 7 líneas define la función, que aparece como $f=a1*p-a2*p^2$ (línea 4) y que es la misma definición que utiliza para las cuatro tareas que diseñó. Los coeficientes de la función varían en los siguientes conjuntos $a1 \in \{1, 5, 10\}$ y $a2 \in \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 300\}$. Es decir, la variabilidad de $a1$ se reduce a tres opciones, mientras que la de $a2$ a 60. Además, para definir la abscisa del vértice, en la línea 5, Fernanda agregó una condición que lo obliga a repetir iteraciones hasta ser un número natural.

Como $a1$, al variar, es múltiplo de 5 o de 10, el sistema no debe generar muchas iteraciones para lograr cumplir la condición que H1 sea un número entero. Es decir, Fernanda restringió la variabilidad, una posible razón de esto sería para asegurar que esta condición se cumpla de forma rápida para el sistema de cálculo.

Figura 3

Extracto algoritmo que define la pregunta de T3 de Fernanda. Los números de línea fueron añadidos con fines explicativos.

```

variables
1 repetir
2   a1=aleatorio([50..300..5])
3   a2=aleatorio(1,5,10)
4   f=a1·p-a2·p2
5   H1= $\frac{a1}{2 \cdot a2}$ 
6   sol=a1·H1-a2·H12
7 hasta H1∈N
8   C= $\frac{a1}{a2}$ 
9   D=sol
10 i(p)=a1·p-a2·p2
11 S=resolver(i(p)=0)
12 A=S1(p)
13 B=S2(p)
14 c=punto(B·0.45,sol·0.5)
15 alt=sol·1.2
16 anch=C·1.25
17 P:=punto_mas_cercano(i(p),punto( $\frac{C}{2}$ ,sol))
18 t1=tablero({centro=c,anchura=anch,altura=alt,etiqueta_de_ejes={"p(pantalones)"
,"I(Ingresos)"},color_ejes=negro,estilo_de_ejes="flecha_xy"})
anchura_ventana(350);altura_ventana(400)
19 graf=dibujar(t1,i(p),p,A..C,{anchura_linea=3,color=azul})
20 test(a,b):= $\left(\frac{|H1-a|}{|H1|} < 0.1 \wedge \frac{|sol-b|}{|sol|} < 0.01\right)?$ 

```

Por otra parte, en los gráficos que utiliza Fernanda en T3 y T4, podemos notar que realiza una lectura exacta de ellos, aún cuando no es posible hacerlo. En el caso de T4 esto podría bloquear la génesis semiótica, no obstante, la respuesta depende sobre todo del tratamiento de la representación algebraica. El caso de T3 (

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1) es más complicado, puesto que, la respuesta depende principalmente de una visualización.

En muchas de las posibles variaciones de la tarea, el vértice se encuentra justo en las líneas de la cuadrícula, debido, precisamente a la reducción de la variabilidad de los parámetros, pero, para algunas iteraciones, como la que se muestra en la

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1, la estimación es más difícil de realizar porque está entre las líneas de la cuadrícula. Al analizar el algoritmo, vemos que en la línea 20 aparece un test que permite evaluar la estimación del estudiante, donde da un margen de error relativo de un 10% para la abscisa y un 1% para la ordenada del vértice. Esta diferencia, en el porcentaje de error relativo, probablemente fue elegida por la diferencia entre los órdenes de magnitud de los valores de la abscisa y la ordenada del vértice respectivamente.

Para el caso de la abscisa podría surgir como estrategia alternativa calcular el punto medio entre las raíces. En cambio, para la ordenada hay que obtenerlo necesariamente mediante visualización. En la primera fila, de la tabla 2, aparece el margen de error de la tarea que se muestra en la

Figura 5 - Enunciado de T3 a la izquierda (a) con el comienzo de la retroalimentación y un extracto de la retroalimentación a la derecha (b)

Figura 1. En este caso la solución está sobre la línea y el margen de error sobrepasa la línea que equivale a 2400. Si el estudiante respondiera justo 2400 el sistema lo tomaría correcto y cabría preguntarse si, al mirar el gráfico, consideramos que es una buena aproximación. En las siguientes filas aparecen dos casos más, en el segundo, la abscisa del vértice está al centro y en el tercero, la abscisa del vértice está justo en la línea.

Estos ejemplos, se muestran con dos fines. Primero, para cuestionar si el margen de error definido en el algoritmo es adecuado en cada caso. Segundo, para pensar, tomando en cuenta apreciaciones visuales, que se indican la última columna de la tabla 2, cómo sería posible, para los profesores diseñadores, transformar estas apreciaciones ambiguas: “justo por encima”, “cerca del centro”, “muy cerca de la línea” en un código que pueda ser tratado por el software para dar una retroalimentación más cercana a la que podría dar una persona al observar el gráfico.

Tabla 2

Diferentes iteraciones de T3 donde la solución está por encima de la línea, entre líneas o justo en la línea.

Gráfico en la plataforma	Zoom del gráfico y margen de error del algoritmo	Apreciaciones visuales
		La solución está justo por encima de la línea cuyo valor es 2400
		La solución está cerca del centro, entre las líneas cuyos valores son 19.000 y 20.000
		La solución está muy cerca de la línea que marca 1600, no se puede distinguir si está sobre o bajo la línea.

Fuente: elaboración propia

ETM potencial de las tareas del profesor Leonardo

Leonardo diseñó cinco tareas en las que utilizó una función afín, de la forma $f(x) = [(a_3 - a_1)/(a_2 - a_4)](x - a_4) + a_1$ (con a_1 , a_2 , a_3 y a_4 aleatorios). Modelizó la cantidad de fotocopias que entrega una máquina que se está descomponiendo en términos del tiempo que transcurre. Aunque la tarea podría tener cierta justificación, es difícil imaginar un contexto donde la avería de una fotocopidora fuese modelada, por lo que se considera el contexto como artificial. Las tareas que propuso Leonardo se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

Tareas diseñadas por el profesor Leonardo.

Enunciados	Retroalimentación	
	Génesis instrumental	Génesis semiótica
T1: Estimar la imagen de un valor a partir de una función representada de forma gráfica		La graduación y la cuadrícula se utilizan como herramientas semióticas
T2: Calcular la imagen de un valor a partir de una función representada de forma algebraica	Se hacen cálculos rutinarios para calcular la imagen	Se establece una correspondencia entre los elementos del enunciado y los elementos de la función

T3: Generar la expresión algebraica de una función a partir de un enunciado con lenguaje natural	Se utilizan las fórmulas $m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ e $y-y_2=m(x-x_1)$ como artefactos simbólicos	Hay una conversión de algunas palabras: “primera hora”, “segunda hora”, etc... en valores que alimentan las fórmulas usadas como artefacto simbólico
T4: Calcular la pre-imagen de un valor a partir de un enunciado con lenguaje natural	Se utilizan las mismas fórmulas que en T3, como artefactos simbólicos para obtener la función y luego, es la misma función la que se usa como artefacto para obtener la pre-imagen.	
T5: Calcular la raíz de una función a partir de un enunciado escrito en lenguaje natural		

Fuente: elaboración propia

Figura 4

T3 de Leonardo

Después de observar una fotocopidora automática de trabajo continuo, el técnico descubre que por un defecto de funcionamiento, la producción disminuirá en un número constante de hojas impresas por hora, arrojando 4500 hojas impresas la segunda hora con desperfectos. Si a la hora n° 22 con desperfecto produjo 2560 hojas impresas, determine un modelo lineal que sea capaz de predecir la cantidad de hojas impresas por la fotocopidora con desperfecto, h en función de la cantidad de horas x .

Observación:

- Recuerda ingresar tu respuesta utilizando el formato de modelo lineal cuya forma es $h(x) = a \cdot x + b$, por ejemplo $h(x) = 15 \cdot x + 19$, utilizando letras minúsculas en la escritura.

Respuesta:

$h(x) = -97 \cdot x + 4694$ ✓

Comprobar

Es interesante ver que el profesor en las tareas T3, T4 y T5, al utilizar lenguaje natural en los enunciados, debe construir, en la retroalimentación, la función antes de responder a las preguntas que plantea, lo que muestra cómo cambia el trabajo matemático a partir de estas variaciones de representación semiótica. Para esta construcción utiliza las fórmulas que se mencionan en la tabla 5 como artefactos simbólicos. Una vez que obtiene la función, esta es utilizada para obtener las respuestas a las preguntas planteadas. En particular, en T3 (ver figura 8) el profesor pide, como parte de la respuesta el nombre simbólico de la función, específicamente $h(x)$. Esto por una parte es coherente con el trabajo del concepto de función, pero podría crear dificultades de naturaleza instrumental, si, por ejemplo, un estudiante ingresa una expresión diferente, como por ejemplo $y = -97x + 4694$, el sistema la consideraría incorrecta.

Dimensión instrumental del diseño de Leonardo

La función con la que trabaja en todas las tareas tiene la forma: $f(x) = [(a_3 - a_1)/(a_2 - a_4)] \cdot (x - a_4) + a_1$, donde y es la cantidad de hojas impresas, x el tiempo en horas. Los parámetros a_1 y a_3 son números aleatorios que representan una cantidad de hojas y son múltiplos de 10 que varían entre 500 y 3000 para las tareas que usan un gráfico de la función f en el enunciado (Figura 5(a)) y entre 4,000 y 5,000 para las tareas que sí usan un gráfico de f (Figura 5(b)), es decir, hay una diferencia de un orden

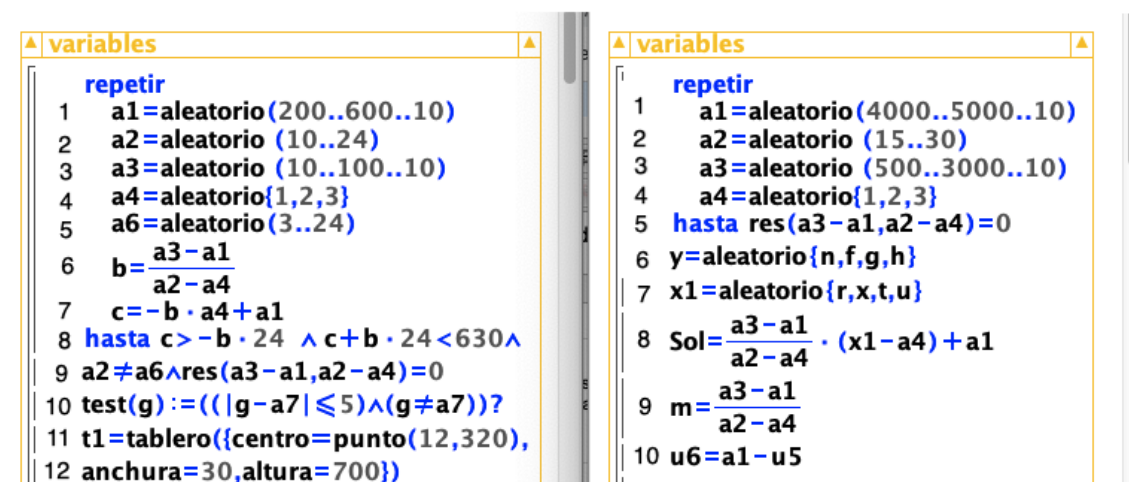
de magnitud en la variabilidad de cada parámetro. Esta diferencia se debe a que el tablero sobre el que se traza la función f tiene dimensiones fijas, definidas en las líneas 11 y 12 de la Figura 5(a), lo que produce que el plano cartesiano que se muestra a los estudiantes está aproximadamente entre -3 y 27 en el eje x y entre -20 y 860 en el eje y , tal como se muestra en la En relación a la validación de la respuesta de T2, Leonardo eligió dar como correcta una respuesta con un margen de error de 5 unidades (línea 10, Figura 5(a)). Esta solución es posible gracias a que el plano cartesiano es fijo y que la graduación también lo es. Para este caso, se presenta un problema similar a los casos de preguntas de estimación de las profesoras antes analizadas. Cuando la imagen esté cerca de las líneas, el margen no parece ser el adecuado, lo cual puede bloquear el proceso de visualización.

Por último, en la línea 8 de la Figura 5(a), Leonardo agregó algunas condiciones extras para que la imagen que se pide como respuesta esté dentro del plano cartesiano, además, al final de esta misma línea y también en la línea 5 de la Figura 5(b) se incluye como condición para los parámetros que $res(a3-a1, a2-a4)=0$, donde $res(a,b)$ es un comando que calcula el resto de la división entera entre dos números a y b . Esta condición obliga a que la pendiente de la función sea un número entero, es decir, todos los componentes de la pregunta y su respuesta son números enteros. A pesar de los esfuerzos realizados para que la imagen sea visible, también efectúa una lectura exacta de la imagen en la retroalimentación de T2, desplazando el foco de la estimación al cálculo.

Figura 6.

Figura 5

(a) Algoritmos preguntas con gráfico a la izquierda y (b) sin gráfico a la derecha del profesor Leonardo. Los números del 1 al 12 y del 1 al 10 al lado izquierdo en cada algoritmo fueron puestos manualmente para poder identificarlas más claramente cada línea del código.



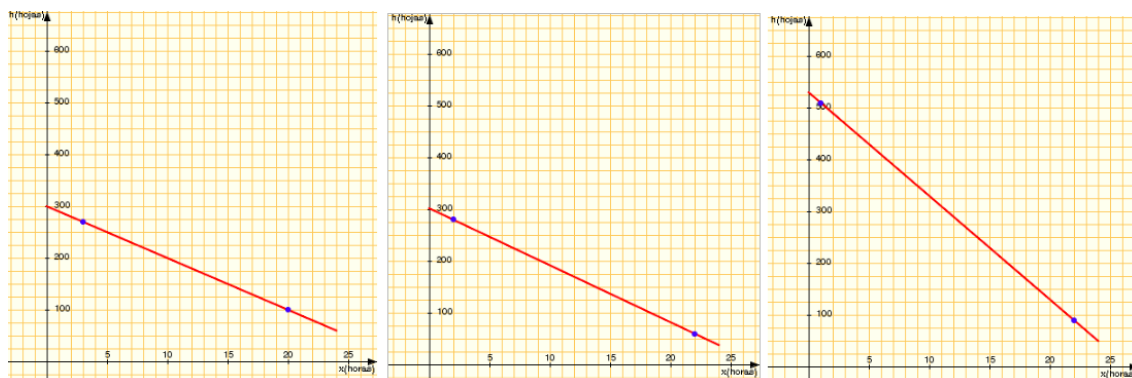
En relación a la validación de la respuesta de T2, Leonardo eligió dar como correcta una respuesta con un margen de error de 5 unidades (línea 10, Figura 5(a)). Esta solución es posible gracias a que el plano cartesiano es fijo y que la graduación también lo es. Para este caso, se presenta un problema similar a los casos de preguntas de estimación de las profesoras antes analizadas. Cuando la imagen esté cerca de las líneas, el margen no parece ser el adecuado, lo cual puede bloquear el proceso de visualización.

Por último, en la línea 8 de la Figura 5(a), Leonardo agregó algunas condiciones extras para que la imagen que se pide como respuesta esté dentro del plano cartesiano, además, al final de esta misma

línea y también en la línea 5 de la Figura 5(b) se incluye como condición para los parámetros que $res(a_3 - a_1, a_2 - a_4) = 0$, donde $res(a, b)$ es un comando que calcula el resto de la división entera entre dos números a y b . Esta condición obliga a que la pendiente de la función sea un número entero, es decir, todos los componentes de la pregunta y su respuesta son números enteros. A pesar de los esfuerzos realizados para que la imagen sea visible, también efectúa una lectura exacta de la imagen en la retroalimentación de T2, desplazando el foco de la estimación al cálculo.

Figura 6

Ejemplos de gráficos usados por Leonardo en diferentes iteraciones de T1



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En relación a los enunciados, pudimos constatar un uso de contextos artificiales de parte de los dos profesores analizados. También se observaron ciertos elementos incoherentes entre el contexto y los objetos matemáticos, lo que de alguna manera muestra que, es el objeto matemático lo que eligen y con los contextos “visten” estos objetos, sin que se tome en cuenta la validez de estos o las restricciones que imponen los contextos.

En términos del ETM potencial se privilegia el trabajo semiótico e instrumental. En el caso del trabajo instrumental, se privilegia el uso rutinizado de fórmulas, tanto en tareas con funciones de primer como de segundo grado. El referencial teórico está prácticamente ausente, no se discute la validez y pertinencia de las fórmulas usadas en las retroalimentaciones diseñadas. En el caso del trabajo semiótico, constatamos que hay una intención de los profesores diseñadores en trabajar la lectura de gráficos, utilizando, de diversas formas, la graduación y cuadrícula como herramientas semióticas. También hay un trabajo semiótico en la conversión de registros de algunos objetos de los enunciados para poder solucionar la tarea propuesta.

En relación a los registros, pudimos observar una variedad de representaciones en los enunciados: algebraico, gráfico y lenguaje natural, lo que a su vez desarrolla un trabajo matemático diferente. No obstante, no se vio una articulación entre los distintos registros, por ejemplo, usándolos como elementos de control. El potencial de estas tareas no propone un trabajo matemático varias génesis o planos al mismo, a diferencia de lo observado en otros diseños de tareas que están estrechamente relacionados con una perspectiva teórica (Barana, Marchisio e Sacchet, 2021; Gaona, 2022; Gaona, Hernández e Bravo, 2022; Gaona, López e Montoya-Delgadillo, 2022; Gaona e Menares, 2021). Esto se puede deber a la influencia del ETM idóneo o debido a limitaciones de la plataforma o instrumentales.

En relación a la dimensión instrumental del diseño, para presentar los resultados, interpretamos que, una tarea en un sistema de evaluación en línea es un artefacto que se descompone en cuatro partes: enunciado, sistema de entrada de respuestas, sistema de validación, retroalimentación. En los análisis que realizamos en este artículo, aparecieron fenómenos relacionados con cada uno de estos componentes en las tareas que los profesores y profesoras diseñaron.

En el componente enunciado, en las tareas donde la función es representada algebraicamente o en lenguaje natural, no se apreciaron problemas instrumentales específicos en relación a su representación en pantalla. En cambio, cuando se debe construir un gráfico, la representación se resuelve de forma distinta. Fernanda ajusta el plano cartesiano en función de las características del objeto matemático representado, a diferencia de Leonardo, quien redujo la variabilidad para ayudar a la visualización de los objetos. En ambos casos hay una relación entre programación de tareas y el trabajo matemático potencial que se les propone a los estudiantes. En el primer caso, cuando resuelven el problema general, la dificultad de la tarea podría cambiar mucho entre una iteración y otra y, en el segundo caso, las posibles variaciones de la tarea se restringirían. Aparte de lo anterior, la validez epistemológica de lo representado podría estar en juego a partir de estas variaciones. Por lo que, discutir con los diseñadores de estos fenómenos, ayudará a mejorar los recursos diseñados y también discutir problemáticas didácticas más profundas.

En los componentes validación de la respuesta y retroalimentación aparecieron nuevamente fenómenos ligados a los gráficos, específicamente, los márgenes de error que se entregan y la lectura exacta de gráficos que todos quienes diseñaron tareas con gráficos realizaron. Ambos fenómenos pueden afectar la génesis semiótica que están intencionado con la tarea. Lo anterior podría parecer un problema de competencias de programación, pero esto sería una respuesta simplista, ya que, cuando los profesores diseñadores lo requirieron, realizaron una programación sofisticada.

Nuestra postura es que, los profesores, al programar los parámetros de una tarea deben resolver un desafío instrumental, matemático y didáctico. Es instrumental porque necesita responder preguntas como, por ejemplo ¿cuáles son los comandos para controlar la porción del gráfico que se muestra en el plano cartesiano, la graduación y la cuadrícula? También, es un problema matemático, porque si se conocen los comandos, de, por ejemplo, la distancia entre dos líneas, hay que resolver cómo medir la distancia de la ordenada del vértice a la línea más cercana, entre otros problemas específicos.

Finalmente es un problema didáctico, porque no solo hay que hacer los cálculos necesarios, hay que definir cuál sería el rango “visual” adecuado para una buena estimación. El fenómeno de la lectura exacta del gráfico lo interpretamos como un problema de transposición informática, donde hay una diferencia entre lo que se representa en la interface - definido por el mundo interno del programa, en este caso el algoritmo - y lo que puede leer el estudiante en el mundo externo (Balacheff, 1994), que sería el gráfico en pantalla.

Otra característica común, fue el uso de números enteros en los coeficientes de las funciones, en los números de las preguntas y respuestas de las tareas e incluso la utilización de condiciones específicas para que algunos componentes como el vértice o la pendiente sean números enteros, lo cual también se constató en otros profesores que trabajaron diseñando (Gaona, 2018, p. 149). Este fenómeno, suponemos que se debe más a la influencia del ETM idóneo que a limitaciones en la competencia en programación, puesto que agregar condiciones implica ir un paso más allá en los algoritmos diseñados. Aunque hay otros estudios que muestran un uso particular de números enteros (Briant e Bronner, 2017), en este caso, hay una explicitación de un algoritmo para obligar a que ciertos elementos, que a priori no necesariamente tienen valores enteros lo sean.

Podemos concluir, que existe una relación entre las decisiones que toma el profesor y su impacto en el trabajo matemático potencial del estudiante. Algunas de estas decisiones pensamos que pueden ser producto de una limitación de la plataforma o falta de competencia en programación, sin embargo, creemos que también podrían existir otras razones que tienen que ver más por cómo entienden la enseñanza de la matemática. Es decir, no sabemos si los profesores diseñaron las tareas con estas características porque es lo que se podía hacer, lo que ellos podían hacer o lo que ellos creían que era correcto hacer.

Una de las perspectivas de este trabajo es analizar las tareas habituales que utilizan los profesores en sus clases, de tal forma de compararlos con los fenómenos observados en las tareas de la plataforma y poder comprender las razones de los fenómenos observados. Consideramos que hacer esta diferencia podría ayudar, por una parte, a mejorar los recursos y, por otra, a enriquecer el ETM idóneo de los profesores. Pero, para que el proceso de diseño de tareas en línea sea un espacio de formación para los docentes, parece necesario un acompañamiento no tan solo instrumental, sino que matemático y didáctico, puesto parece difícil que estos cambios se produzcan solos.

Subrayamos, además, que las discusiones sobre la parametrización de algunos elementos van más allá del software particular que se elija, puesto que, la revisión bibliográfica muestra un uso frecuente de tareas parametrizadas. Por lo que consideramos que abrir la discusión de la relación que existe entre programación de enunciados y sus efectos didácticos será fructífero para la investigación en didáctica de las matemáticas.

En términos generales, frente a la proliferación de recursos en línea, es importante fomentar la participación de los profesores en el diseño y al mismo tiempo, cuestionar el valor epistémico de las tareas propuestas, tanto por profesores como por diseñadores que sean externos a las instituciones donde se implementan estos recursos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el financiamiento otorgado por Beca de la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología de Chile CONICYT Doctorado en el extranjero 2013 resolución 1622/2013.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.

International Journal of Computers for Mathematical Learning, v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. **Cuadernos de Investigación en Educación Matemática**, v. 8, p. 1–15, 2011.

ATTALI, Y. Effects of multiple-try feedback and question type during mathematics problem solving on performance in similar problems. **Computers & Education**, v. 86, p. 260–267, 2015.

ATTALI, Y.; KLEIJ, F. VAN DER. Effects of feedback elaboration and feedback timing during computer-based practice in mathematics problem solving. **Computers & Education**, v. 110, p. 154–169, 2017.

BALACHEFF, N. **La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique** (A. Michèle et al., Eds.) Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. **Anais...** Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1994

BARANA, A.; MARCHISIO, M.; SACCHET, M. Interactive feedback for learning mathematics in a digital learning environment. **Education Sciences**, v. 11, n. 6, 2021.

BÉGUIN, P.; RABARDEL, P. Concevoir pour les activités instrumentées. **Revue d'Intelligence Artificielle**, v. 14, n. 1–2, p. 35–54, 2000.

BOKHOVE, C.; DRIJVERS, P. Effects of feedback in an online algebra intervention. **Technology, Knowledge and Learning**, v. 17, n. 1–2, p. 43–59, 2012.

BRIANT, N.; BRONNER, A. La prise en compte des nombres idécimaux pour le traitement du concept d'équation : une variable didactique oubliée. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 37, n. 1, p. 101–143, 2017.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221–266, 1999.

CHOW, A. F. Online homework impact in undergraduate mathematics and business statistics courses. **Educational Studies**, v. 41, n. 3, p. 244–248, 2015.

COUTAT, S.; RICHARD, P. Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 16, p. 97–126, 2011.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, n. 1, p. 37–65, 1993.

FLORES SALAZAR, J. V.; GAONA, J.; RICHARD, P. Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. *Em*: KUZNIAK, A.; MONTOYA, E.; RICHARD, P. (Eds.). **Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 165–209.

GAONA, J. *et al.* Feedback by automatic assessment systems used in mathematics homework in the engineering field. **Computer Applications in Engineering Education**, v. 26, n. 4, p. 994–1007, 2018.

GAONA, J. *et al.* **Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas**. [s.l.] Université Sorbonne Paris Cité - Université Paris Diderot, 2018.

GAONA, J. *et al.* Diseño de tareas en un sistema de evaluación en línea, una mirada desde la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático. **Pädi. Revista de Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería**, v. 5, n. 10, 2022.

GAONA, J.; HERNÁNDEZ, R.; BRAVO, F. G. Y V. Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. **International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)**, 2022.

GAONA, J.; LÓPEZ, S.; MONTOYA-DELGADILLO, E. Learning complex numbers using different CAS and an CAA in prospective mathematics teacher. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, p. 1–27, 2022.

GAONA, J.; MENARES, R. Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 17, p. 1–18, 2021.

GONZÁLEZ, J. A. *et al.* A web-based learning tool improves student performance in statistics: A randomized masked trial. **Computers & Education**, v. 55, n. 2, p. 704–713, 2010.

HATTIE, J.; TIMPERLEY, H. The Power of Feedback. **Review of Educational Research**, v. 77, n. 1, p. 81–112, 1 mar. 2007.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C.; KUZNIAK, A.; MASSELIN, B. The Idoine or Suitable MWS as an Essential Transitional Stage Between Personal and Reference Mathematical Work. *Em: KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. R. (Eds.). . Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 121–146.

HOYLES, C. *et al.* Cornerstone Mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling. **ZDM - Mathematics Education**, v. 45, n. 7, p. 1057–1070, 2013.

JONES, K.; PEPIN, B. Research on mathematics teachers as partners in task design. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, n. 2–3, p. 105–121, 2016.

KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. **Mathematical Work in Educational Context**. Cham: Springer International Publishing, 2022.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A.; DROUHARD, J. P. Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. **ZDM - Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 861–874, 2016.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 4, p. 1–8, 2014.

KUZNIAK, A.; TANGUAY, D.; ELIA, I. Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. **ZDM - Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 721–737, 2016.

MENARES ESPINOZA, R.; VIVIER, L. Personal Mathematical Work and Personal MWS. *Em: KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. R. (Eds.). . Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 91–120.

MONTOYA, E.; MENA-LORCA, A.; MENA-LORCA, J. Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 4–1, p. 191–210, 2014.

MONTOYA-DELGADILLO, E.; REYES AVENDAÑO, C. G. The Reference Mathematical Working Space. *Em: KUZNIAK, A.; MONTOYA-DELGADILLO, E.; RICHARD, P. R.*

(Eds.). . **Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces**. Cham: Springer International Publishing, 2022. p. 73–90.

ROSCELLE, J. *et al.* Online Mathematics Homework Increases Student Achievement. **AERA Open**, v. 2, n. 4, p. 1–12, 2016.

SANCHO-VINUESA, T.; ESCUDERO, N. ¿Por qué una propuesta de evaluación formativa con feedback automático en una asignatura de matemáticas en línea? **Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento**, v. 9, n. 2, p. 59–79, 2012.

STACEY, K. *et al.* Specific mathematics assessments that reveal thinking: an online tool to build teachers' diagnostic competence and support teaching. *Em*: LEUDERS, T.; PHILIPP, K.; LEUDERS, J. (Eds.). . **Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Mathematics Teacher**. Cham: Springer, 2018. p. 241–261.

STACEY, K.; WILIAM, D. Technology and assessment in mathematics. *Em*: CLEMENTS, M. A. K. *et al.* (Eds.). . **Third international handbook of mathematics education**. New York: Springer, 2013. p. 721–751.

VÁSQUEZ, M.; GAONA, J. **Sistema de evaluación dinámica online en matemática para desarrollar el estudio autónomo fuera del aula (SEDOL-M)** (V. Sánchez, Ed.)III Congreso de Innovación Educativa. **Anais...**Monterrey: TecLabs, Tecnológico de Monterrey, 2016

Submetido em: 20 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

GAONA, Jorge; VIVIER, Laurent. Valor Epistémico de Tareas Diseñadas en un Sistema de Evaluación en Línea con Retroalimentación para Matemáticas. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 79-110, Set.-Dez., 2022.
<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p111-138.id453>

Cartoons Matemáticos Digitais em salas de aula: tensões, dilemas, conflitos, superações e transformações na aprendizagem

Daise Lago Pereira Souto¹

Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT

RESUMO

O objetivo deste artigo é apresentar um recorte dos resultados da pesquisa “M@ttoon: Matemática e cartoons na Educação Básica e Superior de Mato Grosso” desenvolvida entre 2016 e 2022. Para este artigo, trouxe as principais compreensões sobre a forma como ocorreu a aprendizagem no âmbito da formação inicial e continuada de professores de Matemática. A Teoria da Atividade em conjunto com a visão epistemológica que permeia o construto Seres-Humanos-com-mídias formaram a base teórica deste estudo. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que tem como principais procedimentos e instrumentos de produção de dados a observação participante, entrevistas, chats e fóruns de discussão. Como principais resultados destaca-se que os movimentos expansivos de aprendizagem ocorreram a medida que foram geradas dúvidas, incluídas novas tecnologias, regras e de formas de organização do trabalho, houve o rompimento de padrões usuais de produção matemática e quando não havia receitas ou modelos de como fazer a tarefa matemática.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais; Formação; Práticas; Ensino; Metodologia.

Digital Mathematical Cartoons in classrooms: tensions, dilemmas, conflicts, overcoming and transformations in learning

ABSTRACT

The aim of this article is to present a cut out of the results of the research "M@ttoon: Mathematics and cartoons in Basic and Higher Education of Mato Grosso" developed between 2016 and 2022. For this article, I brought the main understandings about how learning occurred in the context of initial and continuing training of mathematics teachers. The Theory of Activity together with the epistemological view that permeates the Humans-with-media construct formed the theoretical basis of this study. This is qualitative research that has as main procedures and instruments of data production participant observation, interviews, chats and discussion forums. As main results, it is noteworthy that the expansive learning movements occurred as doubts were generated, including new technologies, changes in rules and forms of work organization, there was a disruption of the normal patterns of mathematical production, there were no recipes or models of how to do the mathematical task.

Keywords: Digital Technologies; Training; Practices; Teaching; Methodology.

Caricaturas matemáticas digitales en las aulas: tensiones, dilemas, conflictos, superación y transformaciones en el aprendizaje

RESUMEN

El objetivo de este artículo es presentar un recorte de los resultados de la investigación "M@ttoon: Matemáticas y dibujos animados en la Educación Básica y Superior de Mato Grosso" desarrollada entre 2016 y 2022. Para este artículo, traje los principales entendimientos sobre cómo se produjo el aprendizaje en el contexto de la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas. La Teoría de la Actividad junto con la visión epistemológica que impregna el constructo Humanos-con-medios formaron la base teórica de este estudio. Se trata de una investigación cualitativa que tiene como principales procedimientos e instrumentos de producción de datos la observación participante, entrevistas, chats y foros de discusión. Como principales resultados, cabe destacar que los movimientos expansivos de aprendizaje se produjeron a medida que se generaban dudas, incluyendo nuevas

¹ Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP. Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECEM/UNEMAT – Barra do Bugres, Mato Grosso, Brasil. Coordenadora do GT6 – Educação Matemática: Tecnologias Digitais e Educação a Distância da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Endereço para correspondência: Rua: A., S/N, São Raimundo, Barra do Bugres, MT, Brasil, CEP: 783900-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6832-6099>. E-mail: daise@unemat.br.

tecnologías, cambios en las reglas y formas de organización del trabajo, hubo una interrupción de los patrones normales de producción matemática, no hubo recetas o modelos de cómo hacer la tarea matemática.
Palabras clave: Tecnologías Digitales; Capacitación; Prácticas; Docencia; Metodología.

INTRODUÇÃO

A temática que permeia a pesquisa que deu origem a este artigo envolve a produção de cartoons matemáticos digitais na Educação Básica e Superior no Estado de Mato Grosso em diferentes *salas de aula*. É oportuno esclarecer que o conceito de cartoons matemáticos digitais é definido por Souto (2016) como sendo produções audiovisuais - desenhos, colagens ou modelagens - animadas por meios digitais (softwares, aplicativos, etc.) que visem à comunicação de ideias matemáticas. Ainda dentro da temática, assim como no título deste trabalho, o termo *salas de aula* se refere aos diferentes momentos que vivenciamos durante o desenvolvimento da pesquisa – antes, durante, e nesse possível *finalzinho* da pandemia da COVID-19. Pois, tivemos, durante a pesquisa, pelo menos dois modelos distintos de *salas de aula*: presencial no chão da escola/universidade; totalmente on-line com interações em diferentes plataformas e/ou ambientes virtuais de aprendizagem como o Discord, Google For Education, whatsapp.

No início da pesquisa, em 2016, não imaginávamos que viveríamos essa pandemia, em que as tecnologias digitais se tornaram tão necessárias em todos os setores da sociedade, e principalmente, à nossa sobrevivência. Contudo, a gênese da pesquisa já vislumbrava a seguinte problemática apontada por Souto e Borba (2016): atualmente, já não é uma questão de o professor permitir ou não o uso das tecnologias digitais, elas já participam do processo de aprendizagem antes, durante ou depois do período da aula. Os autores observavam, naquele período, que os alunos recorriam a vídeos postados na internet para tirarem suas dúvidas, resolverem exercícios, pesquisarem sobre um dado tema etc. Eles verificaram também que alunos e professores estavam se sentindo mais seguros em relação ao uso dessa tecnologia e, aos poucos, tornando-se produtores de seus próprios vídeos, apesar de existir um descompasso de motivos e interesses entre ambos. Naquele momento, não eram apenas esses tipos de vídeos que estavam protagonizando transformações nas aulas, os cartoons (KEOGH E NAYLOR; 1993), ainda que de uma forma tímida, vinham ganhando espaço no Ensino de Ciências, para explorar conceitos científicos.

Assim, as justificativas para a pesquisa estiveram, fundamentalmente, no intuito de contribuir para minimizar o descompasso entre as formas de comunicar e expressar ideias adotadas pela escola e as utilizadas pelos alunos (SOUTO, 2013, 2014); na ideia de estimular movimentos de uso de vídeos produzidos com tecnologias digitais para a aprendizagem e; no desejo de ampliar o conceito de Keogh e Naylor (1993) para o âmbito da Educação Matemática. Atualmente, mesmo após todo o processo de reorganização da Educação que ocorreu durante a pandemia, observa-se que a escola, de um modo geral, ainda procura voltar à racionalidade que surgiu com a escrita. Isso pode gerar dificuldades para entrar em harmonia com os alunos que, imersos na metamorfose cultural da sociedade do século XXI e nas vivências impostas pelo SARS-CoV-2, utilizam com fluência as novas formas de expressão do pensamento e, conseqüentemente, de produção do conhecimento que estão surgindo com a ascensão das tecnologias digitais.

Encontramos, então, argumentos para o desenvolvimento de um dos contornos, uma fotografia com zoom da pesquisa, que apresentamos aqui, qual seja: a necessidade urgente que nos mobilizemos em busca de atividades formativas com tecnologias digitais dirigidas para a produção de cartoons matemáticos digitais aos professores, tanto na graduação quanto em serviço com vistas à aprendizagem. Desse modo, o objetivo, deste artigo, é apresentar um recorte dos resultados da pesquisa “M@ttoon: Matemática e cartoons na Educação Básica e Superior de Mato Grosso” desenvolvida entre 2016 e 2022 com ênfase nas compreensões sobre a forma como ocorreu a aprendizagem no âmbito da formação inicial e continuada de professores de Matemática. Sendo que os dados analisados representam os principais resultados de - *pesquisa* - 9 dissertações de mestrado, 7 iniciações científicas, 3 trabalhos de conclusão de curso; - *ensino* - 10 disciplinas de graduação, 9 disciplinas de pós-graduação *strictu sensu*; - *extensão* - 13 cursos de extensão para formação continuada de professores abrangendo os 141 municípios do Estado de Mato Grosso.

Para fundamentar as análises em relação à aprendizagem tomou-se com referencial a Teoria da Atividade (TA) e algumas de suas diferentes ramificações (ENGESTRÖM, 1987, 1999, 2001; ENGESTRÖM E SANINNO, 2010); em conjunto com a visão epistemológica presente no construto seres-humanos-com-mídias (S-H-C-M) (BORBA, 1999; BORBA E VILLARREAL, 2005; BORBA et. al. no prelo). Para além do escopo deste artigo, destaca-se que o diálogo entre TA e S-H-C-M possibilitou avanços teóricos que contribuem tanto para o surgimento de uma nova geração da Teoria da Atividade, quanto para a ampliação de ideias e conceitos do construto seres-humanos-com-mídias (SOUTO, 2013; SOUTO E BORBA 2016, 2018; BORBA, SOUTO E CANEDO JR. 2022). Em acordo com essas referências e com o objetivo já apresentado considerou-se, metodologicamente, que a abordagem qualitativa é apropriada para este estudo, pois não há preocupação com mensuração de dados e/ou resultados (LINCOLN; GUBA, 1985; ARAÚJO; BORBA, 2012). Além disso, essa abordagem *eco*a na fala de Poupert (2008), que sugere, nesse tipo de pesquisa, o *despertar* de vozes silenciadas (neste caso a dos professores e futuros professores), colocando-as no centro das discussões e que o conhecimento originado nesse tipo de investigação pode gerar reflexões e mudanças.

Ao longo deste artigo serão ampliadas as discussões sobre os elementos já descritos nesta introdução, iniciando com um *diálogo* entre os fundamentos teóricos que culmina no nascimento de uma nova perspectiva teórica. Em meio à essa *conversa* está embutida a revisão de literatura com a citação de outros estudos que estão ligados à temática da pesquisa. Na sequência destacam-se os aspectos metodológicos, com abordagem, contexto, instrumentos e procedimentos de produção e análise de dados. Encaminhando para o final estão os dados e suas respectivas análises, seguidos das considerações com apontamentos e síntese sobre os principais resultados encontrados.

ENTRE A TEORIA DA ATIVIDADE E O CONSTRUTO SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

Compreender a aprendizagem não é algo trivial, dada a sua complexidade exige fundamentos teóricos que possibilitem descrições, conjecturas, enfim, análises de como o processo ocorreu. É importante a adoção de referencial(is) teóricos robustos como, por exemplo, a Teoria da Atividade e o construto seres-humanos-com-mídias empregados neste

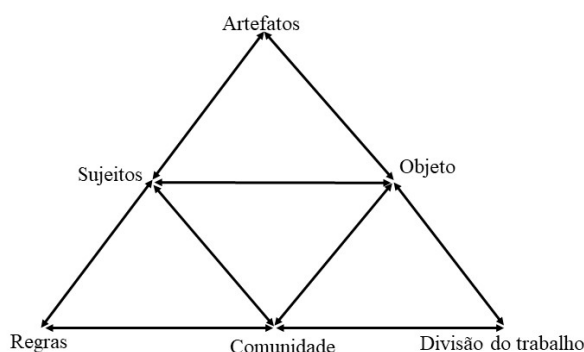
estudo. A escolha de ambos, para a pesquisa, não foi fortuita, pois de acordo com Souto (2013), eles podem ser vistos como complementares. Se por um lado a TA enfatiza o papel dos seres humanos e de aspectos sociais, históricos e culturais na aprendizagem, por outro o S-H-C-M chama a atenção para forma como esses elementos e tecnologias digitais se antropomorfizam.

As várias ramificações da TA têm alavancado discussões teóricas em várias vertentes (e.g. DAVIDOV, 1990; LAVE, 1988; ENGESTRÖM, 1987, 1991) nos fundamentamos nesse último, particularmente nos conceitos presentes na chamada terceira geração. Do construto seres-humanos-com-mídias adotamos principalmente a visão epistemológica e os conceitos de moldagem recíproca e reorganização do pensamento. Ambos, serão apresentados a seguir, assim como também uma breve síntese sobre a perspectiva teórica - possível nova geração da TA - (SOUTO E BORBA, 2016, 2018; BORBA, SOUTO E CANEDO Jr. 2022) que nasceu desse *diálogo*.

Teoria da Atividade e sua terceira geração

Na literatura a Teoria da Atividade tem sido apresentada com diferentes variações, ramificações, abordagens ou gerações que seguem a perspectiva do estudioso que a apresenta (SOUTO, 2013, P. 47). Para esta pesquisa utilizamos conceitos das gerações propostas por Engeström (1987), de forma particular a terceira, cuja representação é uma organização sistêmica no formato triangular, conforme representado na figura 1.

Figura 1 – Representação de um sistema de atividade



Fonte: a autora baseada em Engeström (1987)

São cinco os princípios que Engeström (1987) propõe para explicar a terceira geração dessa teoria. O primeiro deles é a unidade mínima de análise (figura 1), que é composta por seis elementos: artefatos, sujeitos, regras, comunidade, organização do trabalho e objeto. O segundo trata-se da historicidade do desenvolvimento dessa unidade mínima em termos locais e globais. Já o terceiro se refere a multiplicidade de vozes que ecoam durante todo o processo de aprendizagem, ou seja, o que e como os sujeitos expressam seus pensamentos. Com isso, é possível identificar as contradições internas (tensões, conflitos, dilemas) – quarto princípio. O último princípio é denominado transformações/aprendizagem expansiva.

Do ponto de vista analítico, uma das formas de se compreender os movimentos de aprendizagem, nessa unidade mínima de análise e considerando também os demais princípios são os ciclos de aprendizagem expansiva (Engeström, 1999). Eles foram idealizados com base em resultados de pesquisas da escola de Helsinque voltadas a situações de trabalho de

assistência médica domiciliar (Home Care). Mais tarde, passaram a ser empregados em estudo na área da Educação. De acordo com Souto (2013, p. 62) um ciclo de aprendizagem expansiva possui 7 estágios, a saber:

1. Questionamento - ato de questionar, criticar ou rejeitar alguns aspectos da prática corrente; 2. Análise da situação - envolve o olhar para situação criticada, questionada, a fim de se compreender seus diferentes aspectos; 3. Modelagem da nova situação - corresponde à construção de modelos que possam explicar e oferecer uma solução para a situação; 4. Escolha do melhor modelo - se refere à exploração das possibilidades e limitações dos modelos para o julgamento de um que pareça o melhor adequado para a situação; 5. Implementação do modelo escolhido - é o momento de concretizar a aplicação do modelo na prática; 6. Avaliação do modelo implementado - corresponde ao processo de reflexão e análise sobre as implicações da implementação do modelo; 7. Consolidação da prática - momento em que é possível observar o estabelecimento de fato da nova prática.

Em um ciclo de aprendizagem expansiva os movimentos devem ser considerados não lineares ou sequenciais. Ele pode durar meses ou anos e seu desenvolvimento completo nem sempre ocorre. Entretanto, ciclos que se desenvolvem em períodos menores de tempo também podem ser considerados como potencialmente expansivos. Apresentados, de forma sintética, os principais conceitos da terceira geração da TA passamos a uma breve explanação do construto seres-humanos-com-mídias.

O construto seres-humanos-com-mídias e sua visão epistemológica

O construto seres-humanos-com-mídias (Borba, 1999) tem uma visão epistemológica que subjaz questões culturais, sociais, emocionais e um *pensar com* que é transformador e não admite a separação entre seres humanos e tecnologias. A esse respeito, Borba, Souto e Canedo Jr. (2022, p. 65 - 66) destacam que existem distintos tipos de visões.

[...] aquelas mais céticas que rechaçam a presença de qualquer tecnologia digital por considerarem que elas trazem prejuízos ao raciocínio e, portanto, nos tornam pessoas ‘rasas’. [...] [outras] que admitem a presença dessas tecnologias, mas a veem de maneira conservadora, como meras ferramentas capazes de complementar ou até mesmo substituir o trabalho humano. [...] Por fim, estão as mais contemporâneas, que, diferentemente das demais, concebem as tecnologias como extensões do corpo humano, de nossos sentidos ou como algo dinâmico e fluído que é produzido com base em um pensamento coletivo que visa primeiramente a obtenção de experiência e efeito.

Assim, assumindo que atores humanos e não humanos (como as tecnologias) se constituem mutuamente é nessa última visão, mais contemporânea, que o construto S-H-C-M se situa. Ele considera o processo de produção de conhecimento como algo coletivo e complexo que extrapola o ser biológico e inclui, as tecnologias como agentes mobilizadores e influenciadores. Teóricos como Schultz e Wagner, 1970, Lévy (1993), Lave (1988); Wagner (1979), Latour (2001, 2020) são referências que fundamentam a não separação entre humanos e não humanos.

Os hífen do construto seres-humanos-com-mídias são oriundos da Fenomenologia, em particular da Fenomenologia de Schultz, sintetizada por Wagner (1979). Nela, humanos são vistos como seres-no-mundo-com-os-outros. Na busca da superação

entre realismo e idealismo a Fenomenologia propõe que nem o ser humano, nem o mundo vem primeiro. Eles não existem um sem o outro. O “Outro” pode ser um humano, ou não. Somos com coisas, com humanos, com outros seres vivos. Somos-com-mídias! É daí a origem das terminologias ser-humano-com-tecnologia, seres-humanos-tecnologias e aquela que se consolidou: seres-humanos-com-mídias (BORBA et. al, no prelo – tradução nossa).

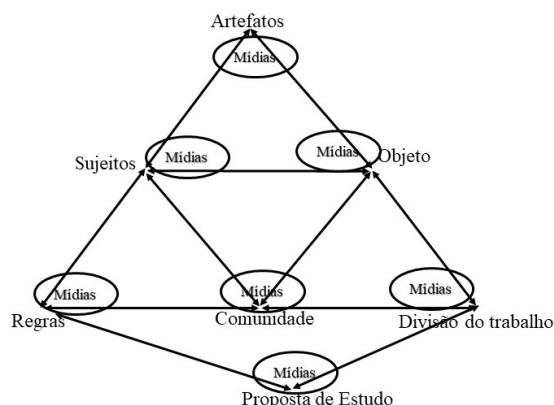
São duas as noções centrais desse construto: a moldagem recíproca – humanos moldam (transformam) a tecnologia desenvolvida e, essa, por sua vez molda (transforma) humanos; a outra é a reorganização do pensamento – humanos e não humanos formam um pensamento coletivo que pensa junto. Conforme destacado anteriormente, do diálogo entre a TA e o S-H-C-M nasce uma possível nova perspectiva teórica que inicialmente é resultado de pesquisas no âmbito da Educação Matemática, mas que podem ser referencia para qualquer área do conhecimento.

Nasce uma nova geração

As teorizações desse construto e *diálogo* com a Teoria da Atividade estão sistematizadas em pesquisas (e.g. SOUTO, 2013; SOUTO E ARAÚJO, 2013; SOUTO E BORBA 2016, 2018; CANEDO JR., 2021). Há, nelas, reinterpretações para o âmbito da Educação Matemática do princípio das transformações expansivas, ampliação do princípio de multivocalidade, *agency* de coletivos de atores humanos e não humanos, indicações do modo como a moldagem recíproca pode contribuir para a identificação do objeto da atividade, entre outras. Há também a proposição de uma ferramenta analítica pensada para questões que permeiam a aprendizagem em *salas de aula*.

No sistema proposto por Engeström (1987), representado na figura 1, os vértices dos triângulos separam seres-humanos (sujeitos) e coisas e mídias (artefatos), apesar de se admitir inter-relações entre eles. Essa característica da teoria da atividade, terceira geração, entra em contradição com o construto SHCM (BORBA et. al., no prelo). A superação desta foi sistematizada por “triângulos com vértices dinâmicos”, em que elementos se movimentam, trocam de lugar e/ou ocupam um mesmo lugar. Uma forma fluída, típica da plasticidade informática que encontramos apresentar esses movimento pode ser verificada no link: <https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/animacoes/triangulo-sannino--engestrom/> - (BORBA, SOUTO E CANEDO JR., 2022). Para a representação estática, típica da racionalidade na escrita, Souto (2013) propõe o diagrama da figura 2.

Figura 2 – Representação de um sistema de atividade S-H-C-M



Fonte: Fonte: Elaboração baseada em Souto (2013, p. 216)

No diagrama da figura 2 as mídias (ou tecnologias) aparecem em todos os elementos do sistema. O propósito, segundo a autora, é destacar que elas podem desempenhar qualquer papel de forma simultânea ou não. Além disso, Souto (2013) incluiu, como elemento de sistemas que serão utilizados para a compreensão de processos de aprendizagem em *salas de aula*, a proposta de estudo, por considerar que a mesma estava fragmentada no modelo da terceira geração dessa teoria.

Avançando no *diálogo* entre a teoria da atividade e o construto seres-humanos-com-mídias Galleguillos (2016); Cunha (2018); Domingues (2020) e Borba (2021) aprofundaram compreensões sobre o modo como a aprendizagem pode ocorrer em coletivos com um dado tipo de tecnologia digital. As pesquisas desses autores se apoiaram em questões relativas às manifestações discursivas de contradições internas e a formação de redes de sistemas de atividade. De acordo com Borba, et. al. (no prelo), quando redes de sistemas se formam, a multiplicidade de vozes ganha uma dimensão exponencial colocando em maior evidência crenças e valores sociais e culturais. Em relação às manifestações discursivas de contradições internas, são apontadas as formas como a relação dialética entre humanos e tecnologias provocam tensões, dilemas, conflitos, becos sem saída e duplo vínculo que geram contradições internas e culminam, em geral, em transformações/aprendizagem expansiva. Se aproximando das discussões e análises que faremos com os dados produzidos para este artigo.

A respeito da multivocalidade, Canedo Jr. (2021) *convida* a semiótica social para juntar-se ao *diálogo*, o que leva a uma reinterpretação desse princípio. O autor utiliza vídeos digitais e destaca que a voz de um vídeo desse tipo não é expressa apenas com a oralidade, mas também com os distintos modos semióticos utilizados (gestos, feições faciais, músicas, escrita, sons, imagens). Essa contribuição teórica assume que a visão epistemológica que permeia o construto humanos-com-mídias conduziu ao entendimento de que as tecnologias digitais utilizadas na produção de vídeos transformam a maneira como as múltiplas vozes que *ecoam* são ouvidas, compreendidas e produzem significados. Essas podem ser consideradas indicações que reforçam o conceito de *agency* das tecnologias digitais. Para Borba et. at. (no prelo – tradução nossa) o *agency* também está imbricado em outras teorizações.

As noções de moldagem recíproca e de reorganização do pensamento deixam implícita a ideia de que as mídias têm *agency*. Embora na literatura o *agency* seja enfatizado como algo inerente aos seres humanos (e.g. BANDURA, 1989). Autores como Kaptelinin e Nardi (2006) admitem a possibilidade dos atores não humanos, inclusive seres não vivos, manifestarem *agency*. Ao encontro dessas ideias, Latour (2020) sugere que um vírus tem *agency*, [...]. É neste sentido que se pensarmos as gerações em termos de modelos de triângulos (ENGESTRÖM, 1999, ENGESTRÖM, 2001, ENGESTRÖM E SANNINO, 2010), tal visão dinâmica levaria a uma quarta geração [da Teoria da Atividade], conforme discutido em Souto e Borba (2016, 2018).

Para além desses conceitos, Souto (2013) propôs algumas perguntas que podem contribuir para a caracterização do objeto da atividade: o que se deseja estudar ou abordar? O que se está efetivamente estudando ou abordando? Como os sujeitos se mobilizaram em busca de superações e/ou caminhos alternativos nunca antes pensados por eles para solucionar uma dada situação? Por que eles se mobilizaram de tal forma? Outro conceito importante que a autora faz uma releitura é o das transformações/aprendizagem expansivas:

[...] movimentações em um sistema de atividade coletiva em que seres humanos com tecnologias buscam, de forma crítica, um modo que não havia sido, em outras situações, pensado por eles para compreender e/ou reconstruir entendimentos sobre determinado problema ou conteúdo matemático (SOUTO, 2013, p. 234).

Essa que vem sendo considerada uma possível nova geração da TA também traz uma ferramenta analítica que pode tanto contribuir para o planejamento do ensino como para compreensões do processo de aprendizagem no momento em que ele ocorre. Me refiro aos miniciclones de transformações ou aprendizagem Expansiva. Distinto do que Engeström (1987) propõe nos ciclos, os miniciclones são apropriados para períodos curtos de tempo, com por exemplo, uma aula de quarenta ou cinquenta minutos. Isso não significa que eles não possam ser utilizados para análises mais longas. Eles possuem dois movimentos básicos: rotação e translação. O início de um miniciclone pode ser identificado nas inquietudes, buscas por formas distintas para o rompimento de padrões estáveis de produção de conhecimento matemática. Com o seu avanço os movimentos de rotação emergem com base em dilemas, tensões, conflitos que se refletem em quebras no planejamento do ensino, experimentações, simulações, análises de conjecturas e a própria moldagem recíproca. Paralelamente, os movimentos de translação também estão ocorrendo alicerçados, principalmente em elementos históricos, sociais, culturais e econômicos. De acordo com Borba, Souto e Canedo Ir. (2022, p. 100), o final de um miniciclone pode ser identificado quando a “construção de justificativa para uma solução produzida por conexões multimodais e intermédias que não haviam sido pensadas até então pelos sujeitos da atividade e que, com isso, resulte em novas formas de expressão do pensamento matemático.” Apresentados os principais pilares dos referenciais teóricos, passo a discorrer sobre aos aspectos metodológicos da pesquisa.

ASPECTOS METODOLOGICOS DA PESQUISA

A coerência entre a fundamentação teórica, pressupostos metodológicos e a visão epistemológica do pesquisador é fortemente defendida pela comunidade científica (e.g. BORBA e ARAÚJO, 2013; BORBA, ALMEIDA E GRACIAS, 2018), como forma de dar credibilidade a pesquisas qualitativas como esta. A esse respeito, assumo a visão de que a aprendizagem é um processo coletivo, permeado por questões culturais, sociais, emocionais, históricas, econômicas, em que as mídias (ou tecnologias) são parte constitutiva tanto quanto atores humanos. Elas são “extensões do corpo humano, de nossos sentidos ou como algo dinâmico e fluido que é produzido com base em um pensamento coletivo que visa primeiramente a obtenção de experiência e efeito” (BORBA, SOUTO E CANEDO JR. 2022, p. 66).

Essa visão é se harmoniza com os referenciais anteriormente apresentados por não admitir dicotomia ou assimetrias entre atores humanos e não humanos. Além disso, se alinha com os aspectos metodológicos da pesquisa, uma vez que adotamos movimentos fluídos, sem perder o rigor científico, conforme sugerem Bogdan e Biklen (1994, p. 83):

Em investigação qualitativa, uma das estratégias utilizadas baseia-se no pressuposto de muito pouco se sabe acerca das pessoas e ambientes que irão constituir o objeto de estudo. [...] Seria ambicioso, de sua parte, preestabelecer, rigorosamente, o método para executar o trabalho. Os planos evoluem à medida que se familiarizam com o ambiente, pessoas e outras fontes de dados, os quais são adquiridos através da observação directa.

A citação de Bogdan e Biklen (1994) reflete os movimentos da pesquisa. Não era possível, na escrita da proposta de pesquisa, prever com exatidão cada procedimento, instrumento de produção de dados, assim como também não se tinha clareza dos diferentes contextos de produção de dados e outros aspectos metodológicos. Entretanto, esses autores destacam, no final da citação, que a observação direta ou observação participante é fundamental para se adquirir clareza em relação à metodologia da pesquisa. Foi exatamente por esse procedimento que iniciou um processo mais refinado da pesquisa.

Para este artigo é importante destacar que os participantes foram futuros professores (formação inicial) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT nos anos de 2016 e 2021. Professores que atuam na Educação Básica da rede pública do Estado de Mato Grosso e também em instituições de Ensino Superior (formação continuada) nos anos de 2017 e 2019. No primeiro grupo os dados foram produzidos na disciplina de TICs e Educação Matemática que teve dois modelos de desenvolvimento: presencial e on-line. No caso do segundo grupo os dados foram produzidos em curso de extensão e também nas disciplinas de Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências, Matemática e, Educação a distância on-line (ambos do PPGECEM/UNEMAT), Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática e Científica (REAMEC/polo UFMT) desenvolvidas nos programas de *Stricto Sensu* também nos modelos presencial e on-line. Assim, a pesquisa teve mais do que o chão da escola como ambiente natural, ela teve, pelo menos três ambientes virtuais de aprendizagem: moodle, google for education (google meet e outros) e o discord. Além de interações em grupos de whatsapp. Destaca-se que nos excertos professora e

pesquisadora são a mesma pessoa, ou seja, a autora deste artigo e coordenadora da pesquisa macro.

Conforme destacado anteriormente, um dos procedimentos e instrumentos de produção de dados da pesquisa foi a observação participante com notas de campo. Além dela, tivemos entrevistas, chats e fóruns de discussão. O processo de análise dos dados ocorreu simultaneamente à sua produção. À medida que os dados eram produzidos fazia-se análises com impressões iniciais seguido do arquivamento em pastas nomeadas de forma a favorecer o processo de indução analítica (POUPART *et. al.* 2010; FERENHOF, 2018) que utilizamos. Sendo que os demais procedimentos analíticos foram adaptados de (FERENHOF, 2018): ler, reler e registrar insights iniciais sobre os dados; manter registros de intuições, interpretações, inferências e ideias; procurar por temas emergentes; desenvolver conceitos e proposições; fundamentar-se na literatura e nos pressupostos teóricos; representar ideias e insights em diagramas e ou outras imagens; organizar os dados por temas com base em códigos; agrupar os temas gerando categorias; comparar dados e refinar a análise. Para este artigo apresentamos uma das categorias encontradas: *Professorar* com Tecnologias Digitais na produção de cartoons matemáticos digitais.

Metodologicamente, para minimizar possíveis vieses da pesquisa, realizamos a triangulação de fontes e de dados (LINCOLN E GUBA, 1985; GOLDBERG, 2007). Para esses autores esse procedimento torna-se fundamental em pesquisas qualitativas como esta, pois contribuiu para que seja possível abranger uma amplitude maior possível na descrição, explicação e compreensão do fenômeno.

PROFESSORAR COM TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PRODUÇÃO DE CARTOONS MATEMÁTICOS DIGITAIS

O título desta seção em que apresentamos, discutimos e analisamos os dados representa o recorte (categoria de análise) analítico que escolhemos para este artigo. O termo *Professorar* não foi escolhido ao acaso, ele vem do próprio diálogo com literatura, previsto nos aspectos metodológicos da pesquisa. Silva (2006) sugere a ideia de *professorar on-line* para discutir, no início do surgimento de cursos nessa modalidade, o modo como vários atores humanos (professores, tutores, equipe multidisciplinar) deveriam compor um coletivo para que as aulas em ambientes virtuais de aprendizagem fossem mais interativas e, com isso, pudessem contribuir com a aprendizagem. A inspiração nessa ideia em conjunto com os dados analisados levou a uma ampliação do próprio conceito, à medida que a visão epistemológica já apresentada permite esse alargamento. Dito de outra forma, *Professorar* com tecnologias pressupõe sim um trabalho coletivo que envolve na mesma proporção atores não humanos e experimenta tensões, dilemas, conflitos, superações e transformações na aprendizagem.

Ao iniciar o trabalho de produção de Cartoons Matemáticos com Tecnologias Digitais a professora, em qualquer que fosse a sala de aula (no chão da escola/universidade; on-line ou híbrida), procurava conhecer o contexto social, cultural, econômico em que estava atuando, assim como identificar que os alunos sobre como produzir vídeos. Embora os vídeos do tipo cartoons tenham especificidades em relação aos do tipo *screencasts* (captura de imagens da ecrã do computador ou os *vocasts* (captura de imagens direto de uma câmera como as dos celulares),

essa compreensão é importante para que o planejamento do ensino fosse elaborado de modo a provocar o surgimento de miniciclones e fomentar movimentos expansivos que pudessem culminar na aprendizagem (Souto e Borba, 2016, 2018). Nos excertos a seguir é possível verificar como professora busca tais entendimentos durante uma interação no ambiente discord no ano de 2021.

Professora: *E sobre os vídeos, falem um pouco mais como era antes da pandemia. Os professores produziam? Vocês produziam? Ou apenas utilizavam os disponíveis na internet? (fórum de discussão – ambiente discord - 01/10/2021)*

Professora em formação inicial1: *Teve uma professora minha que passou um trabalho onde tínhamos que gravar um vídeo explicando um conteúdo. Tínhamos que procurar um cenário que tivesse haver com o nosso conteúdo. O trabalho foi bem legal. Passamos muita raiva kkkkkk. Mas no final deu certo. Gravamos pelo celular mesmo e depois baixamos um aplicativo onde juntamos todos os vídeos. Deu até para colocar uma música de fundo (fórum de discussão – ambiente discord - 01/10/2021)*

Professora em formação inicial2: *Sobre os vídeos. Alguns professores produziam sim e deixavam disponíveis no sagu [plataforma moodle], ou indicavam vídeos no youtube. Eu como aluna, gravei vídeos poucas vezes, acho que só umas duas vezes, mas sentia muita dificuldade kkkk. Agora, com a prática online, já é super tranquilo. (fórum de discussão – ambiente discord - 01/10/2021)*

Os excertos com os comentários das professoras em formação inicial 1 e 2 exemplificam um fenômeno observado nas diferentes *salas de aula* que a pesquisa foi desenvolvida. No início, apesar de algumas afirmações como: *passamos muita raiva; sentia muita dificuldade*, que segundo quarta geração a teoria da atividade (BORBA, SOUTO E CANEDO Jr. 2022) poderiam ser fontes de tensões, aparentemente estavam superadas. As afirmações: *mas no final deu tudo certo, deu até para colocar uma música, agora [...] já é super tranquilo*, sugerem que os participantes tinham conhecimento sobre o processo de produção de vídeos e as tecnologias digitais utilizadas, por já terem experiências em outras disciplinas.

Com esses elementos, em alguns casos, o planejamento inicial teve o que ser modificado, ou seja, houve a necessidade do que Hardman (2007) e Souto (2103, 2014) chamam de *quebras e script* (como, por exemplo, a troca de aplicativos e softwares) para que os miniciclones de aprendizagem expansiva se formassem e se desenvolvessem. Assim, com o avanço do trabalho dos vídeos do tipo cartoons matemáticos digitais é possível observar as primeiras tensões, ainda que tímidas na maioria das vezes.

Professora em formação inicial3: *Professora cartoon é bem trabalhoso. (chat – ambiente discord - 05/11/2021)*

Professora em formação inicial4: *criamos o roteiro, falaremos sobre a educação financeira, a ideia é trabalhar com os anos iniciais, falaremos sobre o dinheiro, o tamanho das cédulas e as moedas. queria até tirar uma dúvida, a primeira situação estamos falando de onde vem o dinheiro, e a segunda queremos falar sobre as moedas/cédulas, mas tô achando que é melhor inverter, o que a senhora acha? (chat – ambiente discord - 01/10/2021)*

Ao afirmar que produzir um cartoon matemático digital é algo *bem trabalhoso*, a professora em formação inicial3 pode estar indicando que seu conhecimento sobre tecnologias para produzir outros tipos de vídeos não é a mesma para esse tipo específico. Na sequência, o

excerto a professora em formação inicial⁴, com destaque *quero até tirar uma dúvida*, pode ser interpretada como uma manifestação discursiva sugestiva de que a um miniciclone está iniciando. Isso porque inquietações, dúvidas, questionamentos são característicos desse momento inicial (BORBA, SOUTO E CANEDO, JR. 2022). No caso, em análise a construção do roteiro teve o papel desencadeador do processo de aprendizagem expansiva.

Entretanto, verifica-se que há busca por uma certa forma de legitimação da professora: *o que a senhora acha?* Quando esse tipo de indagação é feito, recomenda-se que não se forneça respostas prontas com caminhos fechados. Pois, se isso ocorrer pode contribuir para o fortalecimento de padrões de produção de conhecimento matemático estáveis e, com isso interromper o miniciclone em formação (SOUTO E BORBA, 2016, 2018). Na resposta da professora, apresentada a seguir, observa-se o esforço para estimular o trabalho e ao mesmo tempo romper com crenças reprodutivas ou práticas *encapsuladas* muitas vezes arraigadas.

Professora da disciplina: *Gostei ...E se vocês aprofundassem em uma situação? Essa primeira situação, por exemplo, quando o personagem pergunta se o banco dá pra sacar muito dinheiro daria, por exemplo, para relacionar com o salário mínimo e os custos de uma família de 2 ou 3 pessoas. Mas, se quiserem manter as duas situações também não tem problema. Percebi que no final da primeira situação o personagem diz que queria saber a diferença entre moedinhas e cédulas de papel. É isso mesmo? Ou Vocês vão discutir as diferenças entre as moedas de cada país? Como as situações são independentes vocês podem montar as duas e depois verificar qual ordem é melhor. Se forem aprofundar sobre a moeda de cada país, poderiam focar na relação entre o real e o dólar e a alta na inflação que estamos vivenciando, alta de combustíveis, etc. (chat – ambiente discord - 01/10/2021)*

Na situação destacada nos dois excertos anteriores observa-se que o dilema apresentado pela professora em formação inicial⁴ não foi solucionado pela professora da disciplina. Ao apontar diferentes caminhos e deixar livre a escolha verifica-se a tentativa de alavancar os miniciclones de aprendizagens expansivas. Sugerir várias possibilidades de solução, gerar novos questionamentos, provocando tensões, dilemas e conflitos é uma forma de dar movimentos à aprendizagem. Aprendizizes, quaisquer que sejam, devem se sentir estimulados a produzir *o que não está ali* (ENGESTRÖM, 2001; SOUTO, 2013, 2014). Isso implica em afirmar que buscar o novo é uma forma de colocar os miniciclones em movimento de modo que possam culminar em uma aprendizagem expansiva.

Os excertos apresentados até aqui foram produzidos durante a pandemia da COVID-19 com aulas em ambientes totalmente on-line, como por exemplo, o discord. Entretanto, independentemente do tipo de sala de aula (presencial ou on-line) os movimentos de aprendizagem expansiva se assemelham. Ou seja, tensões, dilemas e conflitos também ocorrem embora provocados por outros fatores e/ou elementos. A seguir são apresentados dados de uma entrevista e foram produzidos com base no trabalho desenvolvido em 2016 em uma turma de licenciandos em matemática no modelo presencial.

Professora em formação inicial⁵: *A primeira vez que eu produzi um Cartoon foi em 2016, na disciplina de TICs, foi novo e diferente [...] A principais dificuldades foram em relação aos softwares, que eu não tinha muito conhecimento [...] Acredito que isso*

seja consequência de sempre morar na zona rural, estudar em escola [na educação básica] do campo. (Entrevista 19/09/2022).

Pesquisadora: *Naquela época lembro que não tinha nenhum tutorial ou receita na Internet sobre como fazer um cartoon, né? (Entrevista 19/09/2022)*

Professora em formação inicial5: *Isso, foi difícil escolher a tecnologia. O mais perfeito em edição era o Camtasia, mas, era pago. O power point era bem limitado...[...] tutoriais não tinham, foi algo novo. (Entrevista 19/09/2022)*

O diálogo durante a entrevista entre a pesquisadora e a professora em formação inicial5 sugere duas situações pertinentes para se analisar, quais sejam: a falta de fluência com tecnologias digitais (OLIVEIRA E MARCELINO, 2015) e a não disponibilidade de *receitas* sobre como fazer um cartoon matemático digital. Ter fluência, segundo esses autores, significa ter domínio sobre o funcionamento da tecnologia em uso. Em outras palavras, implica em conhecer as possibilidades e restrições que ela possui a tal ponto que se saiba trabalhar com ela. Quando a professora em formação inicial5 afirma que *não tinha muito conhecimento* está indicando a sua não fluência com as tecnologias utilizadas na produção de cartoons matemáticos digitais. Isso pode reduzir o processo de reorganização do pensamento matemático baseado em interações com tecnologias digitais, visto que ele é recorrente e, de acordo com Souto (2015), pode ser potencializado quando os sujeitos possuem fluência sobre a tecnologia em uso.

Não ter fluência com uma dada tecnologia, é um elemento muito forte e paradoxal, pois também pode ser positivo se o considerarmos como gerador de tensões em um miniclone de aprendizagem expansiva. Isso porque tensões são recorrentes entre os elementos do sistema de atividade e algo novo (SOARES E SOUTO, 2014). Essas autoras explicam que “como as atividades são sistemas abertos, a introdução de um novo elemento, como por exemplo, um novo instrumento [tecnologia], pode provocar contradições [tensões] no sistema, que, por sua vez, podem impulsionar o sistema para uma mudança” (SOARES E SOUTO, 2014, p. 54).

Outra análise dos excertos anteriores da professora em formação inicial5 se refere a não disponibilidade de *receitas* sobre como fazer um cartoon matemático digital. A esse respeito Soares e Souto (2014) afirmam que um tipo de tensão que pode ocorrer é entre as possíveis ações que formam o objeto do sistema de atividade, principalmente entre algo novo que é proposto e algo que é padrão dominante. Historicamente o padrão dominante ou usual de produção de conhecimento matemático é baseado em ações mecânicas, de repetição, de seguir um passo a passo. Assim, quando não se tem uma *receita* para reproduzir e, algo desconhecido precisa ser pensado, planejado, discutido, enfim, construído sem nenhum tipo de modelo é, em geral, considerado algo difícil, principalmente, porque o pensamento é organizado, desorganizado e reorganizado várias vezes neste processo. Ou seja, no início do trabalho identifica-se duas fontes de tensões, as quais podem indicar que um miniclone está em formação como movimentos de rotação (não fluência) e ao mesmo tempo movimentos de translação (padrão historicamente dominante de produção matemática). Rotações (movimentos que ocorrem dentro do sistema de atividade seres-humanos-com-mídias) também foram observadas em outras situações, como a apresentada na sequência. O cartoon matemático digital em discussão aqui, e ilustrado na figura 3, é denominado pelos autores de *A divisão perfeita* e pode ser acessado no seguinte link: <https://www.youtube.com/watch?v=dqw2izXZiEA>.

Figura 3 – Imagem do cartoon: A divisão perfeita



Fonte: a autora, 2022.

Pesquisadora: *Eu lembro que vocês transformaram um conto de Malba Tahan, (qual era mesmo?) em um cartoon. Lembro também que em uma das versões que vocês me apresentaram tinha apenas o problema e a resposta final. Mas, não tinha a virada com a resposta da matemática formal e aí, eu pedi para vocês fazerem. Lembro que a resposta não estava no livro e nem na internet. Como foi o processo para resolver essa situação? (Entrevista 19/09/2022)*

O termo virada que está grifado no excerto da pesquisadora se refere a um dos quesitos fundamentais na escrita do roteiro de um cartoon matemático digital, e talvez, o mais importante para a aprendizagem do conteúdo. Isso porque é nela que o algoritmo, a explicação, a argumentação matemática precisam ser expressos de maneira clara e formal.

No caso do conto de Malba Tahan utilizado a princípio verifica-se que houve uma tentativa de reprodução/adaptação, ou seja, o minicilone poderia estar na eminência de ficar estagnado. Entretanto, a professora, na tentativa de não deixar isso acontecer, chama a atenção para a necessidade de se explicar como se chegou ao resultado final. Fato que gerou dúvidas, incertezas, dilemas e conflitos e, conforme registrado em notas de campo da época, contribuíram para o avanço do minicilone. Mais uma vez observa-se que não ter respostas prontas ou modelos a seguir é fundamental para que movimentos em direção a aprendizagem expansiva ocorram conforme já Souto e Borba (2016) discutem.

Professora em formação inicial⁵: *Eu lembro, que eu e o professor em formação inicial⁶ [colega de turma que fez o trabalho com ela] dividimos em partes, eu ia desenhar criar imagens da história, uma adaptação em vez de camelos, cavalos... Ele a parte da matemática... A primeira versão faltava a virada... Eu tive muita dificuldade em entender a mágica [explica matematicamente todo o processo de solução do problema até o resultado final] que acontecia por traz. E por que sobrava um cavalo (camelo). (Entrevista 19/09/2022)*

No comentário anterior há indicativos de que houve uma quebra de script (na organização do trabalho) pelos professores em formação inicial. A proposta da professora era um trabalho coletivo e colaborativo em duplas, que gerasse discussões, choque de opiniões, etc. Isso porque esse tipo de organização contribui para que tensões surjam e com ela a necessidade de superação. Constituindo, portanto, um dos fatores principais para que os minicilones avancem.

Os professores em formação inicial, neste caso, mantiveram a regra do trabalho em duplas, mas corromperam o que havia sido proposto para a organização do trabalho. A esse respeito se recomenda ao professor fique atento para ter *insights* de como lidar com esse tipo de situação eventualmente possa surgir durante o trabalho em aula e, com isso, se possa garantir a continuidade dos miniciclones. Foi o que ocorreu neste caso, ao perceber que o trabalho havia sido dividido e direcionado para um formato mais *individualizado* a professora percebeu que uma possibilidade de alavancar os miniciclones seria nos momentos em que as duplas teriam que trabalhar juntas em sala de aula.

Assim, a suposta divisão foi quebrada, pelo menos naqueles momentos e, tensões foram geradas. Neste caso em análise, o fator desencadeador foi a argumentação matemática que deveria ser utilizada para mostrar que o resultado do conto estava correto. Na época, no livro não havia essa informação, assim como também, esses professores em formação inicial não encontraram respostas na internet (pelo menos não em sala de aula).

Pesquisadora: *Como vocês desvendaram essa mágica? Lembro que nas aulas discutimos muito sobre isso. Vocês criaram alguns modelos e depois de algumas aulas apresentaram uma solução plausível. Como foi a construção dessa solução fora da sala de aula? Tu lembra? Teve internet ou outras tecnologias? Teve outros atores humanos? (Entrevista 19/09/2022)*

Professora em formação inicial5: *A professora da disciplina e vídeos no youtube. (Entrevista 19/09/2022)*

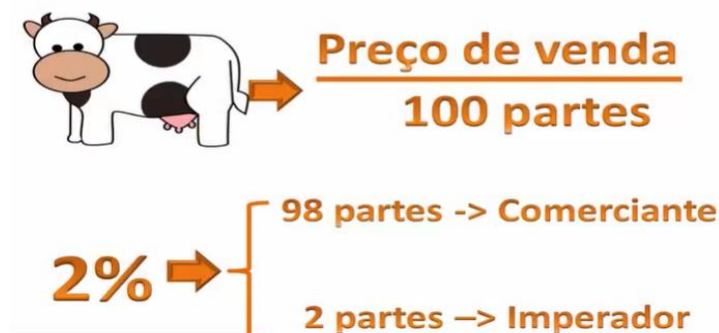
Para complementar os dados analisados nos dois excertos anteriores consultei minhas notas de campo registradas durante a observação participante. Identifiquei que foram várias aulas discutindo a virada, ou seja, a explicação matemática. Sempre na tentativa de provocar movimentos no miniciclone, gerando tensões, experimentações, reorganização do pensamento. Até que uma dada aula eles chegaram com a resposta. E agora, ao perguntar à professora em formação inicial5 *como foi essa construção fora da sala de aula?* O Youtube aparece como o grande protagonista, compartilhando o mesmo objeto da atividade. O que o desloca da condição de artefato para comunidade (SOUTO E BORBA, 2018).

Na formação continuada não foi deferente, professores em serviço entrevistados algum tempo depois de terem produzidos seus cartoons relatam movimentos expansivos. O excerto a seguir é um exemplo do trabalho desenvolvido na modalidade presencial.

Professor em serviço1: *A primeira vez que eu produzi um cartoon foi na disciplina Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências e Matemática, ofertada no mestrado [2017]. Sinceramente eu achei muito difícil, tive que pesquisar muito, dedicar uma grande quantidade de horas para conseguir chegar ao resultado final. Embora eu não tivesse dificuldade em utilizar as tecnologias digitais [Professor do Curso de Ciência da Computação]. [...] Realizei várias buscas na internet sobre a história da porcentagem e as diferentes formas de calculá-la.[...] A etapa [desenhar o cenário e os personagens] também foi difícil, eu tentei muitas possibilidades, com vários softwares, mas não estava gostando do resultado. Novamente recorri à internet e encontrei o OpenToonz, um software destinado à produção de animações. [...] tive que recorrer ao Youtube e assistir vários vídeos sobre como utilizá-lo. (entrevista em 20/09/2022) –*

O cartoon matemático digital em discussão aqui, é ilustrado na figura 4, e denominado pelo autor de *Aprendendo porcentagem com a Vó Irene* e pode ser acessado no seguinte link: <https://www.youtube.com/watch?v=B9AEhi5aKSg&t=159s>.

Figura 4 – Imagem do cartoon: Aprendendo porcentagem com a Vó Irene



Fonte: a autora, 2022.

O professor em serviço¹ apesar de ter fluência com tecnologias digitais, por ser formado em ciência da computação e atuar como docente no mesmo curso relata, cinco anos depois, as tensões vivenciadas e como fez para superá-las. Relembrar após esse período de tempo pode ser um indicativo de que a aprendizagem que ocorreu na época foi expansiva. Isso porque não houve esquecimento como ocorre, em geral, em tarefas mecânicas ou de repetição.

Afirmações como: *achei muito difícil, tive que pesquisar muito, não estava gostando resultado*, sugerem que, assim como na formação inicial, os professores em serviço também experimentaram dúvidas, inquietudes, autocríticas que provocaram tensões, dilemas e conflitos. Para superar essas tensões e outras como, por exemplo, aprender a utilizar o software o professor buscou respostas em sites da internet e na plataforma Youtube. Esse movimento analisado com as lentes do sistema seres-humanos-com-mídias coloca a internet no papel de comunidade sem deixar de exercer o papel de artefato. Souto e Borba (2016, p. 235) explicam:

Isso porque um dos papéis da comunidade é situar o sistema dentro do contexto sociocultural daqueles que compartilham o mesmo objeto (Engeström, 1999). Além disso, também é função da comunidade mediar as relações entre os sujeitos e o objeto da atividade. [...] É oportuno observar que a relação dos sujeitos com a comunidade, segundo a teoria da atividade, é mediada pelas regras. Por outro ângulo de análise, temos que considerar ainda a existência de uma relação entre comunidade e objeto que é mediada pela divisão ou organização do trabalho como preferimos nos referir.

Apesar de o objeto da atividade ser algo complexo de ser descrito em sua totalidade é possível, apoiar-se em Kaptelinin (2005, p. 17), “o objeto da atividade é determinado por todos os motivos efetivos”, inferir que uma aproximação de suas características, naquele instante da atividade relatado pelo professor em serviço¹ era: *produzir um cartoon matemático digital com tecnologias ainda não conhecidas*. O que leva a interpretação de que a internet mediou a relação dos sujeitos com o objeto. Com isso, verifica-se que a internet no papel de comunidade também trouxe para o sistema o rompimento de regras e convenções sociais que ainda hoje são

arraigadas, como por exemplo, a não necessidade de esperar respostas prontas do professor (autonomia do aluno). Essa mudança de regras levou a transformações nas formas de organização do trabalho, pois os *feedbacks* dados pela internet, especificamente pelo Youtube, fizeram com que o trabalho pudesse ser realizado em outros espaços e tempo que não os da sala de aula propriamente dita.

Outro exemplo na formação continuada, no modelo presencial, que reafirma movimentos em direção à aprendizagem expansiva é de um professor pedagogo que produziu seu cartoon matemático digital em 2019 em parceria com outro colega da turma.

Professor em serviço2: *No primeiro instante, acreditei ser incapaz de produzir algo que representasse de fato e tomasse forma de destaque dando sentido aos aspectos do ensino de matemática sobre qual fui desafiado a fazer. Tudo ocorreu dentro de um cenário de tentativa com acertos e erros, já que na prática era um desafio a mais, considerando isso como nossa primeira experiência com este tipo de produção. (entrevista em 19/09/2022)*

Provocar os aprendizes a *buscar o que não está ali*, essa é a ideia central da aprendizagem expansiva (ENGESTRÖM, 1987). No excerto do professor em serviço2 as expressões *fui desafiado, tudo ocorreu dentro de um cenário de tentativa com acertos e erros, primeira experiência com este tipo de produção* são indicativos de que produzir um cartoon matemático digital era algo novo, não usual, ou seja, não estava ali.

Esses destaques também podem ser considerados indicativos de que houve desestabilizações no sistema de atividade com movimentos de reorganização do pensamento e moldagem recíproca. A cada ação de tentativa em encontrar a solução que culmine em um erro, por exemplo, provoca reorganizações do pensamento (Tikhomirov, 1981), o que pode desencadear o processo de moldagem recíproca. A esse respeito Souto e Borba (2018) afirmam que a reorganização do pensamento é condicionada às possibilidades que a tecnologia utilizada oferece e, por isso, ela ocorre a cada experimentação, simulação, tentativa e erro, assim como também pode levar à moldagem recíproca.

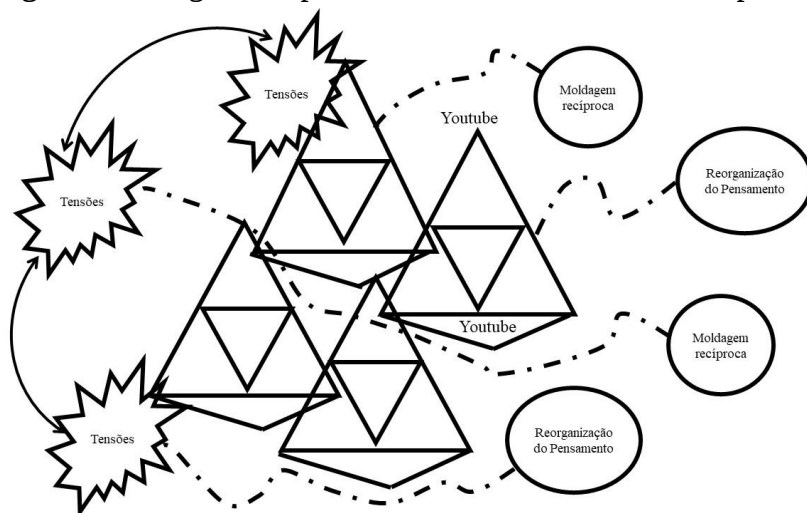
REFLEXÕES FINAIS

Nesse espaço, reservado para reflexões finais, estão sistematizadas as compreensões sobre a forma como ocorreu a aprendizagem no âmbito da formação inicial e continuada de professores durante o processo de produção de cartoons matemáticos digitais. Para tanto, foi utilizada a ferramenta analítica denominada miniciclone de transformações ou aprendizagem expansiva. Ela propiciou a descrição do processo de aprendizagem com riqueza de detalhes e, juntamente com as ideias do sistema de atividade seres-humanos-com-mídias favoreceu tais compreensões.

Os dados analisados apresentam dois tipos de público que participaram da pesquisa: professores em formação inicial e professores em serviço. Eles possuem características muito próprias seja em relação ao conhecimento matemático ou saber usar tecnologias digitais. Além disso, os recortes nos excertos se passaram em diferentes modelos de salas de aula (presencial e online) e, em períodos históricos distintos que tinham tecnologias múltiplas. Apesar de toda essa diversidade, verifica-se que os movimentos de aprendizagem expansiva tiveram traços

comuns. É com base neles que construí o diagrama da figura 5, o qual explico na sequência para a mostrar como o objetivo deste artigo foi alcançado.

Figura 4 – Diagrama representativo dos movimentos de aprendizagem



Fonte: Elaboração própria.

No início do trabalho a formação de miniciclones era tímida, a preocupação estava direcionada para se conhecer o contexto social, cultural, econômico dos aprendizes, assim como também identificar o que eles sabiam em relação à produção de vídeos. Naquele momento, foi possível observar que as tecnologias utilizadas na produção dos vídeos do tipo cartoons matemáticos digitais ocupavam o lugar considerado *natural* à luz do referencial teórico, ou seja, o de artefatos, o qual localiza-se, na figura 5, no vértice superior nas representações triangulares.

As primeiras pistas de que um miniciclone estava se formando, em geral, são observadas nas tensões, assim como também o seu desenvolvimento. Por este motivo, a colocação delas na lateral da imagem da figura 5, não é ao acaso. O propósito é enfatizar que tensões permeiam todo o processo de aprendizagem e podem emergir em decorrência de diferentes motivações. Nos dados analisados se verificou, por exemplo, que elas podem surgir com uma dúvida em relação ao roteiro, pelo uso que os sujeitos fazem (ou não) de uma dada tecnologia, pela introdução de algo novo na proposta de ensino, que pode ser tanto uma regra, um instrumento ou uma nova forma de divisão do trabalho. Em síntese, elas podem ser causadas quando os procedimentos que são usuais em um dado contexto passam de um nível mecânico ou automatizado, para a necessidade de se pensar o como fazer.

Em meio a tensões, conflitos e dilemas se observa que há estímulos para que reorganizações do pensamento ocorram e com elas moldagem recíproca. Ambos representados na lateral direita da figura com ligações diretas tanto nos sistemas, como nas tensões. As quais provocaram movimentos de rotação (não fluência com tecnologias digitais) e de translação (padrão historicamente dominante de produção matemática). Fator gerador de tensões, e consequentemente de avanços no miniciclone, neste caso, foi não ter respostas prontas ou modelos a seguir.

À medida que as tensões eram superadas, os dados analisados sugerem que há movimentos nas posições dos elementos que compõem um sistema. Foi verificado, por

exemplo, que a internet e suas plataformas como o youtube passam a ocupar a condição de comunidade, sem deixar de ser artefatos. Isso pode ser observado no diagrama triangular localizado mais à direita na figura 5. Quando a internet passou a desempenhar também o papel de comunidade houve uma ampliação da multivocalidade do sistema. Isso porque ele passou a ser influenciado não apenas por aqueles que fazem parte dele, mas também pelas múltiplas vozes daqueles que são externos, mas que de algum modo se relacionam com ele. Além disso, quando se trata do uso de vídeos, com os do youtube utilizados pelos participantes, podemos considerar que a multivocalidade também passou a ser expressa por gestos, feições faciais, músicas, escrita, sons, imagens. A construção de uma página na internet ou de vídeos postados em uma plataforma como o youtube carrega diferentes pontos de vista, valores morais e éticos, histórias, convenções, posicionamentos, de seus idealizadores e, na medida em que são fontes de consulta, influenciam com todos esses aspectos os elementos do sistema. Com isso é possível que haja uma potencialização nos movimentos expansivos nos miniciclones de aprendizagem ou paradoxalmente levar à uma estagnação.

Por fim, considero que o processo de aprendizagem expansiva com Cartoons Matemáticos Digitais em *salas de aula*, suas tensões, dilemas, conflitos, superações e transformações não é algo particular de um determinado público, ou tecnologia, ou período histórico. Os dados analisados indicaram que para se compreender a aprendizagem é desejável que se tenha uma proposta de estudo com objetivos de ensino definidos e que se conheça os aprendizes: o contexto que estão inseridos, as tecnologias não usuais, os de padrões de produção do conhecimento. Todos esses elementos podem possibilitar o planejamento do ensino de modo que se favoreça aos aprendizes a chegada à uma aprendizagem expansiva. Sendo que isso não requer nenhum tipo de instrumento avaliativo como uma prova, por exemplo. Ao contrário, é possível observar os movimentos de aprendizagem expansiva no instante em que ocorrem, até mesmo em pequenas ações, gestos, expressões ou no silêncio de uma reorganização do pensamento que não é compartilhada, mas que pode ser observada nas fixações de olhares sobre o objeto de estudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos participantes da pesquisa e aos membros do grupo GEPETD/UNEMAT que contribuíram para o desenvolvimento desse estudo. O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Apoio à Pesquisa de Mato Grosso – FAPEMAT.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V.; **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BORBA, M. C. **The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things**. Educational Studies in Mathematics, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10043-2>. Acesso em 01 set 2022.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.** New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula: diferentes vozes de uma investigação.** Belo Horizonte, Autêntica, 2018.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CUNHA, F. T.; DOMINGUES, N. Humans-with-media: Twenty years of a theoretical construct in mathematics education. In: PEPIN, B; GEUDET, G.; CHOPPIN, J. (Eds.) **Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.** Springer, no prelo.

BORBA, M. C., SOUTO, D. L. P., CANEDO JR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BANDURA, A. **Human Agency in Social Cognitive Theory.** American Psychologist, p. 1175-1184, 1989.

CANEDO JR, N. R. **A participação do vídeo digital nas práticas de modelagem quando o problema é proposto com essa mídia.** 2021. 194f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em: <https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/material-gpimem/teste/>. Acesso em: 20 set. 2022.

CUNHA, J. F. T. **Blended learning e multimodalidade na formação continuada de professores para o ensino de Matemática.** 2018, 106f. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Mato Grosso, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Barra do Bugres, 2019. Disponível em: <http://portal.unemat.br/?pg=site&i=ppgecm&m=dissertacoes>. Acesso em: 15 set. 2022.

D'AMBROSIO, U. Um enfoque transdisciplinar à educação e à história da matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, p.13-29, 2005.

DAVIDOV, V. V. The Content and Unsolved Problems of Activity Theory. In: **2º Congresso Internacional sobre Teoria da Atividade.** Lahti, Finlândia, 1990,

DOMINGUES, N. S. **Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática: Uma complexa rede de sistemas seres humanos -com -mídias.** 2020, 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020. Disponível em: <https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/material-gpimem/teste/>. Acesso em: 20 set. 2022.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding**: an activity-theoretical approach to developmental research. 1987 (Helsinki, Orienta-Konsultit). Disponível em: <https://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>. Acesso em: 25 set. 2022.

ENGESTRÖM, Y. Activity theory and individual and social transformation. **Multidisciplinary Newsletter for Activity Theory**, v. 7, n. 8, p. 14-15, 1991.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding**: ten years after. 1999. Disponível em: <https://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>. Acesso em: 23 set. 2022.

ENGESTRÖM 2001; ENGESTRÖM, Y. Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. **Journal of Education and Work**, v.14, n.1, p. 133 – 156, 2001.

ENGESTRÖM, Y. **Non Scolae Sed Vitae Discimus**: como superar a encapsulação da aprendizagem escolar. In: DANIELS, H. (Org.) *Uma Introdução a Vygotsky*. São Paulo: Edições Loyola, p.175-197, 2002.

ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: foundations, findings and future challenges. **Educational Research Review**, v.5, p.1-24, 2010.

FERENHOF, H. A. Métodos qualitativos de pesquisa: de dados à informação ao conhecimento; formando pesquisadores. **International Journal Of Knowledge Engineering And Management**, v. 19, n. 7, p. 1-11, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/ijkem/article/view/81602>. Acesso em: 23 set. 2022.

GALLEGUILLOS, J. E. B. **Modelagem matemática na modalidade online: análise segundo a Teoria da Atividade**. 2016, 213f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016. Disponível em: <https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/material-gpimem/teste/>. Acesso em: 20 set. 2022.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2007.

HARDMAN, J. Making Sense of the Meaning Maker: Tracking the Object of Activity in a computer-Based Mathematics Lesson Using Activity Theory. **International jornal os Education and Development Using ICT**, Univsersity of Cape Town, South AFrica, v.3, n.4, 2007.

KAPTELININ, V. The Object of Activity: making sense of the sense-maker. **Mind, Culture, and Activity**, v.12, n.1, p.4-18, 2005.

KAPTELININ, V.; NARDI, B. **Acting with Technology**: Activity Theory and Interaction Design. Londres: MIT Press, 2006.

KEOGH, B.; NAYLOR, S. Learing in science: another way in. **Primary Science Review**, 26, 1993.

LATOURE, B. **A esperança de Pandora**. Tradução Gilson César Cardoso. Bauru, EDUSC, 2001.

LATOURE, B. Is This a Dress Rehearsal? **In the Moment**. 2020. Disponível em: <https://critinq.wordpress.com/2020/03/26/is-this-a-dress-rehearsal/>. Acesso em 23 set. 2022.

LAVE, J. **Cognition in practice**: Mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge University Press, 1988.

LEONTIEV, A. N. **Activity, consciousness, and personality**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1978.

LÉVY, O. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora, 34, 1993.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. Newbury Park: Sage Publications, 1985.

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Estratégias didáticas com o software SuperLogo: adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n. 4, pp. 816-842, 2015.

POUPART, J. **A Pesquisa Qualitativa**: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2008.

SILVA, M. **Educação Online**. São Paulo: Loyola, 2006.

SOARES, D. S.; SOUTO, D. L. P. Tensões no processo de análise de modelos em um curso de Cálculo diferencial e integral. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, ano 9, n. 17, p. 46 – 76, 2014. Acesso em: 18 set. 2022. DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2014.n17.p46-76.id372>

SOUTO, D. L. P. **Transformações Expansivas em um Curso de Educação Matemática a Distância Online**. 2013. 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em: <https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/material-gpimem/teste/>. Acesso em: 20 set. 2022.

SOUTO, D. L. P. **Transformações expansivas na produção matemática online**. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. Coleção PROPG Digital- UNESP. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/126237>. Acesso em: 10 set. 2022.

SOUTO, D. L. P. Aprendizagem matemática on-line: quando tensões geram conflitos. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n.5, p. 942-972, 2015. Acesso em: 12 set. 2022. URL: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index>.

SOUTO, D. L. P. **M@ttoon**: Matemática e cartoons na Educação Básica e Superior de Mato Grosso. Projeto de Pesquisa FAPEMAT. Barra do Bugres: Universidade do Estado de Mato Grosso, 2016.

SOUTO, D. L. P.; ARAÚJO, J. L. Possibilidades expansivas do sistema Seres-humanos-com-mídias: um encontro com a Teoria da Atividade. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Eds.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**, São Paulo: Editora Livraria da Física, p.71-90, 2013.

SOUTO, D. L. P., BORBA, M. C. Seres Humanos-com-Internet ou Internet-com-Seres Humanos: uma troca de papéis? **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, 19(2), 217-242, 2016. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1924>

SOUTO, D. L. P., BORBA, M. C. Humans-with-internet or internet-with-humans: A role reversal? (Reprint). **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 8(3), 2-23, 2018.

SCHULTZ, A; WAGNER, H. R. A. **On phenomenology and social relations**. Chicago: University of Chicago Press, 1970.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCSH, J. V. (Ed.) **The Concept of Activity in Soviet Psychology**. New York: M. E. Sharpe Inc., p.256-278, 1981.

WAGNER, H. R. **Fenomenologia e relações sociais**: textos escolhidos de Alfred Schutz. Zahar, 1979.

Submetido em: 25 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

SOUTO, D. L. P. Cartoons Matemáticos Digitais em “salas de aula”: tensões, dilemas, conflitos, superações e transformações na aprendizagem. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 139-161, Set.-Dez., 2022. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p139-161.id454>

Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental

Cecilia Gaita¹

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Francisco Ugarte²

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Cintya Gonzales³

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

RESUMEN

Se presenta una propuesta de criterios que permiten valorar y modificar problemas para lograr un incremento progresivo en el nivel de algebrización de las actividades matemáticas realizadas por los alumnos. Para la construcción de los mismos, se toman en cuenta los niveles de razonamiento algebraico, propuestos por el Enfoque Ontosemiótico. Luego, se valida la propuesta a partir del trabajo con un grupo de docentes en ejercicio y presentamos el resultado de su aplicación a una tarea perteneciente a un libro de texto, se analiza el problema original y se modifica de acuerdo a los criterios. Concluimos que el uso de los criterios propuestos ayudó a incorporar interrogantes que demandan el empleo de diversos lenguajes, evidenciando a través de la solución esperada que, en ese proceso, las prácticas matemáticas demandarán cada vez un mayor grado de generalización: desde la identificación de las regularidades a partir de un conjunto finito de valores, las cuales se comunican verbalmente, hasta la unitarización de la regla de formación de funciones lineales y afines, y el reconocimiento de familias de funciones, empleando el lenguaje alfanumérico.

Palabras clave: razonamiento algebraico; niveles; generalización; lenguajes; covariación.

Criteria for modifying tasks that develop algebraic reasoning.

ABSTRACT

A proposal of criteria is presented that allow the assessment and modification of problems to achieve a progressive increase in the level of algebraization of the mathematical activities carried out by the students. For the construction of these criteria, the levels of algebraic reasoning proposed by the Ontosemiotic Approach are taken into account. Then, the proposal is validated by working with a group of practicing teachers. We present the result of its application to a textbook task, analyzing the original problem and modifying it according to the criteria. We conclude that the use of the proposed criteria helped to incorporate questions that demand the use of diverse languages, evidencing through the expected solution, that in this process, mathematical practices will demand an increasing degree of generalization: from the identification of regularities from a finite set of values, which are communicated verbally, to the unitarization of the rule of formation of linear and affine functions, and the recognition of families of functions, using alphanumeric language.

Keywords: algebraic reasoning; levels; generalization; languages; covariation.

¹ Doutora em Didática da Matemática pela Universidade de Valladolid (UVa), España. Professora da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av. U niversitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7827-9262>. E-mail: cgaita@pucp.edu.pe.

² Doutor em Matemáticas pela Universidade de Valladolid (UVa), España. Professor da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5071-8924>. E-mail: fugarte@pucp.edu.pe.

³ Mestre em Enseñanza de las Matemáticas pela Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Professora da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú. Av. Universitaria, 1801, Urb. Pando, San Miguel, Lima, Perú, CEP: 1761. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2130-1710>. E-mail: cintya.gonzales@pucp.pe.

Criterios de modificación de tareas para desenvolver o raciocínio algébrico

RESUMO

Apresenta-se uma proposta de critérios que permitem avaliar e modificar os problemas, a fim de alcançar um aumento progressivo do nível de algébricas das atividades matemáticas realizadas pelos alunos. Os níveis de raciocínio algébrico propostos pela Abordagem Ontosemiótica são tidos em conta na construção destes critérios. Depois, a proposta é validada pelo trabalho com um grupo de professores praticantes e apresentamos o resultado da sua aplicação a uma tarefa de manuais escolares, analisando o problema original e modificando-o de acordo com os critérios. Concluimos que a utilização dos critérios propostos ajudou a incorporar questões que exigem o uso de diferentes línguas, mostrando através da solução esperada, que neste processo, as práticas matemáticas exigirão um grau crescente de generalização: desde a identificação de regularidades a partir de um conjunto finito de valores, que são comunicados verbalmente, até à unitarização da regra de formação de funções lineares e afins, e o reconhecimento de famílias de funções, utilizando a linguagem alfanumérica

Palavras-chave: raciocínio algébrico; níveis; generalização; línguas; covariação.

INTRODUCCIÓN

Actualmente se plantea la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, y no como el salto de actividades puramente aritméticas (en Educación Primaria) a otras donde el álgebra se presenta como un producto acabado (en Educación Secundaria), en medio del cual no hay sino un vacío de sintaxis sin semántica (WILHELM, 2017).

El desarrollo del pensamiento algebraico a través de una transición desde las generalizaciones empíricas, basadas en conjeturas sobre casos concretos, a las generalizaciones teóricas, como resultado de las operaciones entre enunciados explícitos de relaciones matemáticas (CARRAHER; MARTÍNEZ; SCHLIENANN, 2008), permitiría a los estudiantes apropiarse gradualmente de herramientas que les permitan representar lo general en matemáticas. De esa manera, primero se identificarán patrones, relaciones y estructuras, para luego usar la notación algebraica, como medio para comunicar la generalidad. Para ello, se requiere considerar actividades que demanden cada vez un mayor grado de generalidad y mayor capacidad de comunicar dicha generalidad (AKÉ; GODINO, 2018).

En consonancia con estos resultados, los sistemas educativos de varios países proponen la incorporación del álgebra como parte de los currículos de matemáticas desde edades tempranas. Sin embargo, aún hacen falta programas de formación para la ejecución de itinerarios de pensamiento algebraico desde los 6, hasta los 17 años (CARREHER; SCHLIENANN, 2019). De la revisión de diversos trabajos en donde se analizan textos didácticos de Educación Primaria para determinar en qué medida estos consideran situaciones que promuevan el desarrollo del razonamiento algebraico se encuentra que, si bien hay un esfuerzo por introducir el álgebra en la educación básica, todavía su presencia es escasa (LLANES; PINO-FAN; IBARRA, 2022; GAITA; SUPO; UGARTE, 2021).

Al analizar los problemas de los manuales oficiales y de documentos utilizados por los profesores de secundaria para la enseñanza del álgebra en el Perú, se observa una simplificación de la realidad que desvirtúa la situación o el contexto que se desea analizar. En otros casos, las situaciones resultan ser demasiado artificiales y en otros no se aprovechan adecuadamente para desarrollar el razonamiento algebraico (GAITA *et al.*, 2022).

A modo de ejemplo, presentamos un problema (ver Figura 1) propuesto en el texto oficial de matemáticas para estudiantes de segundo año de secundaria (13 años) en el Perú, que se enmarca en el desarrollo de la llamada competencia Resuelve problemas de regularidad,

equivalencia y cambio (PERÚ, 2016). A través de esta tarea se espera que el estudiante resuelva problemas referidos a interpretar cambios constantes, traduciendo a funciones lineales y relaciones de proporcionalidad directa, y compruebe si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Este propósito corresponde al sexto nivel de desarrollo de la competencia (PERÚ, 2016, p. 139).

Figura 1 – Tarea Albergamos perros sin hogar

Albergamos perros sin hogar

Una asociación protectora de animales acondiciona una casa para albergar a todos los perros que encuentra abandonados en la calle. La asociación tiene dificultades para dar en adopción a perros adultos. Para promoverla, da a conocer el consumo de alimento de los perros buscando sensibilizar al público, ya sea para que adopten o donen alimentos.

Se sabe que en el albergue hay 16 perros adultos y cada uno de ellos consume dos bolsas de alimento durante un mes.



Fuente: <https://googl/awn273>

1. ¿Cuántas bolsas se necesitarán para alimentar a los 16 perros durante un mes?
2. ¿Qué relación encuentras entre la cantidad de perros y la cantidad de bolsas de alimento?
3. Si llegan 4 perros adultos más al albergue, ¿cuántas bolsas de alimento se necesitarán a partir de este mes?

Fuente: Resolvamos problemas 2, Cuaderno de trabajo (2019, p.27)

Al analizar el problema, se reconoce que, si bien el contexto seleccionado demanda establecer relaciones entre dos cantidades (número de perros y cantidad de alimento que se consume mensualmente), basta hacerlo implícitamente, pues para dar solución a la tarea, se requiere únicamente realizar cálculos aritméticos particulares. Así, para responder la pregunta 1, será suficiente multiplicar 16 por 2; para la pregunta 2, el estudiante dará como respuesta que por cada perro adulto se requieren dos bolsas de alimento (información que es dato del problema) y para responder la pregunta 3, bastará sumar a la respuesta dada en el apartado 1 el resultado de multiplicar 4 por 2.

Sin embargo, el libro propone como camino de solución esperado (ver Figura 2) el completar una tabla de valores (apartado 1), para luego establecer una relación entre la cantidad de perros y de alimento a través de expresiones algebraicas (apartado 3.) y, finalmente, particularizar la fórmula encontrada y responder la última pregunta (apartado 5). Es decir, se

pretende desarrollar el razonamiento algebraico, pese a que para resolverse solo se requiere realizar operaciones entre números particulares.

Figura 2 – Etapas propuestas en el libro para resolver la tarea

1. Completa la tabla y establece la relación entre la cantidad de perros y la cantidad de bolsas de alimento.																			
<table><tr><td>Cantidad de perros</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td></tr><tr><td>Cantidad de alimento (bolsas)</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Cantidad de perros	2	4	6	8	10	12	14	16	Cantidad de alimento (bolsas)	4								
Cantidad de perros	2	4	6	8	10	12	14	16											
Cantidad de alimento (bolsas)	4																		
2. ¿Cuántas bolsas de alimento se necesitan para 16 perros?	3. Vamos a establecer una relación numérica entre las dos magnitudes. Para ello, ¿qué operación plantearías entre ambas magnitudes? Escribe la relación de proporcionalidad entre la cantidad de perros y la cantidad de alimento.																		
4. La relación que hay entre la cantidad de perros y cantidad de alimento (bolsas) permite establecer una proporción. ¿Es una proporción directa? Explica con un ejemplo.	5. A partir de la relación de proporcionalidad, planteamos el total de alimento para 4 perros más.																		

Fuente: Adaptado de Resolvamos problemas 2, Cuaderno de trabajo (2017, p.29)

Consideramos fundamental proponer pautas que ayuden al profesor a determinar si un problema contribuye al desarrollo del razonamiento algebraico; a partir de ello, los profesores de matemáticas podrán no solo valorar la idoneidad de la tarea, sino también proponer cambios de modo que las sucesivas preguntas demandan cada vez un mayor grado de generalidad y de expresión de dicha generalidad, es decir, demandan cada vez un mayor nivel de razonamiento algebraico. En este trabajo proponemos criterios para valorar y modificar problemas presentes en textos escolares, asociados a contenidos matemáticos tradicionalmente asociados al álgebra (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, funciones, entre otros).

ELEMENTOS TEÓRICOS

En el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) se entiende por práctica matemática “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (GODINO; BATANERO, 1994, p. 182). Desde el EOS, una práctica será considerada como algebraica si esta incluye procedimientos que privilegien procesos de particularización y generalización.

Se plantea un modelo para el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), el cual caracteriza las prácticas matemáticas consideradas como algebraicas, basándose en supuestos pragmáticos, antropológicos y semióticos sobre el conocimiento matemático (GODINO *et al.*, 2012).

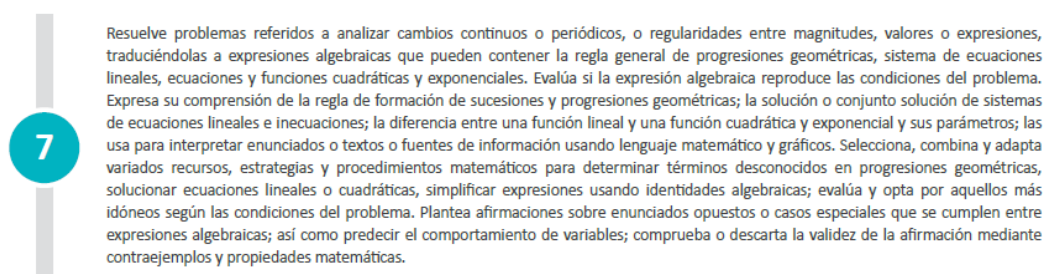
En el trabajo de Godino *et al.* (2014) se proponen criterios básicos para definir niveles de algebrización, asignados a la actividad matemática que se pone en juego al resolver tareas en educación primaria; dicha práctica está caracterizada por grados de generalidad y el uso de diversos registros de representación semiótica, así como sus transformaciones y conversiones. En un trabajo posterior, Godino *et al.* (2015) amplían el modelo, considerando tres niveles más avanzados para describir la actividad matemática, considerada como algebraica, en la educación

secundaria y bachillerato. Los dos criterios considerados para esta ampliación son el uso de parámetros tanto en actividades de tipo estructural y funcional, así como el estudio de estructuras algebraicas, sus definiciones y propiedades.

Teniendo en cuenta lo anterior y los niveles de la competencia Resuelve problemas de regularidad y cambio (figura 3) descritos en el Currículo Nacional del Perú (PERÚ, 2016), consideramos que es posible que los estudiantes que finalizan la secundaria en el Perú muestren rasgos de hasta un nivel 4 de razonamiento algebraico, ya que se hace referencia al reconocimiento de parámetros. De la misma forma, currículos de diversos países también proponen que los egresados de la educación básica alcancen el equivalente a un nivel 4 de razonamiento algebraico elemental.

Figura 3 – Niveles de la competencia Resuelve problemas de regularidad y cambio

DESCRIPCIÓN DE LOS NIVELES DEL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA



Fuente: Perú (2016, p.139)

Por lo anterior, describimos los cuatro primeros niveles de razonamiento algebraico propuestos en el modelo RAE (GODINO *et al.*, 2015).

Nivel 0: Intervienen objetos intensivos de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares). Se emplean lenguajes natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.

Nivel 1: Intervienen de manera implícita objetos intensivos de grado 2, esto es, clases de intensivos de grado 1. Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales. Se emplean lenguajes natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes.

Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos de grado 2. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax+B=C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. Se emplean lenguaje simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.

Nivel 3: Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax+B=Cx+D$. Se opera con las indeterminadas o variables. Se emplean lenguaje simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Nivel 4: Se emplean parámetros como registro numérico y también para expresar familias de ecuaciones y funciones. Se debe discriminar el dominio y rango de la función paramétrica, esto es, identificar la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Se trata de un estudio cualitativo cuya primera finalidad es establecer criterios para valorar y transformar situaciones problemas, propuestas en textos escolares, de modo que contribuyan a desarrollar el RAE en los estudiantes. Para ello, se identifican los rasgos fundamentales de las prácticas matemáticas consideradas como algebraicas, según el modelo teórico propuesto para el RAE y se propone una lista de indicadores asociados a dichos rasgos.

Para validar la propuesta se lleva a cabo un taller con docentes en el cual se presentan los elementos teóricos del modelo y los criterios propuestos. Los docentes analizan la pertinencia de los problemas de textos escolares apoyados en los criterios y brindan sugerencias para su modificación. A partir de ello, se plantean nuevos problemas, apoyados también en el uso de recursos como GeoGebra y Hojas de cálculo, haciendo explícito cómo es que las tareas modificadas demandan prácticas matemáticas con niveles de algebrización cada vez mayores.

Muestra y recolección de la información

Para el trabajo con docentes, se consideró una muestra formada por 90 docentes de secundaria en ejercicio, los cuales laboraban en escuelas públicas peruanas. La selección de los docentes fue intencional; se invitó a docentes que habían participado en capacitaciones anteriores, las cuales fueron organizadas por el instituto de investigación sobre enseñanza de las matemáticas (IREM-PUCP), al cual pertenece el grupo de investigadores. Los docentes se agruparon libremente para trabajar en equipos de 4 personas.

Todas las interacciones llevadas a cabo con los maestros se registraron a través de la plataforma zoom; la selección y análisis del problema que eligió cada grupo se presentó por escrito. Posteriormente, con ayuda del equipo de investigadores, el problema seleccionado se transformó en varias tareas.

Construcción de criterios

Se consideran las descripciones de los niveles de RAE dados previamente y se identifican aspectos cruciales para la evolución de dicho razonamiento. A partir de ello, se proponen criterios que permiten reconocer si una situación tiene el potencial para desarrollar el razonamiento algebraico, y cómo podría modificarse para que lo desarrolle efectivamente.

Elementos considerados para la construcción de los criterios

Para que los estudiantes desarrollen prácticas algebraicas, las tareas que se les planteen deben movilizar:

- Objetos considerados como algebraicos, tales como relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones, así como estructuras, sus tipos y propiedades (GODINO *et al*, 2014).

- Diversos lenguajes que permitan expresar los tipos de objetos y procesos algebraicos, esto es, desde el lenguaje ordinario, gráfico hasta el lenguaje alfanumérico, predominante en los niveles superiores de algebraización (GODINO *et al*, 2014).
- Procesos de particularización, generalización y unitarización, los cuales son inherentes a las prácticas algebraicas, tal como se explica en GODINO *et al*, 2012a, p.287

A continuación, se proponen criterios que debe cumplir la situación para que se considere apropiada para desarrollar el RAE. Además, señalamos un conjunto de pautas que ayudarán a graduarlas, de modo que la situación promueva el progreso en los niveles de RAE.

Cuadro 1– Criterios para identificar situaciones que contribuyan al desarrollo del RAE

Criterio	Descripción	Para el progreso en el RAE
1. Objetos matemáticos que involucra la situación	Se trata de una situación sobre patrones o de búsqueda de regularidades, o que requiere manipular expresiones alfanuméricas y usar propiedades de las estructuras (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, etc.), o que estudia el cambio y la covariación.	La situación requiere la modelización de los datos a través de alguno de los objetos considerados como algebraicos. Para que el RAE evolucione, se debe demandar una modelización de complejidad creciente.
2. Lenguaje que moviliza la situación	La solución del problema debe requerir del uso de distintos lenguajes: gestual natural, numérico, tabular, gráfico, alfanumérico, incluyendo el uso de parámetros, y las transformaciones entre ellos. El paso del lenguaje natural, numérico al alfanumérico requiere que la situación exija atribuir significado a los cálculos.	Para que el RAE evolucione, se debe propiciar el uso gradual de los distintos lenguajes. El uso del lenguaje alfa-numérico se hace necesario en la medida que la situación requiera justificar la solución.
3. Grado de generalidad que demanda la situación	Las cuestiones que se desprendan de la situación deben demandar generalizaciones progresivas de los resultados; desde tareas en donde primero los datos adoptan valores particulares, pasando por aquellas en donde se obtiene una regla general que define a la clase (objeto intensivo), hasta tareas en donde se estudia el comportamiento de familias de problemas (lo que requiere el uso de parámetros).	La situación exige realizar generalizaciones sucesivas. En este proceso, resulta esencial que el estudiante valide las soluciones obtenidas utilizando diversos medios de control, incluyendo la verificación que lo general se cumpla también para lo particular.

Fuente: Elaboración propia de los autores

Así, por ejemplo, a partir de una situación que requiere establecer relación entre dos magnitudes, se reconoce una relación de proporcionalidad directa para números particulares, para luego identificar que la relación se preserva para un conjunto de números dados en una tabla, pasando por la obtención de la constante de proporcionalidad, para luego asociar a dicha relación una expresión correspondiente a una función lineal. Dicha función será vista

posteriormente como una relación particular entre dos magnitudes cuya representación más general está dada por $f(x)=mx$, con elementos particulares tales como dominio y rango, y on una gráfica que intercepta a los ejes y tiene pendiente. Si dicha relación se amplía al de las funciones que cumplen que, a incrementos constantes de una variable, se producen incrementos constantes de la otra, pero con un “desfase”, se extenderá el estudio a las funciones lineales afines $f(x)=mx+b$, que más adelante se reconocerá como un caso particular de las funciones polinómicas.

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En la segunda etapa, se interactúa con docentes de matemáticas de secundaria en ejercicio a través del desarrollo de un taller de 4 sesiones, de 4 horas cada una. En las dos primeras sesiones se presenta el modelo RAE y su relación con la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, declarada en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016). A partir de la necesidad de identificar tareas que promuevan el progreso en el desarrollo del RAE, se introducen los criterios establecidos previamente.

En la tercera sesión, se forman grupos y se les solicita seleccionar un problema perteneciente a los textos oficiales de matemáticas de secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación, que ellos consideran, a priori, cumple con los criterios establecidos. A partir de la discusión grupal, reconocen que, aunque la mayoría de los problemas seleccionados sí estudia fenómenos relacionados con objetos algebraicos, cumpliéndose el criterio 1, las preguntas que se plantean no contribuyen a evolucionar ni en el lenguaje, ni en procesos de generalización, incumpliendo los criterios 2 y 3.

En la cuarta sesión, los investigadores trabajan junto a los maestros para transformar el problema, previamente seleccionado, de modo que se cumplan los criterios propuestos. En este trabajo, se les plantea incorporar preguntas que requieran del uso tablas de valores (empleando Hojas de cálculo) y de gráficas (en GeoGebra) de modo que el paso del lenguaje natural al alfanumérico sea mediado por actividades que demandan lenguajes numéricos y gráficos, los cuales pueden contribuir al desarrollo del razonamiento algebraico.

A modo de ejemplo, se presenta el problema seleccionado por uno de los grupos, su análisis empleando los criterios propuestos y una nueva actividad, que considera varias etapas, cada una de las cuales demanda un mayor nivel de generalización que la anterior.

Problema original y solución esperada

En la figura 4, se presenta el problema seleccionado por uno de los grupos de profesores que participaron del taller. El problema fue tomado del texto denominado “Resolvamos problemas 3”, empleado en la clase de tercero de secundaria. La actividad se denomina “Elegimos un servicio más conveniente” y tiene como propósito de aprendizaje el siguiente:

Figura 4 – Propósito de la sección del libro

Propósito: Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos, condiciones de equivalencia y las transformamos a expresiones algebraicas o gráficas que incluyen a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Asimismo, expresamos con lenguaje algebraico y diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas nuestra comprensión de la solución de un sistema lineal para interpretarlo en el contexto de la situación, estableciendo conexiones entre dichas representaciones.

Fuente: Resolvamos problemas 3, Cuaderno de trabajo (2019, p.83)

La figura 5 reproduce el problema de forma literal.

Figura 5 – Problema original seleccionado por un grupo de docentes

Elegimos un servicio conveniente

Matías desea alquilar juegos de video, razón por la cual visita una tienda y solicita información al respecto. La vendedora le manifiesta que hay dos maneras de usar el servicio y le detalla:

Primera forma: "Si se inscribe como socio de la tienda, pagará una cuota anual de veinte soles y por cada alquiler pagará cinco soles".

Segunda forma: "Pagar diez soles por cada alquiler sin la necesidad de inscribirse como socio".



Fuente: <https://goo.gl/QS4VEq>

A partir de lo informado:

1. ¿Cuál es la cantidad de juegos que debe alquilar Matías para que cancele el mismo monto en las dos formas de usar el servicio?
2. Determina las expresiones matemáticas que modelen a las dos formas de usar el servicio.

Fuente: Resolvamos problemas 3 (2019, p. 83)

La resolución esperada en la institución escolar es la siguiente:

Para responder la primera pregunta se espera que se obtengan las expresiones siguientes:

- Primera forma: $y = 20 + 5x$
- Segunda forma: $y = 10x$

Donde "x" es la cantidad de videojuegos que se alquilan. Luego se establece la igualdad de dichas expresiones:

$$20 + 5x = 10x, \text{ de donde } x = 4.$$

La respuesta a la pregunta b) corresponde a mostrar las expresiones analíticas utilizadas en la resolución de la parte a), es decir, las fórmulas " $y = 20 + 5x$ " y " $y = 10x$ ".

Los docentes observan que, para responder la primera pregunta, no es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, como se señala en el propósito de aprendizaje; bastará con obtener valores para casos particulares. Así, teniendo en cuenta la descripción dada, se puede elaborar una tabla (figura 6) y luego concluir que el precio de las dos formas de usar el servicio coincide cuando se alquilan 4 videojuegos.

Figura 6

Cantidad de videojuegos alquilados	1	2	3	4	5	6
Primera forma	25	30	35	40	45	50
Segunda forma	10	20	30	40	50	60

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 44)

Para la pregunta 2), se piden las fórmulas " $y = 20 + 5x$ " y " $y = 10x$ ". Más allá de responder a una indicación externa, estas expresiones no son necesarias para responder ninguna otra pregunta. Más aún, se deja de lado el estudio de la variación; no se discute cómo se modifica la relación entre los pagos que se hacen a las tiendas antes y después de $x = 4$.

Aplicación de los criterios para analizar el problema original

Se emplean los criterios propuestos para analizar la pertinencia del problema para el desarrollo del RAE (cuadro 2).

Cuadro 2 – Descripción de los criterios propuestos

Criterio	Descripción	Comentario
1. Objetos matemáticos que involucra la situación	Se trata de una situación que requiere del uso de sistemas de ecuaciones o de funciones lineales y afines para estudiar el cambio.	El contexto de la situación es pertinente para desarrollar el RAE.
2. Lenguaje que moviliza la situación	La solución esperada por la institución propone pasar directamente del lenguaje natural a una regla de correspondencia expresada en lenguaje alfanumérico.	Será pertinente un trabajo previo con valores numéricos particulares, para identificar qué relación existe entre las magnitudes involucradas.
3. Grado de generalidad que demanda la situación	Tal como está planteada la tarea, se espera obtener la expresión algebraica para cada función costo. Sin embargo, como esa regla no se genera a partir de los elementos que la constituyen, no se puede afirmar que sea una entidad unitaria que emergerá del sistema de prácticas.	Es pertinente considerar otras preguntas que permitan reconocer un patrón de formación a partir de un conjunto finito de valores, para luego extraer la regla que generaliza la relación y actividades posteriores, en donde se obtengan nuevos intensivos que representen a la familia de funciones lineales y afines.

Fuente: Elaboración propia de los autores

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Problema modificado y soluciones esperadas

Teniendo en cuenta el análisis previo, se propone transformar el problema (ver Figura 7) en una actividad con cuatro tareas (ver Figuras 8, 11, 12 y 13), de modo que la solución de cada una de ellas demande cada vez mayores rasgos de razonamiento algebraico.

Figura 7 – Enunciado del problema modificado

En una tienda que alquila videojuegos en línea por horas se ofrecen las siguientes opciones:

- Opción 1: hacerse socio pagando una única cuota de 42 soles al año y por cada hora de uso del videojuego realizar un pago de 2,8 soles.
- Opción 2: no hacerse socio y, por lo tanto, no realizar el pago de cuota anual, pero pagar 4 soles por cada hora de uso del servicio.

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 45)

Figura 8 – Tarea 1 del problema modificado

- a) ¿Qué opción le resultará más conveniente a una persona que suele jugar dos horas por semana? ¿siempre esa opción será la más conveniente? Sustenta tu respuesta.
- b) i) ¿Cuál es el mínimo de horas al año que tendría que jugar una persona para que le convenga la opción 1? Puedes realizar tus cálculos con ayuda de una tabla

Opción 1		Opción 2		Comparación
N°horas	Costo total	N°horas	Costo total	
0		0		
1		1		
2		2		
3		3		
4		4		

Figura 3.1

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 45)

Solución esperada

En un primer acercamiento al problema, es conveniente que los estudiantes comparen los costos por concepto de alquiler para una cantidad de horas específica. El trabajo exploratorio generará respuestas diversas, entre ellas, algunas en donde se afirmará la conveniencia de tomar siempre un tipo de servicio, mientras otros estudiantes responderán de manera cualitativa señalando que la elección dependerá del tiempo considerado: si son muchas horas, será mejor la opción 1 y si son pocas, la opción 2.

La parte b) puede abordarse haciendo un tratamiento numérico exhaustivo o “por saltos”, para luego usar una hoja de cálculo como Excel que permite introducir la noción de

variable de manera implícita al definir el contenido de las celdas en función de otras. Queda pendiente determinar el número de horas exacto en dónde empieza a ser más conveniente la opción 1.

Al completar la tabla usando el “arrastre”, se encontrará que a partir de $n=36$, la opción 1 será más conveniente (ver Figuras 9 y 10).

Figura 9 – Gasto a realizar por las primeras 17 horas

1	Opción	Cuota anual	Costo hora			
2	1	42	2.8			
3	2	0	4			
4						
5	Opción 1			Opción 2		
6	N°horas	Costo total		N°horas	Costo total	Comparación
7	0	42		0	0	42
8	1	44.8		1	4	40.8
9	2	47.6		2	8	39.6
10	3	50.4		3	12	38.4
11	4	53.2		4	16	37.2
12	5	56		5	20	36
13	6	58.8		6	24	34.8
14	7	61.6		7	28	33.6
15	8	64.4		8	32	32.4
16	9	67.2		9	36	31.2
17	10	70		10	40	30
18	11	72.8		11	44	28.8
19	12	75.6		12	48	27.6
20	13	78.4		13	52	26.4
21	14	81.2		14	56	25.2
22	15	84		15	60	24
23	16	86.8		16	64	22.8
24	17	89.6		17	68	21.6

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 48)

Figura 10 – Gasto a realizar entre 20 y 36 horas

28	20	98		20	80	18
29	21	100.8		21	84	16.8
30	22	103.6		22	88	15.6
31	23	106.4		23	92	14.4
32	24	109.2		24	96	13.2
33	25	112		25	100	12
34	26	114.8		26	104	10.8
35	27	117.6		27	108	9.6
36	28	120.4		28	112	8.4
37	29	123.2		29	116	7.2
38	30	126		30	120	6
39	31	128.8		31	124	4.8
40	32	131.6		32	128	3.6
41	33	134.4		33	132	2.4
42	34	137.2		34	136	1.2
43	35	140		35	140	0
44	36	142.8		36	144	-1.2

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 49)

A continuación, se plantean actividades que requieren del empleo de otros lenguajes (como el gráfico y alfanumérico), de modo que se establezcan relaciones entre las variaciones numéricas y gráficas, así como la obtención de una expresión que represente el comportamiento de forma general (figuras, 11, 12, 13 y 14).

Figura 11 – Tarea 2 del problema modificado

- c) Luego de completar la tabla de la figura 3.2 —disponible en el siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/dmdzrc6u>— realiza las gráficas que representan la relación entre el monto a pagar y el número de horas para cada opción. Luego de manipular la tabla del enlace responde las cuatro preguntas que se enuncian a continuación.

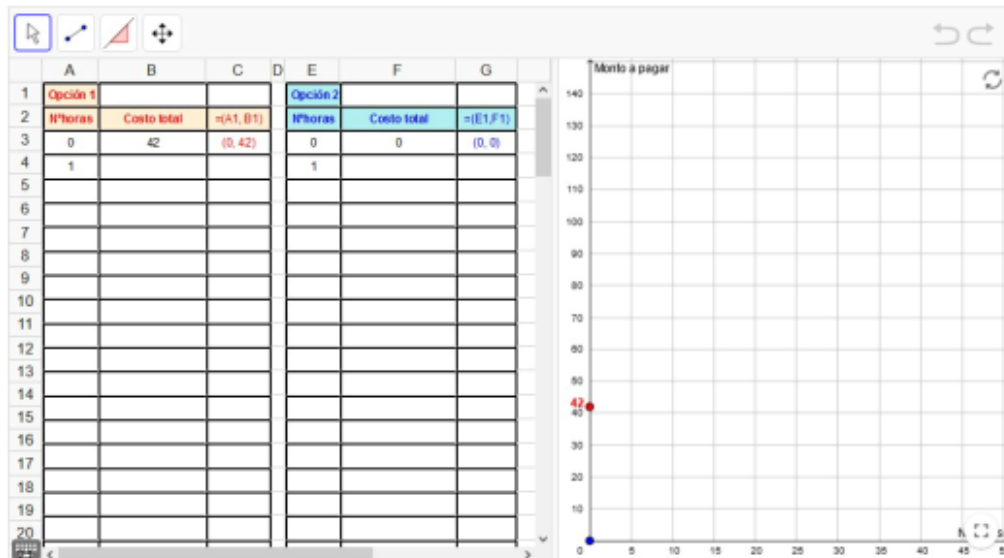


Figura 3.2

- ¿Qué representa el pago anual de 42 soles en la gráfica?
- El incremento de 2,8 soles por hora, ¿qué representa en la gráfica de la opción 1?
- El incremento de 4 soles por hora, ¿qué representa en la gráfica de la opción 2?
- ¿Por qué la gráfica azul parte desde el punto (0,0)? Interprete considerando la situación.

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 46)

Solución esperada

Se incluyen cuestiones que requieren interpretar el significado de lo que luego serán los coeficientes de los términos lineales de las funciones costo, así como de los términos independientes. Por ejemplo, se asociará el pago anual de 42 soles con el punto (0; 42) en la gráfica. Adicionalmente, al completar las tablas y representar los pares en el plano cartesiano, se podrá reconocer la posición relativa entre las dos gráficas.

Figura 12 – Tarea 3 del problema modificado

- Encuentra expresiones algebraicas que representen los costos totales según la opción 1 y la opción 2.

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 45)

Solución esperada

Se pregunta por las expresiones alfanuméricas que describen la relación entre las magnitudes involucradas; **a partir del análisis previo, se concluye que** las expresiones que permiten obtener el costo empleando cada opción son las siguientes:

Primera forma: $C_1(n) = 20 + 5n$

Segunda forma: $C_2(n) = 10n$

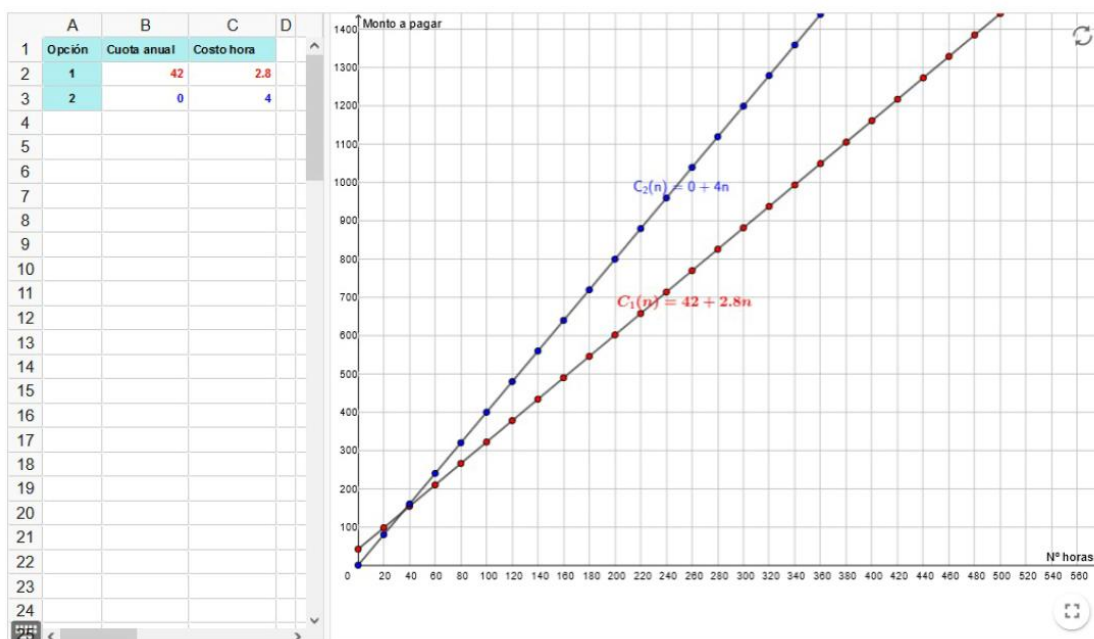
Figura 13 – Tarea 4 del problema modificado

d) Emplee el applet de la figura 3.3 —disponible en el enlace <https://www.geogebra.org/m/w9nyf6h6>— para responder las cuatro preguntas siguientes:

- Si mantenemos los valores iniciales, pero el costo por hora de la opción 1 es ahora 5 soles, ¿qué ocurre con las gráficas?
- Si mantenemos los valores iniciales y ahora solo se cambia el costo por hora de la opción 2 de modo que sea 2 soles, ¿qué ocurre con las gráficas?
- Manteniendo las condiciones iniciales de la opción 1, ¿cómo tendría que modificarse la opción 2 para que resulte siempre ser más barata?
- Manteniendo las condiciones iniciales de la opción 2, ¿es posible modificar la opción 1 para que esta sea siempre más barata?

Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 46)

Figura 14 – Figura 3.3 de la Tarea 4



Fuente: Resolución de problemas de regularidad equivalencia y cambio (2022, p. 47)

Solución esperada

Al realizar modificaciones en las condiciones del problema, se obtendrán gráficas distintas, a partir de las cuales se pueden responder las preguntas planteadas. Si el costo por hora de la opción 1 es 5 soles, las gráficas no se cortan y tampoco lo harán si se mantienen los valores iniciales y sólo se cambia el costo por hora de la opción 2 de modo que sea 2 soles. El estudio de la posición relativa entre las rectas permitirá encontrar condiciones para que uno de los tipos de servicio siempre sea más conveniente que el otro.

ANÁLISIS DE LAS TAREAS MODIFICADAS SEGÚN LOS CRITERIOS PROPUESTOS

Se analiza cada tarea que resulta de modificar el problema original, teniendo en cuenta los criterios definidos previamente para valorar el qué medida el problema contribuye a desarrollar el razonamiento algebraico.

Cuadro 3 – Análisis de cada tarea empleando los criterios definidos previamente

	CRITERIOS		
	Objetos matemáticos que involucra la situación	Lenguaje que moviliza la situación	Grado de generalidad que demanda la situación
Tarea 1	Operaciones con números en Q^+ Relación de orden entre números particulares Relación entre dos magnitudes	Verbal, tanto en el enunciado como en las justificaciones. Numérico y tabular.	La tarea permite identificar regularidades y expresarlas verbalmente. A partir de un conjunto “grande”, pero finito, de datos para cada tipo de costo, se identifica una relación entre el monto a pagar y el número de horas: “En el primer caso, el costo se incrementa en 2,8 soles por cada hora; en el otro caso, se incrementa en 4 soles. Además, la diferencia entre los dos costos se reduce en 1,2 soles por cada hora adicional de juego”. También se enuncia una conjetura: “Al principio parece que la opción 2 será más económica, pero luego notamos que para muchas horas de juego, convendrá la opción 1”.
Tarea 2	Relación entre dos magnitudes Progresión aritmética Recta en el plano: pendiente, ordenada en el origen. Posición relativa entre rectas	Verbal, tabular y gráfico, transitando entre ellos en varios sentidos.	La representación gráfica de cada relación permite hacer conjeturas sobre el comportamiento de la relación entre las dos magnitudes, más allá de los valores tabulados. Permite un estudio global. También posibilita establecer relación entre los datos del problema y algunas características de la gráfica, lo que obliga a estudiar la covariación.
Tarea 3	Función lineal	Lenguaje alfanumérico	Se unitariza la regla de formación para cada caso y se representa en lenguaje alfanumérico.
Tarea 4	Familia de funciones lineales	Verbal, tabular y gráfico y alfanumérico.	Se promueve un proceso de generalización aun mayor que permite reconocer el significado gráfico de los coeficientes m y b en las expresiones $f(x) = mx + b$.

Fuente: Elaboración propia de los autores

CONSIDERACIONES FINALES

Es fundamental que el profesor de matemáticas sea capaz de adaptar o construir problemas que usualmente emplea en sus clases, de modo que generen prácticas matemáticas de diferentes niveles de complejidad y que contribuyan al desarrollo del razonamiento algebraico de sus estudiantes.

En la medida que esto ocurra, se requerirá también una evolución en el lenguaje, así como la consideración de mecanismos que sirvan de medios de control para los procedimientos y resultados obtenidos.

El trabajo llevado a cabo con los maestros permitió poner a prueba los criterios propuestos y aplicarlos en la valoración de actividades específicas. A partir de ello, y de los conocimientos y experiencia de los docentes participantes, se analizaron problemas propuestos en los textos didácticos y se hicieron sugerencias de mejora.

Los problemas modificados pretenden favorecer el trabajo exploratorio, seguido de la búsqueda de regularidades, lo que permite realizar generalizaciones y motivar la utilidad y eficacia del uso del lenguaje algebraico. En esa línea, se propone transformar los problemas considerando que su solución demande el empleo de distintos lenguajes, y de establecer relaciones entre ellos.

A partir de un estudio inicial con números particulares, se pueden estudiar regularidades, las que pueden ser más evidentes si se cuenta contempla el uso de recursos como Hojas de cálculo o GeoGebra. Si se formulan preguntas que exijan establecer relación entre las representaciones gráficas y otros lenguajes, se obtendrá información adicional que contribuirá a una mejor comprensión del problema.

En un nivel de generalización aun mayor, se pueden considerar preguntas adicionales, a las planteadas en el problema original, que permitan caracterizar la situación dada como un caso particular de una familia de problemas; ello justificará el uso de parámetros y dará lugar a un nuevo proceso de generalización.

De esa manera, los criterios aquí propuestos constituyen una herramienta para los docentes en ejercicio, que ayuda a valorar y modificar, de ser necesario, los procesos de instrucción tradicionalmente implementados, para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de sus alumnos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló como parte del proyecto CAP ID 823, Competencias didáctico-matemáticas del profesorado para el desarrollo del razonamiento algebraico, con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

REFERENCIAS

AKÉ, L. P.; GODINO, J. D. Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. **Educación matemática**, v. 30, n. 2, p. 171-201, 2018.

CARRAHER, D. W.; MARTÍNEZ, M.; SCHLIENANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM-The International Journal on Mathematics Education**, v. 40, n. 1, p. 3-22, 2008.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos. **Infancia y Aprendizaje**, v. 42, n. 3, p. 479-522, 2019. Disponible en: <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570>

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 3, p. 289-318, 2014.

GAITA, R. C.; GONZALES, C. S.; UGARTE, F. J.; WILHELMI, M. R. **Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Desarrollo didáctico de la competencia.** Lima: Fondo editorial PUCP, 2022.

GAITA, R. C.; SUPO, R. A.; UGARTE, F. J. Avaliação de uma proposta educacional para o desenvolvimento do raciocínio algébrico a partir da noção de linearidade. **Revemop**. v. 3, p. 1-20, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/5044>

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n.3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M.; WILHELMI, M.R. Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XVI**, (p. 285 - 294). Jaén: SEIEM, 2012a.

GODINO, J. D., CASTRO, W., AKÉ, L. y WILHELMI, M. D. Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, v. 26, n. 42b, p. 483-511, 2012.

GODINO, J. D.; AKÉ, L.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 32, n. 1, p. 199-219, 2014.

GODINO, J. D.; NETO, T.; WILHELMI, M. R.; AKÉ, L., ETCHEGARAY, S.; LASA, A. Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 8, p. 117 – 142, 2015.

GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P.; BURGOS, M.; GIACOMONE, B. Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En: **Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. Granada: CIVEOS. p. 1-13, 2017. Disponível em: enfoqueontoseniotico.ugr.es/civeos.html. Acesso em: 20 nov. 2020.

LLANES, A.; PINO-FAN, L.; IBARRA, S. Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile. **Educación Matemática**, v. 34, n. 2, p. 182-216, 2022.

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú. **Resolvamos problemas 2. Cuaderno de trabajo de Matemática**, p. 83. Lima: 2019a. Disponível em: <https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6861>

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú. **Resolvamos problemas 3. Cuaderno de trabajo de Matemática**, p. 83. Lima: 2019b. Disponível em:

<https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6861>

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú. **Currículo Nacional de la Educación Básica**. Lima: 2016, Disponible em: <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2021.

WILHELM, M.R. Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano et al. (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI** (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM, 2017. Disponible em <https://n9.cl/zlt38>

Submetido em: 23 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

GAITA, C.; UGARTE, F.; GONZALES, C. Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 162-179, Set.-Dez., 2022.

<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p162-179.id455>

Eigenvalores e Eigenvectores: Espacio de Trabajo Matemático personal del profesor

Nancy Saravia-Molina¹

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Edwin Cristian Julian Trujillo²

Universidad San Ignacio de Loyola, USIL

Jorge Luis Vivas Pachas³

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es analizar el trabajo matemático del profesor en el dominio del álgebra, en particular cuando se trata del objeto matemático eigenvalores y eigenvectores de una matriz $n \times n$, que se enseña en un curso de Álgebra Lineal de la Facultad de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola en Lima-Perú. Para este estudio cualitativo, se analizaron las producciones de una profesora que imparte esta asignatura utilizando aspectos de la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) como herramienta teórica. Los resultados muestran la activación de la génesis Semiótica, Instrumental y Discursiva, así como la activación del plano vertical [Sem-Ins] en las producciones de la profesora de matemáticas.

Palabras clave: trabajo matemático, profesor universitario, Eigenvalores y Eigenvectores.

Eigenvalues and Eigenvectors: Mathematical Working Space of a professor

ABSTRACT

The aim of this research is to analyze the mathematical work of the professor in the domain of algebra, for the mathematical object eigenvalues and eigenvectors of an $n \times n$ matrix, which is teaching in a Linear Algebra course at the Faculty of Engineering of San Ignacio de Loyola University in Lima-Peru. For this qualitative study, the productions of a professor who teaches this subject are analyzed using aspects of the Theory of Mathematical Workspace (MWS) as a theoretical device. The results show the activation of the Semiotic, Instrumental and Discursive genesis, that is the activation of the vertical plane [Sem-Ins] in the productions of the mathematics professor.

Keywords: mathematical work, university professor, eigenvalues, eigenvectors.

¹ Doctora (PUCP). Profesora Asociada (PUCP). Profesora del Departamento Académico de Ciencias (PUCP). Miembro IREM-PUCP, Lima, Perú. Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32, Perú. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2819-8835>. E-mail: nsaraviam@pucp.edu.pe

² Magister en Enseñanza de la Matemática (PUCP). Profesor de la Facultad de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola (USIL). Av. La Fontana 750, La Molina, Lima 12, Perú. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0642-589X>. E-mail: edwin.julian@usil.pe

³ Magister en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Miembro del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y de la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA), Lima, Perú. Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32, Perú. CEP: 00000-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7739-830X>. E-mail: jorge.vivas@pucp.edu.pe.

Eigenvalores e Eigenvectores: Espaço de Trabalho Matemático pessoal do professor

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar o trabalho matemático do professor no domínio da álgebra, em particular quando se trata do objeto matemático autovalores e autovetores de uma matriz $n \times n$, ensinado no curso de Álgebra Linear em uma Faculdade de Engenharia da Universidade San Ignacio de Loyola de Lima-Peru. Para este estudo qualitativo, analisaremos as produções de uma professora de matemática que ministra esta disciplina. Para este fim, aspectos da Teoria do Espaço de Trabalho Matemático (ETM) são utilizados como ferramenta teórica. Os resultados mostram a ativação da gênese Semiótica, Instrumental e Discursiva, assim como a ativação do plano vertical [Sem-Ins] nas produções da professora de matemática.

Palavras-chave: trabalho matemático, professor universitário, autovalores, autovetores.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación, pretende caracterizar las acciones matemáticas del profesor universitario en el dominio del álgebra, en particular cuando enseña el objeto matemático compuesto por los vectores y valores propios de una matriz $n \times n$ que en adelante llamaremos eigenvalores y eigenvectores debido a la raíz alemana *eigen*, a estudiantes de la Facultad de Ingeniería de una universidad privada del Perú. En ese sentido, es importante estudiar la organización de los conocimientos, tareas y acciones que propone el profesor universitario al enseñar el objeto de nuestro estudio, ya que, en la malla curricular de diversas carreras de Ingeniería de universidades peruanas, se presenta la necesidad de su enseñanza, esto es respaldado en variados textos universitarios de matemáticas aplicadas para estas carreras, donde se muestra la conexión con problemas relacionados con diagonalizar un tensor de segundo orden de magnitudes vectoriales, sistemas de ecuaciones diferenciales, machine learning, Big Data, Inteligencia Artificial entre otras.

Consideramos necesario hacer una revisión de estudios sobre eigenvalores y eigenvectores con el propósito de estar al corriente con las investigaciones en el área de Didáctica de la Matemática, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de los eigenvalores y eigenvectores. Por ello, a partir de una sucinta revisión de literatura, se presentan pesquisas como las de Henderson et al. (2010), Thomas y Stewart (2011), Gol (2014), Salgado y Trigueros (2014), Orozco (2020) y Yilmaz (2022). Estas investigaciones analizan desde diferentes perspectivas teóricas y a un nivel superior, cómo se moviliza la noción de eigenvalores y eigenvectores en estudiantes y profesores.

Las investigaciones de Henderson et al. (2010) presentan, por ejemplo, entrevistas a trece estudiantes de ingeniería sobre la resolución de problemas semiestructuradas de la ecuación $A(x\ y) = 2(x\ y)$ donde A es una matriz de orden 2×2 , en el estudio detallan la interpretación de los estudiantes de expresiones y ecuaciones que son esenciales para el constructo teórico antes de cualquier definición formal sobre eigenvalores y eigenvectores. Los autores emplearon el marco teórico Sentido Simbólico. Con relación al análisis a posteriori, los investigadores identificaron tres categorías principales de razonamiento de los estudiantes, concluyendo que los estudiantes utilizaron una diversidad de interpretaciones simbólicas, numéricas y geométricas.

Por su parte, los investigadores Thomas y Stewart (2011) desarrollaron una pesquisa con tres grupos de estudiantes de la universidad de Auckland en Nueva Zelanda. Para el estudio de los eigenvalores y eigenvectores, diseñaron y aplicaron una secuencia de actividades, con base teórica de los mundos de las matemáticas en el sentido de Tall.

En dicha secuencia, los estudiantes responden ¿Cuáles son los eigenvalores y eigenvectores de la matriz A ? con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, además, con la ecuación $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, los especialistas exploraron la comprensión de los estudiantes del pensamiento simbólico y formal. Los autores concluyeron tras el estudio que existen problemas fundamentales en la comprensión de la definición de eigenvectores, lo cual conduce a problemas de cómo usarlos, además añaden que las manipulaciones en los dominios matricial y algebraico causan conflicto en la propia definición de eigenvalores y eigenvectores.

Otra investigación que se presenta en este artículo es la de Gol (2014). El autor realiza una exploración basada en una tarea de matrices de orden 2×2 , a estudiantes universitarios apoyado en los tres modos de pensamiento, el cual consistió en determinar los eigenvalores y eigenvectores asociados a una matriz A mediado por la tecnología. Con el uso del software matemático los estudiantes movían los vectores en la pantalla hasta encontrar el paralelismo entre el vector x y Ax , es así como los estudiantes coordinaban la representación gráfica y algebraica. La propuesta tecnológica permitió promover el pensamiento sintético-geométrico, es decir se estudian las representaciones geométricas en sí mismas sin alguna fórmula, además acota el especialista que las representaciones geométricas dinámicas permitieron a los estudiantes universitarios comprender los conceptos de eigenvalores y eigenvectores.

También, el estudio de Salgado y Trigueros (2014) tuvo como propósito investigar la forma en que los estudiantes universitarios de una universidad privada construyen los conceptos de eigenvalores y eigenvectores a través de una experiencia didáctica, con base en la teoría APOE para dar soporte a la investigación. La propuesta se basó en un conjunto de actividades, el objetivo es mostrar al estudiante la relación entre las interpretaciones algebraica y geométrica de los eigenvalores y eigenvectores. A partir de la ecuación $Av = \lambda v$, el estudiante reflexiona sobre el paralelismo entre Av y v , teniendo a R^2 como enfoque geométrico. Los autores concluyeron que el adecuado diseño didáctico permitió a los estudiantes mostrarse conforme a la definición de eigenvalores y eigenvectores, además añaden que tras los resultados obtenidos es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se favorezcan las construcciones.

La investigación de Orozco (2020), presenta una propuesta didáctica para introducir el concepto de eigenvalores y eigenvectores en un curso inicial de álgebra lineal, apoyada en los marcos teóricos de la didáctica de Cuevas–Pluinage y la Orquestación Instrumental. Se diseñó una secuencia de instrucción para introducir el objeto de estudio mediado por tecnología y un conjunto de actividades. La metodología es la Investigación Basada en Diseño. El investigador menciona que los estudiantes muestran evidencias de aprendizaje con los entornos adecuados y el uso constante de la tecnología, ello debido a que al principio del estudio cuando se les solicitaba calcular los eigenvalores, los estudiantes no verificaban si realmente dichos eigenvalores eran las raíces del polinomio característico, como consecuencia de ello al calcular el eigenvector del eigenvalor correspondiente, no existía una verificación para los valores λ y v que cumplan la ecuación $Av = \lambda v$; al respecto añaden que es una herencia de las malas prácticas en la resolución de ecuaciones básicas.

También, el estudio de Yilmaz (2022), tuvo como propósito investigar las percepciones de estudiantes de pregrado que tomaron el curso de álgebra lineal sobre los conceptos de eigenvalores y eigenvectores. Para ello, diseñaron una evaluación escrita compuesta por ocho preguntas abiertas y de opción múltiple, tales como: Definir los conceptos eigenvalores y eigenvectores, calcular algebraicamente los valores propios de la matriz cuadrada bidimensional, ¿Sabe que, si los eigenvalores de una matriz cuadrada de dimensión 2 son complejos, los eigenvectores correspondientes a estos eigenvalores no se puede representar en el plano euclidiano? ¿Sabe que una matriz cuadrada tiene al menos un eigenvalor?

La investigación se realizó con la colaboración de estudiantes de la universidad de Burdur, Turquía. Se desarrolló una escala para medir los enfoques de los estudiantes a la teoría de eigenvalores y tras el análisis de confiabilidad Kuder-Richardson 20 para la confiabilidad de la escala se encontró que era de 0,72, es decir, se considera de consistencia aceptable. En la investigación se utilizó un procedimiento estadístico, la prueba de chi-cuadrado y se realizó un análisis descriptivo para ver la relación entre los resultados de aprendizaje y el rendimiento académico. El autor concluye que surgen problemas en la percepción de los conceptos de eigenvectores y eigenvalores y sus soluciones, por ejemplo, considerar el conjunto de números complejos en un nivel superficial puede hacer que se desconozcan raíces complejas en los cálculos correspondientes.

Por otro lado, como la presente investigación se centra en analizar el Espacio de Trabajo Matemático-ETM personal de profesores de matemática con relación a los eigenvalores y eigenvectores, se muestran también investigaciones relacionadas con la formación de profesores de matemática y especialmente, aquellas que utilizan el ETM como base teórica. Así, la investigación de Vásquez, Mena y Mena (2016) propone establecer una triangulación entre lo que se establece en los Estándares Orientadores de Chile, el currículo escolar nacional y los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores. Los investigadores concluyen que hay una desconexión entre aquellos tres elementos, que se traduce en la manera en la cual los profesores fomentan en sus alumnos la construcción de un Espacio de Trabajo Matemático personal, cuyo plano epistemológico necesita de elementos suficientes para una construcción coherente.

En esa misma línea, Gómez-Chacón, Botana, Escribano y Abánades (2016) proponen elementos para organizar un espacio de trabajo matemático para tareas de lugares geométricos mediados por la tecnología, explorar cómo futuros profesores de matemáticas perfeccionan su concepción de lugares geométricos por medio de la apropiación de las funcionalidades específicas de software de representaciones dinámicas, en relación con su propia práctica, como estudiantes y como futuros profesores de matemática. Además, la investigación de Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) se centra en la vinculación de los enfoques sintético y analítico en formación de profesores de nivel secundario. En la investigación se presenta una situación didáctica que se focaliza en el análisis del ETM personal de un futuro profesor de matemáticas y en las transiciones entre los diferentes paradigmas de la geometría de esta teoría. Una de las conclusiones que se relaciona con el foco de interés evidencia que los ETM personales e idóneos de los profesores son regidos por los elementos que intervienen en la práctica docente relativos a los contenidos matemáticos y el álgebra lineal, y que el ETM

personal de profesores influye en el ETM idóneo. Las investigaciones presentadas muestran la pertinencia del presente estudio.

En este trabajo reflexionamos sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de una profesora universitaria, el ETM se ocupa de estudiar la actividad matemática que el profesor favorece en la clase cuando realiza un trabajo matemático (KUZNIAK y RICHARD, 2014). La caracterización del trabajo matemático idóneo del profesor se realiza mediante los paradigmas del Análisis (Montoya y Vivier, 2016), y en el método de estudio de caso como herramienta valiosa de investigación, la cual registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado.

En esta investigación, de corte cualitativo se analiza el trabajo matemático de una profesora, al abordar el objeto de estudio eigenvalores y eigenvectores. La profesora, la cual llamaremos Noelia, tiene una formación de pregrado y posgrado en Matemática Pura, labora en dos universidades, una estatal y otra privada con estudiantes de ciencias puras e ingeniería respectivamente. Se observó una sesión de 120 minutos de una clase Híbrida (educación a distancia con la presencial), correspondiente al curso de Álgebra Lineal para estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola de Lima- Perú, donde Noelia labora.

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores y matrices; es fundamental en casi todas las áreas de las matemáticas y su enseñanza resulta muchas veces complicada por parte de los profesores y poco comprendida por los estudiantes. Al respecto Dorier y Sierpinski (2001), manifiestan que las dificultades con las se encuentran los estudiantes al abordar la materia, es la naturaleza del mismo objeto, es decir, se requiere de un alto nivel de complejidad. Con respecto al objeto de estudio mencionamos algunos aspectos relevantes del concepto.

Eigenvalores y eigenvectores

Si A es una matriz de orden $n \times n$ y v es un vector en R^n , entonces Av también es un vector en R^n , pero por lo general no hay una relación geométrica simple entre v y Av . Sin embargo, en el caso especial donde v es un vector distinto de cero y Av es un múltiplo escalar de v , ocurre una relación geométrica simple.

En el caso particular, cuando A es una matriz de orden 2×2 , y si v es un vector distinto de cero tal que Av es un múltiplo escalar de v , se tiene $Av = \lambda v$, entonces cada vector sobre la recta que pasa por el origen determinado por v se vuelve a mapear en la misma línea bajo la multiplicación por A .

Los vectores distintos de cero que se mapean en múltiplos escalares de sí mismos bajo un operador lineal surgen naturalmente en el estudio de vibraciones, genética, dinámica de poblaciones, mecánica cuántica y economía, así como en geometría.

Definición: Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces un vector no nulo v en R^n es llamado un eigenvector de A si Av es un múltiplo escalar de v . Es decir $Av = \lambda v$, para algún

escalar λ . El escalar λ es llamado un eigenvalor de A , y v es el eigenvector de A correspondiente a λ .

Para encontrar los eigenvalores de una matriz A , escribimos $Av = \lambda v$ como $Av = \lambda Iv$, lo cual es equivalente a $(\lambda I - A)v = 0$. Esta última ecuación tiene una solución no nula si y sólo si $\det(\lambda I - A) = 0$.

La ecuación característica de A , es dada por el determinante $\det(\lambda I - A) = 0$, los escalares que satisfacen esta ecuación son los eigenvalores de A . El determinante es un polinomio p en λ llamado el polinomio característico de A .

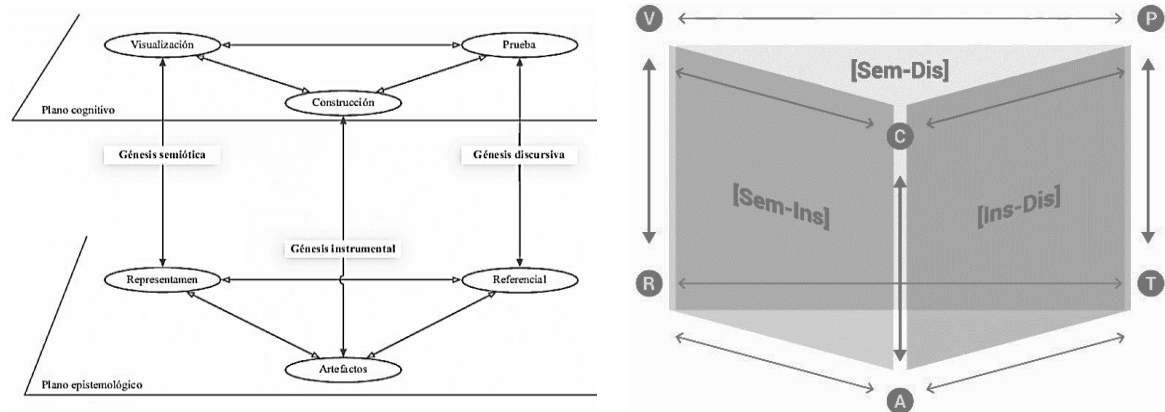
ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO-ETM

La teoría Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay y Elia 2016, Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier 2017) busca vincular y preservar muy estrechamente los puntos de vista epistemológico y cognitivo. Además, cabe señalar que está íntimamente ligado al desarrollo del aprendizaje en el aula. El “trabajo matemático” quiere decir, el trabajo aparece como un conjunto de actividades humanas organizadas para alcanzar objetivos; la orientación y el propósito de este trabajo se apoya en las matemáticas. Por el contrario, las matemáticas, así consideradas, se transforman por el hecho mismo de ser consideradas como una obra humana específica. La teoría articula dos planos: el plano epistemológico se da la interacción de tres componentes puramente matemática (representamen, artefactos y referencial); y el plano cognitivo se centra en el sujeto que, a su vez, se contempla como sujeto cognitivo; se precisan tres componentes cognitivas (visualización, construcción y prueba).

También, indican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. La génesis semiótica es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación. La génesis instrumental permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático y; la génesis discursiva utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental.

Además, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales en el ETM (ver figura 1) cada uno de los cuales está definido por la interacción de dos génesis: semiótica e instrumental [Sem-Ins]; instrumental y discursiva [Ins-Dis] y, semiótica y discursiva [Sem-Dis].

Figura 1 – Modelo ETM



Fuente: Kuzniak y Richard (2014, p. 21) y Kuzniak, Tanguay y Elia (2016, p.726)

Con relación a los planos: [Sem-Ins] asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental. Existen dos formas de trabajo, una orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) y la otra hacia la interpretación de los datos brindados por los artefactos; [Ins-Dis] asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental y, [Sem-Dis] asociado a las génesis semiótica y discursiva, en el cual se distinguen los razonamientos argumentativos.

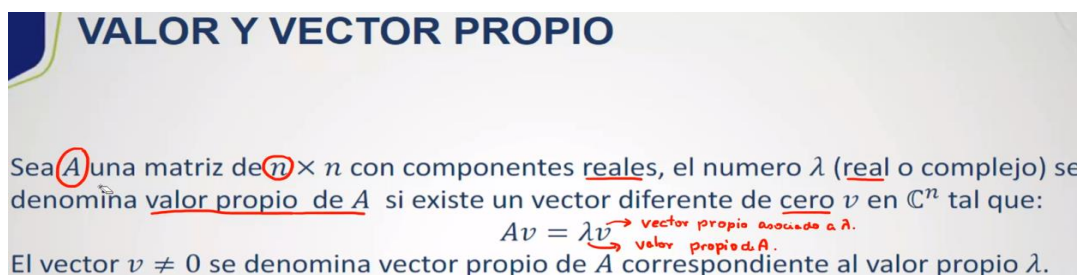
Por otro lado, la caracterización del trabajo matemático comprende además la identificación del paradigma en el cual el estudiante o profesor se posiciona. En ese sentido, para esta investigación, consideramos los paradigmas del álgebra que fueron presentados en Mena-Lorca, Mena y Morales (2012):

- A1:** etapa de la aritmética elemental, en donde ya hay números y algún lenguaje numérico, incluso escrito. Además del trabajo con los números, los individuos pueden establecer relaciones entre variables, si bien no explícitas por medio de símbolos.
- A2:** etapa del álgebra elemental, que ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, parámetros. Los individuos son capaces de escribir situaciones en lenguaje algebraico, operar algorítmicamente, generalizar, etc.
- A3:** etapa de las estructuras algebraicas, estadio avanzado y contemporáneo, que corresponde además a ideas generales de conjuntos y de estructuras algebraicas.

ANÁLISIS DEL TRABAJO MATEMÁTICO

A continuación, se presenta el análisis de la producción matemática de la profesora a quien llamaremos Noelia. Esta producción matemática es tomada del material de clase que fue expuesto al momento de enseñar el objeto matemático constituido por los eigenvectores y eigenvalores.

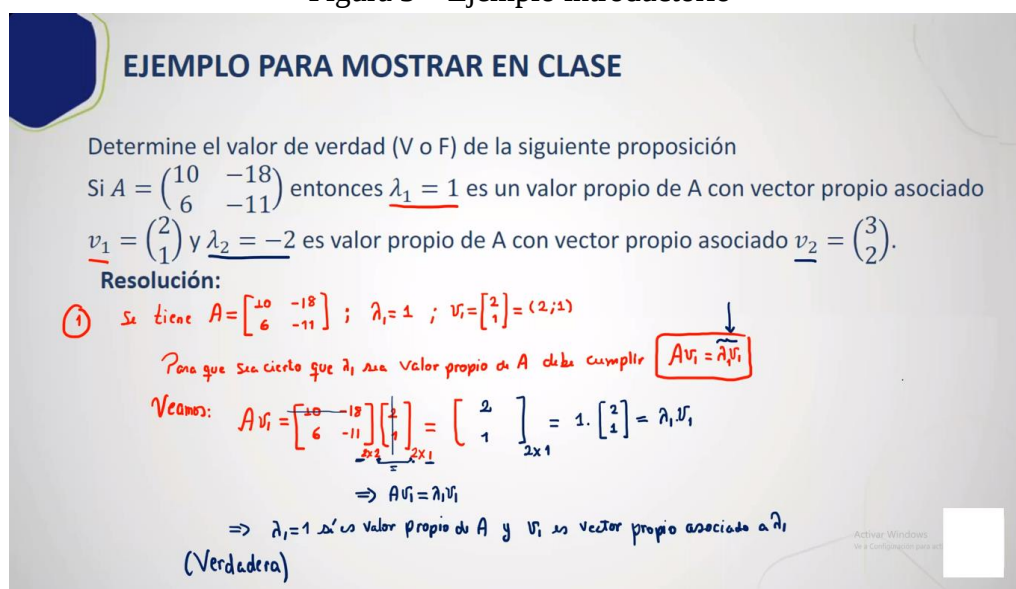
Figura 2 – Definición de valor y vector propio



Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 1)

En la figura 2, la definición de valor propio y vector propio es presentado de tal manera que propicie que el estudiante pueda situarse en el paradigma A1 o A2 del álgebra.

Figura 3 – Ejemplo introductorio



Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 2)

Luego, el ejemplo introductorio, presentado en la figura 3, tiene como propósito verificar si los números reales λ_1 y λ_2 son valores propios de la matriz A con vectores propios asociados v_1 y v_2 , respectivamente. En ese sentido, la condición que debe cumplir un valor propio de una matriz es tomada como *referencial teórico* para realizar una *prueba* de tipo pragmática que permita verificar si se cumple la igualdad $Av = \lambda v$. Este proceso evidencia la activación de la *génesis discursiva*.

Figura 4 – Teorema, definición y ejemplo

Teorema. Sea A una matriz $n \times n$, entonces λ es un valor propio de A si y solo si

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ecuación característica de A

Definición. Si A es una matriz $n \times n$, el polinomio característico de A es dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ es denominada ecuación característica de A .

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ entonces $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{traz}(A)}\lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{|A|}$.

Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 5)

Posteriormente, en la figura 4, el enunciado del teorema favorece la activación de la *génesis discursiva* o la *génesis instrumental*. Por ejemplo, la condición expresada en la ecuación característica puede ser empleada como un *referencial teórico* para realizar un proceso de *prueba* que permita justificar los valores propios de A . Asimismo, la ecuación característica puede ser empleada como un *artefacto simbólico* para realizar un proceso de *construcción* que permita obtener los valores propios de A .

Por otro lado, en el ejemplo se presenta el polinomio característico, de grado 2, de una matriz de orden 2. El coeficiente del término lineal es usado como *representamen* para realizar un proceso de *visualización* que permite identificarlo como la traza de A . Igualmente, el coeficiente del término independiente es empleado como *representamen* para realizar un proceso de *visualización* que permite identificar el determinante de A . En consecuencia, se evidencia la activación de la *génesis semiótica* y, en ese sentido, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Figura 5 – Ejemplo de valor y vector propio

Ejemplo :

Encuentre los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

Resolución.

matriz característica de A : $(\lambda I - A) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$$

Para obtener los valores propios se resuelve:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$(\lambda-5)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 5, \lambda = -1$

Son valores propios de A .

Fuente: Material próprio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 6)

Por su parte, el ejemplo presentado en la figura 5 tiene como objetivo determinar los valores y vectores propios de la matriz A . Las operaciones del álgebra de matrices son empleadas como *artefacto* para realizar un proceso de *construcción* que permite determinar la matriz característica. Con ello, se evidencia la activación de la *génesis instrumental*.

Figura 6 – Ejemplo de valor y vector propio

Determinando los valores propios

Para $\lambda = 5$

Se reemplaza $\lambda = 5$ en la matriz característica

$S.I - A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$A \in M_{2 \times 2}$

$n = 2$

Entonces, el vector propio asociado a $\lambda = 5$, tiene $v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Resolviendo:

$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y \end{cases}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vector propio asociado a $\lambda = 5$ es $(1; 1)$

Todos los múltiplos de $(1; 1)$ son vectores propios asociados a $\lambda = 5$.

$A v_1 = \lambda v_1 = 5 v_1$

$0 = A v_1 - \lambda v_1$

$0 = (A - \lambda I) v_1$

Fuente: Material propio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 7)

En el ejemplo que aparecen en las figuras 6 y 7, para cada valor propio de A , la igualdad $Av = \lambda v$ es usada como artefacto simbólico para realizar un proceso de construcción que permita obtener los vectores propios.

Figura 7 – Ejemplo de valor y vector propio

Para $\lambda = -1$

(matriz característica $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$)

Reemplazo en matriz característica: $(-I - A) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$v_2 \in \mathbb{R}^2$

Resolver:

$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$

$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vector propio asociado a $\lambda = -1$

OBS: Se observa $(1; 1)$ y $(-2; 1)$ son vectores propios y son L.I.

y $\mathbb{R}^2 = \text{Gen} \{ (1; 1); (-2; 1) \}$

$\Rightarrow B = \{ (1; 1); (-2; 1) \}$ base para $\mathbb{R}^2$.

Fuente: Material propio, curso álgebra lineal USIL (2022-1, p. 8)

Este proceso evidencia la activación de la *génesis instrumental* en el trabajo matemático de la profesora.

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

A partir de la interpretación de las acciones matemáticas realizada por la profesora en la clase presentada, se reconoce la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Cabe destacar que tanto la génesis instrumental y discursiva se activan con mayor frecuencia. Asimismo, a partir de la activación de las génesis se identifica la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Con relación al trabajo matemático en el dominio del álgebra, en clase presentada, se privilegian los paradigmas A1 y A2.

El análisis de las producciones matemáticas de la profesora que es interpretada en términos del ETM confirma la pertinencia de este marco como herramienta teórica para caracterizar dicha producción cuando se pretende enseñar un nuevo objeto matemático para los estudiantes. Pues su desarrollo facilita una organización que considera simultáneamente tanto aspectos epistemológicos como aspectos cognitivos del trabajo matemático.

Finalmente, se señala la posición y relevancia que el ETM ha ganado en la comunidad científica de la Didáctica de la Matemática. Esto se evidencia en los trabajos de investigación que se están desarrollando en América Latina y Europa al mostrar la posibilidad de considerar el ETM como una excelente herramienta teórica para analizar las producciones de las acciones matemáticas de profesores que enseñan en distintos niveles educativos dentro de diferentes dominios matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad San Ignacio de Loyola (USIL), al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

REFERENCIAS

DORIER, J. Y L. SIERPINSKA A. Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), **The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study** (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer, 2001. Recuperado <https://www.researchgate.net/publication/226963684>

GOL, S. T. How dragging changes students' awareness: Developing meanings for eigenvector and eigenvalue. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, 14 (3), 223-237, 2014. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/271755107>

GÓMEZ-CHACÓN, I. M., BOTANA, F., ESCRIBANO, J., Y ABÁNADES, M. Á. Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. **Bolema Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 54, p. 67-94, 2016. Acesso em: 10 de set. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04>

GÓMEZ-CHACÓN, I.; KUZNIAK, A.; VIVIER, L. El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 1-22, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>

HENDERSON, F., RASMUSSEN, C., SWEENEY, G., WAWRO, M. & ZANDIEH, M. Symbol sense in linear algebra: A start toward eigen theory. Proceedings of the 13th Annual **Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education**, Raleigh, NC, 2010. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/325630847>

HENRÍQUEZ-RIVAS, C., Y MONTOYA-DELGADILLO, E. El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. **Boletim de Educação Matemática**, 30(54), 45-66, 2016. DOI:10.1590/1980-4415v30n54a03

KUZNIAK. L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), 16, pp.9-24, 2011. Recuperado de <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043>

KUZNIAK, A.; RICHARD, P.R. Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, v. 17 n. 4-I, p. 17-28, 2014. Acesso em : 10 jun. 2021. DOI: <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>

KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 721-7737, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>

MENA-LORCA, A; MENA-LORCA, J.; MORALES, A. Hacia una noción de espacio de trabajo algebraico. **Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático**, Universidad de Montreal, Canadá, noviembre, 2012. Recuperado de https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes_ETM5.pdf

MONTOYA-DELGADILLO, E., & VIVIER, L. Mathematical Working Space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 739-754, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9>

SALGADO, H.; TRIGUEROS, M. Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. **Educación Matemática**, v. 26, n. 3, p. 75-107, 2014. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/13291/>

SANTIAGO, O.; DEL CARMEN, J. **Una propuesta de orquestación instrumental para introducir los conceptos de valores y vectores propios en un primer curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería**. [s.l.] Tesis (D.C.) --Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Departamento de Matemática Educativa, 2020. Recuperado de <https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3889>

THOMAS, M. Y STEWART, S. Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. **Mathematics Education Research Journal**, 23, 275-296, 2011 DOI: <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1>

VÁSQUEZ, P., MENA, A., Y MENA, J. Construcción de un espacio de trabajo matemático idóneo en álgebra lineal: episteme versus currículo. **Investigación e Innovación en Matemática Educativa**, 1, 207-212, 2016. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/15406/>

YILMAZ, Ş. On Eigenvalue and Eigenvector Perceptions of Undergraduate Pre-service Mathematics Teachers. **Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi**, 16 (1), 172-188, 2022. DOI: [10.17522/balikesirnef.1076124](https://doi.org/10.17522/balikesirnef.1076124)

YIN, R.K. Case Study Research. **Design and Methods, Applied Social Methods Series**, Vol5, Sage Publications London, 1989.

Submetido em: 22 de Setembro de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar o artigo:

SARAVIA-MOLINA, Nancy; TRUJILLO, Edwin Cristian Julian; PACHAS, Jorge Luis Vivas Eigenvalores e Eigenvectores: Espacio de Trabajo Matemático personal del profesor. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 180-192, Set.-Dez. 2022.

<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p180-192.id456>

Un acercamiento hacia la enseñanza de números reales con estudiantes de primer año de ingeniería

Rosa Elvira Páez Murillo¹

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Víctor Larios Osorio²

Universidad Autónoma de Querétaro

RESUMEN

En este artículo presentamos los resultados obtenidos de la puesta en práctica de tres actividades didácticas utilizadas en la enseñanza de la noción de número real, con estudiantes de primer año de la licenciatura en ingenierías. Estas actividades han sido diseñadas en función del enfoque propuesto por Bronner (1997). Se realiza un análisis cualitativo del trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en estas actividades, fundamentado en el marco de la teoría de Espacios de Trabajo Matemático. Los resultados evidencian que la activación de la génesis instrumental con el artefacto tecnológico supera al artefacto simbólico, sin que haya una confrontación de lo obtenido con la TIC, propiciando un ambiente de confusión entre número y su valor aproximado.

Palabras clave: Actividades didácticas, número real; trabajo matemático; ETM; artefacto.

An approach towards teaching real numbers with first year engineering

ABSTRACT

In this article we present the results obtained from the implementation of three didactic activities used in the teaching of the notion of real number with first year undergraduate engineering students. These activities have been designed according to the approach proposed by Bronner (1997). A qualitative analysis of the mathematical work developed by the students in these activities is carried out, based on the framework of the theory of Mathematical Working Spaces. The results show that the activation of the instrumental genesis with the technological artefact surpasses the symbolic artefact, without there being a confrontation of what is obtained with ICT, leading to an environment of confusion between number and its approximate value.

Keywords: Didactic activities, real number; mathematical work; MWS; artefact.

Uma abordagem para o ensino de números reais com alunos do primeiro ano de engenharia

RESUMO

Neste artigo apresentamos os resultados obtidos com a implementação de três atividades didáticas utilizadas no ensino da noção de número real, com alunos do primeiro ano do curso de engenharia. Essas atividades foram desenhadas com base na abordagem proposta por Bronner (1997). É realizada uma análise qualitativa do trabalho matemático desenvolvido pelos alunos nestas atividades, com base no referencial da teoria dos Espaços de Trabalho Matemático. Os resultados mostram que a ativação da gênese instrumental com o artefato tecnológico supera o artefato simbólico, sem que haja confronto do que se obtém com as TIC, promovendo um ambiente de confusão entre número e seu valor aproximado.

Palavras-chave: Atividades didáticas, número real; trabalho matemático; ETM; artefato.

¹ Doctora en Ciencias. Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). Profesora-Investigadora de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM). Ciudad de México (CDMX), México. Dirección postal: Calzada Ermita Iztaapalapa 4163. Colonia Lomas de Zaragoza. Alcaldía Iztaapalapa, CDMX, C.P. 09620. E-mail: rosa.paez@uacm.edu.mx ORCID: 0000-0001-7825-9686

² Doctor en Ciencias. Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). Profesor-Investigador de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Querétaro, México. Dirección postal: Cerro de Las Campanas, s/n, Centro Universitario. Santiago de Querétaro, Querétaro. C.P. 76010. E-mail: vil@uaq.mx. ORCID: 0000-0002-4454-8516

INTRODUCCIÓN

En la formación profesional de un licenciado en ingeniería en México, encontramos en el programa de estudios la presencia de un curso de cálculo diferencial que suele iniciar con el tema de números reales, el cual precede al estudio del concepto de función y límites. En particular, en la universidad pública en la que se realizó la experimentación se presenta en este programa “una breve introducción a los números reales”, asumiendo la posición de que el estudiante ya ha tenido un primer acercamiento en el nivel medio superior. Esto último es cierto siempre y cuando el estudiante haya seleccionado la asignatura de cálculo diferencial dentro de su campo disciplinar.

Aunque no se especifica en el programa de estudios del nivel medio superior, es clásico que el primer acercamiento que tienen los estudiantes con los números reales corresponde al enfoque racional vs irracional. El cual, como lo afirma Vivier (2015), es insuficiente, ya que esta identificación no conforma la base fundamental en la noción de completitud y continuidad, las cuales son propiedades primordiales en la construcción de conceptos subsecuentes contemplados en el curso de cálculo diferencial (SIERPINSKA, 1985; BRONNER, 1997; BERGÉ, 2004; DURAND-GUERRIER y VERGNAC, 2013; DURAND-GUERRIER, 2016; DURAND-GUERRIER y VIVIER, 2016; VIVIER, 2015; KIDRON, 2016; KUZNIAK, MONTOYA-DELGADILLO y VIVIER, 2018).

Es así que se retoma la propuesta de Bronner (1997), la cual se centra en la expansión decimal del número. En ésta se propone que la oposición “racional/irracional” sea desplazada por la oposición “decimal/no decimal”. En esta propuesta de enseñanza, desarrollada en un contexto de educación en Francia, los estudiantes se apropian de “nuevos números” los cuales presentan una expansión decimal infinita y que dentro de ese contexto corresponde a los “no decimales”, etiquetado por el autor como “idecimales”. Es importante precisar que cuando Bronner se refiere a “decimal” está haciendo mención a un número que se puede escribir con un número finito de cifras después de la coma (o punto) decimal. Esto dentro del contexto de educación francés.

Para efectos de este trabajo de investigación, que se desarrolla en el contexto de educación en México, cuando se hace referencia a número decimal, se considera un número que consta de una parte entera y una decimal, separadas por un punto o por una coma (definición matemática que proporciona la Real Academia de la Lengua Española). Lo que significa que el número decimal puede tener una expansión decimal finita o infinita. Esta definición es la adoptada en los planes y programas de la educación secundaria, como se evidencia en el glosario del documento de aprendizajes clave para la educación integral (SEP, 2017, p. 259) que señala como números decimales los “que se pueden expresar usando la notación decimal. Su expansión decimal (las cifras que vienen después del punto) puede ser finita o infinita”. También allí aparece la definición de “número decimal finito” refiriéndose a los que corresponden a una fracción decimal y “número decimal periódico” a los que no son equivalentes a una fracción decimal. Por último, se precisa que “Los números decimales también pueden tener una expansión decimal infinita no periódica, por ejemplo, π y $\sqrt{2}$.” (p. 667). En consecuencia, en el currículo mexicano no evidenciamos una diferenciación entre número decimal y número real, lo cual es relevante como objeto de estudio al investigar las dificultades conceptuales que los estudiantes pudieran tener, producto de esta posición.

En el interés de implementar la propuesta que especifica Bronner, se contempla el uso de artefactos tecnológicos, implementando además de la calculadora, aplicaciones como Photomath, Excel, GeoGebra, entre otros; y que dependiendo de la capacidad del artefacto tecnológico que se utilice proporciona una aproximación de los números (independiente de su naturaleza), promoviendo así confusiones en los estudiantes entre el número y su valor aproximado (BLOCH, 2018). Además, actualmente existen artefactos tecnológicos que introducen signos semióticos como el signo de igualdad y el de aproximación que quizás pueda ayudar a la reflexión de “= vs $\approx$ ”.

Igualmente, la intención de recuperar la propuesta de Bronner es por la pertinencia que tiene en la formación de ingenieros ya que, tal y como lo especifica Pluvinaige (1988), la escritura bajo la forma de cifras decimales envía directamente a resultados de medidas, independiente de todo procedimiento de obtención. En el campo profesional de un ingeniero se refleja en el manejo de aproximaciones y el margen de error de diseño y/o de cálculo.

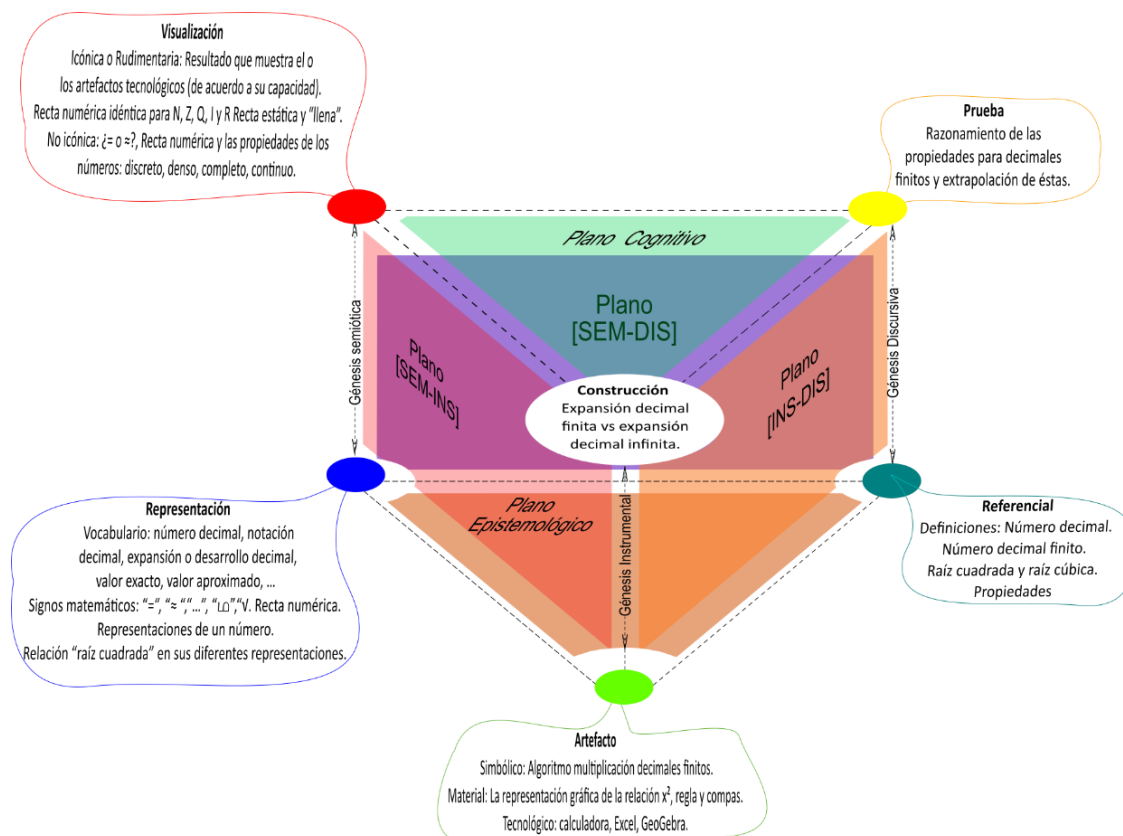
Por tanto, como parte de este experimento educativo nos interesa describir y comprender el trabajo matemático, entendido como un proceso intelectual humano, el cual es apoyado por las matemáticas y la cultura matemática, en el desarrollo de una tarea (KUZNIAK, NECHACHE y RICHARD, 2022), que en este caso, corresponde al trabajo de los estudiantes en las tres actividades didácticas propuestas. Dentro de este contexto las preguntas que pretendemos responder son las siguientes:

- ¿En qué artefacto (simbólico y/o tecnológico) se apoya la activación de la génesis instrumental? y ¿qué dificultades se identifican de acuerdo al artefacto utilizado?
- ¿Qué concepciones previas en relación a número decimal poseen los estudiantes universitarios?

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el diseño de actividades didácticas para esta experimentación, como el análisis de la información recolectada, se fundamentan en la Teoría de Sistemas de Representación Semiótica (DUVAL, 1999), la cual coloca en relevancia las formas semióticas de representación de los objetos matemáticos y la coordinación entre registro de representación semiótica. Además, se integra la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (KUZNIAK, TANGUAY y ELIA, 2016) que permite realizar la organización matemática del objeto de estudio dentro del plano epistemológico, que en este caso corresponde a la noción de números reales y presenciar procesos cognitivos en el espacio de trabajo matemático del estudiante (ver Figura 1)

Figura 1 -Algunos componentes del análisis cognitivo del tema de estudio con la Teoría ETM



Fuente: Diagrama ETM presentado en Kuzniak, Tanguay y Elia, (2016), adecuado por los autores

En la herramienta metodológica que propone la teoría de ETM a través del diagrama, podemos identificar los elementos del plano epistemológico (representamen, artefacto y referencial) y los procesos dentro del plano cognitivo (visualización, construcción, y discursivo), los cuales se relacionan a través de la activación de génesis (semiótica, instrumental y discursiva), producto del diseño de la tarea propuesta en la actividad didáctica y del trabajo del docente en el aula de clase. Asimismo, en el diseño de la actividad didáctica se considera que el trabajo matemático a realizar contemple la interrelación entre génesis dando lugar a un trabajo dentro de los planos [SEM $\rightarrow$ INS], [INS $\rightarrow$ DIS] y [SEM $\rightarrow$ DIS]. O un trabajo de manera circular, integrando las tres génesis [SEM $\rightarrow$ INS $\rightarrow$ DIS] de acuerdo a la tarea propuesta y a los procesos que provoque en el estudiante y cuyo objetivo final es el éxito de la misma, la cual sería evidencia del aprendizaje.

LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

De un grupo de dieciocho actividades didácticas diseñadas o rediseñadas, para la enseñanza del concepto número real, como para la preparación del terreno en cuanto a conocimientos previos que los estudiantes deben de tener para el desarrollo de la propuesta, de acuerdo al enfoque seleccionado, se seleccionaron tres actividades que son las que aquí vamos a presentar. El trabajo matemático a desarrollar con estas actividades se contempla en el registro numérico (Duval, 1999). La actividad previa corresponde a un diseño propio de este proyecto de investigación, basado en las dificultades reportadas por Bronner (1997). Las siguientes dos

actividades corresponden a un rediseño de las actividades utilizadas por Bronner para introducir el enfoque mencionado.

Actividad previa 1 (AP1)

Consta de nueve preguntas (ver Cuadro 1) que giran alrededor de la tarea principal que es la *identificación del número de cifras decimales que contiene el producto de dos números decimales finitos y el valor de la última cifra decimal de este producto*. Cada una de las preguntas que componen la actividad didáctica se han diseñado con el fin de propiciar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, no de manera independiente, sino relacionándose entre ellas en un trabajo matemático situado en los planos semiótico→instrumental (pregunta 1 y 4), semiótico→discursivo (pregunta 3) y semiótico→instrumental→discursivo (pregunta 2, 5, 6, 7, 8 y 9).

Cuadro 1 -Actividad Previa 1 aplicada a estudiantes de licenciatura en ingeniería en el semestre 2021-I

En las Tablas No. 1 y No. 2, cada letra representa un número decimal. Utilice los siguientes números decimales para completar las tablas y responder a las preguntas planteadas.									
a = 1.2	d= 7.0233			g= 10.2003452					
b = 4.21	e = 8.20545			h = 1.254321009					
c = 6.205	f = 1.201434			j= 3.0002156654607					

1) Complete la Tabla No. 1, indicando el **número de cifras decimales (cantidad de cifras después del punto)** que tiene el resultado de la multiplicación de los números dados.

Nota: Por el momento no nos interesa el resultado que se obtiene. Escriba en la tabla solo lo que se le solicita.

	a	b	c	d	e	f	g	h	j
a									
b									
c									
d									
e									
f									
g									
h									
j									

Tabla No. 1

2) Explique brevemente el procedimiento que siguió para completar la Tabla No. 1. Especifique si para el llenado de la tabla utilizó algún instrumento tecnológico.

3) Explique si es o no necesario completar las celdas que aparecen en color gris en la Tabla No. 1.

4) Complete la Tabla No. 2 (mismo formato que la Tabla No. 1), indicando la **última cifra** del producto de los números dados.

5) Explique brevemente el procedimiento que siguió para completar la Tabla No. 2. Especifique si para el llenado de la tabla utilizó algún instrumento tecnológico.

6) Justifique la respuesta dada en la Tabla 1, con respecto a la **cantidad de cifras después del punto** que tiene el producto de h*j.

- 7) Justifique la respuesta dada en la Tabla 2, con respecto a la **última cifra** que tiene el producto de $h*j$.
- 8) ¿En términos generales, explique cuántas cifras decimales debe tener el producto de dos números decimales finitos?
- 9) ¿En términos generales, explique cuántas cifras decimales debe tener el cuadrado de un número decimal finito y cuál es su última cifra?

Fuente: Actividad didáctica diseñada para el desarrollo del proyecto de investigación

En la pregunta 1 de la actividad didáctica se propone activar la génesis semiótica a través del lenguaje y representación de número decimal, número de cifras decimales, multiplicación de decimales, uso de literales que representan los decimales finitos. Así como con la solicitud de completar la tabla realizando la multiplicación, lo cual implica también la activación de la génesis instrumental, que permite dar respuesta a la solicitud de llenado de la “Tabla No. 1” (de la actividad didáctica) haciendo uso de artefactos simbólicos y/o tecnológicos. Esto es, el trabajo matemático a realizar por el estudiante en un primer momento, está enmarcado en el plano que vincula la génesis semiótica con la instrumental [Sem→Ins].

En relación a la génesis instrumental que se activa en el trabajo matemático del estudiante se tiene que dependiendo del artefacto al que se recurra, se permite o no un trabajo eficiente y sin *errores de precisión*. En el caso del artefacto simbólico, el cual en esta tarea corresponde al más eficiente, los estudiantes deberían hacer uso del procedimiento que se enseña en el primer año de secundaria en México (Matemáticas 1). Es decir, para multiplicar decimales finitos, se puede quitar el punto decimal, multiplicar los números y, posteriormente, colocar el punto decimal en el resultado de la forma adecuada (procedimiento soportado en el valor posicional). Además, se esperaría que utilicen un lenguaje matemático, como el de “el resultado tendrá *a lo más* el número de cifras decimales que resulte de sumar las cifras decimales que tiene cada uno de los factores”. O bien, que muestre evidencia de este razonamiento, colocando una cifra menos, cuando la última cifra decimal corresponde a un 0, como es el caso de la multiplicación de $a \times c$ (ver Cuadro 1)

En el caso de que el estudiante recurra al artefacto tecnológico (calculadora, GeoGebra, Excel u otro), su trabajo matemático estará influenciado por la capacidad de éste y por la activación de su referencial teórico (multiplicación de decimales finitos) que le permitirá establecer una diferenciación (si este fuera el caso) entre la respuesta proporcionada por la TIC y la respuesta que debería obtener de acuerdo al artefacto simbólico (algoritmo de la multiplicación de decimales finitos). A continuación, se presenta un panorama breve en relación al proceso de instrumentación ligado a tres artefactos tecnológicos.

GeoGebra muestra el desarrollo decimal con una aproximación de 10^{-15} , con un redondeo de la última cifra. Pero, dependiendo de las cifras decimales seleccionadas, la visualización en casos en que no debería causar dificultad (resultados con menos de 15 cifras decimales), pueden empezar a causar problemas. Por ejemplo, como es el caso de la multiplicación la multiplicación de $h \times e$ (que se muestra en amarillo en la Figura 2a, 2b y 2c), en el cual el producto contiene 14 cifras decimales y la última cifra decimal es 5. Para el caso de un redondeo a 15 cifras decimales, GeoGebra muestra un número cuya última cifra es 2. Otro ejemplo del ruido que causa este artefacto tecnológico corresponde igualmente con el redondeo a 15 cifras decimales, en donde para algunas multiplicaciones, cambia su

representación de una expansión decimal finita a “quizás” una equivalente con representación decimal infinita (por así llamarlo a la aparición de cifras con el 9). Esto es, $a \times d = 1.2 \times 7.0233 = 8.42796$ que sufre un tratamiento por parte del artefacto mostrándolo como 8.427959999999999. Se ha utilizado el “quizás” dado que el usuario de este artefacto debe realizar la interpretación del tratamiento del número en sus diferentes representaciones como: $8.42796 = 8.42795\bar{9} = 8.42795999\ldots$ Esto último que se presenta se podría decir que tiene sentido, no así la aparición del 2 como última cifra de la multiplicación de $h \times e$.

En Excel aparece una situación que puede provocar aún más confusión en el estudiante, en aspectos de valor exacto/valor aproximado. El software presenta un desarrollo decimal con una aproximación de 10^{-15} con un redondeo de la última cifra y además coloca ceros después de este redondeo. Pero también hay casos especiales, como cuando el resultado tiene exactamente 14 o 15 cifras decimales (ver Figura 2c).

En el caso de la calculadora de un Android, su capacidad es mayor y muestra la aproximación de 10^{-40} (Figura 2d)

Figura 2a -Tabla No. 1 de la AP1 con GeoGebra, redondeo a 13 cifras decimales

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1.2	1.44	5.052	7.446	8.42796	9.84654	1.4417208	12.24041424	1.5051852108
4.21	5.052	17.7241	26.12305	29.568093	34.5449445	5.05803714	42.943453292	5.28069144789
6.205	7.446	26.12305	38.502025	43.5795765	50.91481725	7.45489797	63.293141966	7.783061860845
7.0233	8.42796	29.568093	43.5795765	49.32674289	57.629336985	8.4380314122	71.64008444316	8.8094727425097
8.20545	9.84654	34.5449445	50.91481725	57.629336985	67.3294097025	9.8583066153	83.69842252134	10.2922683232991
1.201434	1.4417208	5.05803714	7.45489797	8.4380314122	9.8583066153	1.443443656356	12.2550415350168	1.5069839071269
10.2003452	12.24041424	42.943453292	63.293141966	71.64008444316	83.69842252134	12.2550415350168	104.047042199163	12.7945072834123
1.254321009	1.5051852108	5.28069144789	7.783061860845	8.8094727425097	10.2922683232991	1.5069839071269	12.7945072834123	1.5733211936188
3.0002156654607	3.6002587985528	12.6309079515895	18.6163382041836	21.0714146832301	24.6181196321545	3.6045611078171	30.6032354621469	3.7632335407183

Fuente: Elaboración propia con uso de GeoGebra

Figura 2b -Tabla No. 1 de la AP1 con GeoGebra, redondeo a 15 cifras decimales

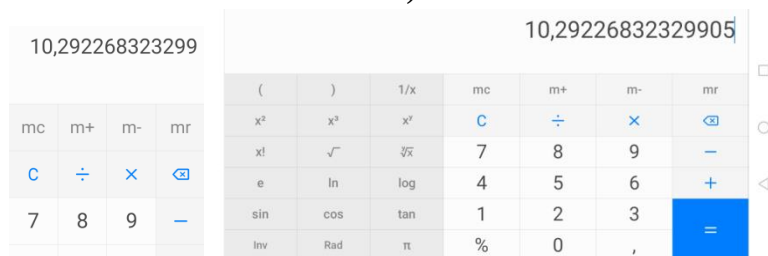
A	B	C	D	E	F	G	H	I
1.2	1.44	5.052	7.446	8.427959999999999	9.846540000000001	1.4417208	12.240414239999998	1.5051852108
4.21	5.052	17.7241	26.123049999999999	29.568092999999998	34.5449445	5.05803714	42.943453291999994	5.280691447890001
6.205	7.446	26.123049999999999	38.502025000000003	43.579576500000002	50.914817250000006	7.454897969999999	63.293141965999993	7.783061860845001
7.0233	8.427959999999999	29.568092999999998	43.579576500000002	49.326742889999998	57.629336985000002	8.438031412199999	71.640084443159992	8.809472742509701
8.205450000000000	9.846540000000001	34.5449445	50.914817250000006	57.629336985000002	67.329409702500016	9.8583066153	83.698422521340007	10.292268323299052
1.201434	1.4417208	5.05803714	7.454897969999999	8.438031412199999	9.8583066153	1.443443656356	12.255041535016797	1.506983907126906
10.2003451999999	12.240414239999998	42.943453291999994	63.293141965999993	71.640084443159992	83.698422521340007	12.255041535016797	104.04704219916303	12.794507283412306
1.254321009	1.5051852108	5.280691447890001	7.783061860845001	8.809472742509701	10.292268323299052	1.506983907126906	12.794507283412306	1.573321193618778
3.0002156654607	3.60025879855284	12.630907951589547	18.616338204183645	21.071414683230135	24.618119632154503	3.604561107817111	30.603235462146856	3.763233540718272

Fuente: Elaboración propia con uso de GeoGebra

Figura 2c. -Tabla No. 1 de la AP1 con Excel

Fuente: Elaboración propia con uso de Excel

Figura 2d – Calculadora de Android: Resultado de $h \times e$ (pantalla vertical y pantalla horizontal)



Fuente: Elaboración propia con uso de un Android

Actividad 1 (A1)

Consta de dos preguntas (ver Cuadro 2) que giran alrededor de la tarea principal de aplicar los operadores “la raíz cuadrada de” y “el cuadrado de” para números que son cuadrados perfectos y reflexionar sobre la naturaleza de los números que se obtienen en relación a su expansión decimal.

Cuadro 2 -Actividad 1 aplicada a estudiantes de licenciatura en ingeniería en el semestre 2021-I

- 1) Si es posible, completen con uno o varios números, los espacios vacíos de la tabla. En caso de que no se pueda, coloquen una X.

x	5					$\frac{4}{3}$		
x^2		169	-225	0	$\frac{1}{4}$		$\frac{625}{121}$	$-\frac{9}{100}$

x	1.5	3.141592654						
x^2				1.8496	0.0000390625		$\frac{400}{529}$	

2) Expliquen brevemente el procedimiento que siguieron para completar la Tabla No. 1. En el caso de que no hayan podido completar, expliquen la razón de ello.

Fuente: Actividad didáctica tomada de Bronner (1997) y rediseñada para efectos de la investigación

Con el grupo de números que se presentan en esta actividad didáctica, se procura activar un trabajo matemático dentro del plano [Sem→Dis] en relación a la noción más básica de “la raíz cuadrada”, la cual Bronner (1997, 2005) le llamó el *modelo cuadrado perfecto* (CP). Se incluyen fracciones no decimales, a fin de que surja de manera natural la representación de números decimales con expansión infinita periódica. También se incluyen decimales finitos, uno de ellos parecido a π . Se analizan los tratamientos dentro del mismo registro numérico, identificando si ello produce dificultades en términos de “valor exacto/valor aproximado”, como también al trabajo matemático en particular propio de la instrumentación en relación al artefacto tecnológico.

Actividad 2 (A2)

Corresponde a la misma tarea que la A1, solo que se incluyen números que son y que no son cuadrados perfectos (ver Cuadro 3).

Cuadro 3 -Actividad 2 aplicada a estudiantes de licenciatura en ingeniería en el semestre 2021-I

Si es posible, completen con uno o varios números, los espacios vacíos de la tabla. En caso de que no se pueda, coloquen una X.

x	x^2	Justificación
2.236006		
	5	
$\frac{1}{3}$		
	$\frac{100}{144}$	
	4.9	
1.03		
	1.1025	
	1.03	
	9.072234360225	
	12	
	12.623	

Fuente: Actividad didáctica tomada de Bronner (1997) y rediseñada para efectos de la investigación

Se espera que los estudiantes identifiquen la diferencia entre las respuestas que proporciona el artefacto tecnológico entre un cálculo exacto y un cálculo aproximado, así como los tratamientos que éste realiza en el registro numérico. De acuerdo a la capacidad del artefacto tecnológico, es posible tener las dos opciones mencionadas. Es decir, al utilizar la tecla “ $\sqrt{}$ ” bien se puede visualizar su valor exacto y en algunos casos con un tratamiento en el registro numérico, o bien se puede visualizar la representación decimal. Por ejemplo, para el caso de la raíz de 4.9 es posible obtener $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ o 2.213594362. Si se usa Photomath se tienen las dos opciones a la vez. Es decir, en la pantalla aparece “ $= \frac{7\sqrt{10}}{10}$ ” y en renglón más abajo aparece “ ≈ 2.211359 ”.

Con la representación decimal se pretende propiciar la reflexión en función del carácter finito o infinito de la expansión decimal de estos números. Elementos como el valor de la última cifra decimal y el número de cifras decimales obtenidos al elevar un número al cuadrado, discutidos en las actividades previas, son factores primordiales en el carácter finito/infinito de la expansión decimal.

LA EXPERIMENTACIÓN

Las actividades didácticas se colocaron a prueba en el semestre 2021-1 con dos grupos de estudiantes de la licenciatura de ingenierías que cursan cálculo diferencial. En el primer grupo se trabajó con 22 estudiantes y en el segundo con 26 estudiantes. Las actividades didácticas fueron desarrolladas por los estudiantes de manera autónoma y asincrónica en un ambiente no presencial, ello por el contexto de pandemia. Los resultados que en la siguiente sección se reportan corresponde al trabajo individual que forma parte de la primera etapa de la metodología de enseñanza contemplada en el experimento de enseñanza (BORBÓN, 2003; PÁEZ, 2004; HITT y QUIROZ, 2019).

De acuerdo a nuestros intereses y a las preguntas de investigación planteadas, en el análisis de la información presentamos un análisis descriptivo de los resultados obtenidos en esta primera etapa dentro de este experimento educativo. Aunque hacemos uso de lo cuantitativo para dar una idea global de la caracterización realizada, como ya lo mencionamos, nos interesa analizar el trabajo matemático que desarrollan los estudiantes, así como las génesis activadas y artefactos utilizados en este trabajo. De la misma manera, identificar las concepciones previas que florecen en base a la actividad propuesta y que pueden actuar como barrera en el desarrollo del enfoque de enseñanza de los números reales.

RESULTADOS

A continuación presentamos el análisis del trabajo escrito de los 48 estudiantes que hicieron entrega de las actividades didácticas ya descritas.

Actividad Previa 1

De acuerdo al objetivo y diseño de la actividad previa 1, en la Tabla 1 se puede evidenciar, que la mayoría de los estudiantes realizaron su trabajo matemático en el plano

[Sem→Ins]. Son pocos los estudiantes que tienen éxito en la tarea que corresponde a la precisión del número de cifras del producto de dos decimales finitos y a la identificación de la última cifra decimal de dicho producto. Gran parte de los estudiantes presentó respuestas con errores de precisión a causa específica del uso del artefacto tecnológico. Ello nos lleva a reflexionar sobre el proceso de instrumentación que realizan estos estudiantes. Se puede inferir que este proceso se realiza de manera “automatizada” con el fin de completar la tarea y sin tomar conciencia de la limitación del artefacto tecnológico usado, ni tampoco de la respuesta que debería de obtener con o sin él. Es decir, en el trabajo matemático desarrollado no se evidencia la activación del referencial teórico apropiado a la tarea propuesta.

Tabla 1. -Categorización del trabajo matemático de los estudiantes, preguntas 1 y 4.

Categorización		Subcategorización	No. de estudiantes
1.	Uso del artefacto simbólico.		6
2.	Uso del artefacto tecnológico.	Sin errores de precisión	5
		Con errores de precisión	26
3.	Uso del artefacto simbólico y tecnológico	Sin errores de precisión	0
		Con errores de precisión	4
4.	Otras respuestas		6
5.	No responde		1

Fuente: Elaborado por los autores

En las preguntas 2 y 5 la interpretación de la consigna “explique brevemente el procedimiento que siguieron para completar la Tabla” depende del artefacto utilizado. En el caso de seis estudiantes que utilizaron el artefacto simbólico, sí procedieron a dar una explicación del algoritmo utilizado en un lenguaje natural y en algunos casos haciendo uso de ejemplos numéricos. Aunque no fueron más allá del algoritmo y ninguno utiliza frases como “*a lo más tendrá...*”. Los 31 estudiantes que utilizaron el artefacto tecnológico manifestaron únicamente que utilizaron una calculadora, o algún otro artefacto, y en su mayoría hicieron la multiplicación una por una, es decir, un procedimiento poco eficiente y sin ninguna reflexión de la respuesta obtenida. Ello se debe a la confianza absoluta que los estudiantes depositan en las TIC y las respuestas proporcionadas por éstas, tal como aparece reportado en la literatura (LARIOS y GONZÁLEZ, 2010; PÁEZ y PLUVINAGE, 2019; 2018).

El diseño de las Tablas No. 1 y No. 2 de la actividad didáctica (ver Cuadro 1), se les presentó en gris las celdas que se pretendía que no completaran dada la aplicación de la propiedad conmutativa y que correspondían a un mismo resultado de las celdas en blanco, pero no se les indicó si tenían o no que completarla. La idea de fondo del diseño de utilizar el color gris es que los estudiantes tomarán este color como un acuerdo semiótico de no completar, utilizando la misma idea que se usa en los crucigramas. Pero dado que en una experimentación previa se presentó el fenómeno de que los estudiantes completaron toda la tabla, surge así la pregunta 3 con el fin de explorar sobre la apropiación de la propiedad conmutativa. Así se tuvo que 19 estudiantes ejecutaron la acción de completar las tablas completamente, es decir, también llenaron las celdas marcadas en gris. Solo uno de ellos hizo referencia en un lenguaje simbólico a la propiedad conmutativa, pero aun así ejecutó esta acción. Fueron 13 estudiantes

los que no completaron las tablas, argumentando de manera simbólica (3 estudiantes), haciendo referencia específica al nombre de la propiedad (2 estudiantes) o en un lenguaje natural refiriéndose a que son los mismos procedimientos por lo tanto es el mismo resultado (8 estudiantes). Hubo 10 estudiantes que no completaron la tabla, pero en su explicación no hay evidencia del manejo de la propiedad conmutativa. En resumen, sí hay una activación de la génesis semiótica, pero no así de la génesis discursiva. Son pocos los estudiantes que realizan un trabajo en el plano [Sem→Dis].

Una modificación importante que se le realizó a la actividad didáctica entre la experimentación previa y la que aquí se reporta, tiene que ver con las respuestas obtenidas en las preguntas 6 y 7 y el rol de las literales utilizadas para representar cada uno de los números decimales propuestos en la actividad didáctica. En la primera experimentación dentro de las literales utilizadas estaba x e y , lo cual conlleva a que algunos estudiantes le cambiaran el rol de constante al rol de variable. Es como lo afirman Kuzniak y sus colegas (2018): la visualización influye en el trabajo matemático y, como ellos lo ejemplifican, una x dentro de una figura fomenta que los estudiantes planteen una ecuación. En este caso el uso de las etiquetas “ x ” e “ y ” fomenta que se les otorgara el significado de variables. Con el cambio realizado por h y j se evitó esta situación en la experimentación reportada.

En términos generales, para las preguntas 6 y 7 se mantienen los comportamientos presentados en las preguntas 1, 2, 4 y 5. Es decir, a pesar de que en estas preguntas se precisa que justifiquen las respuestas proporcionadas en las tablas, los 31 estudiantes que utilizaron el artefacto tecnológico les parece suficiente con mencionar que “contaron” las cifras para colocar el número solicitado y que “tomaron” la última cifra que les mostraba el artefacto. Para algunos estudiantes en esta categoría la justificación se basó en colocar los números que corresponden a las literales mencionadas y colocar el número dado por éste.

Finalmente, las preguntas 8 y 9 son contestadas con un “cierto éxito” por tan solo cinco estudiantes, tres de los cuales desarrollaron la actividad didáctica con el uso del artefacto simbólico, uno con ambos artefactos y otro con el artefacto tecnológico. Se menciona un “cierto éxito” dado que su explicación se basa en un lenguaje natural y cuando recurren a un lenguaje simbólico no hay evidencia de un manejo eficiente de éste (ver Figura 3), asimismo, hay una ausencia de un lenguaje matemático necesario como por ejemplo “a lo más”, y de una precisión en la terminología utilizada, como al usar el término “producto” en vez de “factor”.

Figura 3 -Respuesta del estudiante E14

8) ¿En términos generales, expliquen cuántas cifras decimales debe tener el producto de dos números decimales finitos?

Con los números que estuvimos trabajando son números decimales finitos
Entonces el resultado de las cifras decimales que debe tener el producto de números decimales finitos no es más que la suma de las cifras decimales de cada producto que tengamos.
Es decir

$(n) \text{ de cifras decimales} + (n) \text{ de cifras decimales} = (n) \text{ de cifras decimales}$

Fuente: Información recolectada en la investigación desarrollada

Con la tarea planteada en esta actividad didáctica, se evidencia que el trabajo matemático de la mayoría de los estudiantes en relación al proceso discursivo es insuficiente. Hay un trabajo en el plano [Sem→Ins] que requiere de la vinculación de la génesis discursiva.

Actividad 1 (A1)

El uso de artefactos tecnológicos para el desarrollo de esta actividad didáctica aunado a las nociones previas que se poseen los estudiantes y que se evidencian en su trabajo matemático, permitió identificar *concepciones* (DUROUX, 1983) o *teoremas en acción* (VERGNAUD, 1991). Entre las más notables podemos mencionar las siguientes:

i. *Dificultades en el tratamiento dentro del registro numérico o un teorema en acción.* Para el número 0.0000390625 algunos de los artefactos tecnológicos, por ejemplo las calculadoras científicas CASIO fx-350ES, proporcionan como respuesta la fracción $1/160$. Haciendo uso de la tecla que proporciona la representación decimal proporciona la respuesta $6.25 * 10^{-3}$. Este tratamiento en el registro numérico causó ruido en nueve estudiantes que colocaron la X para este número específico. De acuerdo a la indicación de la actividad didáctica la X especifica que no se puede completar con un número. El trabajo realizado por los estudiantes de manera escrita es insuficiente para entender esta situación. Es así que acudimos a la pregunta planteada en la discusión grupal. Esta fue “¿Por qué no se puede completar con un número?”, a lo que un estudiante manifestó: “*obtuve $6.25 * 10^{-3}$ y pienso que es un error de la calculadora*”. Es decir, la respuesta proporcionada en notación científica no es reconocida como número. Ningún otro estudiante manifestó otra noción. Otra concepción o teorema en acción que pudiera existir detrás de esta respuesta es que la raíz cuadrada de un número en representación decimal no puede ser una fracción. Esta última noción está relacionada con la dificultad identificada en la experimentación de Bronner (1997) de que una fracción no puede ser un decimal, o dificultades en términos de identificación de representaciones de un mismo número (PÁEZ, et al., 2012).

ii. *Errores de precisión.* La mayoría de los estudiantes no establecen diferenciación entre un cálculo exacto y un cálculo aproximado. No hay un planteamiento de cuestiones cómo ¿cuántas cifras decimales debe de tener el cálculo realizado? o ¿el artefacto tecnológico me proporciona un cálculo exacto? En términos generales, la manipulación del artefacto sigue siendo de manera automatizada. Por ejemplo, sólo cuatro estudiantes tuvieron “éxito” en esta tarea, tres de los cuales mantuvieron la misma representación en el registro numérico y un estudiante realizó un tratamiento en el que surgieron los tres puntos que representan la periodicidad infinita de la expansión decimal. El resto de estudiantes trabajó con aproximaciones que les proporcionó el artefacto tecnológico. En el caso de 3.141592654^2 , la precisión de todas las cifras decimales no es relevante. Para cuatro estudiantes hay una equivalencia entre el cálculo mencionado y π^2 . No hay un uso del signo “ $\approx$ ”. En el caso de fracciones no decimales surgió la expansión decimal infinita periódica, pero predominó el redondeo dado por el artefacto tecnológico y no su escritura semiótica equivalente con los signos propios que indican la periodicidad infinita. O bien, establecen equivalencias entre la fracción decimal y la no decimal, como, por ejemplo, el estudiante E17 planteó la siguiente

$$\text{igualdad } \sqrt{\frac{625}{121}} = \frac{227}{100}.$$

iii. *Existencia de la raíz de un cuadrado perfecto negativo.* Para 20 estudiantes existe la raíz cuadrada de $\sqrt{-225} = -15$ o $\sqrt{\frac{-9}{100}} = \frac{-3}{10}$. Se evidenciaron representaciones espontáneas de los estudiantes (HITT, 2003) como $\frac{X}{10}$ o nociones en la que colocan la X porque el artefacto tecnológico les indica que es un error y el estudiante lo relaciona como un número irracional.

Con la tarea planteada en esta actividad didáctica, el trabajo matemático realizado por los estudiantes estuvo dimensionado en las tres génesis. La activación de la génesis discursiva y semiótica permite evidenciar concepciones y/o teoremas en acción que están dentro del referencial teórico personal.

Actividad 2 (A2)

El trabajo matemático realizado por los estudiantes en esta actividad didáctica también está influenciado fuertemente por el artefacto tecnológico. En relación al uso del artefacto, la Teoría ETM especifica que el artefacto influencia el proceso de visualización y los signos encontrados en el representamen. Es así que, a partir del artefacto tecnológico utilizado por los 48 estudiantes, se ha encontrado que solo el estudiante E47 proporcionó el valor exacto de casi todos los números que no son cuadrados perfectos. Es decir, expresó la respuesta con el símbolo de raíz, aunque no mostró evidencia en su discurso de que hay una comprensión de la naturaleza de estos números. Por ejemplo, dado que su instrumento no realizó ningún tratamiento numérico para obtener la raíz de 12.623, colocó un valor aproximado sin especificación alguna que corresponde a una aproximación sustentado en la cantidad de cifras decimales. No surgió por parte de los estudiantes el uso del símbolo “ $\approx$ ”. Para E47, así como también para seis estudiantes más, la confianza de que su resultado correspondía a un valor exacto se depositó en el artefacto tecnológico dado que, al elevar al cuadrado, éste les proporcionó el número al que tenían que sacarle la raíz cuadrada. Esto es una limitación de los artefactos tecnológicos que a partir de cierta aproximación realiza equivalencias no existentes entre los números.

En términos de la presencia o ausencia de signos en el trabajo matemático de los estudiantes vinculados al artefacto tecnológico, se evidenció que ninguno de ellos utilizó alguno que hiciera una diferenciación entre “=” y “ $\approx$ ”. En este aspecto, consideramos que este trabajo realizado con la aplicación de Photomath pudiera motivar la reflexión en los estudiantes sobre cálculo exacto y cálculo aproximado ya que esta aplicación presenta en su pantalla los dos cálculos, el que corresponde al exacto el cual lo precisa con el símbolo “=” y el aproximado que lo presenta a diferencia de la calculadora, o de GeoGebra o de Excel, con el símbolo “ $\approx$ ”.

ALGUNAS REFLEXIONES Y PERSPECTIVAS

En el interés de introducir los números reales con el enfoque desarrollo decimal finito/infinito, a través del operador raíz cuadrada, e iniciando en el registro numérico, así como también parte de la primera pregunta de investigación aquí planteada, se evidencia que en el trabajo matemático de los estudiantes prima la activación de la génesis instrumental con el uso de artefactos tecnológicos. El uso de algunos de estos artefactos, promueve confusiones como las ya mencionadas por Bloch (2018), pero a su vez, también promueven que afloren

concepciones en relación a la identificación del número y sus representaciones (PAEZ et al, 2012).

El análisis del trabajo matemático de los estudiantes en relación a los artefactos usados nos direcciona a que en el diseño de las actividades didácticas se promueva la transformación de dicho trabajo y que en la activación de la génesis instrumental se equilibre este acercamiento numérico. Ello promoviendo una confrontación entre el trabajo realizado con artefactos tecnológicos seleccionados específicamente para nuestro objetivo y el trabajo realizado con el artefacto simbólico. Siendo necesario para esto último que el estudiante posea un referencial teórico pertinente.

En relación a la segunda pregunta de investigación, hemos detectado deficiencias de conocimientos matemáticos que traen los estudiantes del nivel medio superior, que impiden avanzar con la profundidad necesaria para la construcción de la noción de número real. La aplicación de estas tres primeras actividades didácticas propició un trabajo matemático en las tres génesis, que permitió determinar concepciones difusas e incoherentes que tienen los estudiantes y con las cuales, como dice Artigue (2001), hay que enfrentarlos para generar un conflicto cognitivo y de esta manera intentar sobrepasar.

De acuerdo con la metodología de enseñanza que se tiene contemplada para estos experimentos educativos, las concepciones identificadas en las actividades didácticas, corresponden al punto de partida para la discusión grupal.

Como perspectiva de esta investigación, está el rediseño de las actividades didácticas en base a los resultados aquí obtenidos, así como la propuesta del rediseño de programas de estudios con un enfoque específico para la enseñanza de número real. Es decir, más que enfocarse primordialmente en la enseñanza de las operaciones con los números reales, se debe ir en la dirección de procurar la enseñanza de las propiedades discreto-denso-continuo.

AGRADECIMIENTOS

El diseño de las actividades didácticas y estudio de los diferentes enfoques para la enseñanza de número real se desarrolló en el marco de una estancia sabática dentro del grupo de trabajo de Espacio de Trabajo Matemático del Laboratorio de Didáctica André Revuz, de la Universidad de París Diderot y hace parte del Proyecto de Enseñanza del Cálculo que se desarrolla en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México desde 2006 con estudiantes de ingeniería y que desde sus inicios hasta el 2020 contó con la colaboración del Dr. François Pluvinage† (a su memoria).

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. What can we learn from educational research at the university level? In BERGÉ A.; SESSA C. Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**. Vol.6, (3), p.163-197, 2003.

BERGÉ, A. **Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria**. 2004. Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires, Argentina.

BLOCH, I. Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x*, n° 106. 65-77. 2018

BORBÓN, A. **Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial**. México: Cinvestav-IPN. Tesis de maestría, 2003.

BRONNER A. Vers la recherche d'un milieu perdu pour l'apprentissage des nombres réels au collège: racine carrée et idécimalité. En SALIN, M. CLANCHE, P. y SARRAZY, B (Edits.), **Sur la théorie des situations didactiques**. París, Francia: La Pensée Sauvages Editions. 2005.

BRONNER, A. **Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carré**. 1997. Tesis doctoral no publicada. Grenoble, Francia: Universidad Joseph Fourier.

DURAND-GUERRIER, V. & VERGNAC, M. Les réels à la transition secondaire-supérieur du discret au continu – quelle élaboration ? Dans La réforme des programmes du lycée et alors? **Actes du colloque IREM**, 2013, p. 135-147.

DURAND-GUERRIER, V. & VIVIER, L. Densité de **D**, Complétude de **R** et analyse réelle – Première approche. **Acte First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM)**, Montpellier, France, 2016, p.143-152.

DURAND-GUERRIER, V. Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. **International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education**, 2, 2016, p. 338-361.

DUROUX, A. La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure. **Petit x**, 3, 1983. p. 43-67.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

HITT, F. Le caractère fonctionnel des représentations, **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 8, 2003. p. 255-271.

HITT, F. y QUIROZ, S. Formation et évolution des représentations fonctionnelles spontanées à travers un apprentissage socioculturel. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 24, 2019. p. 75-106.

KIDRON, I. Understanding irrational numbers by means of their representation as non-repeating decimals. **Acte First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM)**, Montpellier, France, 2016, p.73-82.

KUZNIAK, A., MONTOYA-DELGADILLO, E. Y VIVIER, L. La visualización en el análisis. En CUEVAS, C.; MARTÍNEZ, M. y CRUZ, R. (Eds), **Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes**, 2018. México: Pearson.

KUZNIAK, A., NECHACHE, A. Y RICHARD, P. The Theory of Mathematical Working Spaces in brief. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), *Mathematical work*

in educational context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces. Springer International Publishing. 2022. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>

KUZNIAK, A., TANGUAY, D., & ELIA, I. Mathematical working spaces in schooling: an introduction. **ZDM**, 48(6), p. 721-737. 2016.

LARIOS OSORIO, V., & GONZÁLEZ GONZÁLEZ, N. Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)**, 13(4-I), 2010. p. 147-160.

MONTOYA-DELGADILLO, E., VIVIER, L. Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, **ZDM**, 48(6), 2016. p. 739-754.

PÁEZ MURILLO, R. E., VIVIER, L., MARTÍNEZ OJEDA, E. Y TORRES MARTÍNEZ, C. A. Concepciones detectadas en estudiantes de primer semestre de universidad en relación al conjunto de números reales. En **Colloque La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michele Artigue**. París, Francia. Mayo 31 a junio 2 de 2012.

PÁEZ, R. **Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión**. México: Cinvestav-IPN. Tesis Doctoral, 2004

PÁEZ, R. y PLUVINAGE, F. Estudio de las asíntotas de una función en un ambiente con tecnología dinámica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 39(3), 2019. p. 331-369.

PÁEZ, R. y PLUVINAGE, F. Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, caso de las ramas infinitas de una función. **Sexto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático**. Valparaíso, Chile. Diciembre 13 al 18 de 2018.

PLUVINAGE, F. Deux questions sur les nombres réels soulevées par l'article de R. Duval. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 1, 1988. p. 27-31.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. **Aprendizajes Clave para la educación integral. Plan y programas de estudios para la educación básica**. México: SEP, 2017.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. **Recherches en didactique des mathématiques**, París, v. 6, n. 1, p. 5-67, 1985.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble : La Pensée Sauvage, 1991.

VIVIER, L. **Sur la route des réels, Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique**. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les Recherches (HDR), Université Paris Diderot. 2015.

Submetido em: 05 de septiembre de 2022.

Aprovado em: 01 de Novembro de 2022.

Publicado em: 08 de Dezembro de 2022.

Como citar:

PÁEZ, R; LARIOS, V. Un acercamiento hacia la enseñanza de números reales con estudiantes de primer año de ingeniería. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 17, n. 42, p. 193-210, Set.-Dez., 2022.

<https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p193-210.id457>